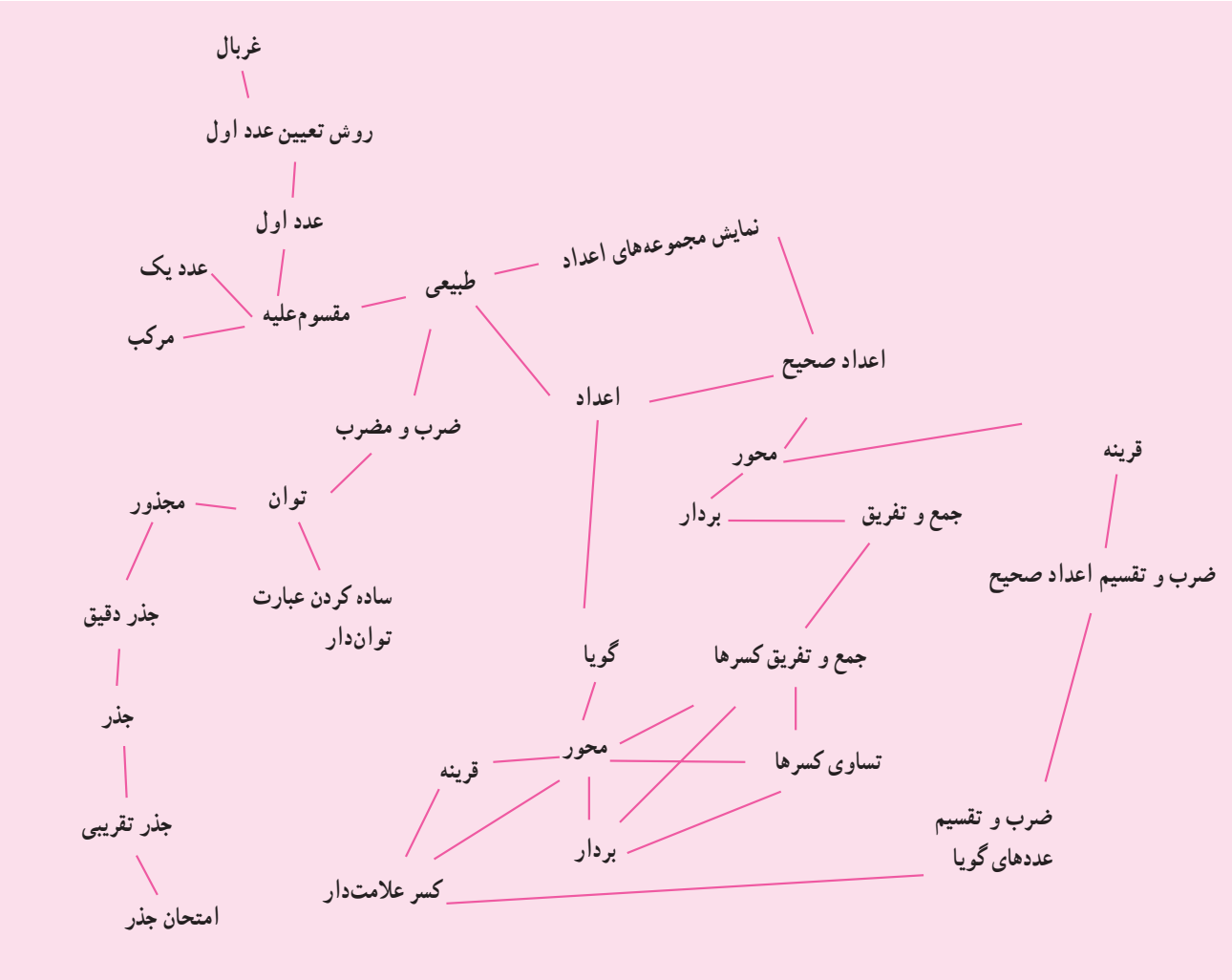
فصل اوّل

حساب و مجموعه‌های اعداد

این فصل ۴ درس اصلی را شامل می‌شود و عمده‌ی مطالب آن مربوط به سال‌های گذشته است. قسمت اول، مروری بر تعریف و نحوه‌ی تعیین و تشخیص عددهای اول و یادآوری درس توان کلاس دوم راهنمایی است. در قسمت بعد، ضمن یادآوری مطالب جذر کلاس دوم، شیوه‌ی کامل‌تر محاسبه‌ی جذر تقریبی آموزش داده می‌شود. در قسمت‌های مجموعه‌ی عددهای صحیح و گویا کلیه‌ی محاسبات، یادآوری مطالب کتاب‌های اول و دوم راهنمایی است. در قسمت عددهای صحیح، نحوه‌ی نمایش دادن مجموعه‌های عددهای صحیح به زبان ریاضی برای دانش‌آموزان تازگی دارد. همچنین، در این فصل کشیدن رسم ۱ گنجانده شده است. محتوا و مفاهیم این فصل، به‌صورت زیر با هم در ارتباط‌اند.



مهم‌ترین ارتباط مفاهیم فصل این است که در صورت تسلط به محاسبه‌های مربوط به عددهای صحیح، محاسبات اعداد گویا بسیار ساده خواهد شد. به این دو مثال توجه کنید :

جمع و تفریق عددهای صحیح

تفریق عددهای گویا $-\frac{۱}{۳}-\frac{-۱}{۲}=\frac{-۲+۳}{۶}=\frac{۱}{۶}$

ضرب عددهای گویا $-\frac{۵}{۳}\times ۱\frac{۱}{۲}=-(\frac{۵}{۳}\times\frac{۳}{۲})=$

محاسبه‌ی ضرب عددهای صحیح $-(\frac{۵\times ۳}{۳\times ۲})=-\frac{۵}{۲}$

همچنین، می‌توان به ارتباط بین جذر و توان اشاره کرد :

$$\sqrt{a}=a^{\frac{۱}{۲}}$$

به این‌ترتیب، می‌توان همه‌ی موارد مربوط به توان را به درس جذر تعمیم داد ؛ برای مثال، همان‌طورکه در ساده کردن توان‌ها برای جمع و تفریق قاعده‌ای نداریم، در مورد جذر هم همین‌طور است : $\sqrt{۴+۹}\neq\sqrt{۴}+\sqrt{۹}$

یا می‌توان موضوع جذر حاصل‌ضرب و تقسیم را به کمک توان توجیه کرد :

$$\sqrt{a\times b}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$$

قاعده‌ی ضرب با توان‌های ساده است. $(a\times b)^{\frac{۱}{۲}}=a^{\frac{۱}{۲}}\times b^{\frac{۱}{۲}}$

پیدا کردن سایر ارتباط‌ها را به معلمان محترم واگذار می‌کنیم.

زمان‌بندی

ماه مهر

هفته‌ی اوّل: درس‌های عددهای طبیعی، عدد اول و تعیین عددهای اول

هفته‌ی دوّم: درس حل مسئله و توان ــ یادآوری مفاهیم جذر

هفته‌ی سوّم: جذر تقریبی، جذر اعداد اعشاری و امتحان جذر ــ یادآوری مفاهیم عدد صحیح

هفته‌ی چهارم: نمایش مجموعه‌ی عددهای صحیح ــ جمع عددهای صحیح و تفریق عددهای صحیح

ماه آبان

هفته‌ی اول: رسم ۱ــ معرفی اعداد گویا، محور اعداد گویا، تساوی کسرها و کسر علامت‌دار

هفته‌ی دوم: جمع و تفریق عددهای گویا و ضرب و تقسیم عددهای گویا

زمان‌بندی بالا پیشنهادی است. فصل اول اهمیت زیادی دارد ؛ زیرا اگر دانش‌آموزان در ابتدای سال احساس موفقیت کنند، تا پایان سال ریاضی را با اعتماد به‌نفس خواهند آموخت.

با توجه به اهمیت این موضوع، سعی کنید مطالب را به‌گونه‌ای آموزش دهید و یادآوری کنید که مطمئن شوید همه‌ی دانش‌آموزان، موضوع موردنظر شما را یاد گرفته‌اند و احساس موفقیت می‌کنند.

نمونه‌ی سؤال برای مشخص کردن ارتباط‌ها

۱ــ مجموعه‌ها را با اعضا نمایش دهید.

$\{x|x\in N, -۲<x<۵\}$ $\{x|x\in N, x<\ \}$

۲ــ هریک از عبارت‌ها را پس از مخرج مشترک گرفتن، به جمع و تفریق اعداد صحیح تبدیل کنید.

$$-۱\frac{۱}{۳}-۲\frac{۱}{۲}+۴\frac{۱}{۶}=(-۱-۲+۴)+\frac{\quad}{۶}$$

$$۳\frac{۲}{۵}-۱\frac{۱}{۲}-۴\frac{۱}{۱۰}=(\qquad)+\frac{\quad}{\quad}$$

۳ــ با توجه به این‌که $۴^۵+۷^۵\neq(۴+۷)^۵$ است، توضیح دهید چرا نمی‌توان $\sqrt{۴+۹}$ را به $\sqrt{۴}+\sqrt{۹}$ تبدیل کرد.

۴ــ زیر عددهای صحیح خط بکشید.

$\sqrt{۹+۴}$ $\frac{\sqrt{۲۷}}{\sqrt{۱۲}}\times\frac{۲}{۳}$ $\frac{۴^۲\times ۴^۳}{(\frac{۱}{۲})^۵}$

$(\sqrt{۲})^۴$ $\sqrt{۲}\times\sqrt{۳}\times\sqrt{۶}$

مجموعه‌ی عددهای طبیعی

موضوعات در یک نگاه

محور اصلی این درس، عدد اول است. ابتدا با یادآوری اعداد طبیعی، مقسومٌ‌علیه، مضرب و عدد اول مجدداً تعریف می‌شود و نحوه‌ی پیدا کردن عددهای اول به روش غربال آموزش داده می‌شود ؛ پس از آن، درباره‌ی مسئله‌هایی که در آن‌ها کمیت‌ها، حاصل‌ضرب ثابت دارند، بحث می‌شود، این نوع مسئله‌ها با تناسب که در آن نسبت (حاصل تقسیم) کمیت‌ها ثابت است، مقایسه می‌شوند. در پایان، همه‌ی مطالب درس توان کلاس‌های اول و دوم راهنمایی مرور و یادآوری می‌شود.

اهداف

در فرایند آموزش این دروس، انتظار می‌رود هر دانش‌آموز به هدف‌های زیر برسد.

۱ــ مجموعه و محور اعداد طبیعی را بشناسد و عددهای طبیعی را تشخیص دهد.

۲ــ عدد اول را بشناسد و روش‌های مختلف تشخیص اعداد اول را به‌کار برد.

۳ــ روش غربال را در پیدا کردن عددهای اول در یک محدوده‌ی مشخص اعداد طبیعی به‌کار برد.

۴ــ عددهای طبیعی را به سه دسته تقسیم کند و تفاوت عددهای مرکب، اول و عدد یک را دریابد.

۵ــ مسئله‌هایی را که در آن‌ها حاصل‌ضرب کمیت‌ها مقدار ثابتی است، تشخیص دهد و آن‌ها را با تشکیل معادله حل کند.

۶ــ قواعد ساده کردن عبارت‌های توان‌دار را به‌کار برد.

نمونه‌ی سؤال برای ارزش‌یابی

۱ــ اگر عددهای ۱ تا ۱۰۰ را بنویسیم و روش غربال را به‌کار بریم، عدد ۳۰ با مضرب چه عددهایی خط می‌خورد؟ چرا؟ عدد ۴۹ چند بار خط می‌خورد؟ چرا؟ آیا عدد ۴۷ خط می‌خورد؟ چرا؟

۲ــ عبارت توان‌دار زیر را ساده کنید.

(**راهنمایی:** ابتدا همه‌ی عبارت‌ها را مانند مثال به پایه‌ی ۲ تبدیل کنید.)

$$\frac{۸^۴ \times ۴^۳}{۱۶^۲}$$

مثال: $۴^۳ = (۲^۲)^۳ = ۲^۶$

۳ــ ۸ نفر مشغول انجام دادن کاری هستند که قرار است ۶ روزه تمام شود. $\frac{۳}{۴}$ این تعداد، همین کار را چند روزه تمام می‌کنند؟

۴ــ کدام مضرب عدد ۱۱ مرکب نیست؟

۵ــ آیا این جمله درست است؟ «همه‌ی مضرب‌های یک، عدد مرکب‌اند.» چرا؟

شناسنامه‌ی مبحث مجموعه‌ی عددهای طبیعی

درس‌ها	صفحات	مفاهیم و محتوا	هدف‌ها	فعالیت‌ها	پیش‌بینی امکانات	واژگان
عددهای طبیعی	۱ ۲	بسته بودن عددهای طبیعی نسبت به جمع و ضرب	ــ مجموعه‌ی عددهای طبیعی و محور عددهای طبیعی را بشناسد. ــ عددهای طبیعی را تشخیص دهد. ــ درک کند که حاصل‌جمع و حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی، عددی طبیعی خواهد شد. ــ مقسوم‌علیه و مضرب عددها را به یاد آورد.	ــ مطالعه‌ی متن درس ــ انجام دادن کار در کلاس برای یادآوری عددهای طبیعی ــ انجام دادن فعالیت برای یادآوری مفهوم مقسومٌ‌علیه و مضرب	کتاب اول راهنمایی	عدد طبیعی Natural
عدد اول	۲ ۳	عدد اول عدد مرکب دسته‌بندی عددهای طبیعی تشخیص دادن عدد اول	ــ تعریف عدد اول را بداند و عددهای اول را تشخیص دهد. ــ راه‌های تشخیص عدد اول از جمله بخش‌پذیری و نوشتن عدد به حاصل‌ضرب عددهای طبیعی غیر از یک را به‌کار برد. ــ عددهای طبیعی را به سه دسته تقسیم کند و عددهای مرکب و اول را تشخیص دهد.	ــ انجام دادن کار در کلاس برای یادآوری مضرب و مقسومٌ‌علیه ــ مطالعه‌ی متن درس دسته‌بندی اعداد طبیعی ــ انجام دادن فعالیت برای درک ارتباط مضرب و عددهای مرکب ــ انجام دادن کار در کلاس برای تشخیص عددهای اول و یادآوری سایر مفاهیم	کتاب اول راهنمایی	مرکب اول
تعیین عددهای اوّل	۴ ۵ ۶ ۷	تعیین عدد اول روش غربال روش تقسیم کردن	ــ مراحل روش غربال را درک کند. ــ الگوریتم غربال را در پیدا کردن عددهای اول به‌کار برد. ــ الگوریتم‌های ساده را در یک فلوچارت دنبال کند. ــ روش تقسیم کردن برای تشخیص اول بودن یک عدد را درک کند و ضمن مقایسه‌ی آن با روش غربال، آن‌را به‌کار برد.	ــ انجام دادن فعالیت برای درک مراحل روش غربال ــ مطالعه‌ی متن درس روش غربال ــ انجام دادن کار در کلاس برای تمرین روش غربال ــ انجام دادن فعالیت برای درک روش تقسیم کردن برای تشخیص عددهای اول	نمونه‌هایی از فلوچارت	الگوریتم غربال اِراُتستن

درس‌ها	صفحات	مفاهیم و محتوا	هدف‌ها	فعالیت‌ها	پیش‌بینی امکانات	واژگان
حل مسئله	۷ ۸ ۹	مسئله با کمیت‌هایی که حاصل‌ضرب ثابت دارند.	ــ مسئله‌هایی را که در آن‌ها نسبت کمیت‌ها ثابت است، از مسئله‌هایی که در آن‌ها حاصل‌ضرب کمیت‌ها ثابت است، تشخیص دهد. ــ با تشکیل معادله، مسئله‌ای را با کمیت‌هایی که حاصل‌ضرب ثابت دارند، حل کند.	ــ مطالعه‌ی متن درس و حل مسئله ــ حل کردن مسئله‌های مربوط به آن	ــ	مقدارهای با حاصل‌ضرب ثابت
توان	۱۰ ۱۱ ۱۲	به توان رساندن یک پایه ساده کردن عبارت	ــ قواعد ساده کردن عبارت‌های توان‌دار با پایه‌ها و توان‌های مساوی را به یاد آورد و به‌صورت جبری نمایش دهد. ــ اگر یک پایه به چند توان برسد، آن را ساده کند. ــ قواعد بالا را در ساده کردن عبارت‌های توان‌دار به‌کار برد.	ــ مطالعه‌ی متن برای یادآوری درس توان ــ انجام دادن فعالیت برای درک قاعده‌ی یک پایه و چند توان ــ انجام دادن کار در کلاس برای تمرین قاعده‌های ساده کردن عبارت توان‌دار	کتاب دوم راهنمایی	برحسبِ

عدد طبیعی، عدد اول، توان

برخی از حیوان‌ها را هم می‌توان با «اندازه» و «مقدار» آشنا کرد ؛ برای مثال، پرندگانی هستند که می‌توانند،(البته با آموزش)، تفاوت توده‌ای را که شامل سه چیز است، با توده‌ای که شامل دو چیز است، تشخیص دهند ولی همین پرنده‌ها در مورد توده‌هایی که شامل شش و هفت چیز باشند، اشتباه می‌کنند. کودک هم در فاصله‌ی یک تا دو سالگی، تقریباً به همین‌گونه در شناخت مقدارها دچار تردید می‌شود. انسان نیز دوران «طفولیت» خود را به همین صورت گذرانده است. به قول «مارسل بل» در کتاب تاریخ ریاضیات : «... ساکنان جنگل‌های جنوب آفریقا، برای نامیدن عددها تنها سه نام دارند : یک، دو و «بسیار». می‌توان ثابت کرد که نیاکان کهن ما هم، بیش از این شایستگی نداشته‌اند.»

انسان در دوره‌ای دراز که به صدها هزار سال می‌رسد، توانست عددشماری را یاد بگیرد ولی هنوز هم در «ضرب‌المثل‌ها» یا اثرهای زبانی، مرز عددها باقی مانده است : هفت اختر (یعنی ستاره‌های بسیار) و هفت فلز (یعنی فلزهای بسیار). از لحاظ «زبانی» برای نمونه، واژه‌ی tre (به معنای بسیار» و tras (به معنای سه) در زبان فرانسوی باقی مانده است. ولی به‌تدریج، مرز شمار بالاتر رفت تا اقلیدس (سده‌ی سوم پیش از میلاد) بی‌پایان بودن عددهای اول را ثابت کرد.

عدد اول، به عددی گویند که جز بر خودش و بر واحد، بر هیچ عدد دیگری بخش‌پذیر نباشد. اثبات اقلیدس ساده است و با برهان خلف ثابت می‌شود. اگر فرض کنیم، بزرگ‌ترین عدد اول وجود داشته باشد و آن را p بنامیم، روشن است که عدد

$$A = ۱ \times ۲ \times ۳ \times \cdots p + ۱$$

بر p و هیچ‌کدام از عددهای کوچک‌تر از p بخش‌پذیر نیست ؛ بنابراین، عددی اول است. توجه کنید که این اثبات، ثابت نمی‌کند که هر عددی که به شکل A درست شود، عددی اول است بلکه تنها نشان می‌دهد که «اگر به‌فرض، بزرگ‌ترین عدد اول برابر p باشد، عدد A که بزرگ‌تر از p است، نیز عدد اول خواهد بود».

برای تعیین عددهای اول می‌توان از راهی استفاده کرد که به «غربالِ اراتوستن» معروف است (اراتوستن در سال‌های ۲۷۶ تا ۱۹۶ پیش از میلاد می‌زیست و چون در آخر زندگی کور شد، خود را از گرسنگی کشت). او ریاضی‌دان، اخترشناس و جغرافی‌دان بود و بیشتر عمرش را در اسکندریه گذراند. روش اراتوستن دشوار نیست. عددهای زوج را، به‌جز عدد ۲، نمی‌نویسیم. از ۳ آغاز می‌کنیم و همه‌ی عددهایی را که بر ۳ بخش‌پذیرند، حذف می‌کنیم. آن‌گاه، عدد بعدیِ اول ــ یعنی ۵ ــ را درنظر می‌گیریم و همه‌ی عددهایی را که به ۵ بخش‌پذیرند (به‌جز خود ۵)، خط می‌زنیم ؛ سپس، به عدد اول ۷ می‌پردازیم و مضرب‌های آن را ــ به‌جز خود ۷ ــ حذف می‌کنیم ؛ بعد، به‌مضرب‌های عدد ۱۱ می‌پردازیم و این کار را تا آخر ادامه می‌دهیم. اگر عددهایی را که حذف کرده‌ایم به‌حساب آوریم، برای نمونه مضرب‌های ۱۱ در هر ۱۱ عدد یک بار وجود دارد. به این ترتیب، عددهای اول خط نخورده باقی می‌مانند.

«پی‌یر فرما» (۱۶۶۵ــ۱۶۰۱) که ساعت‌های فراغت خود را به ریاضیات می‌پرداخت، تصور می‌کرد که عدد $F_n = ۲^{(۲^n)} + ۱$ به‌ازای هر عدد درست n، عددی اول به‌دست می‌دهد. ولی «لئونار اولر» درسال ۱۷۳۲ ثابت کرد که این عبارت به‌ازای $n = ۵$ عددی مرکب و بر ۶۴۱ بخش‌پذیر است.

بزرگ‌ترین عدد اولی که تا سال ۱۹۷۹ میلادی شناخته شده بود، عدد $۲^{۲۱۷۰۱} - ۱$ بود که تعداد رقم‌های آن به ۶۵۰۵۰ رقم می‌رسید. در بین عددهای اول، هنوز مسئله‌هایی وجود دارد که به آن‌ها پاسخ درست داده نشده است. یکی از این مسئله‌ها، مسئله‌ی گودباخ است. «کریستیان گودباخ» ریاضی‌دان آلمانی (۱۷۶۴ــ۱۶۹۰) در نامه‌ای به «لئونارد اولر» نوشت : «آیا این مطلب درست است که هر زوج بزرگ‌تر از ۲ را می‌توان به مجموع دو عدد اول تبدیل کرد؟» مسئله‌ی دیگر این است : آیا بین $n^۲$ و $(n+۱)^۲$ به‌ازای مقدارهای درست و مثبت n، همیشه یک عدد اول وجود دارد؟ مسئله‌ی سوم، مربوط به جفت‌های اول است. عددهای ۵ و۷، ۱۱و۱۳، ۱۷و۱۹ و غیر آن، عددهای فرد اول پشت سر هم‌اند. از این عددها برای نمونه دو عدد ۱۰۰۰۶۴۲۷ و ۱۰۰۰۶۴۲۹ هستند که هر دو عددهایی اول‌اند و یک جفت را

تشکیل می‌دهند. آیا تعداد جفت عددهای اول بی‌پایان است؟ بزرگ‌ترین جفت عددهای اولی که تا سال ۱۹۸۵ پیدا شده بود، عبارت بودند از :

۱۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۶۲ ± ۱

آیا با عددهای اول می‌توان یک تصاعد حسابی ساخت؟ این یک نمونه است :

۲۶۴ و ۲۶۳ و ۲۵۷ و ۲۵۱

که تصاعد حسابی است با ۴ جمله و قدرنسبت ۶. شرط مسئله این است که بین دو جمله‌ی متوالی تصاعد، عدد اول وجود نداشته باشد. اکنون پرسش این است : آیا تصاعدی با ۶ یا ۷ جمله یا بیش‌تر وجود دارد؟

در روزگار ما، چهار عمل حساب را جمع، تفریق، ضرب و تقسیم می‌دانند. تصور می‌رود که اصطلاح «عمل» از جبر وارد حساب شده باشد. وقتی درسال ۱۶۰۸ میلادی، «کلاویوس» در کتاب جبر خود عمل‌های جبری را Operation نامید، این واژه که به معنای عمل است، در حساب هم باب شد. پیش از آن، تعداد عمل‌های حساب را بیش‌تر از ۴ می‌دانستند و آن را حتّی تا ۹ عمل بالا می‌بردند، شمار، جمع، تفریق، نصف کردن، دو برابر کردن، ضرب، تقسیم، تصاعد و جذر گرفتن.

«رنه‌دکارت» (۱۶۵۰ــ۱۵۹۶)، فیلسوف، فیزیک‌دان و ریاضی‌دان فرانسوی، درسال ۱۶۳۷ میلادی توان را وارد علم ریاضی کرد و توان nام عددی مثل a را به‌صورت a^n نوشت.

معمول است (به‌ویژه در بین عوام) که ریاضی‌دان را با «حساب‌دان» اشتباه می‌گیرند و اغلب انتظار دارند، کسی که ریاضی می‌داند، در عمل‌های حساب اشتباه نکند ولی شهرت «هانری پوانکاره» (۱۸۹۱ــ۱۸۲۳) ریاضی‌دان معروف فرانسوی، در این بود که بد محاسبه می‌کرد. اینشتین در رستورانی در فرانسه، صورت حساب خود را اشتباه جمع زده بود و صندوق‌دار آن رستوران، به او گفت : «با این قدرت محاسبه‌ای که تو داری، چرا اینشتین نشدی؟».

یادداشت معلم

عددهای طبیعی

ایجاد انگیزه کنید:

می‌توانید کلاستان را با یک داستان که در آن به نیاز انسان‌ها به شمارش توجه شده است، آغاز کنید. در قدیم، چوپان‌ها برای شمارش گوسفندهایشان از سنگ‌ریزه استفاده می‌کردند. آن‌ها به‌ازای هر گوسفند که به چرا می‌بردند، یک سنگ‌ریزه داخل کیسه‌ای می‌ریختند و در بازگشت، به‌ازای هر گوسفند که به داخل آخور می‌رفت، یک سنگ‌ریزه را دور می‌ریختند. اگر سنگ‌ریزه‌ای داخل کیسه باقی می‌ماند، چه معنایی داشت؟ اگر سنگ‌ریزه کم می‌آمد، چه‌طور؟

شروع کنید:

مجموعه‌ی اعداد طبیعی : $\mathbb{N}=\{۱,۲,۳,۴,\cdots\}$ را روی تخته‌ی کلاس بنویسید و توضیح دهید که حرف $\mathbb{N}$ که برای نمایش این مجموعه به‌کار می‌رود، از کلمه‌ی انگلیسی Natural گرفته شده است. سپس، از دانش‌آموزان بخواهید چند عدد دیگر از این مجموعه و چند عدد را که عضو این مجموعه نیستند، نام ببرند. با توجه به این‌که مفاهیم این قسمت در سال‌های گذشته هم در کتاب‌های درسی بوده است، ممکن است دانش‌آموزان به‌راحتی بتوانند کار در کلاس را انجام دهند ؛ بنابراین، می‌توانید از آن‌ها بخواهید کار در کلاس را ابتدا به‌صورت فردی انجام دهند و سپس در گروه به بررسی پاسخ‌هایشان بپردازند. درصورتی که یادآوری علامت‌های $\in$ و $\notin$ را در کلاس لازم می‌دانید، این یادآوری را با ذکر یک مثال انجام دهید.

هدف کار در کلاس :

هدف یادآوری علامت عضو بودن و همچنین مجموعه‌ی اعداد طبیعی است. شما هم می‌توانید عبارت‌هایی مانند $\frac{۶}{۳}\in\mathbb{N}$ را به این «کار در کلاس» اضافه کنید.

ادامه دهید:

با چند مثال ضرب و جمع، اعداد طبیعی و مفاهیم مقسومٌ‌علیه و مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌ها را در کلاس یادآوری کنید. سپس از دانش‌آموزان بپرسید : آیا جمع هر دو عدد طبیعی، عددی طبیعی است؟ ضرب هر دو عدد طبیعی چه‌طور؟ درباره‌ی حاصل تفریق دو عدد طبیعی و حاصل تقسیم عددهای طبیعی نیز در کلاس گفت‌وگو کنید. مجموعه‌ی اعداد طبیعی نسبت به ضرب و جمع «بسته» است ؛ چون حاصل‌ضرب و حاصل‌جمع هر دو عدد طبیعی عددی طبیعی است امّا درباره‌ی تفریق و تقسیم این‌طور نیست ؛ مثلاً : $۶\div۱۲\notin\mathbb{N}$ $۷-۹\notin\mathbb{N}$. پس از بحث، از دانش‌آموزان بخواهید کار در کلاس را در گروه انجام دهند.

هدف کار در کلاس :

هدف این کار در کلاس یادآوری مفاهیم مقسومٌ‌علیه، مجموعه‌ی مقسومٌ‌علیه‌ها و روش به‌دست آوردن مجموعه‌ی مقسومٌ‌علیه‌های یک عدد است. این کار در کلاس پیش‌زمینه‌ی خوبی برای ورود به قسمت بعدی درس است، درحین پاسخ‌گویی به آن می‌توانید این نکته را نیز طرح کنید که اگر $A=a\times b\times c\times\cdots$ باشد و A، a، b، c و... اعدادی طبیعی باشند، ۱، a، b، c و

همچنین ab، bc، ac و... مقسومٌ‌علیه A هستند. البته A مقسومٌ‌علیه‌های دیگری هم دارد.

توسعه:

مطرح کردن سؤالات زیر برای درک بهتر مفاهیم این قسمت مفید است.

۱ــ $B = ۲ \times ۵ \times ۲۱$ و $A = ۲ \times ۳ \times ۵$: مجموعه‌ی مقسومٌ‌علیه‌های A و B را بنویسید.

۲ــ مجموعه‌هایی از اعداد پیدا کنید که نسبت به جمع و ضرب، بسته نباشند ؛ یعنی، حاصل‌جمع و حاصل‌ضرب برخی از عددهای آن، داخل مجموعه نباشد ؛ مانند : مجموعه‌ی $X = \{۱, ۲\}$.

فعّالیّت خارج از کلاس:

چرا به عددهای طبیعی، می‌گویند عددهای طبیعی؟ چرا آن‌ها را با $\mathbb{N}$ نمایش می‌دهند؟ یعنی چرا حرف N و چرا یک خط کنار آن؟ این دو سؤال می‌تواند عنوان تحقیق خارج از کلاس برخی دانش‌آموزان علاقه‌مند باشد.

تلفیق با سایر دروس:

کلمه‌ی طبیعی در چه ترکیبات دیگری در ادبیات فارسی به‌کار رفته است و چه متضادهایی دارد؟ این سؤال را می‌توانید در کلاس مطرح کنید و از دانش‌آموزان بخواهید با هم‌فکری دبیر ادبیاتشان به آن پاسخ دهند. البته قبل از مطرح کردن سؤال در کلاس، با دبیر ادبیات هماهنگ کنید.

فعالیت موازی:

می‌توانید به فعّالیّت‌های درس مقسومٌ‌علیه و مضرب در کلاس اوّل مراجعه کنید و برای یادآوری مفاهیم از آن‌ها یا ترکیب آن‌ها استفاده کنید.

کار در کلاس

عدد ۶ را به صورت ضرب دو عدد طبیعی بنویسید. همه‌ی حالت‌های ممکن را بنویسید. آن‌گاه با استفاده از آن، مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های عدد ۶ را بنویسید.

۱×۶ ، ۶×۱ {۱،۲،۳،۶}

۲×۳ ، ۳×۲

عدد اوّل

کار در کلاس

۱ــ عددهای زیر را به صورت ضرب دو عدد طبیعی بزرگ‌تر از یک بنویسید.

۱۴=۷×۲ ۴=۲×۲ ۵=نمی‌شود ۸=۴×۲ ۱۵=۵×۳

۵۱=۱۷×۳ ۴۹=۷×۷ ۱۰=۲×۵ ۹=۳×۳ ۷=نمی‌شود

۲ــ برای هر عدد، یک مقسوم‌علیه غیر از عدد یک و خود عدد بنویسید.

۱۴←۲ ۴←۲ ۵←ندارد ۸←۲ ۱۵←۳

۵۱←۱۷ ۴۹←۷ ۱۰←۵ ۹←۳ ۷←ندارد

اگر a و b اعدادی طبیعی باشند و c=a×b باشد، آن‌گاه c عددی طبیعی و هر یک از a و b یک مقسوم‌علیه c است. عدد ۱۵ را نیز می‌توان به صورت حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی ۳ و ۵ نوشت. عددهایی مانند ۶ و ۱۵ را که می‌توان به صورت حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱ نوشت، اعداد مرکب می‌نامیم. عددهای ۴، ۶، ۸، ۹، ۱۰، ۱۲ و ۱۴ اعداد مرکب‌اند.

عدد ۵ را می‌توان به صورت حاصل‌ضرب اعداد طبیعی بزرگ‌تر از ۱ نوشت. می‌دانید که ۵ عددی اوّل است. هر عدد اوّل غیر از خودش و ۱، مقسوم‌علیه دیگری ندارد. عددهای ۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱، ۱۳ و ... اعداد اوّل هستند.

عدد ۱ نه مرکب است و نه اوّل.

فعالیت

مجموعه‌ی مضرب‌های طبیعی عددهای زیر را بنویسید.

مجموعه‌ی مضرب‌های عدد ۲ = {۲،۴،۶،...}

مجموعه‌ی مضرب‌های عدد ۳ = {۳،۶،۹،۱۲،...}

آیا می‌توان گفت همه‌ی مضرب‌های یک عدد، مرکب‌اند؟ چرا؟ خیر. اگر عدد اوّل باشد، چون هر عدد مضرب خودش است، یک مضرب اوّل خواهد داشت.

حساب و مجموعه‌های اعداد

عدد اوّل

ایجاد انگیزه کنید:

از دانش‌آموزان بپرسید که با سه رنگ اصلی (اولیه) زرد، آبی و قرمز چند رنگ می‌توان ساخت. آیا رنگ حاصل از ترکیب یک واحد زرد، یک واحد آبی و دو واحد قرمز با رنگ حاصل از ترکیب یک واحد زرد، دو واحد آبی و یک واحد قرمز متفاوت است؟

هدف کار در کلاس :

این کار در کلاس آغازی برای یادآوری اعداد اول و اعداد مرکب است. این نکته که اعداد اوّل را نمی‌توان به‌صورت ضرب دو عدد طبیعی بزرگ‌تر از یک نوشت، به‌طور مستقیم از تعریف اعداد اول که تنها دو مقسومٌ‌علیه دارند (۱ و خودش) استنتاج می‌شود. درواقع، دو تمرین ارائه شده در این قسمت حول یک

کار در کلاس

۱ـ دور هر عدد مرکب یک خط بکشید و توضیح دهید که چگونه مرکب بودن آن را تشخیص دادید. ۸۳ ، ۵۷ ، ۱۳ ، ۹ ، ۱۷ ، ۲۳ ، ۱ ، ۳۵ ، ۶ ، ۲۴ ، ۴۳

آیا اعدادی که دور آن‌ها خط نکشیده‌اید، لزوماً جزء اعداد اول هستند و نه مرکب؟

۲ـ درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید. علت نادرستی گزاره‌ها را بنویسید.

الف ـ ۴۹ عددی اول است. ۷×۷=۴۹

ب ـ غیر از ۲، هیچ مضرب ۲ اول نیست.

پ ـ ۳ یک مضروب‌علیه اول ۱۲ است.

ت ـ هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱، حداقل یک مضروب‌علیه اول دارد.

ث ـ تنها مضروب‌علیه اول ۵، خود ۵ است.

ج ـ ۲۳ عددی اول است.

چ ـ ۲۷ عددی اول است. ۲۷=۳×۹

ح ـ تنها مضرب اول ۳، خود ۳ است.

۳ـ پنج عدد مرکب بزرگ‌تر از ۲۰ بنویسید. پاسخ‌های ممکنی وجود دارد، مثلاً ۳۰،۴۰،۵۰،۶۰،۷۰

۴ـ مجموعه‌ی مضروب‌علیه‌های ۱۲ را بنویسید. {۱،۲،۳،۴،۶،۱۲}

مجموعه‌ی مضروب‌علیه‌های ۱۳ را بنویسید. {۱،۱۳}

آیا می‌توان گفت که هر عدد اول دقیقاً دو مضروب‌علیه دارد؟ بله

۵ـ در جدول زیر، همه‌ی عددهای مرکب و عدد ۱ را خط بزنید.

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰

آیا همه‌ی عددهای باقی‌مانده اول‌اند؟ بله

مفهوم و با هم مرتبط‌اند.

شروع کنید:

از دانش‌آموزان بخواهید کار در کلاس را ابتدا به‌صورت فردی حل کنند ؛ سپس، در کلاس به بررسی پاسخ‌ها بپردازید. برخی از عددهای تمرین ۲ بیش از یک جواب دارند. هنگام بررسی پاسخ‌ها در کلاس، می‌توانید اجازه دهید که همه‌ی پاسخ‌های درست مطرح شوند. سپس، با استفاده از متن کتاب، اعداد مرکب و اعداد اول را به دانش‌آموزان معرفی کنید و از آن‌ها بخواهید چند مثال از اعداد اول و چند مثال از اعداد مرکب در کلاس ارائه کنند.

اشتباهات رایج دانش‌آموزان:

بر این نکته که عدد ۱ طبق تعریف، عدد اول نیست، در کلاس تأکید کنید.

بپرسید!

سؤال‌های زیر را در کلاس مطرح کنید.

آیا دو مجموعه‌ی i و c اشتراک دارند؟

$۱ \overset{?}{\in} i$ مجموعه‌ی اعداد اول =i $\quad ۱ \overset{?}{\in} c$

$-۲ \overset{?}{\in} i$ مجموعه‌ی اعداد مرکب =c $\quad -۳ \overset{?}{\in} i$

آیا اجتماع i و c برابر مجموعه‌ی اعداد طبیعی است؟

توصیه‌های آموزشی:

به این نکته که مجموعه‌ی اعداد اول و مجموعه‌ی اعداد مرکب زیر مجموعه‌ی اعداد طبیعی هستند، توجه کنید.

هدف فعالیت:

در یک نگاه سطحی، چنین به‌نظر می‌رسد که همه‌ی مضرب‌های یک عدد، مرکب‌اند! هدف این فعالیت، تشخیص این واقعیت توسط دانش‌آموزان است که اگر عددی اول باشد، اولین مضرب طبیعی آن که خود آن عدد است، عددی اول است نه مرکب.

ادامه دهید:

از گروه‌ها بخواهید به سؤالات مطرح شده در فعالیت پاسخ گویند. به آن‌ها فرصت دهید که پاسخ سؤال دوم را در چند جمله در کلاس توضیح دهند. سپس، دانش‌آموزان را به حل کردن کار در کلاس دعوت کنید و از آن‌ها بخواهید پس از این کار، پاسخ‌هایشان را در گروه بررسی کنند و روی نقاط اختلاف، بیشتر دقت کنند تا به پاسخ درست دست یابند.

هدف کار در کلاس:

هدف سؤال ۱، تمرین تشخیص دادن اعداد اول از غیر اول و تأکید مجدد بر این نکته است که عدد ۱ نه اول است نه مرکب. در این تمرین، عدد ۵۷ که عددی است مرکب، ممکن است به اشتباه به‌عنوان عدد اوّل درنظر گرفته شود. نظر توافقی دانش‌آموزان هر گروه را درباره‌ی این عدد بررسی کنید.

هدف سؤال ۲، تمرین مطالب ارائه شده در این قسمت

است. مثال نقض برای اثبات نادرستی یک عبارت که یکی از روش‌های استدلال است، در این سؤال آمده است.

هدف سؤال ۳ و ۴ نیز تمرین مفاهیم ارائه شده در درس است. تمرین ۳ جواب‌های مختلفی دارد. هدف تمرین ۵ زمینه‌سازی برای روش غربال است.

توسعه:

تعاریف مختلف اعداد اوّل را در کلاس مطرح کنید و توضیح دهید که همه‌ی آن‌ها معادل یک‌دیگرند :

۱ــ اعداد طبیعی غیر از یک که فقط بر خودشان و ۱ بخش‌پذیرند.

۲ــ هر عدد طبیعی که مجموعه‌ی مقسومٌ‌علیه‌هایش دقیقاً دو عضو دارد.

۳ــ هر عدد طبیعی که نتوان آن‌را به‌صورت حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی بزرگ‌تر از یک نوشت.

استفاده از ابزار و تکنولوژی:

از دانش‌آموزان بخواهید به کمک ماشین‌حساب، کوچک‌ترین عدد اول چهار رقمی و پنج رقمی را پیدا کنند.

فعّالیّت خارج از کلاس:

جدول اعداد ۱ تا ۱۰۰ را روی مقوا بنویسند و عددهای اول را با یک رنگ، عددهای مرکب را با رنگی دیگر و عدد ۱ را نیز با رنگ دیگر مشخص کنند. در پایان نیز مقواها را در کلاس نصب کنند.

فعالیت موازی:

تعداد عددهای اول هر دسته‌ی ده‌تایی از اعداد ۱ تا ۱۰۰ را پیدا کرده و به کمک آن، جدول زیر را تکمیل کنید.

از این فعّالیّت چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ آیا می‌توانید الگوی منظمی پیدا کنید؟

تعیین عددهای اوّل

فعالیت

می‌خواهیم عددهای اوّل بین ۱ تا ۳۰۰ را تعیین کنیم. برای این کار، ابتدا عددهای ۱ تا ۳۰۰ را می‌نویسیم.

کافی است عددهای غیراوّل را خط زنیم تا عددهای اوّل (عددهایی که خط نمی‌خورند) باقی بمانند.

۱ــ آیا عدد یک اوّل است؟ چرا؟ خیر چون طبق تعریف اول نیست.

۲ــ کدام یک از مضرب‌های عدد ۲ مرکب‌اند؟ آن‌ها را خط زنید. همه مضرب‌ها غیر از خود ۲

۳ــ کدام یک از مضرب‌های عدد ۳ مرکب‌اند؟ آن‌ها را خط زنید. همه مضرب‌ها غیر از خود ۳

۴ــ کدام یک از مضرب‌های مرکب عدد ۳ قبلاً خط خورده بودند؟ آنهایی که مضرب ۲ هم هستند.

۵ــ اوّلین مضرب عدد ۳ که خط خورد، کدام عدد بود؟ ۹

۶ــ مضرب‌های عدد ۵ را نیز خط زنید.

۷ــ کدام یک از مضرب‌های عدد ۵ قبلاً خط خورده بود؟ آنهایی که مضرب ۲ یا ۳ بودند.

۸ــ اوّلین مضرب عدد ۵ که خط خورد، کدام عدد بود؟ ۲۵

۹ــ آیا مضربی از عددهای ۷، ۱۱، ۱۳، ۱۷ و ... باقی مانده است که باید آن را خط زنیم؟ خیر

۱۰ــ آیا لازم است مضارب عدد ۴ یا ۶ را خط بزنیم؟ چرا؟ چون در مضرب‌های ۲ خط خورده‌اند.

۱۱ــ خط زدن مضرب‌ها تا کجا ادامه می‌یابد؟ تا وقتی که عدد آخر در این مثال (۳۰۰) از مربع عدد اوّلی که مضاربش را خط می‌زنیم کوچک‌تر باشد.

می‌توانید این کار را طی مراحل زیر انجام دهید:

۱ــ عدد ۱ را خط زنید.

۲ــ مضرب‌های ۲ را، غیر از خود ۲، خط زنید.

۳ــ مضرب‌های ۳ را، غیر از خود ۳، خط زنید.

تعیین عددهای اوّل

ایجاد انگیزه کنید:

از دانش‌آموزان بپرسید : آیا همه‌ی اعداد فرد اوّل هستند؟ آیا می‌توان گفت اعداد فرد، یکی در میان اوّل‌اند؟ آیا برای یافتن اعداد اوّل در مجموعه‌ی اعداد طبیعی می‌توان روشی پیدا کرد؟

هدف فعالیت:

اگر بخواهیم اعداد اوّل را در زیرمجموعه‌ای از اعداد طبیعی بیابیم، با حذف اعداد غیر اوّل می‌توانیم این کار را

تعداد عددهای اوّل										
دسته‌ی اعداد	۱ تا ۱۰	۱۱ تا ۲۰	۲۱ تا ۳۰	۳۱ تا ۴۰	۴۱ تا ۵۰	۵۱ تا ۶۰	۶۱ تا ۷۰	۷۱ تا ۸۰	۸۱ تا ۹۰	۹۱ تا ۱۰۰

انجام دهیم. این فعّالیّت روش «غربال اراتستن» را برای یافتن اعداد اوّل بین ۱ و ۳۰ به‌صورت پله‌پله ارائه کرده است. همه‌ی سؤالات مطرح شده در این فعّالیّت، حاوی نکات آموزشی هستند. دانش‌آموزان پس از انجام دادن این فعالیت باید بدانند : ۱) همه‌ی مضرب‌های یک عدد اوّل ، غیر از خود آن، غیراوّل‌اند ؛ ۲) طی مراحل فعّالیّت، همیشه کوچک‌ترین عددی که مضاربش را خط نزده‌ایم، اول است ؛ ۳) برخی از مضرب‌های کوچک‌ترین عددی که مضاربش را خط نزده‌ایم، در جدول خط خورده‌اند. اولین عددی که باید خط بخورد، مربع عدد مذکور است ؛ ۴) کافی است عملیات را تا جایی ادامه دهیم که مربع عدد بعدی که می‌خواهیم مضاربش را خط بزنیم، از آخرین عدد جدول (که در این فعالیت برابر ۳۰ است) بزرگ‌تر باشد.

شروع کنید:

از دانش‌آموزان بخواهید فعّالیّت را به‌صورت گروهی آغاز کنند. به آن‌ها توصیه کنید صورت فعّالیّت را چند بار بخوانند و به سؤال‌ها با دقت پاسخ گویند. می‌توانید بخش‌پذیری بر ۲، ۳ و ۵ را پیش از آغاز فعالیت در کلاس یادآوری کنید.

هریک از سؤالات مطرح شده در این فعّالیّت دارای نکات آموزشی است. در حین انجام دادن فعّالیّت، دانش‌آموزان را هدایت کنید تا پاسخ صحیح هر سؤال را کشف کنند و مراحل را با دقت انجام دهند. می‌توانید به آن‌ها پیشنهاد کنید در هر گروه خلاصه‌ای از مراحل اجرایی فعّالیّت تهیه کنند و با استفاده از آن بگویند که چگونه می‌توان اعداد اول بین ۱ و n را پیدا کرد. از آن‌ها بخواهید دلایل درستی الگوریتم را توضیح دهند. سپس، با استفاده از متن کتاب، شما نیز خلاصه‌ای از فعّالیّت را ارائه کنید و برای دانش‌آموزان توضیح دهید که این فعالیت الگوریتمی برای یافتن اعداد اول است ؛ یعنی، روشی به‌صورت پله‌پله که به غربال اراتستن معروف است. از دانش‌آموزان بخواهید، ابتدا به‌صورت فردی فعّالیّت کار در کلاس را انجام دهند و سپس، پاسخ‌هایشان را در گروه بررسی کنند.

هدف کار در کلاس :

هدف تمرین ۱، ارائه‌ی الگوریتم فعالیت قبل با استفاده از نمودار (فلوچارت) است. در این نمودار، پیکان‌ها حرکتی را که از هر مرحله به مرحله‌ی بعد صورت می‌گیرد، نشان می‌دهند. تبدیل یک الگوریتم به نمودار و به‌عکس می‌تواند برای دانش‌آموزان جالب باشد. هدف تمرین ۲، به‌کارگیری الگوریتم غربال و تمرین بیش‌تر روی آن است.

ادامه دهید:

از گروه‌ها بخواهید فعّالیّت بعدی را آغاز کنند. از آن‌ها بخواهید فعالیت را با دقت بخوانند و به سؤال‌های مطرح شده در آن پاسخ دهند.

هدف فعالیت:

هدف این فعّالیّت ارائه‌ی روش دیگری برای تعیین اوّل یا غیراوّل بودن یک عدد طبیعی است. دانش‌آموزان باید بتوانند این روش را با روش غربال مقایسه کنند. روش غربال همه‌ی اعداد

اول و غیراول را از عدد ۱ تا عدد موردنظر، تعیین می‌کند امّا در این روش تنها اوّل بودن یا نبودن عدد موردنظر تعیین می‌شود. در این روش، باید عدد موردنظر را به‌ترتیب به عددهای اوّلی که مربعشان از عدد موردنظر کوچک‌تر است، تقسیم کرد ؛ اگر به‌هیچ‌یک از آن‌ها بخش‌پذیر نبود، عددی اول است. البته از لحاظ مفهومی هر دو روش، مانند هم هستند.

بپرسید!

از دانش‌آموزان بپرسید برای تعیین این‌که ۱۰۱ اوّل است یا نه، به روش تقسیم، تا چه عددی باید تقسیم کنیم.

ادامه دهید:

از دانش‌آموزان بخواهید تمرین این قسمت را به‌عنوان تکلیف منزل حل کنند و در جلسه‌ی بعد، به بررسی پاسخ‌ها بپردازید.

توصیه‌های آموزشی:

در میان تمرین‌های این قسمت، تمرین ۵ را می‌توان با دو روش غربال و تقسیم حل کرد. اجازه دهید حل این تمرین به هر دو روش در کلاس مطرح شود.

توسعه:

مجموعه‌ی اعداد اوّل را می‌توان به‌صورت یک مجموعه ($\{۲,۳,۵,۷,\cdots\}$) نمایش داد. درباره‌ی این‌که این مجموعه نامتناهی است، می‌توانید در کلاس گفت و گو کنید.

فعّالیّت خارج از کلاس:

از دانش‌آموزان بخواهید برای محاسبات دیگری مانند روش تقسیم برای تعیین اوّل بودن یک عدد، تعیین ب.م.م، ک.م.م و یا جذر دقیق، الگوریتم بنویسند و فلوچارت بکشند. این فعالیت سبب رشد مهارت دانش‌آموزان در ارائه‌ی یک روش خواهد شد.

استفاده از ابزار و تکنولوژی:

۱ــ از دانش‌آموزان بپرسید : در کدام روش ماشین‌حساب

۴ـ عددهای ۱ تا ۶۰ را در دفترتان بنویسید. اکنون با به کار بردن الگوریتم غربال، عددهای اوّل بین ۱ و ۶۰ را بدست آورید. عددهای بدست آمده در کار در کلاس، همچنین عددهای ۵۹، ۵۷، ۴۷، ۴۳، ۴۱

فعالیت

می‌خواهیم تعیین کنیم که آیا عدد ۴۳ اوّل است یا نه.
آیا ۴۳ مضرب ۲ است؟ خیر با چه قسمتی می‌توانید به این سؤال پاسخ دهید؟ ۴۳ | ۲ ، ۲۱ ، ۱
آیا ۴۳ مضرب ۳ است؟ خیر مضرب ۵ چطور؟ خیر مضرب ۷ چطور؟ خیر
اگر عددهای ۱ تا ۴۳ را بنویسید و الگوریتم غربال را به‌کار برید، آیا ۴۳ خط می‌خورد؟ خیر آیا ۴۳ عددی اوّل است؟ بله
توضیح دهید که چگونه با قسمت کردن می‌توان اوّل بودن یک عدد را تعیین کرد.
باید عدد را به ترتیب به عددهای اوّلی که مربعشان از عدد مورد نظر کوچکتر است قسمت کرد. اگر به یکی از آنها قابل قسمت بود، یعنی اوّل نیست امّا اگر بر هیچ یک بخش‌پذیر نبود، اوّل است.

تمرین

۱ـ مجموعه‌ی مضروب‌های ۴ را بنویسید. $\{۴,۸,۱۲,۱۶,۲۰,\cdots\}$
۲ـ پنج تا از مضرب‌های ۶ را بنویسید. پاسخ‌ها متفاوت است مثلاً ۶، ۱۲، ۱۸، ۲۴، ۳۰
۳ـ آیا ۷۷ عددی اوّل است؟ چرا؟ خیر ۷۷ = ۷ × ۱۱
۴ـ الگوریتم غربال را برای تعیین عددهای اوّل بین ۱ و ۱۰۰ به‌کار برید.
۵ـ آیا عدد ۹۷ اوّل است؟ چرا؟ ۹۷ را برای عددهای اوّل ۷، ۵، ۳، ۲ قسمت می‌کنیم چون تمام قسمت‌ها باقیمانده دارد پس عدد ۹۷ اوّل است.

بیش‌تر به‌کار می‌آید ؛ روش غربال یا تقسیم؟

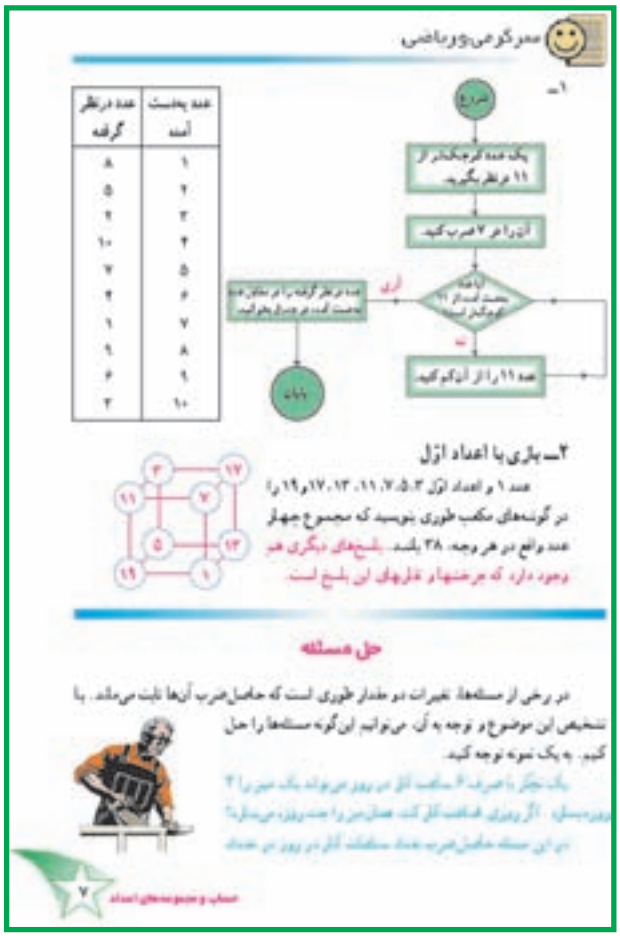
۲ــ با استفاده از الگوریتم غربال اراتستن و به کمک رایانه می‌توان برنامه‌ای برای تعیین اعداد اوّل نوشت. درصورتی که دانش‌آموزی داوطلب انجام دادن این کار شد، از او بخواهید عددهای اول کم‌تر از ۱۰۰۰۰ را چاپ کند و به کلاس بیاورد.

تلفیق با سایر دروس:

نوشتن الگوریتم و تهیه‌ی فلوچارت یک عملیات در برنامه‌نویسی رایانه‌ای بسیار مهم است. می‌توانید به کاربردهایی از آن اشاره کنید و درباره‌ی نقش ریاضی‌دانان در طراحی برنامه‌ها و نرم‌افزارهای رایانه‌ای توضیح دهید.

توصیه‌های آموزشی:

در قسمت سرگرمی ریاضی ۱، دانش‌آموزان باید بتوانند فلوچارت را دنبال کنند و کشف کنند که خروجی این فلوچارت با



توجه به هر ورودی، یکتاست.

در مراحل حل سرگرمی ریاضی ۲ «حدس و آزمایش» کاربرد دارد امّا مراحلی نیز در حل آن وجود دارد که به‌صورت منطقی می‌توان مراحل حدس و آزمایش را کوتاه‌تر کرد ؛ مثلاً این‌که مجموع ۱۹ و ۱۷ برابر ۳۶ است و اگر آن‌ها بر روی یک مربع باشند، دو عدد دیگر باید در مجموع برابر ۲ شوند و چون این امکان ندارد، پس ۱۷ و ۱۹ باید در دو طرف قطر اصلی مکعب طوری قرار بگیرند که با هم روی یک مربع نباشند.

حل مسئله

ایجاد انگیزه کنید:

یک مسئله مطرح کنید که کمیت‌های آن به‌ظاهر با هم متناسب باشند ولی دانش‌آموزان نباید ازتناسب استفاده کنند. برای مثال، می‌توانید مسئله‌ی زیر را مطرح کنید.

۲ نفر با یک ماشین مسیر تهران ــ قم را در ۱ ساعت طی می‌کنند. ۴ نفر با همان ماشین آن مسیر را در چند ساعت طی می‌کنند؟

شروع کنید:

راهبردهای حل مسئله را که دانش‌آموزان در سال‌های گذشته یاد گرفته‌اند، یادآوری کنید و توضیح دهید که چگونه از آن‌ها می‌توان استفاده کرد.

متن مسئله را روی تخته بنویسید و از دانش‌آموزان بخواهید به‌صورت گروهی درباره‌ی راه‌حل آن فکر کنند.

مشاهده کنید:

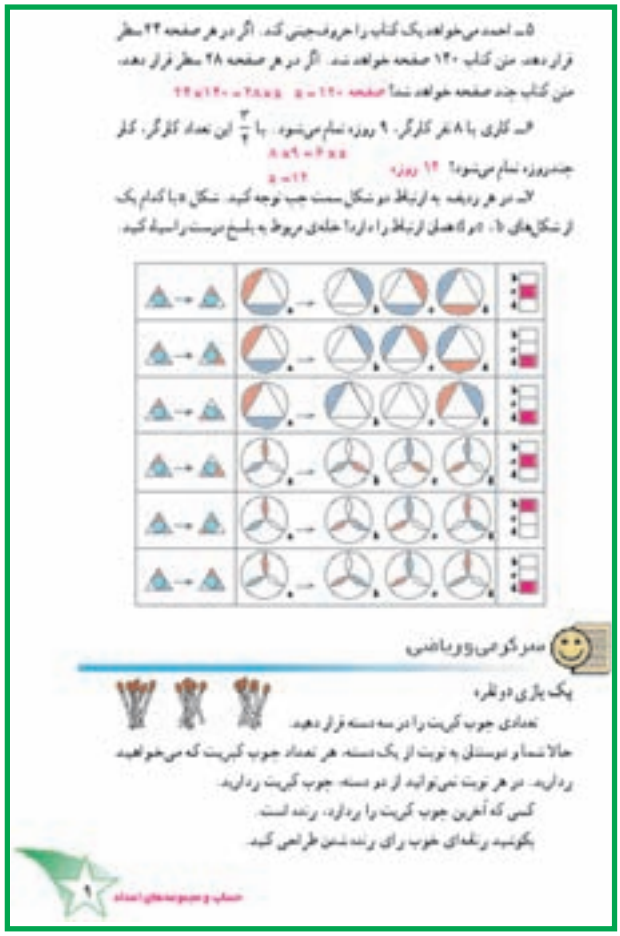
وقتی دانش‌آموزان به حل کردن مسئله مشغول‌اند، آن‌ها را زیر نظر بگیرید. کدام گروه‌ها از جدول تناسب استفاده می‌کنند؟ راهبردهای مختلفی را که گروه‌ها انتخاب کرده‌اند، مشاهده کنید.

هدایت کنید:

اگر گروه‌هایی در هنگام حل مسئله از جدول تناسب استفاده کرده‌اند، با طرح سؤال‌های مناسب آن‌ها را هدایت کنید ؛ برای مثال، بگویید اگر زمان بیش‌تری برای انجام دادن کاری درنظر بگیریم، آن کار زودتر تمام می‌شود یا دیرتر؟

ادامه دهید:

بعد از این‌که حل مسئله توسط دانش‌آموزان، توضیح دهید که گاهی نسبت کمیت‌ها ثابت می‌ماند که در این‌صورت از جدول تناسب و تساوی دو کسر استفاده می‌کنیم و گاهی حاصل‌ضرب در کمیت ثابت است. در ادامه، متن درس را به کمک دانش‌آموزان بخوانید و توضیح دهید.



سپس، از آن‌ها بخواهید مسئله‌های این قسمت را حل کنند.

توصیه‌های آموزشی:

از دانش‌آموزان بخواهید قبل از این‌که مسئله‌ای را حل کنند، درباره‌ی نوع آن تصمیم بگیرند ؛ آیا نسبت‌ها ثابت‌اند یا حاصل‌ضرب ثابت است؟ برای این کار بهتر است حدود جواب را حدس بزنیم. از آن‌ها بخواهید از راهبردهای رسم شکل و تشکیل معادله استفاده کنند.

اشتباهات رایج دانش‌آموزان:

مهم‌ترین اشتباه دانش‌آموزان، در تشخیص دادن نوع مسئله است. از آن‌ها بخواهید پس از حل مسئله، حتماً مرحله‌ی بازگشت به عقب را انجام دهند و درباره‌ی منطقی بودن پاسخ خود اطمینان حاصل کنند.

توسعه:

برای تکمیل این بخش می‌توانید از دو نوع مسئله‌ی زیر استفاده کنید :

۱ــ مسئله‌هایی که بیش‌تر از ۲ کمیت دارند ؛ مثلاً : اگر ۳ نفر کارگر روزی ۸ ساعت کار کنند، ۴ میز را در ۵ روز می‌سازند.

۲ــ مسئله‌ای چند قسمتی، برای مثال : پس از گذشت ۴ روز ۳ نفر کارگر کم می‌شوند. بقیه‌ی کار چند روزه تمام می‌شود؟

توان

عددهای توان‌دار و قواعد محاسبه با آن‌ها را در سال گذشته یاد گرفته‌اید. می‌دانید که مثلاً

$5^1 = 5$ $\quad 5^2 = 5 \times 5$ $\quad 5^3 = 5 \times 5 \times 5$

اینک، قواعد محاسبه با عددهای توان‌دار را با چند مثال یادآوری می‌کنیم.

الف ـ اگر a عددی دلخواه و m و n دو عدد طبیعی باشند:

$a^m \times a^n = a^{m+n}$ $\quad a^m \div a^n = a^{m-n}$ $\quad (a \neq 0)$

$a^5 \times a^2 = a^{5+2} = a^7$ $\quad a^5 \div a^2 = a^{5-2} = a^3$

ب ـ اگر a و b اعدادی دلخواه و m و n دو عدد طبیعی باشند:

$a^m \times b^m = (ab)^m$ $\quad a^m \div b^m = (\frac{a}{b})^m$ $\quad (b \neq 0)$

$a^5 \times b^5 = (ab)^5$ $\quad a^5 \div b^5 = (\frac{a}{b})^5$ $\quad (b \neq 0)$

فعالیت

تساوی‌ها را کامل کنید.

$(a^2)^3 = a^2 \times a^2 \times a^2 = a \times a \times a \times a \times a \times a = a^6$

$(b^3)^2 = b^3 \times b^3 = b \times b \times b \times b \times b \times b = b^6$

با توجه به تساوی‌های بالا، برای ساده کردن این عبارت‌ها قاعده‌ای بیان کنید.

$(a^m)^n = a^{m \times n}$

کار در کلاس

۱ـ حاصل عبارت‌های زیر را به‌صورت یک عدد توان‌دار بنویسید.

$5^2 \times 5^3$ ___ 5^5 $\quad (-2)^3 \times (-2)^5$ ___ $(-2)^8$ $\quad 7^2 \times 7$ ___ 7^3

$8^5 \div 8^2$ ___ 8^3 $\quad (-3)^4 \div (-3)^2$ ___ $(-3)^2$ $\quad 6^5 \div 6$ ___ 6^4

۲ـ حاصل عبارت‌های زیر را به‌صورت یک عدد توان‌دار بنویسید.

$9^2 \times 5^2$ ___ 45^2 $\quad (-3)^2 \times (-6)^2$ ___ 18^2 $\quad (0/5)^2 \times 4^2$ ___ 2^2

$99^2 \div 9^2$ ___ 11^2 $\quad 6^3 \div 12^3$ ___ $0/5^3$ $\quad (8/5)^2 \div 5^2$ ___ $(1/7)^2$

۳ـ عبارت‌های زیر را کامل کنید.

$2^6 = 4^3$ $\quad 8^5 = 2^{15}$ $\quad 49^2 = 7^4$

۲۰ مساحت و حجم‌های اعداد

توان

ایجاد انگیزه کنید:

می‌توانید کلاستان را با نمایش علمی برخی عددهای بزرگ شروع کنید؛ مثلاً درباره‌ی مقدار عدد آواگادرو در شیمی که برابر $6/02 \times 10^{23}$ است، از دانش‌آموزان سؤال کنید.

شروع کنید:

قاعده‌های ضرب و تقسیم اعداد توان‌دار با پایه‌های مساوی و ضرب و تقسیم اعداد توان‌دار با توان‌های مساوی را با استفاده از مثال‌های کتاب و در صورت لزوم با مثال‌های مشابه یادآوری کنید. می‌توانید مثال‌های عددی را در کلاس مطرح کنید و از دانش‌آموزان بخواهید قاعده‌ی کلی محاسبه را با کمک حروف به‌دست آورند. دانش‌آموزان باید این قواعد را به‌صورت دوطرفه بلد باشند؛ یعنی، هم $a^{m+n} = a^m \times a^n$ و هم $a^m \times a^n = a^{m+n}$.

بدین‌ترتیب، آنان آمادگی بیش‌تری برای انجام دادن فعالیت خواهند داشت. از گروه‌ها بخواهید فعالیت را آغاز کنند و قاعده‌ی خواسته شده را به صورت کلی و با کمک حروف بنویسند. درباره‌ی درستی قاعده‌ای که دانش‌آموزان به‌دست آورده‌اند در کلاس گفت‌وگو کنید.

بپرسید!

با طرح سؤالاتی مانند سؤال‌های زیر، کلاس را برای ادامه‌ی کار آماده‌تر کنید.

10^8 چند رقمی است؟

5×10^8 چند رقمی است؟

حاصل $2^{(2^3)}$ و $(2^2)^3$ را به‌دست آورید و مقایسه کنید.

هدف فعالیت:

هدف این فعّالیّت، یافتن قاعده‌ای برای ساده کردن عبارت توان‌داری است که پایه‌ی آن نیز توان‌دار است. این قاعده و عکس آن در موارد مختلفی برای ساده کردن عبارت‌های توان‌دار به‌کار می‌رود؛ مثلاً با استفاده از این قاعده می‌توان عبارت $8^{20} \times 2^{66}$ را ساده کرد:

$$(2^3)^{20} \times 2^{66} = 2^{60} \times 2^{66} = 2^{126}$$

ادامه دهید:

پس از این‌که دانش‌آموزان فعالیت را انجام دادند و قاعده‌ی مربوط به این فعالیت را یافتند، می‌توانید تساوی $(a^m)^n = (a^n)^m$ را روی تخته بنویسید و از دانش‌آموزان بخواهید نظریاتشان را درباره‌ی درستی یا نادرستی آن بیان کنند. اگر آن‌ها قاعده‌ی به‌دست آمده در فعالیت را به‌صورت کلی و با کمک حروف نوشته باشند، درمی‌یابند که چون $(a^m)^n = a^{mn}$ و $(a^n)^m = a^{nm}$ و $a^{mn} = a^{nm}$، پس تساوی مذکور درست است. از دانش‌آموزان بخواهید کار در کلاس را ابتدا به‌صورت فردی انجام دهند و سپس، به بررسی پاسخ‌هایشان در گروه بپردازند. انجام دادن تمرین و حل مسئله را نیز به‌عنوان تکلیف منزل به دانش‌آموزان توصیه کنید. از آن‌ها بخواهید به سرگرمی و ریاضی نیز بپردازند و بکوشند آن‌را حل کنند و

راه‌حلشان را در جلسه‌ی بعد در کلاس مطرح کنند.

هدف کار در کلاس:

کار در کلاس ۱ با هدف تمرین بیش‌تر قاعده‌ی ضرب و تقسیم اعداد توان‌دار با پایه‌های مساوی، کار در کلاس ۲ با هدف تمرین بیشتر قاعده‌ی ضرب و تقسیم اعداد توان‌دار با توان‌های مساوی و کار در کلاس ۳ با هدف کسب مهارت در ساده کردن عبارت‌های توان‌داری که پایه‌هایشان را می‌توان به‌صورت توان‌دار نوشت، مطرح شده‌اند. در کار در کلاس ۱ و ۲ برخی از پایه‌ها اعدادی منفی هستند. در این تمرین‌ها باید به علامت حاصل دقت کرد و درستی آن‌را بررسی نمود.

توصیه‌های آموزشی:

در تمرین ۳، دقت کنید که دانش‌آموزان با توان منفی آشنایی ندارند؛ بنابراین، مثلاً حاصل $\frac{۴^۳}{۴^۵}$ را باید به‌صورت $\frac{۱}{۴^۲}$ یا $(\frac{۱}{۴})^۲$ بنویسند.

از دانش‌آموزان بخواهید تمرین ۷ را با آنچه از مفهوم توان می‌دانند، حل کنند.

حل کردن این تمرین به دقت و تفکر نیاز دارد. درباره‌ی آن در کلاس گفت‌وگو کنید.

بر تمرین ۵ نیز در کلاس تأکید کنید؛ چون باید محاسبات جبری انجام شود.

در قسمت حل مسئله، مسئله‌ی ۲، مسئله‌ی تاریخی جالبی است. می‌توانید از دانش‌آموزان بخواهید به کمک ماشین‌حساب تعداد گندم‌ها را پیدا کنند. این تعداد با ماشین‌حساب‌های معمولی قابل محاسبه نیست! هدف این سؤال صرفاً تأکید بر رشد سریع توابع توانی است.

در قسمت سرگرمی ریاضی گرچه راهبرد غالب، حدس و آزمایش است امّا حدس‌ها را می‌توان جهت‌دار کرد؛ مثلاً از همان ابتدا با جمع زدن همه‌ی عددها ــ که برابر ۱۲۰ است ــ و محاسبه‌ی ۴×۳۴ ــ که برابر ۱۳۶ است ــ می‌توان فهمید که مجموع سه رأس مثلث برابر ۱۶ است. چون این رأس‌ها هرکدام دو بار به‌حساب آمده‌اند و چون یک رأس ۱۲ است،

تمرین

۱ـ حاصل عبارت‌های زیر را به‌صورت یک عدد توان‌دار بنویسید.

$۸^۲ \times ۸^۳ = ۸^۵$ $\quad ۷^۵ \times ۷^۶ = ۷^{۱۱}$ $\quad ۵^۲ \times ۵^۵ = ۵^۷$

$(۱/۷)^۲ \times (۱/۷)^۳ = (۱/۷)^۵$ $\quad (۰/۲۴)^۲ \times (۰/۲۴)^۴ = (۰/۲۴)^۶$ $\quad ۱۰^۵ \times ۱۰^۲ = ۱۰^۷$

$(\frac{۲}{۵})^۲ \times (\frac{۲}{۵})^۳ = (\frac{۲}{۵})^۵$ $\quad (۸/۲)^۲ \times (۸/۲)^۵ = (۸/۲)^۷$ $\quad (۵/۹)^۲ \times (۵/۹)^۳ = (۵/۹)^۵ = ۵^{۱۱}$

$(\frac{۲}{۷})^۵ \times (\frac{۲}{۷})^۳ = (\frac{۲}{۷})^۸$ $\quad (\frac{۳}{۴})^۲ \times (\frac{۳}{۴})^۴ = (\frac{۳}{۴})^۶$ $\quad (\frac{۳}{۵})^۲ \times (\frac{۳}{۵})^۹ = (\frac{۳}{۵})^{۱۱}$

۲ـ حاصل عبارت‌های زیر را به‌صورت یک عدد توان‌دار بنویسید.

$(۰/۱۲)^۵ \times ۹^۴ = (۰/۰۰۳)^۴$ $\quad ۹^۲ \times ۲۵^۲ = ۱۰۰^۲$ $\quad ۸۵^۲ \times ۱۷^۲ = ۵^۲$

$(۰/۲)^۲ \times (۰/۲)^۵ = (۰/۲)^۷$ $\quad (۰/۲)^۲ \times ۲^۲ = (۰/۲)^۲$ $\quad (۷/۹)^۲ \times (۷/۹)^۶ = ۸^۲$

$(\frac{۵}{۱۲})^۲ \times (\frac{۵}{۱۲})^۴ = (\frac{۱}{۲})^۶$ $\quad (۲/۵)^۴ \times (۰/۲)^۴ = ۱^۴ = ۱$ $\quad (\frac{۳}{۵})^۲ \times (\frac{۱}{۵})^۲ = ۳^۲$

۳ـ حاصل کسرهای زیر را به‌صورت یک عدد توان‌دار بنویسید.

$\frac{۲^۲}{۲^۳} = ۲^{-۱}$ $\quad \frac{۶^۵}{۶^۵} = ۶^۰$ $\quad \frac{۲^۳ \times ۲^۲}{۲^۲ \times ۲} = ۲^۳$

$\frac{۳^۲}{۳^۵} = (\frac{۱}{۳})^۳ = \frac{۱}{۳^۳}$ $\quad \frac{۳^۲}{۳^۵} = (\frac{۱}{۳})^۳ = \frac{۱}{۳^۳}$ $\quad \frac{۳^۵}{۳^۲} = ۳^۳$

۴ـ کسرهای زیر را ساده کنید.

$\frac{۳^۳ \times ۲^۲}{۲^۳ \times ۳^۵} = \frac{۲^۲}{۲^۳} = \frac{۱}{۲^۱}$ $\quad \frac{۵^۲ \times ۷^۲}{۵^۳ \times ۷^۲} = \frac{۵^۲}{۷}$ $\quad \frac{۲^۲ \times ۳^۵}{۲^۲ \times ۳^۲} = \frac{۲^۲}{۳^۲}$

۵ـ عبارت‌های زیر را به‌صورت عبارت‌های توان‌دار بنویسید.

$xy \times y^۲ = xy^۳$ $\quad (xy)^۲ \times x^۲ \times y^۲ = x^۴y^۴$

$x \times x^۲ = x^۳$ $\quad x \times x = x^۲$

۶ـ عبارت‌های زیر را ساده کنید و به صورت یک عدد توان‌دار بنویسید.

$۹^۵ \times ۲۷ = ۳^{۱۱}$ $\quad ۸^۲ \times ۷^۲ = ۷^۲$

۷ـ اگر $x = ۳^۵$ باشد، مقدار $۳^{x+۲}$ را برحسب x بنویسید. $۳^{x+۲} = ۳^۷ \times ۳^۲ = ۳^۹$

حساب و مدیریت مالی اعداد ۲۱

پس مجموع دو رأس دیگر ۴ است و یکی از آن‌ها ۱ و دیگری ۳ است.

اشتباهات رایج دانش‌آموزان:

تعیین علامت عبارت‌های توان‌دار، گاهی برخی از دانش‌آموزان را دچار اشتباه می‌کند. با ذکر چند مثال در کلاس احتمال بروز این اشتباهات را کاهش دهید؛ مثلاً از دانش‌آموزان بخواهید علامت حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورند.

$(-۲^۳)^۲ \quad -۲^۶ \quad -۲^۵ \quad (-۲)^۶ \quad (-۲)^۵$

$(-۲^۲)^۳ \quad \left((-۲)^۲\right)^۳ \quad -(۲^۲)^۳ \quad -(۲^۳)^۲ \quad \left((-۲)^۳\right)^۲$

توسعه:

می‌توانید درباره‌ی تساوی و نامساوی زیر در کلاس گفت‌وگو کنید.

$$a^m \div b^m = (\frac{a}{b})^m \qquad (a^m)^n \neq a^{m^n}$$

دقت کنید که $a^{m^n} = a^{(m^n)}$.

طرح سؤالاتی مانند سؤالات زیر مهارت دانش‌آموزان را در محاسبات توانی تقویت می‌کند :

$۸^{۱۰} \times ۲۵^{۱۴}$ چند رقمی است؟

فعّالیّت خارج از کلاس:

برخی از دانش‌آموزان علاقه‌مند را دعوت کنید تا فرمول‌های توانی را در علوم بیابند و در کلاس مثلاً به‌صورت پوستر مطرح کنند.

از دانش‌آموزان بخواهید اعداد توان‌دار مساوی را پیدا کنند ؛ مثلاً $۳^۸ = ۹^۴$. آیا می‌توانند هشت عدد توان‌دار را که همه با هم مساوی باشند، بیابند؟

استفاده از ابزار و تکنولوژی:

با کمک ماشین‌حساب اعداد مختلف را به توان‌های مختلف برسانید. از دانش‌آموزان بخواهید حالت‌هایی را پیدا کنند که حاصل عدد توان‌دار از پایه‌ی آن عدد کوچک‌تر باشد، مثلاً :

$(۰/۵)^۲ = ۰/۲۵$

$۷^{-۲} = ۰/۰۲$

تلفیق با سایر دروس:

مثال‌هایی از توان و عبارت‌های توانی در علوم وجود دارد ؛ مثلاً فرمول تکثیر سلولی توانی است یا معادله‌ی حرکت شتاب‌دار یا فرمول انرژی جنبشی و... .

یادداشت معلم

جذر

موضوعات در یک نگاه

این درس با یادآوری مفهوم جذر و رابطه‌ای آن با مجذور و روش جذرگیری کلاس دوم راهنمایی شروع می‌شود. پس از آن، روش جذرگیری کامل‌تر و در امتداد آن، روش کلاس دوم راهنمایی برای عددهای طبیعی آموزش داده می‌شود. در ادامه، روش جذرگیری برای عددهای اعشاری تعمیم می‌یابد و در پایان، چگونگی امتحان جذر و کسب اطمینان از درستی آن مطرح می‌شود.

اهداف

در فرایند آموزش این دروس، انتظار می‌رود هر دانش‌آموز به هدف‌های زیر برسد.

۱ــ مفهوم جذر و رابطه‌ی آن را با مجذور درک کند.

۲ــ مطالب مربوط به کلاس دوم راهنمایی در مورد جذر دقیق، جذر حاصل‌ضرب و تقسیم و جذر تقریبی را به یاد آورد.

۳ــ جذر هر عدد را با تقریب موردنظر محاسبه کند.

۴ــ جذر محاسبه شده را امتحان کند.

نمونه‌ی سؤال برای ارزش‌یابی

۱ــ حاصل جذرهای زیر را به‌دست آورید.

$\sqrt{\frac{۴۹\times ۳۶}{۲۵\times ۶۴}} =$ $\qquad$ $\sqrt{۳+۳\sqrt{۴}} =$

$\sqrt{۰}$ $\qquad$ $\sqrt{۱} =$ $\qquad$ $\sqrt{۰/۰۱} =$ $\qquad$ $\sqrt{۱۰۰۰۰} =$

۲ــ جذر زیر را با تقریب کمتر از ۰/۱ به‌دست آورید :

$\sqrt{۵/۳۷۱}$

۳ــ جذر عددی ۳/۹۰ و باقی‌مانده جذر ۰/۰۹ شده است. آن عدد را پیدا کنید.

یادداشت معلم

شناسنامه‌ی مبحث جذر

درس‌ها	صفحات	مفاهیم و محتوا	هدف‌ها	فعالیت‌ها	پیش‌بینی امکانات	واژگان
یادآوری	۱۳	جذر و مجذور جذر تقریبی و دقیق	ــ مفهوم جذر و رابطه‌ی آن با مجذور را درک کند. ــ جذر دقیق عددهای مربع کامل را به‌دست آورد. ــ جذر تقریبی عددها را به روش کلاس دوم به‌دست آورد.	ــ مطالعه متن در خصوص مفهوم جذر ــ انجام دادن کار در کلاس برای تمرین جذر دقیق و جذر تقریبی کلاس دوم	کتاب ریاضی دوم راهنمایی	جذر مجذور مربع کامل
جذر تقریبی	۱۴ ۱۵	جذر تقریبی	ــ روش جذرگیری را برای عددهای طبیعی به‌کار برد و باقی‌مانده را پیدا کند.	ــ مطالعه‌ی متن درس روش جذرگیری ــ انجام کار در کلاس برای تمرین روش ــ مطالعه‌ی متن و تکمیل آن ــ انجام دادن کار در کلاس برای تمرین جذرگیری	ــ	تعریف نقصانی جذر تقریبی باقی‌مانده‌ی جذر
جذر اعداد اعشاری	۱۶	جذر عددهای اعشاری پیشروی در جذر	ــ رابطه‌ی بین تعداد اعشارها را در یک عدد و جذر آن درک کند. ــ جذر عددهای اعشاری را محاسبه و در جذر پیشروی کند.	ــ انجام دادن فعالیت برای درک رابطه‌ی تعداد رقم‌های اعشاری در یک عدد و جذر آن ــ مطالعه‌ی متن درس روش جذرگیری ــ انجام دادن کار در کلاس برای تمرین روش	ــ	پیشروی در جذر
امتحان جذر	۱۷ ۱۸	امتحان جذر	ــ جذرهای محاسبه شده را امتحان کند. ــ تفاوت امتحان جذر عددهای طبیعی و اعداد اعشاری را درک کند.	ــ مطالعه‌ی متن درس روش امتحان جذر ــ انجام دادن کار در کلاس برای تمرین امتحان جذر و جذرگیری اعشاری	ــ	امتحان جذر

دانستنی‌هایی برای معلم

جذر یا ریشه‌ی دوم

نشانه‌ی $\sqrt{\ }$ را برای ریشه‌ی دوم «کریستف رودلف» در سال ۱۵۲۷ میلادی و نشانه‌ی $\sqrt[n]{\ }$ را «آلبرت ژیرار» ریاضی‌دان آلمانی که بیش‌تر عمرش را در هلند گذراند، درسال ۱۶۲۹ میلادی تعیین کردند. در آغاز برای ریشه‌ی دوم هم، عدد ۲ را در فرجه‌ی رادیکال می‌گذاشتند، ولی بعدها رادیکال بدون عدد در فرجه‌ی آن، به‌معنای ریشه‌ی دوم انتخاب شد.

باید گفت که جذر یا ریشه‌ی دوم عددهای مثبت دو پاسخ دارد ؛ برای نمونه، ریشه‌ی دوم، ۹ برابر است با ± ۳، ولی $\sqrt{۹}$ تنها یک پاسخ دارد : ۳. در عمل‌های حسابی یا جبری، وقتی با ریشه‌ی دوم روبه‌رو می‌شویم، باید حاصل رادیکال را، به‌شرط مثبت بودن مقدار زیر رادیکال، مثبت به‌حساب آوریم ؛ در واقع،

$$\sqrt{a^۲} = |a|$$

و اگر زیر رادیکال با فرجه‌ی ۲، منفی باشد، حاصل آن را **موهومی** می‌گیریم. اگر a را عددی منفی به‌حساب آوریم، آن‌وقت،

$$\sqrt{a} = i\sqrt{|a|}$$

که در آن $i = \sqrt{-۱}$ و $|a|$، یعنی قدرمطلق a.

ریشه‌ی دوم عددهای مثبت را در آغاز منجمان و ریاضی‌دانان ایرانی همچون «محمد گرجی» (وفات به‌ظاهر در ۴۲۰ هجری قمری)، با استفاده از ضرب‌های دوجمله‌ای به‌دست می‌آوردند. نویسندگان قدیمی حاصل ریشه‌ی دوم (و هم ریشه‌ی سوم) را، بی‌دلیل می‌آوردند و به ظاهر از جدول‌های توان دوم و توان سوم که در اختیار داشتند، استفاده می‌کردند.

یادداشت معلم

جذر

یادآوری

نمودارهای مقابل، رابطه‌ی بین جذر و مجذور را نشان می‌دهد. عددهایی مثل ۴، ۱۶، ۲۵ و ... را که جذر دقیق دارند، مجذور یا مربع کامل می‌نامند.

در سال گذشته، روش محاسبه‌ی جذر تقریبی اعداد را یاد گرفته‌اید؛ مثلاً، جذر ۹۵ تا یک رقم اعشار به صورت زیر بدست می‌آید.

۹۵ بین دو مجذور کامل ۸۱ و ۱۰۰ است؛ پس، جذر ۹۵ بین ۹ و ۱۰ است. با توجه به این مطلب، جذر ۹۵ به شکل زیر محاسبه می‌شود.

$95 = 81 + 14$

$\sqrt{95} = 9 + \frac{14}{2 \times 9} \longrightarrow \sqrt{95} = 9/7$

کار در کلاس

۱ـ نمودارهای زیر را کامل کنید.

۲ـ جذر هر یک از عددهای زیر را تا یک رقم اعشار حساب کنید.

$۴۲ = ۶ + \frac{۶}{۱۲} = ۶/۵$ $\quad$ $۶۸ = ۸ + \frac{۴}{۱۶} = ۸/۲$

$۸۰ = ۹ + \frac{۱}{۱۸} = ۸/۹$ $\quad$ $۲۷ = ۵ + \frac{۲}{۱۰} = ۵/۲$

۱۲

یادآوری

ایجاد انگیزه کنید:

از دانش‌آموزان بخواهید ضلع مربعی را به‌دست آورند که مساحت آن ۸۱ است. اگر مساحت مربع ۱۶ باشد، هر ضلع مربع چه‌قدر خواهد بود؟ اگر مساحت مربع ۱۷ باشد، هر ضلع مربع چه‌قدر خواهد بود؟

شروع کنید:

با بیان مسائل بالا، لزوم استفاده از جذر برای دانش‌آموزان روشن می‌شود و می‌توان جذر دقیق و جذر تقریبی سال گذشته را یادآوری کرد. بر کلمات جذر و مجذور و جذر دقیق و جذر تقریبی تأکید کنید. جذر تقریبی اعداد ۳۰ و ۸۰ و ۱۵ و... را که یک واحد کم‌تر از مجذور کامل‌اند، یادآوری کنید.

هدایت کنید:

از دانش‌آموزان بخواهید که در یک بحث دونفره، از یک‌دیگر درباره‌ی جذر و مجذور سؤال کنند؛ مثلاً: جذر ۱۶ چیست؟ مجذور ۹ چیست؟

ادامه دهید:

از دانش‌آموزان بخواهید که کار در کلاس صفحه‌ی ۱۳ را به‌طور انفرادی حل کنند.

بپرسید!

۱ـ از دانش‌آموزان بپرسید: جذر ۵۶ تقریباً چه‌قدر است؟ آیا جذر ۰/۳ می‌تواند ۱ و خرده‌ای باشد؟ آیا جذر ۱/۶ می‌تواند ۴ و خرده‌ای باشد؟

۲ـ علامت < = > بگذارید.

$\sqrt{۷} \bigcirc ۲/۵$ $\quad$ $\sqrt{۴} \bigcirc ۱۶$ $\quad$ $\sqrt{۱۶} \bigcirc ۴$

$\sqrt{۲۰} \bigcirc ۴/۵$ $\quad$ $\sqrt{۱۷} \bigcirc ۳/۵$

توصیه‌های آموزشی:

۱ـ از این‌که دانش‌آموزان حدود جذر یک عدد را می‌توانند تشخیص دهند، اطمینان حاصل کنید.

۲ـ در بخش ایجاد انگیزه کنید، از اعداد فرد استفاده کنید.

اشتباهات رایج دانش‌آموزان:

برای محاسبه‌ی جذر اعداد زوج مثلاً ۱۶، به جای استفاده از عدد تقریبی ۴، آن را نصف می‌کنند؛ و عدد ۸ را به‌عنوان تخمین اولیه درنظر می‌گیرند.

هدف کار در کلاس:

هدف، یادآوری روش جذر دقیق و جذر تقریبی درسال گذشته است.

فعالیت موازی:

دانش‌آموزی را انتخاب کنید از او بخواهید که درباره‌ی

جذر یا مجذور از یک دانش‌آموز دیگر سؤال کند. بعد از این‌که پاسخ سؤال داده شد، این دانش‌آموز، دانش‌آموز دیگری را انتخاب کند و این کار تا آخرین نفر کلاس ادامه یابد.

توسعه:

۱ــ عدد طبیعی a را چنان بیابید که حاصل عبارت $\sqrt{\sqrt{\sqrt{a}}}$ یک عدد طبیعی باشد. جواب : $a=1$ یک جواب است. از دانش‌آموزان بخواهید پاسخ‌های دیگری را بیابند. از آن‌ها بپرسید : آیا می‌توانید الگویی برای پاسخ ارائه دهید؟

۲ــ از دانش‌آموزان بخواهید با استفاده از مفهوم جذر، در ◯ علامت $<$ $=$ $>$ قرار دهند.

$\sqrt{۸۰}-\sqrt{۷۰}\bigcirc\sqrt{۷۰}-\sqrt{۶۰}\bigcirc\sqrt{۶۰}-\sqrt{۵۰}\bigcirc\sqrt{۵۰}-\sqrt{۴۰}$

۳ــ ۳ را ریشه‌ی دوم ۹ گوییم و ۳ را ریشه‌ی سوم ۲۷ و ۳ را ریشه‌ی چهارم ۸۱ ؛ زیرا

$۳^۲=۹$ و $۳^۳=۲۷$ و $۳^۴=۸۱$

ریشه‌ی دوم ۹ را به‌صورت $\sqrt{۹}$ و ریشه‌ی سوم ۲۷ را به‌صورت $\sqrt[۳]{۲۷}$ و ریشه‌ی چهارم ۸۱ را به‌صورت $\sqrt[۴]{۸۱}$ نمایش می‌دهیم.

۴ــ حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

۱) $\sqrt{(-۳)^۲}+۵\sqrt{۷^۲}=۳+۳۵=۳۸$

۲) $\sqrt{(-۱۸۶)^۲}+\sqrt{۱۸۰^۲}=۱۸۶+۱۸۰=۳۶۶$

۵ــ اگر $x^۲=۱۶$ باشد، مقدار x چه اعدادی می‌تواند باشد؟

جواب : $x=\pm\sqrt{۱۶}=\pm۴$

۶ــ با استفاده از قسمت ۴، می‌توان رادیکال‌های زیر را ساده کرد.

$\sqrt{۱۸}=\sqrt{۹\times۲}=۳\sqrt{۲}$

۷ــ می‌توان به دانش‌آموزان گفت که جمع و تفریق رادیکال‌ها مانند جمع و تفریق عبارت‌های جبری است ؛ یعنی، $\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۳}$ با هم جمع نمی‌شوند ولی $۲\sqrt{۲}+۲\sqrt{۲}=۳\sqrt{۳}$.

۸ــ $\sqrt{۲}\times\sqrt{۳}=\sqrt{۶}$ و $۵\sqrt{۲}\times۷\sqrt{۳}=۳۵\sqrt{۶}$

۹ــ حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

$\sqrt{۱۸}+۵\sqrt{۳}-\sqrt{۱۲}+\sqrt{۲}$

فعّالیّت خارج از کلاس:

از دانش‌آموزان بخواهید که :

۱ــ درباره‌ی کلمه‌های جذر و مجذور در ادبیات و ارتباط بین آن‌ها تحقیق کنند.

۲ــ نحوه‌ی استفاده از جذر و مجذور را در فرمول‌های شیمی و فیزیک بررسی کنند.

استفاده از ابزار و تکنولوژی:

می‌توانید یک الگوریتم ساده برای محاسبه‌ی جذر یک عدد با تقریب کم‌تر از ۰/۱ بنویسید و با برنامه‌ای مانند Basic آن را اجرا کنید.

تلفیق با سایر دروس:

۱ــ تلفیق با درس عربی: جذر و مجذور بر چه وزنی هستند؟ این وزن در ادبیات عرب نشانه‌ی چیست؟ معنی و ریشه‌ی کلمات را بیابید.

۲ــ در فیزیک و شیمی: در فرمول‌هایی مانند x ، $\frac{۱}{۲}gt^۲$ و ... برای یافتن t باید از جذر و برای یافتن x باید از مجذور استفاده کرد.

۳ــ در هندسه: برای محاسبه‌ی مساحت و حجم بعضی از اشکال از مجذور و با داشتن مساحت برای به‌دست آوردن اندازه‌ی بعضی از اجزاء شکل‌ها ازجذر استفاده می‌کنیم.

یادداشت معلم