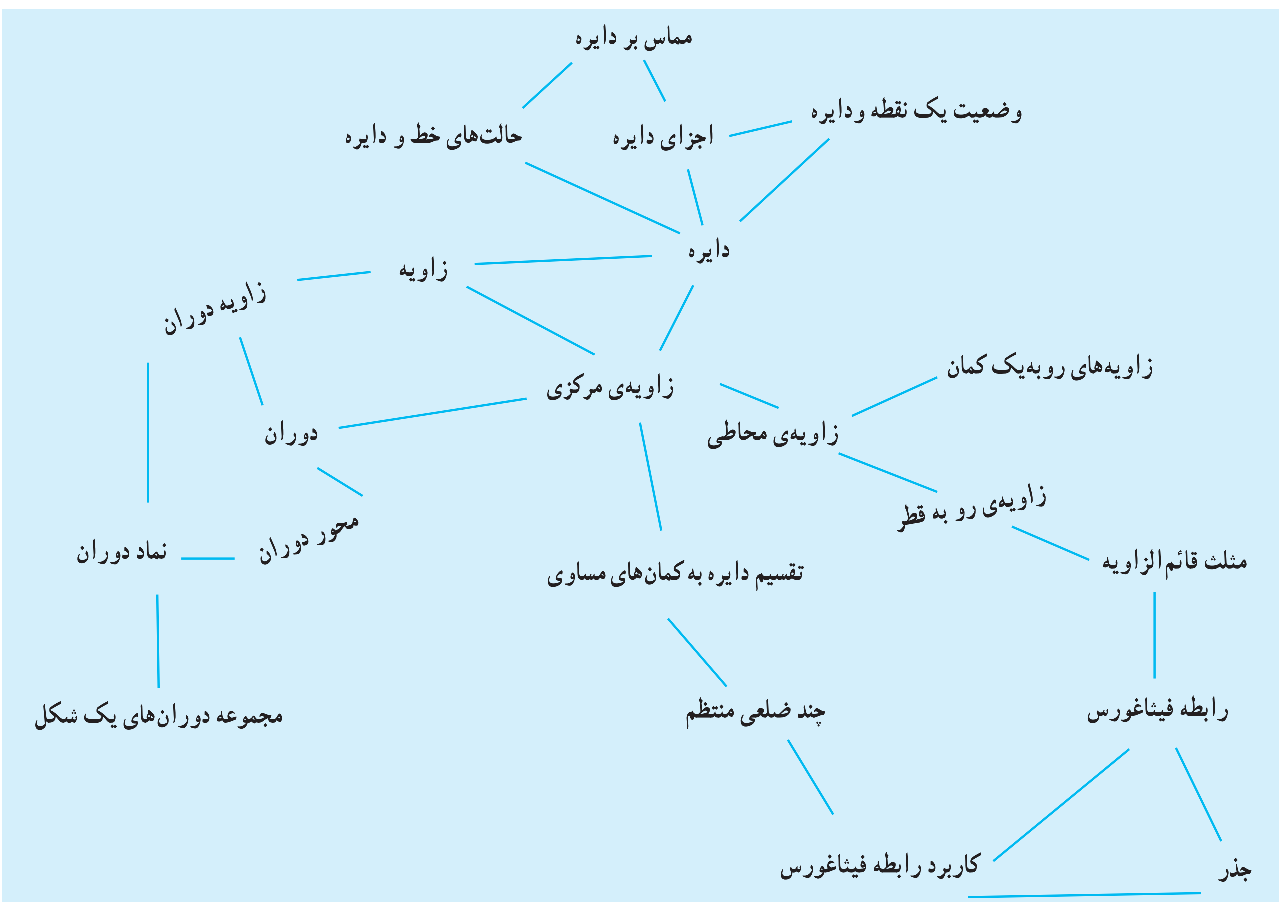
فصل سوم

هندسه‌ی ۱

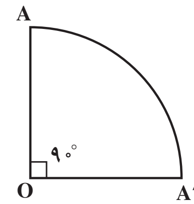
این فصل شامل سه موضوع اصلی است ؛ در قسمت اوّل با یادآوری ویژگی‌های دایره، موضوع زاویه‌ی مرکزی و محاطی و همچنین تقسیم یک دایره به کمان‌های مساوی و چندضلعی‌های آن مطرح می‌شود. قسمت دوم، به موضوع رابطه‌ی فیثاغورس و کاربرد آن می‌پردازد. درقسمت آخر نیز درس دوران و نمادهای مشخص کننده هر دوران مطرح می‌شود. عمده‌ی مطالب هر سه قسمت این فصل، برای دانش‌آموزان تازگی دارد ؛ بنابراین، باید در تدریس آن‌ها زمان کافی و حوصله‌ی لازم صرف شود. همچنین بخشی از این فصل به رسم‌ها اختصاص دارد و در پایان این فصل، تمرین‌های دوره‌ای ۱ برای یادآوری قسمت اول کتاب درسی و آمادگی برای امتحان میان سال در نظر گرفته شده است. مفاهیم و محتوای این فصل به‌صورت زیر با هم در ارتباط‌اند.



در این قسمت به دو ارتباط اشاره می‌شود. در کتاب درسی، ارتباط بین زاویه‌ی مرکزی و استفاده از رسم چندضلعی‌های منتظم به‌خوبی مطرح شده است. موضوع چندضلعی‌های منتظم را بدون بحث دایره هم می‌توان شروع کرد اما در کتاب، این رابطه به‌خوبی برقرار شده است.

موضوع دیگر، بحث دوران است. کتاب درسی صرفاً به تعریف و نمایش نمادهای دوران پرداخته است. دراین قسمت، مفهوم زاویه‌ی دوران را به خوبی می‌توان به زاویه‌ی مرکزی مربوط

کرد. به دوران نقطه‌ی A حول مرکز O توجه کنید ؛ نقطه‌ی A حول مرکز O به اندازه‌ی ۹۰درجه در جهت حرکت عقربه‌های ساعت دوران کرده است تا به نقطه‌ی A′ برسد. درواقع، زاویه‌ی مرکزی طی شده، یک زاویه‌ی مرکزی به اندازه‌ی °۹۰ است. همچنین، در محاسبه‌ی طول پاره‌خط مماس بر دایره از رابطه‌ی فیثاغورس استفاده می‌شود. به نمودار توجه کنید و سایر ارتباط‌ها را مشخص کنید.



زمان‌بندی

ماه آذر

هفته‌ی سوم: دایره، وضع یک خط و یک دایره نسبت به‌هم، زاویه‌ی مرکزی

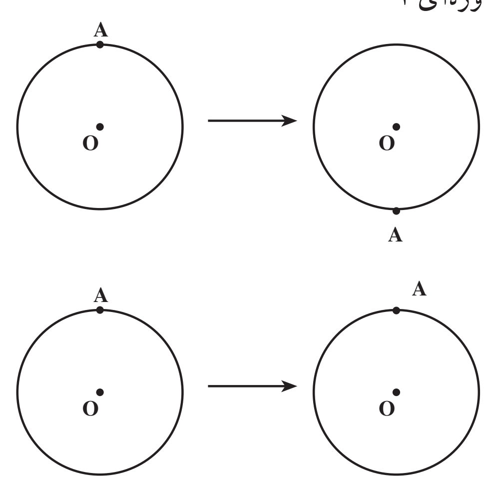
هفته‌ی چهارم: زاویه‌ی محاطی، تقسیم دایره به کمان‌های متساوی، چندضلعی‌های منتظم

ماه دی

هفته‌ی اول: پیدا کردن رابطه‌ی فیثاغورس و استفاده از آن

هفته‌ی دوم: نمادهای دوران، مجموعه‌ی دوران‌های یک شکل، رسم ۴

تمرین دوره‌ای ۱



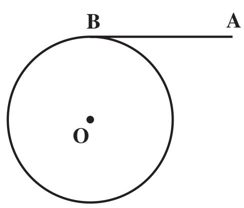
۳ــ زاویه‌ی رأس یک n ضلعی منتظم را پیدا کنید.

راهنمایی : دایره به n قسمت مساوی تقسیم شده و زاویه‌ی A روبه‌روی $n-2$ کمان قرار گرفته است.

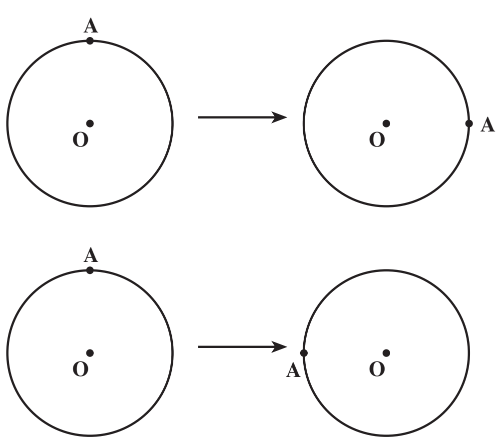
همان‌طور که مشاهده می‌کنید، آموزش دروس قسمت اوّل کتاب تا هفته‌ی دوم دی‌ماه به اتمام می‌رسد ؛ چرا که طبق آیین‌نامه، امتحانات میان سال در دو هفته‌ی آخر دی ماه برگزار می‌شود. البته برگزاری امتحانات میان سال به معنای تعطیل شدن آموزش نیست بلکه در این ایام، بیشتر به یادآوری و تمرین مطالب گذشته پرداخته می‌شود. همچنین، دانش‌آموزان با حل کردن تمرین‌های دوره‌ای برای امتحان آماده می‌شوند. در صورتی که دانش‌آموزان توانایی مناسبی داشته باشند، حل کردن تمرین‌های تکمیلی و خارج از کتاب نیز می‌تواند در دستور کار قرار گیرد.

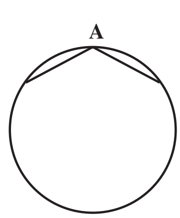
نمونه‌ی سؤال برای مشخص کردن ارتباط‌ها

۱ــ از نقطه‌ی A بر دایره، مماس رسم شده است. اگر شعاع دایره O و طول OA برابر α باشد، طول AB را پیدا کنید.



۲ــ نقطه‌ی A حول مرکز O دوران کرده است. با توجه به دوران انجام شده، اندازه‌ی زاویه‌ی مرکزی و نماد دوران را مشخص کنید.





زاویه و دایره

موضوعات در یک نگاه

این درس شامل درس‌ها و مفاهیم زیادی است که عمده‌ی موارد آن برای اولین بار مطرح شده است. در ابتدا، با یادآوری اجزا دایره، وضع یک نقطه و یک دایره و وضع یک خط و یک دایره بررسی می‌شود. سپس، موضوعات زاویه‌ی مرکزی و زاویه‌ی محاطی تدریس می‌شود. با استفاده از زاویه‌ی مرکزی، یک دایره را به قسمت‌های مساوی تقسیم می‌کنیم. با استفاده از همین موضوع، درس چند ضلعی‌های منتظم مطرح شده و زاویه‌ی رأس چندضلعی‌های منتظم محاسبه می‌شود.

اهداف

در پایان فرایند آموزش این درس، انتظار می‌رود هر دانش‌آموز به هدف‌های زیر برسد.

۱ــ تعریف دایره را بداند و اجزای آن را بشناسد.

۲ــ وضعیت یک نقطه و یک دایره را بررسی کند.

۳ــ وضعیت یک خط و یک دایره را بررسی کند.

۴ــ ویژگی‌های خط مماس بر دایره را درک کند و در حل مسئله‌ها به‌کار برد.

۵ ــ زاویه‌ی مرکزی را تشخیص دهد و بداند که زاویه‌ی مرکزی با کمان مقابل آن، برابر است.

۶ ــ زاویه‌ی محاطی را بشناسد و بداند که اندازه‌ی زاویه‌ی محاطی، نصف کمان روبه‌روست.

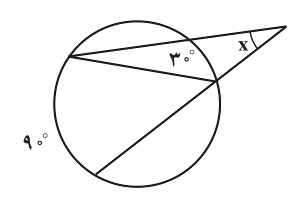
۷ــ با استفاده از زاویه‌ی مرکزی، دایره را به کمان‌های متساوی تقسیم کند.

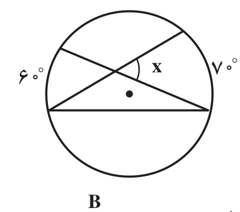
۸ ــ چندضلعی‌های منتظم را بشناسد و زاویه‌ی رأس را محاسبه کند.

۹ــ مفاهیم یاد شده را در پیدا کردن زاویه‌ی مجهول و حل مسئله‌ها به‌کار برد.

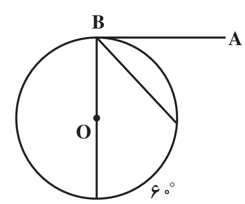
نمونه‌ی سؤال برای ارزش‌یابی

۱ــ در شکل‌های زیر، زاویه‌ی مجهول را پیدا کنید.

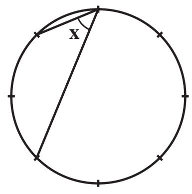




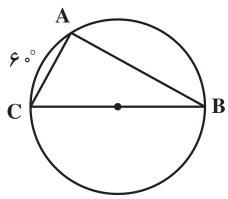
۲ــ با توجه به این که AB در نقطه‌ی B بر دایره مماس است، اندازه‌ی زاویه‌ی B_1 را پیدا کنید.



۳ــ با توجه به این که دایره به قسمت‌های مساوی تقسیم شده است، اندازه‌ی زاویه‌ی موردنظر را پیدا کنید.



۴ــ با توجه به شکل، اندازه و زاویه‌های B و C را پیدا کنید.



شناسنامه‌ی مبحث زاویه و دایره

درس‌ها	صفحات	مفاهیم و محتوا	هدف‌ها	فعالیت‌ها	پیش‌بینی امکانات	واژگان
دایره	۶۶ ۶۷	اجزای دایره وضع یک نقطه و یک دایره	ــ تعریف دایره را بداند و اجزای آن را بشناسد. ــ وضعیت یک نقطه و یک دایره را بررسی کند و روابط ریاضی مربوط به آن را بنویسد.	ــ مطالعه‌ی متن یادآوری تعریف واجزای دایره ــ انجام دادن کار درکلاس برای بررسی وضع نقطه و دایره	پرگار آموزشی	کمان وتر نظیر
وضع یک خط و یک دایره نسبت به هم	۶۷ ۶۸	وضع خط و دایره مماس بر دایره	ــ وضعیت یک خط و یک دایره را بررسی کند و روابط ریاضی مربوط به آن را بنویسد. ــ ویژگی خط مماس و عمود بودن شعاع بر خط مماس را نتیجه‌گیری کند. ــ ویژگی خط مماس را درحل مسائل به‌کار برد.	ــ مطالعه‌ی متن درباره‌ی وضع دایره و خط ــ انجام دادن فعالیت برای درک عمود بودن شعاع بر خط مماس ــ انجام دادن کار در کلاس برای تمرین ویژگی مماس	پرگار خط‌کش	مماس نقطه‌ی مشترک
زاویه‌ی مرکزی	۶۸ ۶۹ ۷۰ ۷۱	زاویه‌ی مرکزی	ــ تعریف زاویه‌ی مرکزی را بداند و آن را تشخیص دهد. ــ بداند که زاویه‌ی مرکزی برابر کمان روبه‌روی آن است. ــ کمان‌های نظیر وترهای مساوی با هم برابرند و وترهای نظیر کمان‌های متساوی نیز باهم برابرند. این دو قضیه را نتیجه‌گیری کند و در حل مسائل به کار برد.	ــ مطالعه‌ی متن درباره‌ی زاویه‌ی مرکزی ــ انجام دادن کار در کلاس برای تمرین نوشتن اندازه و زاویه‌ی مرکزی ــ انجام دادن فعالیت برای درک قضیه‌های کمان‌های مساوی و وترهای نظیر مساوی	پرگار خط‌کش نقاله	زاویه‌ی مرکزی
زاویه‌ی محاطی	۷۱ ۷۲ ۷۳	زاویه‌ی محاطی	ــ زاویه‌ی محاطی رابشناسد و تشخیص دهد. ــ نتیجه‌گیری کند که زاویه‌ی محاطی نصف کمان روبه‌روست. ــ قضیه‌ی فوق را در حل مسائل به‌کار برد. ــ زاویه‌های محاطی روبه‌رو به یک کمان و زاویه‌ی محاطی روبه‌رو به‌قطر را تشخیص دهد.	ــ انجام دادن فعالیت برای تشخیص زاویه‌ی محاطی ــ انجام کار درکلاس برای تشخیص زاویه محاطی و کمان روبه‌روی آن ــ انجام دادن فعالیت برای نتیجه‌گیری قضیه‌ی «زاویه‌ی محاطی نصف کمان روبه‌روست.» ــ انجام دادن کار در کلاس برای تمرین قضیه‌ی یاد شده	پرگار خط‌کش نقاله	زاویه‌ی محاطی زاویه‌های روبه‌رو به یک کمان

درس‌ها	صفحات	مفاهیم و محتوا	هدف‌ها	فعالیت‌ها	پیش‌بینی امکانات	واژگان
تقسیم دایره به کمان‌های متساوی	۷۳ ۷۴	تقسیم دایره به کمک زاویه‌ی مرکزی	ــ با استفاده از زاویه مرکزی، یک دایره را به قسمت‌های مساوی تقسیم کند.	ــ مطالعه‌ی متن و انجام دادن کارهای خواسته شده ــ انجام دادن کار در کلاس برای تقسیم دایره به کمان‌های مساوی	نقاله پرگار	کمان‌های متوالی
چندضلعی‌های منتظم	۷۴ ۷۵ ۷۶	چندضلعی منتظم	ــ چندضلعی منتظم را بشناسد و تشخیص دهد. ــ زاویه‌ی رأس چندضلعی منتظم را تشخیص دهد. ــ تمامی مفاهیم این درس را برای پیدا کردن زاویه‌های مجهول در مسائل به‌کار برد.	ــ مطالعه‌ی متن درباره‌ی چندضلعی‌ها و پاسخ به سؤال‌ها ــ انجام دادن کار در کلاس در مورد چندضلعی‌ها	نقاله پرگار	چندضلعی چندضلعی منتظم زاویه‌ی رأس

دایره

ایجاد انگیزه کنید:

از دانش‌آموزان بخواهید به محیط اطراف خود توجه کنند و درباره‌ی کاربرد دایره و اجسامی که در ساختن آن‌ها به‌گونه‌ای از دایره استفاده شده است، به بحث و گفت وگو بپردازند. مفهوم درون و بیرون و روی دایره را با مثال‌های جالب توضیح دهید ؛ مثلاً می‌توانید مطرح کنید که وقتی می‌خواهید یک لیوان چای بریزید، اگر چای را درون لیوان، روی لیوان و یا بیرون لیوان بریزید، چه اتفاقی می‌افتد. از دانش‌آموزان بخواهید درون، روی و بیرون بعضی از اجسام و اشکال انتخابی خود را مطرح کنند.

شروع کنید:

باتوجه به متن کتاب، مفهوم نقطه‌ی داخل دایره، نقطه‌ی روی دایره و نقطه‌ی خارج دایره و ارتباط بین فاصله‌ی نقطه تا مرکز دایره و شعاع دایره را برای دانش‌آموزان توضیح دهید.

کمان دایره و وتر دایره را توضیح داده و آن‌ها را روی شکل نشان دهید. از قطر دایره به عنوان بزرگ‌ترین وتر و از خود دایره به عنوان بزرگ‌ترین کمان دایره نام ببرید.

بپرسید!

۱ــ دو نقطه روی دایره انتخاب کرده‌ایم ؛ این دو نقطه چند وتر و چند کمان را نمایش می‌دهند؟ دانش‌آموزان پاسخ خواهند داد : یک وتر و دو کمان.

۲ــ نقطه‌ی A درون دایره‌ای به شعاع ۳ است ؛ طول OA را با شعاع دایره مقایسه کنید.

۳ــ نقطه‌ی A بیرون دایره‌ای به شعاع ۴ است ؛ طول OA را با شعاع دایره مقایسه کنید.

۴ــ در جای خالی، عبارت مناسب بنویسید.

الف) فاصله‌ی نقطه‌ی A تا مرکز دایره مساوی شعاع دایره است ؛ پس ....

ب) فاصله‌ی نقطه‌ی B تا مرکز دایره ازشعاع دایره کمتر است ؛ پس ....

پ) بزرگ‌ترین وتر دایره ....

توصیه‌های آموزشی:

۱ــ بر کلمات روی دایره، درون دایره و بیرون دایره تأکید کنید.

۲ــ یادآوری فاصله‌ی نقطه از نقطه ــ که در این جا فاصله‌ی نقطه از مرکز دایره است ــ ضروری به‌نظر می‌رسد. روی جملات فوق که در کار در کلاس آمده است، توضیح لازم را بدهید.

۳ــ وتر AB، نباید به صورت $\overline{AB}$ نوشته شود ؛ زیرا مفهوم آن عوض خواهد شد.

اشتباهات رایج دانش‌آموزان:

مفهوم جمله‌ی «مقایسه‌ی فاصله‌ی نقطه از مرکز دایره با شعاع دایره» کمی برای دانش‌آموزان مشکل برانگیز است.

هدف کار در کلاس:

دانش‌آموزان در تمرین ۱، مطلب توضیح داده شده در درس را تمرین می‌کنند و درتمرین ۲ درمی‌یابند که علت تساوی دو دایره، در واقع تساوی شعاع‌های آن‌هاست.

فعالیت موازی:

دایره‌ای به شعاع ۲cm رسم کنید. نقاط A، B و C را درون‌دایره، نقاط E، F و G را روی دایره و نقاط M، N و P را بیرون آن درنظر بگیرید.

طول OA، OBو OG را اندازه بگیرید و با شعاع دایره مقایسه کنید.

طول OE، OF و OG را اندازه بگیرید و با شعاع دایره مقایسه کنید.

طول PM، ON و OP را اندازه بگیرید و با شعاع دایره مقایسه کنید.

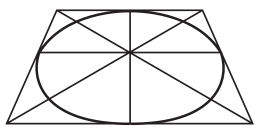
از فعّالیّت بالا چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ فرضیه‌ی خود را با جمله‌های مناسب بیان کنید.

توسعه:

تأکید بر مفهوم دایره به کمک مفهوم مکان هندسی : دایره مکان هندسی نقاطی است که از یک نقطه‌ی ثابت (مرکز دایره) مقدار ثابتی (شعاع دایره) است.

فعّالیّت خارج از کلاس:

۱ــ تحقیق کنید که یک دایره را در پرسپکتیو چگونه می‌توان رسم کرد.



۲ــ دانش‌آموزان را به بیرون از کلاس ببرید و از آن‌ها بخواهید با یک پارچ آب در کف حیاط دایره رسم کنند و نقاط داخل، رو و بیرون آن را نشان دهند. از این روش می‌توانید برای ایجاد انگیزه نیز استفاده کنید.

استفاده از ابزار و تکنولوژی:

دانش‌آموزان می‌توانند با استفاده از یک نرم افزار نقاشی یا حتی word، و رسم کردن دایره‌های مختلف، شکل‌های زیبا بکشند.

تلفیق با سایر دروس:

دانش‌آموزان می‌توانند به کمک دایره، شکل‌های زیبا خلق کنند.

یادداشت معلم

وضع یک خط و یک دایره نسبت به هم

ایجاد انگیزه کنید:

از دانش‌آموزان بخواهید که درباره‌ی همه‌ی حالت‌هایی که یک خط می‌تواند با دایره داشته باشد، فکر کنند و در این مورد به گفت‌وگو بپردازند.

شروع کنید:

شکل‌های صفحه‌ی ۶۷ کتاب را روی تخته‌ی کلاس رسم کنید و آن‌ها را توضیح دهید.

هدف فعالیت:

دانش‌آموزان با انجام دادن فعالیت پی می‌برند که شعاع در نقطه‌ی تماس، بر خط مماس عمود است.

آموزش دهید:

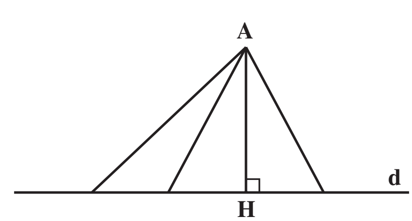
از دانش‌آموزان بخواهید متن فعالیت را بخوانند و به سؤال‌ها پاسخ دهند. آن‌ها نتیجه می‌گیرند که H نقطه‌ی روی d است که فاصله‌اش از O کمترین مقدار را نسبت به نقاط دیگر روی خط دارد ؛ پس : $OH \perp d$.

هدایت کنید:

اگر دانش‌آموزان نتوانستند نتیجه‌ی مطلوب را بگیرند، آن‌ها را به شکل مناسب، راهنمایی و هدایت کنید.

توصیه‌های آموزشی:

۱ــ قبل از انجام دادن فعالیت، تعریف پاره خط عمود بر خط d از نقطه‌ی وارد شده را بدون رسم دایره، یادآوری کنید و خصوصیت مهم آن را بگویید.



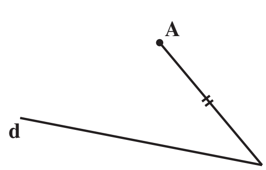
درواقع، AH کوتاه‌ترین فاصله‌ی نقطه‌ی A از نقاط روی خط d است. به عبارت دیگر، همه‌ی پاره‌خط‌های مایل رسم شده از A، از خط عمود رسم شده از نقطه‌ی A بر d، بلندترند.

۲ــ نتیجه‌ی به‌دست آمده از فعالیت توسط چند دانش‌آموز تکرار شود و قسمت‌های مختلف (خط مماس، نقطه، نقطه‌ی تماس، کوتاه‌ترین فاصله، عمود) را روی شکل نشان دهید.

۳ــ انجام دادن فعالیت موازی داده شده قبل از حل کار در کلاس صفحه‌ی ۶۸ توصیه می‌شود.

اشتباهات رایج دانش‌آموزان:

۱ــ دانش‌آموزان برای به‌دست آوردن فاصله‌ی نقطه از خط، از نقطه‌ی A به انتهای ظاهری خط وصل می‌کنند.



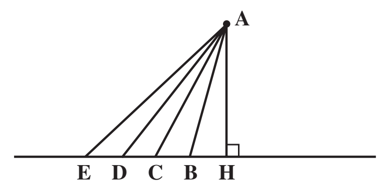
۲ــ نقطه‌ی تماس و شعاع در نقطه‌ی تماس اصطلاحاتی هستند که دانش‌آموزان را به اشتباه می‌اندازند.

هدف کار در کلاس:

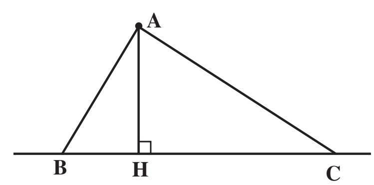
درکار در کلاس، فاصله‌ی مرکز دایره تاخط در سه حالت ممکن با شعاع دایره مقایسه شده است.

فعالیت موازی:

درشکل‌های زیر، نامساوی‌های مناسب بنویسید.



AH< ...

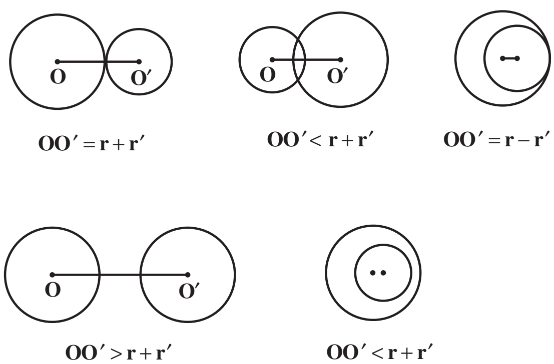


AH< ...<...

از این فعالیت چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

توسعه:

از دانش‌آموزان بخواهید وضعیت دو دایره را نسبت به هم بررسی کنند و بین خط المرکزین و شعاع‌های دو دایره، روابط مناسب را بنویسند.



فعّالیّت خارج از کلاس:

۱ــ وضعیت دو دایره را نسبت به هم بررسی کنند و طول خط‌المرکزین را با شعاع‌های دو دایره مقایسه کنند.

۲ــ در باره‌ی کاربرد این بحث در آینه‌های مقعر تحقیق کنند.

استفاده از ابزار و تکنولوژی:

دانش‌آموزان علاقه‌مند می‌توانند با نرم‌افزار نقاشی متحرک یا flash، طرح درس این قسمت را به صورت الکترونیکی ارائه کنند.

تلفیق با سایر دروس:

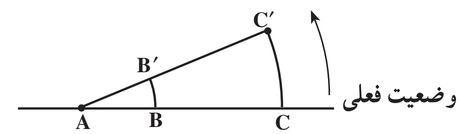
ازاین موضوع در مبحث زاویه‌ی تابش و بازتابش نور در عدسی‌های مقعر و محدب استفاده می‌شود.

یادداشت معلم

زاویه‌ی مرکزی

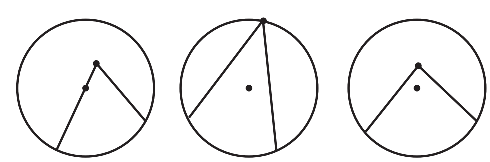
ایجاد انگیزه کنید:

فرض کنید میله‌ای حول نقطه‌ای دوران می‌کند (مثل برف‌پاک‌کن ماشین)، سه نقطه‌ی A و B و C را روی میله تصور کنید. وقتی برف پاک‌کن را روشن می‌کنیم، کدام‌یک از نقاط A و B و C زاویه‌ی بزرگ‌تری را طی می‌کنند؟ کدام‌یک مسافت بزرگ‌تری را طی می‌کنند؟ سرعت کدام‌یک بیش‌تر است؟



شروع کنید:

تعریف زاویه‌ی مرکزی : زاویه‌ی مرکزی زاویه‌ای است که رأس آن روی مرکز دایره قرار دارد. شکل زاویه‌ی مرکزی را رسم کنید. سپس، شکل‌هایی رسم کنید که در آن‌ها رأس زاویه مرکز دایره نباشد.



سپس، با توجه به متن کتاب و توضیحات داده شده، بر این اصل تأکید کنید که هر زاویه‌ی مرکزی، با کمان مقابل خود از لحاظ درجه مساوی است.

بپرسید!

بزرگ‌ترین زاویه‌ی مرکزی ممکن در یک دایره، چند درجه است؟ چرا؟

توصیه‌های آموزشی:

۱ــ مطالبی چون کمان نظیر زاویه یا زاویه‌ی نظیر کمان یا وتر نظیر کمان را برای دانش‌آموزان کاملاً توضیح دهید.

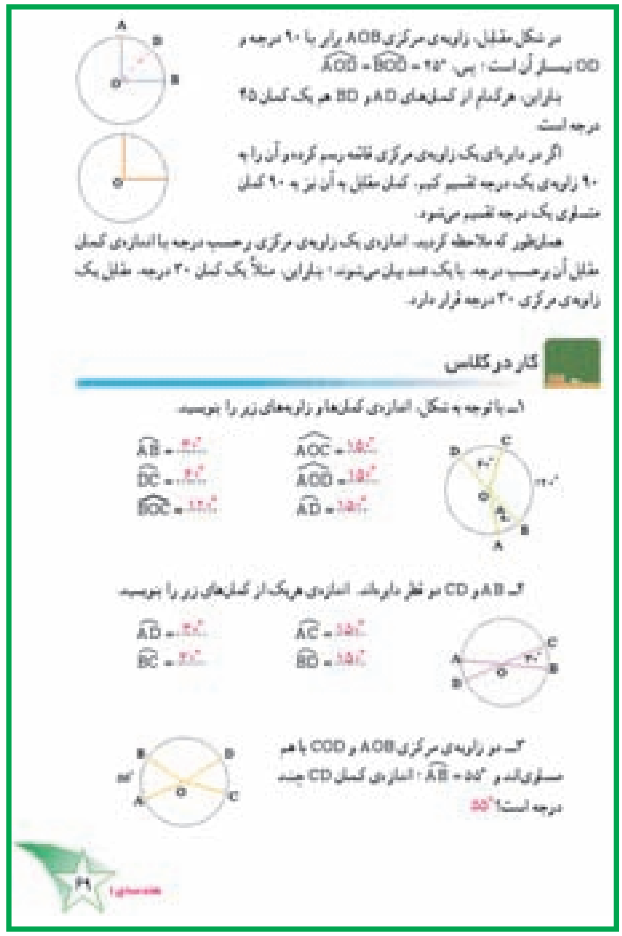
۲ــ برای دانش‌آموزان توضیح دهید که برای کمان دایره

دو نوع واحد اندازه‌گیری وجود دارد ؛ یکی اندازه‌گیری برحسب واحدهای طول مثل (سانتی‌متر، متر و ...) و دیگری اندازه‌گیری برحسب واحدهای اندازه‌گیری زاویه مثل درجه. درواقع، اندازه‌ی کمان برحسب درجه با زاویه‌ی مرکزی مقابل به آن مساوی است.

۳ــ برای دانش‌آموزان توضیح دهید که هر دایره، همیشه یک کمان 360° است ولی طول کمان دایره که همان محیط دایره است، در دایره‌های مختلف متفاوت است. توضیح این مطلب باعث می‌شود دانش‌آموزان بتوانند در دایره‌های متحدالمرکز تصور کنند که همه‌ی کمان‌های مثلاً 30° با هم برابرند.

۴ــ در تعریف زاویه‌ی مرکزی، کافی است بیان شود : زاویه‌ای است که رأس آن در مرکز دایره است. از توضیحات اضافی خودداری کنید.

۵ ــ برای دانش‌آموزان توضیح دهید که چون امتداد اضلاع در مقدار زاویه تأثیری ندارد، اضلاع را فقط تا تقاطع روی دایره رسم می‌کنیم.



در شکل مقابل، زاویه‌ی مرکزی AOB برابر با ۹۰ درجه و OD نیمساز آن است؛ پس: $\widehat{AOD} = \widehat{BOD} = 45^\circ$

بنابراین، هرکدام از کمان‌های AD و BD هر یک کمان ۴۵ درجه است.

اگر در دایره‌ای یک زاویه‌ی مرکزی قائمه رسم کرده و آن را به ۹۰ زاویه‌ی یک درجه تقسیم کنیم، کمان مقابل به آن نیز به ۹۰ کمان مساوی یک درجه تقسیم می‌شود.

همان‌طور که ملاحظه کردید، اندازه‌ی یک زاویه‌ی مرکزی برحسب درجه با اندازه‌ی کمان مقابل آن برحسب درجه، با یک عدد بیان می‌شوند؛ بنابراین، مثلاً یک کمان ۳۰ درجه، مقابل یک زاویه‌ی مرکزی ۳۰ درجه قرار دارد.

کار در کلاس

۱ــ با توجه به شکل، اندازه‌ی کمان‌ها و زاویه‌های زیر را بنویسید.

۲ــ AB و CD دو قطر دایره‌اند. اندازه‌ی هریک از کمان‌های زیر را بنویسید.

۳ــ دو زاویه‌ی مرکزی AOB و COD با هم مساوی‌اند و $\widehat{AB} = 55^\circ$؛ اندازه‌ی کمان CD چند درجه است؟ 55°

اشتباهات رایج دانش‌آموزان:

۱ــ تصور این که در دایره‌های متحدالمرکز همه‌ی کمان‌های روبه‌روی یک زاویه با هم برابرند، برای دانش‌آموزان مشکل است.

۲ــ هنگام انجام دادن فعالیت صفحه‌ی ۷۰، دانش‌آموزان زوایای $\hat{O}_1$ و $\hat{O}_2$ را متقابل به رأس تصور می‌کنند.

هدف کار در کلاس:

دانش‌آموزان در این کار در کلاس تمرین می‌کنند که زاویه‌ی مرکزی و کمان مقابل آن از نظر درجه مساوی‌اند.

هدف فعالیت:

دانش‌آموزان در این فعالیت پی می‌برند که اگر کمان‌های نظیر دو زاویه در یک دایره برابر باشند، وترهای نظیر آن‌ها و اگر وترهای نظیر دو زاویه دریک دایره با هم برابر باشند، کمان‌های نظیر آن‌ها برابرند.

ادامه دهید:

از دانش‌آموزان بخواهید متن فعالیت را بخوانند و به پرسش‌های آن پاسخ دهند.

توصیه‌های آموزشی:

۱ــ یادآوری تعریف زوایای متقابل به رأس، مناسب به‌نظر می‌رسد.

۲ــ درحین فعالیت با عبور از کنار دانش‌آموزان، روند کار آن‌ها را بررسی و آن‌ها را هدایت کنید.

۳ــ از دانش‌آموزان بخواهید که نتایج به‌دست آمده از فعالیت را با جملات خود مطرح کنند.

۴ــ توصیه‌هایی در مورد حل تمرین‌های این قسمت :

در تمرین ۲، دانش‌آموزان پی‌می‌برند که نیم‌ساز زاویه، کمان نظیر زاویه را نیز نصف می‌کند.

تمرین ۳ اهمیت خاصی دارد ؛ زیرا از نتیجه‌ی آن در قسمت‌های بعد (در تقسیم دایره به شش قسمت مساوی) استفاده خواهد شد.

تمرین ۴ حائز اهمیت است و برای ورود به مبحث بعدی آمادگی لازم را به دانش‌آموزان می‌دهد و تأکید بر آن ضروری است.

تمرین ۵ و ۶ برای ورود به بحث بعدی ــ یعنی تقسیم دایره به چهار قسمت مساوی و چندضلعی‌های منتظم ــ کاربرد دارد.

تمرین ۷ به سؤال مطرح شده در ذهن دانش‌آموزان و مقایسه‌ی محیط دایره برحسب درجه و محیط دایره برحسب سانتی‌متر پاسخ می‌دهد.

فعالیت موازی:

۱ــ این فعالیت می‌تواند در شروع تدریس مطرح شود. بعد از به‌انجام رسیدن فعالیت زیر، تعریف زاویه‌ی مرکزی را بیان کنید.

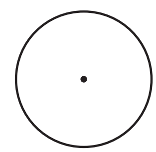
یک دایره‌ی دلخواه رسم کنید و زوایایی را نشان دهید که در آن‌ها رأس زاویه، مرکز دایره باشد. چند حالت ممکن وجود دارد؟ (پاسخ : یک حالت)

دایره‌ی دیگری رسم کنید و زوایایی را نشان دهید که رأس آن‌ها مرکز دایره نیست.

۲ــ این فعالیت در ابتدای درس بعد از انجام گرفتن فعالیت بالا توصیه می‌شود.

ــ در دایره‌ی (C) دو قطر عمود بر هم را رسم کنید. چند زاویه به‌وجود می‌آید؟ اندازه‌ی هر زاویه چند درجه است؟

اندازه‌ی کمان روبه‌روی آن چند درجه است؟



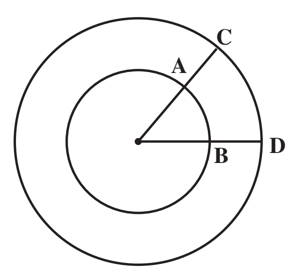
ــ نیم‌ساز یکی از زوایای قائمه را رسم کنید. اندازه‌ی هر زاویه‌ی به‌دست آمده چند درجه است؟

اندازه‌ی هر کمان نظیر آن چند درجه است؟

ــ اگر زاویه‌ی قائمه‌ی به‌دست آمده را به ۹۰ قسمت مساوی تقسیم کنیم، اندازه‌ی هر کمان و هر زاویه‌ی مقابل به آن، چند درجه است؟

فعالیت بعد از انجام گرفتن کار در کلاس صفحه‌ی ۶۹ پیشنهاد می‌شود.

۳ــ در هریک از دایره‌های زیر، طول کمان AB و CD را برحسب درجه و برحسب سانتی‌متر به‌دست آورید. از این فعالیت چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ (برای پیدا کردن طول کمان، از یک نخ یا هر وسیله‌ی انعطاف‌پذیر دیگری می‌توان استفاده کرد.)




فعالیت

۱ــ کمان‌های AB و CD با هم مساوی‌اند.

الف ــ چرا مثلث‌های OAB و OCD مساوی‌اند؟

ب ــ آیا وترهای AB و CD مساوی‌اند؟ بله

$\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ زوایای روبه‌رو به کمان‌های مساوی

OA = OC شعاع‌های
OB = OD شعاع‌های
$\Rightarrow O\hat{A}B = O\hat{D}C \Rightarrow AB = DC$

۲ــ وترهای AB و CD با هم مساوی‌اند.

الف ــ چرا مثلث‌های OAB و OCD مساوی‌اند؟

ب ــ آیا کمان‌های AB و CD مساوی‌اند؟ بله

از این فعالیت چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

AB = DC
OA = OC
OB = OD
$\Rightarrow O\hat{A}B = O\hat{D}C \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2$

زوایای نظیر کمان‌های مساوی با هم برابرند و برعکس

تمرین

۱ــ دو قطر AB و CD برهم عمودند. اندازه‌ی هریک از کمان‌های زیر را بنویسید.

$\widehat{AC} = 90^\circ$ $\widehat{BC} = 90^\circ$

$\widehat{BD} = 90^\circ$ $\widehat{AD} = 90^\circ$

۲ــ OD نیمساز زاویه‌ی مرکزی AOB است و $A\hat{O}B = 36^\circ$.

اندازه‌ی هریک از کمان‌های AD و BD چند درجه است؟ 18°

۳ــ در شکل مقابل، اندازه‌ی زاویه‌ی مرکزی AOB برابر با ۶۰° است.

الف ــ اندازه‌ی کمان AB چند درجه است؟ ۶۰°

ب ــ از A به B وصل می‌کنیم؛ بگویید چرا مثلث OAB متساوی‌الاضلاع است؟

$OA = OB$ = شعاع ⇐ OAB متساوی‌الساقین

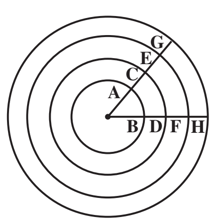
$\Rightarrow \hat{A} + \hat{B} = 180 - 60 = 120$

$\Rightarrow \hat{A} = 60^\circ$

۷۰

توسعه:

در شکل زیر، اندازه‌ی هریک از کمان‌های $\widehat{AB}$ و $\widehat{CD}$ و $\widehat{EF}$ و $\widehat{GH}$ را برحسب درجه بنویسید. نتیجه‌گیری خود را بیان کنید.



فعّالیّت خارج از کلاس:

از دانش‌آموزان بخواهید وسیله‌ای بسازند که با آن بتوان زوایای مرکزی روبه‌روی کمان‌های یکسان و برابری آن‌ها را با یک‌دیگر نشان داد.

تلفیق با سایر دروس:

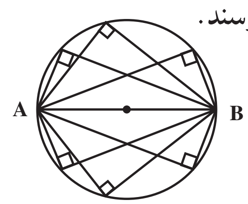
گسترده‌ی یک مخروط و یک دایره است که قطاعی از آن را خارج کرده‌ایم.


۴ــ با توجه به شکل مقابل، اندازه‌ی زاویه‌ها و کمان‌های زیر را بنویسید.
$\hat{C}=$ ، $C\hat{O}B=$ ، $\widehat{BC}=$
۵ــ هر قطر دایره آن را به دو کمان مساوی تقسیم می‌کند. یک دایره و قطری از آن را رسم کنید و با تا کردن کاغذ، درستی این مطلب را تحقیق کنید.
۶ــ قطرهای AB و CD رسم شده‌اند.
الف ــ چرا کمان‌های AC، CB، BD و DA باهم مساوی‌اند؟
ب ــ آیا وترهای AC، CB، BD و DA نیز باهم مساوی‌اند؟
پ ــ آیا زاویه‌های چهارضلعی ADBC باهم مساوی‌اند؟ چرا؟
۷ــ دو دایره به شعاع‌های ۱ و ۲ سانتی‌متر رسم کنید. محیط هر دایره چند سانتی‌متر است؟ محیط هر دایره چند درجه است؟ ۳۶۰°
زاویه‌ی محاطی
فعالیت
حالت‌های مختلفی را که یک زاویه و یک دایره می‌توانند داشته باشند، در دایره‌های زیر نشان دهید.
در شکل‌های بالا، رأس زاویه‌ی BAC روی دایره قرار گرفته و دو ضلع آن، دایره را در دو نقطه‌ی B و C قطع کرده است. این زاویه، یک زاویه‌ی محاطی است و $\widehat{BC}$ کمان مقابل به آن است.
۷۶

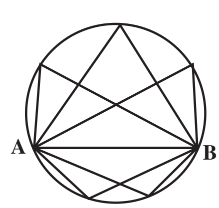
زاویه‌ی محاطی

ایجاد انگیزه کنید:

پاره‌خط AB را روی تخته رسم کنید. از دانش‌آموزان بخواهید آن‌ها نیز در دفتر خود این کار را انجام دهند. آن‌گاه مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ای بسازند که AB وتر آن باشد. آن‌ها با زیاد شدن تعداد مثلث‌ها به شکل جالبی می‌رسند.



از دانش‌آموزان بخواهید دایره‌ای رسم کنند و یک کمان دلخواه روی آن درنظر بگیرند. آن‌گاه زوایایی رسم کنند که رأس آن‌ها روی محیط دایره باشد و اضلاع آن‌ها وترهای دایره باشد.



هدف فعالیت:

دانش‌آموزان در این فعالیت حالت‌های مختلف قرارگرفتن زاویه را نسبت به دایره لمس کرده و آن را به‌طور تجربی آزمایش می‌کنند.

شروع کنید:

از دانش‌آموزان بخواهید متن فعالیت را بخوانند و زوایا را رسم کنند.

توصیه‌های آموزشی:

فعالیت بالا برای دانش‌آموزان جالب است؛ پس، اجازه دهید آن را با حوصله انجام دهند. از آن‌ها بخواهید حالت‌های مختلف را دسته‌بندی کنند؛ مثلاً :

رأس زاویه‌ی داخل دایره
- مرکز دایره
- غیر ازمرکز دایره

رأس زاویه‌ی روی دایره
- مرکز بین دو ضلع
- مرکز روی یکی از اضلاع
- مرکز خارج دو ضلع
- یک ضلع زاویه، متقاطع و ضلع دیگر آن، مماس بر دایره است.

رأس زاویه‌ی بیرونی دایره
- اضلاع متقاطع با دایره
- اضلاع مماس بر دایره
- یکی از اضلاع مماس و دیگری متقاطع با دایره

ادامه دهید:

تعریف می‌کنیم : زاویه‌ی محاطی زاویه‌ای است که مرکز آن روی محیط دایره قرار دارد و اضلاع آن با دایره متقاطع‌اند. به کمان مقابل به آن کمان نظیر زاویه گوییم. با توجه به متن کتاب، شکل‌ها را رسم می‌کنیم و برای دانش‌آموزان توضیح

می‌دهیم که سه حالت ممکن وجود دارد :

۱) مرکز دایره بین دو ضلع قرار گیرد ؛

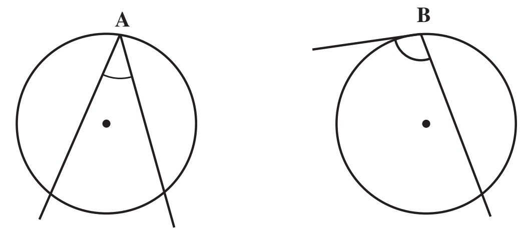
۲) مرکز دایره خارج دو ضلع قرار گیرد ؛

۳) یکی از اضلاع از مرکز دایره بگذرد.

بپرسید!

در شکل مقابل، آیا A زاویه‌ی محاطی است؟ چرا؟

زاویه‌ی $\hat{B}$ چه‌طور؟ چرا؟



اشتباهات رایج دانش‌آموزان:

اگر اضلاع زاویه را امتداد دهیم، ممکن است دانش‌آموزان تصور کنند زاویه، محاطی نیست.

هدف کار در کلاس :

در تمرین ۱ کار در کلاس، دانش‌آموزان می‌آموزند که با یک کمان می‌توان زوایای محاطی بسیاری رسم کرد.

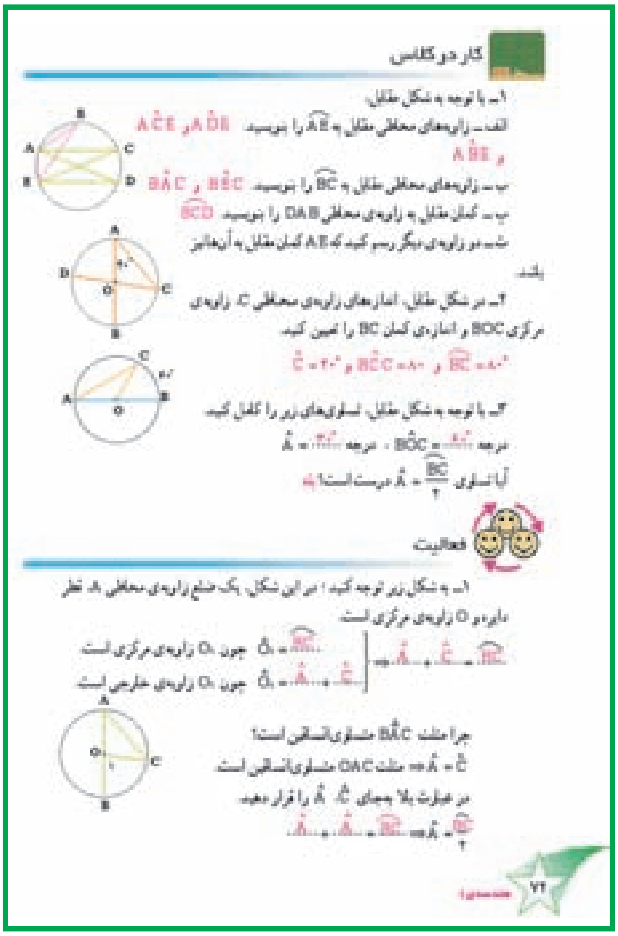
در تمرین ۲ و ۳ دانش‌آموزان آماده می‌شوند که رابطه‌ی زاویه‌ی محاطی و کمان روبه‌روی آن را فرضیه‌سازی کنند و برای انجام دادن فعالیت بعد از آن آماده شوند.

توصیه‌های آموزشی:

در حل تمرین ۱ به کمک انگشتان دست، از کمان AE شروع کنید و روی اضلاع زاویه به زوایای $\hat{B}$ و $\hat{C}$ و $\hat{D}$ برسید. برای رسم زوایای دیگر خواسته شده در مسئله نیز این شیوه را تکرار کنید.

هدف فعالیت:

دانش‌آموزان با انجام دادن فعالیت به ارتباط بین زاویه‌ی محاطی و کمان روبه‌روی آن در سه حالت ممکن زاویه‌ی محاطی پی می‌برند.



ادامه دهید:

از دانش‌آموزان بخواهید متن فعالیت را بخوانند و به سؤال ۱ پاسخ دهند. پس از این‌که اطمینان حاصل کردید همه‌ی دانش‌آموزان به آن پاسخ داده‌اند ؛ آن را روی تخته رسم کنید و به‌طور کامل توضیح دهید.

از دانش‌آموزان بخواهید به سؤال ۲ پاسخ دهند. بعد از حصول اطمینان از به‌انجام رسیدن آن توسط دانش‌آموزان، خود، آن را روی تخته رسم کنید و توضیح دهید. این کار را برای سؤال ۳ تکرار کنید.

از دانش‌آموزان بخواهید نتیجه‌ی به‌دست آمده را مطرح کنند. آن‌ها به این نتیجه خواهند رسید که هر زاویه‌ی محاطی برابر نصف کمان روبه‌رویش است.

توصیه‌های آموزشی:

۱ــ از چند دانش‌آموز بخواهید نتیجه‌ی به‌دست آمده را تکرار کنند.

۲ــ ارزیابی اثبات این فعالیت بدون استفاده از جای خالی در امتحان توصیه نمی‌شود.

هدف کار در کلاس:

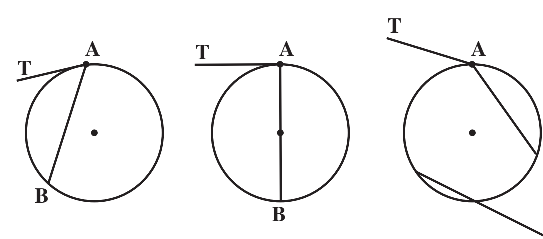
دانش‌آموزان بتوانند با داشتن زاویه‌ی محاطی، اندازه‌ی کمان و با داشتن اندازه‌ی کمان، زاویه‌ی محاطی نظیر آن را به‌دست آورند.

فعالیت موازی:

یک دایره رسم می‌کنیم و آن را به ۳۶۰ قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم و هر قسمت را یک درجه می‌نامیم. هر قسمت چه کسری از دایره است؟ زاویه‌ی مرکزی مقابل آن چند درجه است؟ کل دایره چند درجه است؟

توسعه:

۱ــ زاویه‌ی خطی



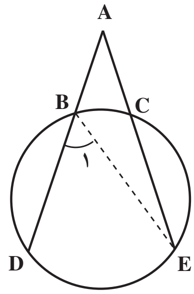
$$T\hat{A}B = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$$

۲ــ زاویه‌ای را که رأس آن خارج دایره است و اضلاع آن متقاطع با دایره‌اند، از B به E وصل می‌کنیم.

$$\hat{A} = \frac{\overset{\frown}{DC} - \overset{\frown}{BC}}{2}$$

اثبات:

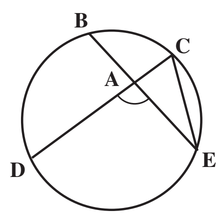
$$\hat{B}_1 = \hat{A} + \hat{E} \Rightarrow \hat{A} = \hat{B}_1 - \hat{E} = \frac{\overset{\frown}{DE} - \overset{\frown}{BC}}{2}$$



۳ــ زاویه‌ای را که رأس آن داخل دایره است و اضلاع آن متقاطع با دایره‌اند، از C به E وصل می‌کنیم :

$$\hat{A} = \frac{\overset{\frown}{DE} + \overset{\frown}{BC}}{2}$$

اثبات:



$$\hat{A} = \hat{C} + \hat{E}$$

$$\hat{A} = \frac{\overset{\frown}{DE} + \overset{\frown}{BC}}{2}$$

فعّالیّت خارج از کلاس:

۱ــ از دانش‌آموزان بخواهید وسیله‌ای بسازند که با آن بتوان زوایای محاطی روبه‌روی یک کمان را نشان داد.

۲ــ از دانش‌آموزان بخواهید یک ستاره درون یک دایره رسم کنند و با استفاده از آنچه تاکنون یاد گرفته‌اند، مجموع زوایای آن را به‌دست آورند و با یک طرح ساده، یافته‌هایشان را در کلاس ارائه دهند.

تلفیق با سایر دروس:

با رسم زوایای محاطی روبه‌روی کمان‌های مساوی یا رسم زوایای محاطی در دایره می‌توان شکل‌های مماس خلق کرد. در کاشی‌کاری‌ها و طرح کاشی‌ها از این موضوع استفاده شده است. از این طرح‌ها در معماری سنتی ایران استفاده‌ی فراوانی شده است.

تقسیم دایره به کمان‌های متساوی

ایجاد انگیزه کنید:

از دانش‌آموزان بپرسید : چگونه می‌توانیم دایره را به چهار قسمت مساوی تقسیم کنیم؟ وقتی می‌گوییم دایره را به چهار قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم، آیا معادل آن نیست که بگوییم دایره را به چهار کمان مساوی تقسیم می‌کنیم؟

چگونه می‌توانیم دایره را به سه، شش یا هشت قسمت مساوی تقسیم کنیم؟

شروع کنید:

با جمع‌بندی نظر دانش‌آموزان، روش تقسیم دایره به چهار کمان، شش کمان و سه کمان مساوی را با توجه به توضیحات متن کتاب توضیح دهید.

بپرسید!

از دانش‌آموزان بپرسید که چرا اگر از یک نقطه‌ی دلخواه روی دایره، وتری مساوی شعاع دایره انتخاب کنیم و این کار را ادامه دهیم تا به نقطه‌ی ابتدایی برسیم، دایره به شش قسمت مساوی تقسیم می‌شود.

توصیه‌های آموزشی:

۱ــ به کاربرد زاویه‌ی مرکزی در تقسیم دایره به قسمت‌های مساوی اشاره کنید.

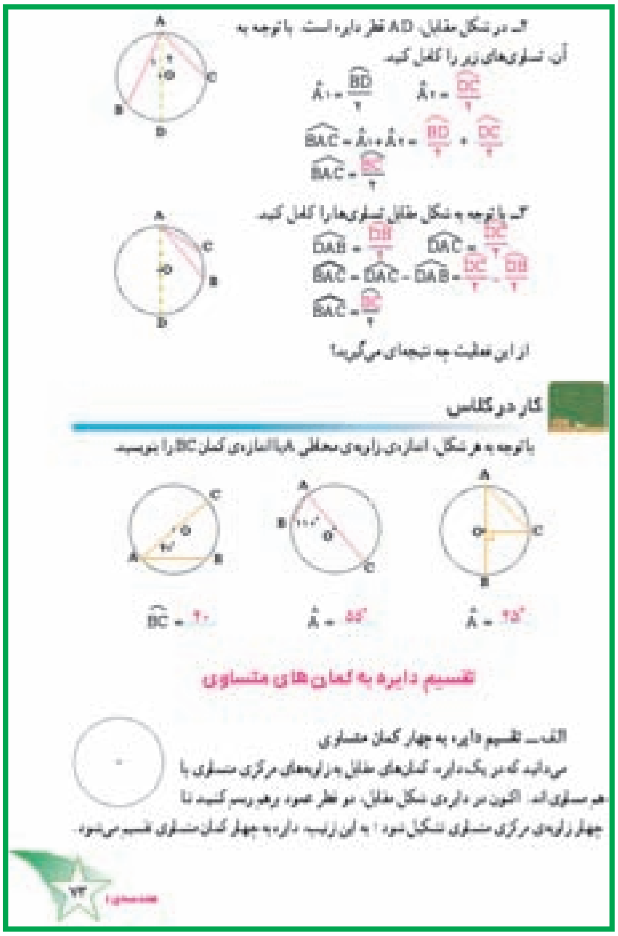
۲ــ تأکید کنید که روی دایره وتری مساوی شعاع دایره جدا می‌کنیم.

اشتباهات رایج دانش‌آموزان:

وقتی به اندازه‌ی شعاع دایره روی دایره کمان می‌زنیم، دانش‌آموزان تصور می‌کنند که طول کمان را مساوی شعاع دایره انتخاب کرده‌ایم.

هدف کار در کلاس :

تمرین ۱ به علّت اهمیت مطلب و کاربرد آن در تقسیم دایره به شش و سه قسمت مساوی، مطرح شده است.



۳ــ در شکل مقابل AD قطر دایره است. با توجه به آن تساوی‌های زیر را کامل کنید.

$\hat{A}_1 = \frac{\overset{\frown}{BD}}{2}$ $\quad \hat{A}_2 = \frac{\overset{\frown}{DC}}{2}$

$\widehat{BAC} = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = \frac{\overset{\frown}{BD}}{2} + \frac{\overset{\frown}{DC}}{2}$

$\widehat{BAC} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2}$

۴ــ با توجه به شکل مقابل تساوی‌ها را کامل کنید.

$\widehat{DAB} = \frac{\overset{\frown}{DB}}{2}$ $\quad \widehat{DAC} = \frac{\overset{\frown}{DC}}{2}$

$\widehat{BAC} = \widehat{DAC} - \widehat{DAB} = \frac{\overset{\frown}{DC}}{2} - \frac{\overset{\frown}{DB}}{2}$

$\widehat{BAC} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2}$

از این فعالیت چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

کار در کلاس

با توجه به هر شکل، اندازه‌ی زاویه‌ی محاطی A یا اندازه‌ی کمان BC را بنویسید.

$\overset{\frown}{BC} = 90$ $\quad \hat{A} = 55^\circ$ $\quad \hat{A} = 45^\circ$

تقسیم دایره به کمان‌های متساوی

الف ــ تقسیم دایره به چهار کمان متساوی

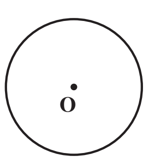
می‌دانید که در یک دایره، کمان‌های مقابل به زاویه‌های مرکزی مساوی با هم مساوی‌اند. اکنون در دایره‌ی شکل مقابل، دو قطر عمود برهم رسم کنید تا چهار زاویه‌ی مرکزی مساوی تشکیل شود ؛ به این ترتیب دایره به چهار کمان مساوی تقسیم می‌شود.

۷۳

تمرین ۲ و ۳ دانش‌آموزان را هدایت می‌کند تا راهی بیابند که بتوانند دایره را به پنج قسمت مساوی تقسیم کنند و برای تقسیم کردن دایره به ۸ و ۱۰ و ... قسمت مساوی، الگوهایی را فرضیه سازی کنند.

فعالیت موازی:

ــ ۳۶۰ را به ۱۰ تقسیم کنید.



ــ از یک نقطه‌ی دلخواه روی A شروع کنید وزاویه‌ی ۳۶°۰ را جدا کنید. وتر متناظر با آن را AB بنامید.

ــ به وسیله‌ی پرگار، به اندازه‌ی وتر AB روی دایره جدا کنید تا مجدداً به نقطه‌ی A برسید.

ــ به این ترتیب دایره به چند قسمت تقسیم می‌شود؟ آیا این قسمت‌ها مساوی‌اند؟ چرا؟ از این فعالیت چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

آیا می‌توانید الگویی ارائه دهید که با استفاده از آن بتوان دایره را به قسمت‌های مساوی دلخواه تقسیم کرد؟

آیا می‌توان دایره را به ۷ قسمت مساوی تقسیم کرد؟ چرا؟

فعّالیّت خارج از کلاس:

۱ــ راه‌های گوناگونی برای تقسیم کردن دایره‌ی کاغذی به چهار قسمت مساوی وجود دارد.

۲ــ راه‌های مختلف تقسیم یک دایره‌ی کاغذی به ۸ و ۱۶ قسمت مساوی وجود دارد.

تلفیق با سایر دروس:

دانه‌های برف به شکل چندضلعی‌های منتظم‌اند. با آوردن تصاویر دانه‌های برف به کلاس، از دانش‌آموزان بخواهید چندضلعی‌های منتظم را پیدا کنند.

چندضلعی‌های منتظم

ایجاد انگیزه کنید:

از دانش‌آموزان بخواهید با دست پنج‌ضلعی‌ای رسم کنند که زوایای آن با هم و ضلع‌های آن نیز با هم برابر باشند. این کار را برای شش‌ضلعی هم انجام دهند.

دشواری کار انگیزه‌ی خوبی برای شروع درس خواهد بود.

شروع کنید:

با یک مثال ــ مثلاً پنج‌ضلعی منتظم ــ شروع کنید و توضیح دهید که پنج‌ضلعی منتظم چندضلعی‌ای است که همه‌ی زوایای آن با هم و همه‌ی ضلع‌های آن نیز با هم برابرند. در واقع، چهارضلعی منتظم مربع است؛ و مستطیل و لوزی چهارضلعی منتظم نیستند.

بپرسید!

۱ــ چرا مستطیل و لوزی چهارضلعی منتظم نیستند؟

۲ــ چه نوع مثلثی سه‌ضلعی منتظم است؟ چرا؟

ادامه دهید:

با توجه به توضیحات متن کتاب در صفحات ۷۵ و ۷۶، شکل شش‌ضلعی منتظم و روش ترسیم آن را توضیح دهید. از دانش‌آموزان بخواهید اندازه‌ی هریک از زوایای شش‌ضلعی به‌دست آمده را با توجه به شکل و زوایای محاطی روبه‌رو به آن محاسبه کنند.

توصیه‌های آموزشی:

بعد از این که دانش‌آموزان زاویه‌ی مرکزی مناسب را برای رسم n ضلعی منتظم به‌دست آوردند، تأکید کنید که این عدد مربوط به اندازه‌ی کمان‌های روبه‌رو به زوایای داخلی n ضلعی منتظم است و از روی آن می‌توان زاویه‌ی n ضلعی منتظم را به‌دست آورد.

اشتباهات رایج دانش‌آموزان:

وقتی دانش‌آموزان برای رسم مثلاً ۵ضلعی منتظم ۳۶۰° را به ۵ تقسیم می‌کنند و عدد ۷۲° را به‌دست می‌آورند، تصور می‌کنند که زاویه‌ی ۵ ضلعی را به‌دست آورده‌اند.

هدف کار در کلاس:

در تمرین ۱ دانش‌آموزان سه‌ضلعی منتظم (مثلث متساوی‌الاضلاع)، چهارضلعی منتظم (مربع) و پنج‌ضلعی و شش‌ضلعی منتظم را با اندازه‌گیری ضلع‌ها و زوایای آن‌ها تشخیص می‌دهند.

در تمرین ۲، دانش‌آموزان طرز رسم ۸ضلعی منتظم را به‌صورت طرح یک مسئله فرا می‌گیرند.

توصیه‌های آموزشی:

در تمرینات این قسمت، مسائلی مطرح شده است تا دانش‌آموزان با توجه به اطلاعات داده شده و معلومات جدیدی که به‌دست آورده‌اند، بتوانند زوایای موردنظر را محاسبه کنند.

فعالیت موازی:

یک دایره رسم کنید و آن را به شش قسمت مساوی تقسیم کنید. نقاط به‌دست آمده را به هم وصل کنید. نام شکل به‌دست آمده چیست؟ چرا؟

اندازه‌ی هریک از زوایای این شکل را با نقاله اندازه بگیرید ؛ چند درجه است؟

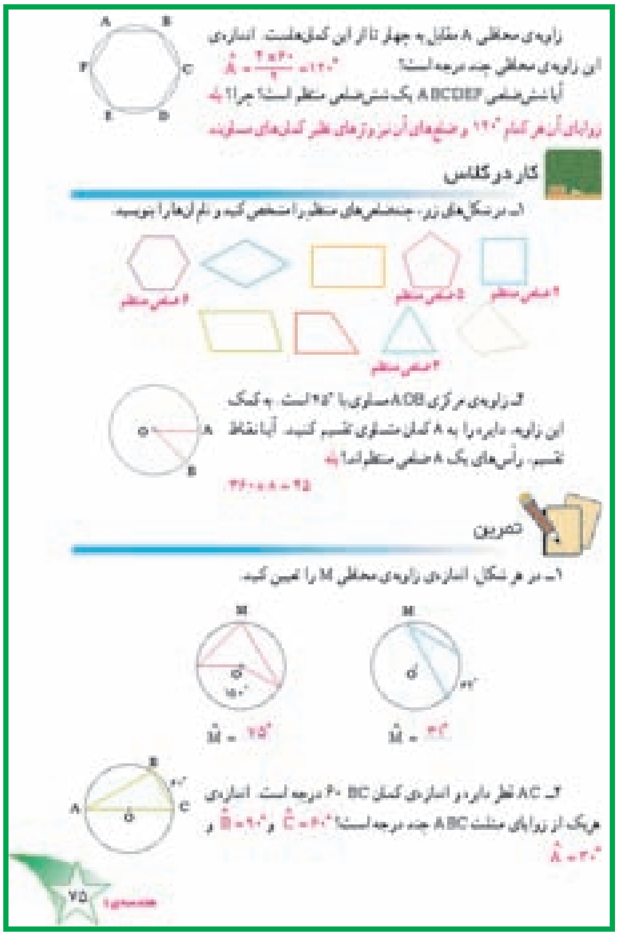
آیا می‌توانید راهی پیشنهاد کنید که بدون استفاده از نقاله، اندازه‌ی زوایای شش ضلعی به‌دست آمده را بتوان محاسبه کرد؟

فعالیت بالا را تکرار کنید ؛ این بار دایره را به هشت قسمت مساوی تقسیم کنید.

آیا می‌توانید فرمولی ارائه دهید که با استفاده از آن بتوان هریک از زوایای nضلعی منتظم و مجموع زوایای داخلی آن را به‌دست آورد؟

توسعه:

۱ــ چندضلعی‌هایی را که به روش گفته شده رسم می‌شوند، چندضلعی‌های محاطی می‌نامند. برای رسم کردن چندضلعی‌های


زاویه‌ی محاطی A مقابل به چهار تا از این کمان‌هاست. اندازه‌ی این زاویه‌ی محاطی چند درجه است؟ $\hat{A} = \frac{۴\times۶۰}{۲} = ۱۲۰^\circ$

آیا شش‌ضلعی ABCDEF یک شش‌ضلعی منتظم است؟ چرا؟ بله

زوایای آن هر کدام ۱۲۰° و ضلع‌های آن نیز وترهای نظیر کمان‌های مساوی‌اند.

کار در کلاس

۱ــ در شکل‌های زیر، چندضلعی‌های منتظم را مشخص کنید و نام آن‌ها را بنویسید.

۶ضلعی منتظم ۵ضلعی منتظم ۴ضلعی منتظم ۳ضلعی منتظم

۲ــ زاویه‌ی مرکزی AOB مساوی با ۴۵° است. به کمک این زاویه، دایره را به ۸ کمان مساوی تقسیم کنید. آیا نقاط تقسیم، رأس‌های یک ۸ضلعی منتظم‌اند؟ بله

۳۶۰÷۸=۴۵

تمرین

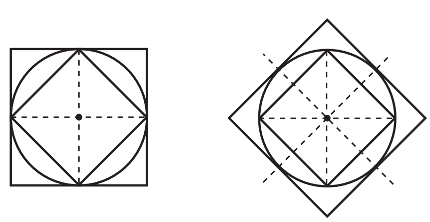
۱ــ در هر شکل، اندازه‌ی زاویه‌ی محاطی M را تعیین کنید.

$\hat{M} = ۷۵^\circ$ $\hat{M} = ۳۲^\circ$

۲ــ AC قطر دایره و اندازه‌ی کمان BC ۶۰ درجه است. اندازه‌ی هریک از زوایای مثلث ABC چند درجه است؟ $\hat{B} = ۹۰^\circ$ و $\hat{C} = ۶۰^\circ$ و $\hat{A} = ۳۰^\circ$

۷۵

محاطی می‌توان در نقاط تقسیم خطوط مماس رسم کرد یا از مرکز دایره بر وتر متناظر آن عمود کرد و در محل تلاقی آن با دایره، بر دایره مماس رسم کرد.



۲ــ یک زاویه‌ی n ضلعی منتظم و مجموع زوایای آن با فرمول‌های زیر محاسبه می‌شود :

$$\text{اندازه‌ی یک زاویه} = \frac{(n-۲)\times ۳۶۰}{۲} = (n-۲)\times ۱۸۰$$

$$\text{مجموع زوایای nضلعی} = \frac{n(n-۲)\times ۳۶۰}{۲} = n(n-۲)\times ۱۸۰$$

۳ــ ۷ضلعی منتظم، ۱۱ضلعی منتظم و ۱۳ضلعی منتظم و ... نداریم.

۴ــ محاسبه‌ی مساحت چندضلعی‌های منتظم به خصوص شش‌ضلعی منتظم.

فعّالیّت خارج از کلاس:

۱ــ از دانش‌آموزان بخواهید فعّالیّتی طرح کنند که طی آن بتوانند فرمول اندازه‌ی هریک از زوایا و مجموع آن‌ها را در چند ضلعی‌های منتظم به‌دست آورند.

۲ــ محاسبه‌ی تقریبی مقدار n به کمک چندضلعی‌های منتظم

۳ــ تحقیقی درباره‌ی شکل دانه‌های برف

۴ــ تصاویری از شیمی آلی به کلاس آورده شود.

استفاده از ابزار و تکنولوژی:

۱ــ دانش‌آموزان می‌توانند به کمک نرم‌افزارهای رایانه‌ای، با چندضلعی‌ها و ستاره‌های منتظم شکل‌های تلفیقی رسم کنند.

۲ــ شکل دانه‌های برف را با یک نرم‌افزار ساده می‌توان نشان داد.

تلفیق با سایر دروس:

۱ــ دانش‌آموزان می‌توانند با استفاده از چندضلعی‌های منتظم و دوایر، تصاویری زیبا خلق کنند و طرح کاشی‌های سنتی را بسازند.

۲ــ در شکل‌های ساختمانی مواد در شیمی آلی از چندضلعی‌های منتظم استفاده شده است.

۳ــ دانه‌های برف به شکل چندضلعی منتظم‌اند.

یادداشت معلم

رابطه‌ی فیثاغورس

موضوعات در یک نگاه

رابطه‌ی فیثاغورس در ریاضیات کاربرد فراوانی دارد. این درس اولین بار است که برای دانش‌آموزان مطرح می‌شود اما درس ساده و قابل فهمی است. در ابتدا از روش‌های مختلف رابطه‌ی فیثاغورس نتیجه‌گیری می‌شود. سپس، کاربردهای رابطه‌ی فیثاغورس در حل مسائل و پیدا کردن ضلع مجهول در تمرین‌های مختلف مطرح می‌شود.

اهداف

در فرایند آموزش این درس انتظار می‌رود هر دانش‌آموز به هدف‌های زیر برسد.

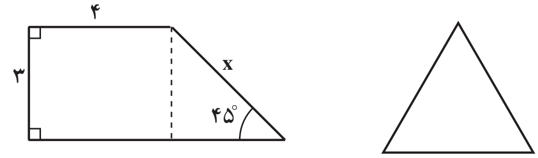
۱ــ رابطه‌ی فیثاغورس را با انجام دادن فعالیت نتیجه‌گیری کند.

۲ــ این رابطه را در حل تمرین‌ها و مسائل به‌کار برد.

۳ــ با دردست داشتن اندازه‌ی سه ضلع، قائم‌الزاویه بودن یک مثلث را به کمک رابطه‌ی فیثاغورس بررسی کند.

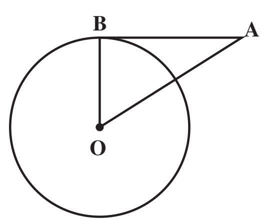
نمونه‌ی سؤال برای ارزش‌یابی

۱ــ ضلع مجهول را در هریک از شکل‌های زیر به‌دست آورید.



۲ــ با توجه به شکل و مماس بودن خط بر دایره، طول AB را پیدا کنید.

AO = ۶ و OB = ۳



۳ــ فاصله‌ی مرکز دایره تا وتری به طول ۴ سانتی‌متر را پیدا کنید ؛ اگر قطر دایره ۶ سانتی‌متر باشد.

یادداشت معلم

شناسنامه‌ی مبحث رابطه‌ی فیثاغورس

درس‌ها	صفحات	مفاهیم و محتوا	هدف‌ها	فعالیت‌ها	پیش‌بینی امکانات	واژگان
پیدا کردن رابطه‌ی فیثاغورس	۷۷ ۷۸ ۷۹	رابطه‌ی فیثاغورس	ــ با انجام دادن فعالیت‌های ذکر شده، رابطه‌ی فیثاغورس را نتیجه بگیرد. ــ رابطه‌ی فیثاغورس را برای مثلث قائم‌الزاویه‌ی داده شده بنویسد.	ــ انجام دادن فعالیت برای درک و نتیجه‌گیری رابطه‌ی فیثاغورس ــ مطالعه‌ی متن درباره‌ی رابطه‌ی فیثاغورس ــ انجام دادن کار در کلاس برای تمرین نوشتن رابطه	شکل‌های مربوط به فعالیت و متن درس خط‌کش نقاله	رابطه‌ی فیثاغورس ضلع‌های زاویه قائمه
استفاده از رابطه‌ی فیثاغورس	۷۹ ۸۰ ۸۱ ۸۲ ۸۳	کاربرد رابطه‌ی فیثاغورس	ــ رابطه‌ی فیثاغورس را در حل مسائل به‌کار ببرد. ــ عددهای فیثاغورس را بشناسد. ــ با معلوم بودن سه ضلع یک مثلث، قائم‌الزاویه بودن آن را بررسی کند.	ــ مطالعه‌ی متن درباره‌ی استفاده از رابطه‌ی فیثاغورس ــ انجام دادن کار درکلاس و تمرین استفاده از رابطه‌ی فیثاغورس	خط‌کش نقاله	

عددهای گویا و عددهای گنگ و رابطه‌ی فیثاغورس

رابطه‌ی بین ضلع‌های مثلث قائم‌الزاویه را فیثاغورس کشف کرد. از روش اثبات او خبری نداریم. او به‌طور کلی چیزی نمی‌نوشت؛ زیرا در زمان او وسیله‌ی نوشتن کمیاب بود (صنعت چاپ دوهزارسال بعد پیدا شد). فیثاغورس در سده‌ی ششم پیش از میلاد زندگی می‌کرد. او نزدیک به ۳۵۵ جوان را (که بیش‌تر از خانواده‌های ثروتمند بودند) به دور خود جمع کرد و انجمنی به نام «انجمن برادری» تشکیل داد. فیثاغورس معتقد بود که عدد، موجب ویژگی‌های ماده است و همه چیز را ــ اعم از مادی و معنوی ــ با عدد بیان می‌کرد و به هنرهای چهارگانه شامل علم عدد، موسیقی، هندسه و اخترشناسی معتقد بود. او زمین را کروی می‌دانست و به حرکت آن به دور خورشید اعتقاد داشت و این را از مُغان ایرانی آموخته بود. هواداران فیثاغورس، عدد ۶ را عامل سرما، ۷را عامل تندرستی و ۸ را نشانه‌ی عشق می‌دانستند. کپلر بخش زیادی از عمر خود را به تحقیق در اندیشه‌های فیثاغورس اختصاص داده بود و تلاش می‌کرد تا با استفاده از نظریه‌های او، دشواری‌های مربوط به حرکت سیاره‌ها را حل کند.

به هرحال، فیثاغورس یا یکی ازافراد «انجمن برادری» رابطه‌ی بین سه ضلع مثلث قائم‌الزاویه را پیدا کرد. بر اساس این رابطه، در هر مثلث قائم‌الزاویه، توان دوم وتر برابر است با مجموع توان‌های دوم دو ضلع مجاور به زاویه‌ی قائمه. البته پیش از فیثاغورس، چینی‌ها، هندی‌ها، بابلی‌ها و عیلامی‌ها حالت‌های خاصی از رابطه‌ی فیثاغورس را شناخته بودند. آن‌ها از مثلثی که ضلع آن ۳ و ۴ و ۵ باشد، برای رسم دو خط راست عمود بر هم استفاده می‌کردند. برای نمونه، در نوشته‌ی «چوپه‌ای» Choupei که یازده سده پیش ازمیلاد می‌زیسته، چنین آمده است: «پهنا را ۳ بگیر، درازا را ۴؛ در این صورت، فاصله‌ی گوشه‌ها می‌شود ۵. چه شگفت است علم عدد!».

فیثاغورس که با بودا، کنفوسیوس و لائوتسه تقریباً هم‌زمان بود، ثابت کرد که در مثلث قائم‌الزاویه‌ای که طول ضلع‌های مجاور به زاویه‌ی قائمه آن، برابر b,a و طول وتر آن برابر c باشد، این رابطه برقرار است:

$$a^{۲}+b^{۲}=c^{۲}$$

ما می‌دانیم که طول قطر مربعی که ضلع آن یک واحد باشد، برابر $\sqrt{۲}$ است ولی یونانی‌ها $\sqrt{۲}$ را نمی‌شناختند و فیثاغوریان که معتقد بودند هر چیز مادی و معنوی را می‌توان با عدد نشان داد، از بیان طول یک پاره‌خط درماندند. آن‌ها تنها عددهایی را می‌شناختند که یا خودش عددی درست (صحیح) باشد یا به صورت کسری با صورت و مخرج درست باشد. یونانی‌ها در آغاز تلاش کردند این کشف را از دیگران پنهان نگاه دارند، اما این راز فاش شد. آن‌ها سرانجام ادعا کردند که چیزها چند گونه‌اند: یا به وسیله‌ی عدد قابل بیان‌اند که آن‌ها را «**گویا**» نامیدند یا نمی‌توان آن‌ها را به یاری عدد بیان کرد که آن‌ها را «**گنگ**» نام گذاشتند. عرب‌ها گویا را منطق و گنگ را اصم می‌گویند. این نام‌گذاری فیثاغوریان، هنوز هم باقی مانده است و ما هم $\sqrt{۲}$ را عددی گنگ می‌دانیم.

البته عددهای گنگ، امروز به دو گروه تقسیم می‌شوند: **عددهای جبری و عددهای غیرجبری**. عددهای جبری عددهایی هستند که بتوانند ریشه‌ی معادله‌ای با ضریب‌های درست باشند و عددهای غیرجبری ــ مثل عدد پی (π) ــ ریشه‌ی یک معادله‌ی جبری با ضریب‌های درست نیستند.

یادداشت معلم

پیدا کردن رابطه‌ی فیثاغورس

ایجاد انگیزه کنید:

بیان مطالبی از تاریخ ریاضی در این باره می‌تواند جالب باشد. گفته می‌شود که : پدر پاسکال پزشک بود و علاقه داشت پسرش هم پزشک شود، اما چون فرزندش به ریاضیات بسیار علاقه داشت، همه‌ی کتاب‌های ریاضی را از دسترس او پنهان کرد. روزی پاسکال را در آشپزخانه یافت ؛ در حالی که یک مثلث قائم‌الزاویه رسم کرده بود و رابطه‌ی فیثاغورس را بین اضلاع آن یافته بود.

شروع کنید:

همان‌طور که می‌دانید، لذت کشف یک رابطه‌ی جدید برای هر کس بسیار زیاد است. سعی کنید دانش‌آموزان را تهییج کنید که رابطه‌ی موجود بین طول اجزای این مثلث‌ها را کشف کنند ؛ بنابراین، بدون بیان رابطه و طرح زمینه‌ی قبلی، از دانش‌آموزان بخواهید فعالیت صفحه‌ی ۷۷ را به دقت پاسخ دهند.

هدف فعالیت:

هدف اصلی فعالیت، کشف رابطه‌ی فیثاغورس بین طول‌های اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه توسط خود دانش‌آموزان است، بیان رابطه و سپس تحقیق درباره‌ی درستی آن، هدف این فعالیت نیست (اگرچه مثال اول فعالیت مسیر دانش‌آموزان را روشن می‌کند).

آموزش دهید:

پس از بررسی نتایج طرح شده از طرف دانش‌آموزان، این رابطه را در کلاس معرفی کنید و درستی آن را به کمک توضیحات و شکل صفحه‌ی ۷۸ به دانش‌آموزان نشان دهید. می‌توانید با ساختن یک مدل از شکل، این بحث را عینی‌تر کنید یا به عنوان یک فعالیت موازی، از دانش‌آموزان بخواهید این شکل را روی یک ورق کاغذ رسم کنند (در جلسه‌ی قبل یا سر کلاس) یا آن را به صورت پلی‌کپی در اختیارشان قرار دهید. سپس، با برش دادن کاغذ و انجام دادن آزمایش، درستی رابطه را تحقیق کنند.

به خاطر داشته باشید که در باره‌ی جمله‌ی آخر صفحه‌ی ۷۸ــ یعنی عکس قضیه‌ی فیثاغورس ــ در کلاس بحث کنید و نمونه‌ای از استفاده‌ی آن را بیان کنید. به عبارت دیگر، به دانش‌آموزان بگویید که یکی از راه‌های اثبات قائمه بودن یک زاویه، نمایش درستی رابطه‌ی فیثاغورس در مثلث منطبق بر آن زاویه است.

ادامه دهید:

پس از بحث و ذکر چند مثال، از دانش‌آموزان بخواهید کار در کلاس صفحه ۷۹ را به دقت پاسخ گویند.

هدف کار در کلاس:

هدف اصلی کار در کلاس، به کار بستن رابطه در چند مثلث است تا مفهوم مجموع، مجذور، اضلاع و ... در حین

استفاده مشخص شود.

ـ در تمرین دوم عکس قضیه‌ی فیثاغورس تا حدودی بررسی می‌شود.

توصیه‌های آموزشی:

ـ در فعالیت طرح شده، خط چین‌های رسم شده در شکل‌ها برای شمردن بهتراست، دانش‌آموزان می‌توانند درباره‌ی چگونگی یافتن سطح مربع ساخته شده روی وتر مثلث‌ها در گروه‌ها بحث کنند و روش بهتر را برگزینند.

ـ درباره‌ی مفهوم مجذور اضلاع که همان مساحت مربع ساخته شده روی اضلاع است، در کلاس بحث کنید.

ـ متن صفحه‌ی ۷۸ حتماً در کلاس به دقت خوانده شود و مورد بحث قرار گیرد.

ـ در ستون اوّل کار در کلاس، نحوه‌ی محاسبات اعشاری یادآوری شود تا ابهامی در ذهن‌ها باقی نماند.

اشتباهات رایج دانش‌آموزان:

ـ برخی از دانش‌آموزان در محاسبات اعشاری و جذرگیری اشتباه می‌کنند و چون بازگشت به عقب نیز ندارند اشتباه خود را نمی‌فهمند. آن‌ها را پس ازانجام دادن این نوع عملیات، به بازگشت به عقب توصیه کنید.

فعّالیّت خارج از کلاس:

ـ رابطه‌ی فیثاغورس اثبات‌های متعدد هندسی دارد که جست و جو و یافتن آن‌ها در منابع مختلف می‌تواند فعالیت خارج از کلاس جذابی برای برخی از دانش‌آموزان باشد. از آن‌ها بخواهید این اثبات‌ها را پیدا کنند و به صورت یک مقاله یا روزنامه‌ی دیواری درکلاس ارائه دهند.

ـ از دانش‌آموزان بخواهید مثلث‌های قائمه‌الزاویه‌ای را که طول هر سه ضلع آن‌ها عدد طبیعی باشد، پیدا کنند. (یافتن اعداد فیثاغورسی).

ـ تحقیق درباره‌ی تاریخ ریاضی و زندگی فیثاغورس نیز می‌تواند مفید باشد.

در هر یک از مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی صفحه‌ی قبل، مساحت مربعی که روی وتر ساخته شده است، با مجموع مساحت‌های دو مربعی که روی ضلع‌های زاویه‌ی قائمه ساخته شده‌اند، برابر است.

به شکل مقابل توجه کنید: از محل برخورد قطرهای مربع ایجاد شده روی ضلع AB، خطی موازی با وتر BC و نیز خطی عمود بر آن رسم کرده‌ایم؛ به این ترتیب، این مربع به چهار قسمت مساوی تقسیم شده است. با این چهار قسمت و مربع روی ضلع AC می‌توانیم مربع روی وتر را بپوشانیم. [illegible]

با توجه به شکل، اگر سه ضلع مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC را a، b و c بنامیم، می‌توانیم بنویسیم:

a^2 = مساحت مربعی که روی وتر ساخته شده است.

b^2 = مساحت مربعی که روی ضلع AC ساخته شده است.

c^2 = مساحت مربعی که روی ضلع AB ساخته شده است.

و در نتیجه $a^2=b^2+c^2$ (رابطه‌ی فیثاغورس)

بنابراین: در هر مثلث قائم‌الزاویه، مجذور وتر برابر است با مجموع مجذورهای دو ضلع دیگر.

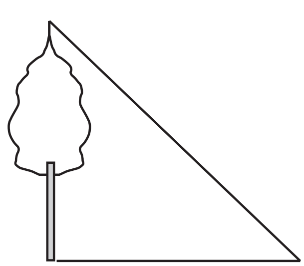
عکس این مطلب نیز درست است؛ یعنی اگر در مثلثی مجذور بزرگ‌ترین ضلع با مجموع مجذورهای دو ضلع دیگر برابر باشد، آن مثلث قائم‌الزاویه است.

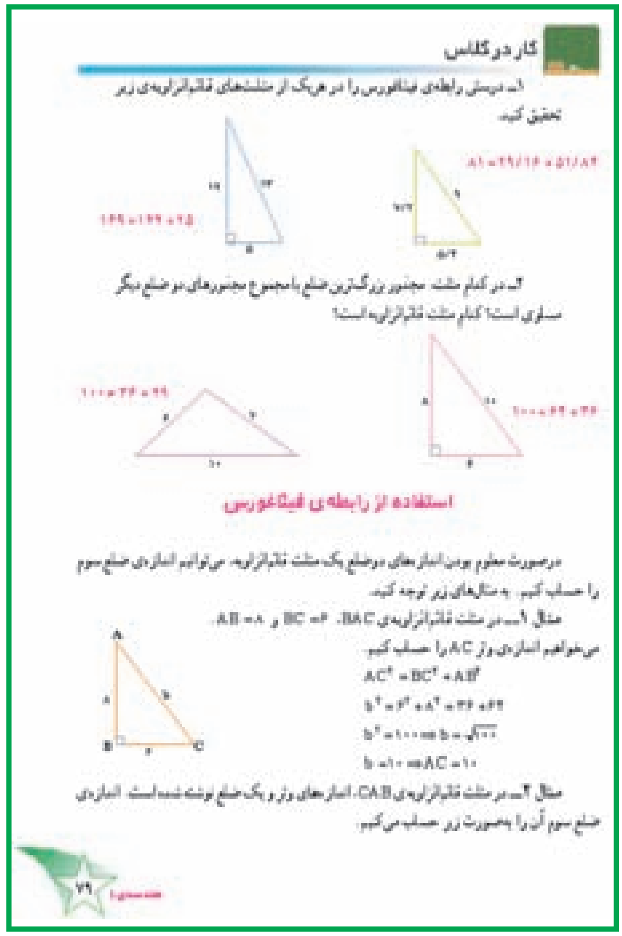
۷۸

تلفیق با سایـر دروس:

ـ جـداول مربـوط بـه مقدار sin، cos، tan و cotg را درکلاس به دانش‌آموزان نشان دهید و به‌طور مختصر بگویید که همه‌ی این اطلاعات، به کمک مثلث قائم‌الزاویه و رابطه‌های آن به‌دست آمده است.

ـ با یک مثال نشان دهید که در فیزیک، بسیاری ازمسائل به کمک رابطه‌ی فیثاغورس حل می‌شوند ؛ مثلاً یافتن طول یک بلندی به کمک طول سایه‌ی آن.




کار در کلاس

۱ــ درستی رابطه‌ی فیثاغورس را در هر یک از مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی زیر تحقیق کنید.

۲ــ در کدام مثلث مجذور بزرگ‌ترین ضلع با مجموع مجذورهای دو ضلع دیگر مساوی است؟ کدام مثلث قائم‌الزاویه است؟

استفاده از رابطه‌ی فیثاغورس

درصورت معلوم بودن اندازه‌های دو ضلع یک مثلث قائم‌الزاویه، می‌توانیم اندازه‌ی ضلع سوم را حساب کنیم. به مثال‌های زیر توجه کنید.

مثال ۱ــ در مثلث قائم‌الزاویه‌ی BAC، $BC = 6$ و $AB = 8$.

می‌خواهیم اندازه‌ی وتر AC را حساب کنیم.

$AC^2 = BC^2 + AB^2$

$b^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64$

$b^2 = 100 \Rightarrow b = \sqrt{100}$

$b = 10 \Rightarrow AC = 10$

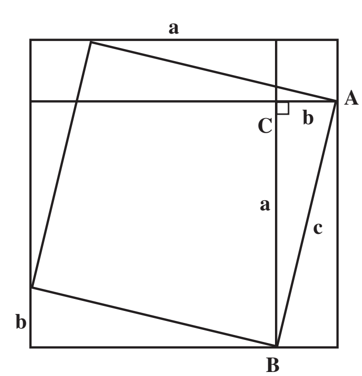
مثال ۲ــ در مثلث قائم‌الزاویه‌ی CAB، اندازه‌های وتر و یک ضلع نوشته شده است. اندازه‌ی ضلع سوم آن را به‌صورت زیر حساب می‌کنیم.

۷۹

توسعه:

از دانش‌آموزان بخواهید تساوی زیر را در شکل نشان دهند.

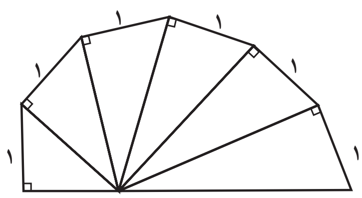
$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ac = c^2 + 2ab$$



استفاده از رابطه‌ی فیثاغورس

ایجاد انگیزه کنید:

ــ این شکل را به صورت پلی‌کپی به دانش‌آموزان بدهید و از آن‌ها بخواهید نظم موجود در آن را بیابند.



ــ می‌توانید الگوی رسم آن را در کلاس مطرح کنید. از دانش‌آموزان بخواهید آن را رسم کنند.

ــ یک دسته اعداد فیثاغورسی را روی تخته‌ی کلاس بنویسید (مثلاً ۵ و ۴ و ۳). از دانش‌آموزان بخواهید با ضرب کردن یک عدد در هر سه عدد یک دسته‌ی فیثاغورسی دیگر معرفی کنند. (دلیل درستی را بپرسید.)

شروع کنید:

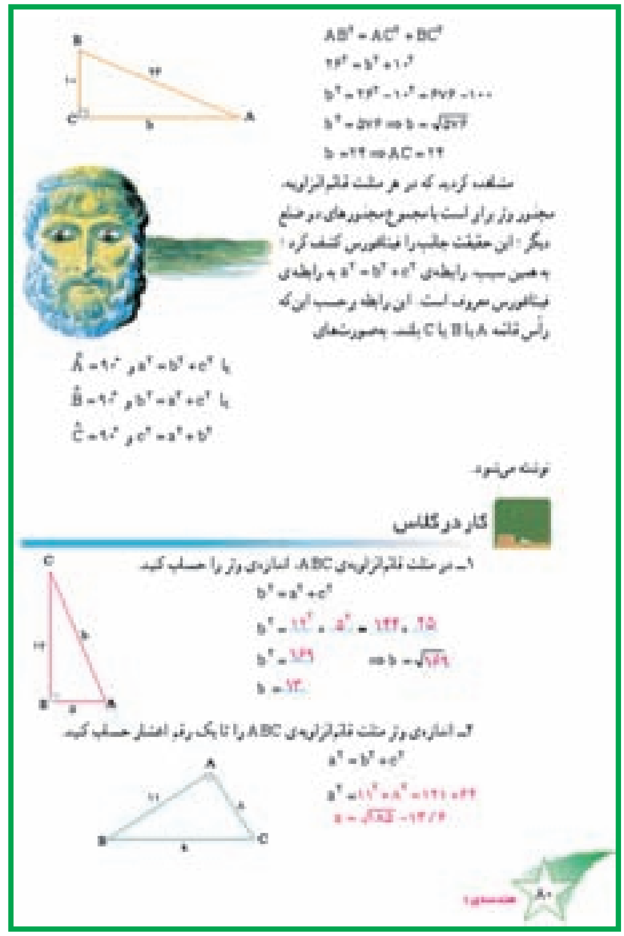
دو مثال طرح شده در کتاب را روی تخته‌ی کلاس به کمک دانش‌آموزان حل کنید. سپس، راه حل مطرح شده در کتاب را درکلاس بررسی کنید. نظر دانش‌آموزان را به نحوه‌ی نوشتن و مراحل آن جلب کنید.

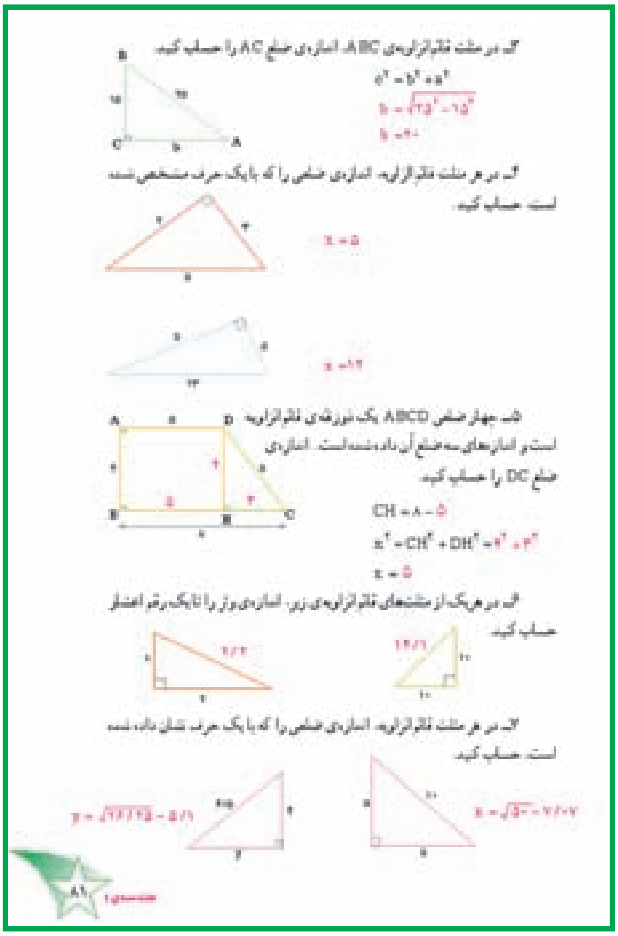
آموزش دهید:

چند مثلث قائم‌الزاویه را در حالت‌های مختلف و با نام‌های گوناگون روی تخته‌ی کلاس بکشید و از دانش‌آموزان بخواهید رابطه‌ی فیثاغورس را برای هرکدام بیان کنند. سپس، خود مراحل نوشتن رابطه را درکلاس آموزش دهید.

ادامه دهید:

پس از حصول اطمینان از درستی رابطه‌های نوشته شده، از دانش‌آموزان بخواهید کار درکلاس صفحات ۸۰ و ۸۱ و ۸۲ را انجام دهند. به آنان یادآوری کنید که پاسخ‌ها را تا یک رقم اعشار محاسبه کنند و بازگشت به عقب را در حل تمامی آن‌ها





فراموش نکنند.

هدف کار در کلاس:

سؤال‌های ۱ و ۲ و ۳ و ۴ با هدف مسلط کردن دانش‌آموز به نحوه‌ی نگارش رابطه و یافتن مجهول طراحی شده است. سؤالات ۵ و ۸ به کشف مثلث مورد نظر و بیان رابطه‌ی آن نیاز دارد با این تفاوت که در سؤال ۵، پاسخ طبیعی است و سؤال ۸ به محاسبه‌ی تقریبی نیاز دارد.

سؤالات ۶ و ۷ نیز نیازمند به محاسبات جذر تقریبی است.

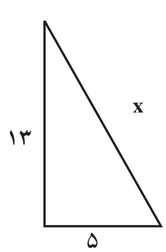
توصیه‌های آموزشی:

ــ از دانش‌آموزان بخواهید دسته‌ی اعداد فیثاغورسی (۵، ۴، ۳) و (۱۳، ۱۲، ۵) و مضارب آن‌ها را در ذهن خود نگه دارند؛ چرا که کاربرد زیادی در مسائل دارد.

ــ بازگشت به عقب و محاسبه‌ی ذهنی عدد و جواب و مقایسه‌ی جواب به‌دست آمده با شکل و اطلاعات مسئله، از بسیاری اشتباهات واضح می‌کاهد.

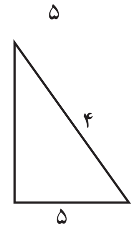
اشتباهات رایج دانش‌آموزان:

یکی از اشتباهات رایج دانش‌آموزان، جای‌گزینی اشتباه در رابطه‌ی فیثاغورس است. برای مثال، برخی از آن‌ها این تمرین را چنین حل می‌کنند:

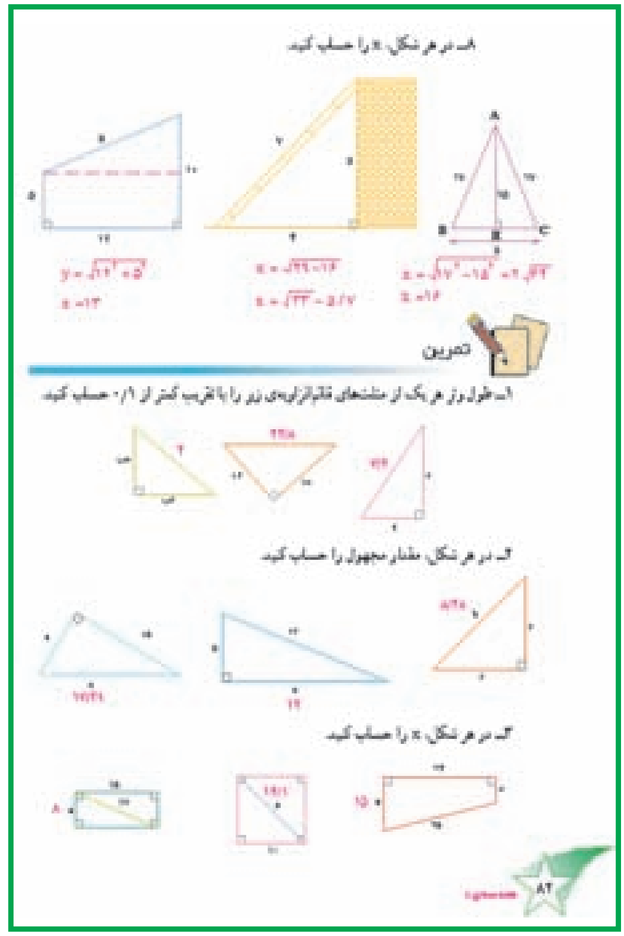


$$x^۲ + ۵^۲ = ۱۳^۲ \Rightarrow x = ۱۲$$

یا:



$$x^۲ = ۳^۲ + ۴^۲ \Rightarrow x = ۵$$




حل مسئله

۱ـ اندازه‌ی هر ضلع یک مثلث متساوی‌الاضلاع، ۸ سانتی‌متر است. طول ارتفاع این مثلث را حساب کنید و مساحت آن را به‌دست آورید. (راهنمایی : ارتفاع نظیر هر ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع، آن ضلع را نصف می‌کند.)

۲ـ مستطیلی است به ابعاد ۴۰ سانتی‌متر و ۱۵ سانتی‌متر ؛ اندازه‌ی قطر آن چند سانتی‌متر است؟ ۴۵

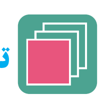
۳ـ راننده‌ای با اتومبیل خود از شهر A حرکت کرد. پس از طی ۸۰ کیلومتر به طرف شرق، ۶۰ کیلومتر نیز به طرف شمال رانندگی کرد و به شهر B رسید. فاصله‌ی دو شهر A و B به‌صورت مستقیم چند کیلومتر است؟ ۱۰۰

۴ـ اندازه‌ی قطرهای یک لوزی ۲۸ سانتی‌متر و ۲۱ سانتی‌متر است. اندازه‌ی هر ضلع آن چند سانتی‌متر است؟ ۱۷/۵

۵ـ در یک دایره، وتری به طول ۵۶ سانتی‌متر رسم کرده‌ایم. اگر فاصله‌ی مرکز دایره تا وتر ۲۱ سانتی‌متر باشد، شعاع دایره را حساب کنید. (راهنمایی : در هر مثلث متساوی‌الساقین ارتفاع وارد بر قاعده، قاعده را نصف می‌کند.) ۳۵

۶ـ شکل بعدی کدام است؟

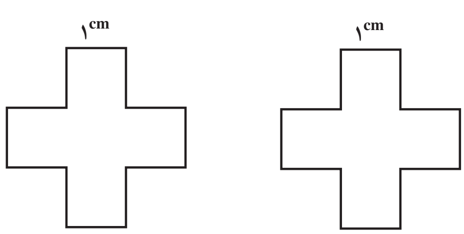
ــ برخی از دانش‌آموزان جذرگرفتن پایانی را فراموش می‌کنند و یا به توان رساندن اول عملیات را انجام نمی‌دهند. تأکید بر کنترل مراحل کار از بروز این اشتباهات جلوگیری می‌کند.

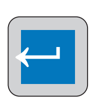


توسعه:

حل این مسئله درکلاس جالب و مفید خواهد بود (سعی کنید مراحل حل مسئله درکلاس بررسی شود و راهبرد مورداستفاده بیان گردد).

می‌خواهیم با دو قطعه‌ی زیر یک مربع بسازیم ؛ ضلع مربع چه‌قدر باید باشد؟با استفاده از رابطه‌ی فیثاغورس و تنها با دو برش روی یکی از قطعات و کنار هم گذاشتن قطعه‌ها مربع را بسازید.





فعّالیّت خارج از کلاس:

از دانش‌آموزان بخواهید در اطراف خود مثلث‌های قائم‌الزاویه را بیابند و درستی رابطه‌ی فیثاغورس را در آن‌ها بررسی کنند. سپس، به کمک نمونه‌های یافته شده مسائل کاربردی طراحی کنند و درکلاس ارائه نمایند.

یادداشت معلم

دوران

موضوعات در یک نگاه

مفهوم دَوَران و پیدا کردن و تشخیص شکل دوران یافته به صورت‌های مختلف در مطالب جنبی ریاضی ابتدایی و راهنمایی وجود داشته است. در این درس، ضمن معرفی نمادهای دوران و اثری که هر یک روی شکل می‌گذارند، مجموعه‌ی دوران‌های یک شکل بررسی می‌شود.

اهداف

در فرایند آموزش این درس، انتظار می‌رود هر دانش‌آموز به هدف‌های زیر برسد.

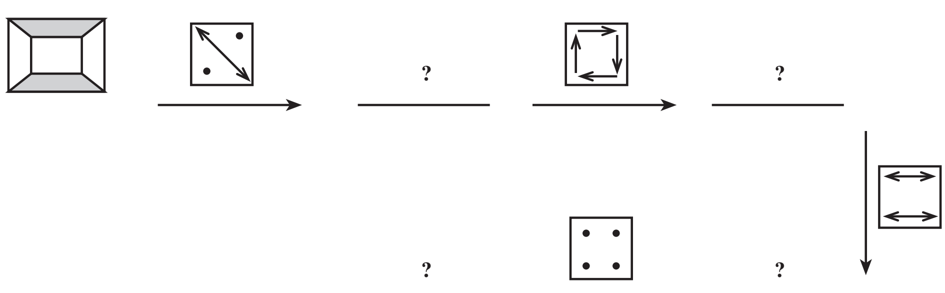
۱ــ مفهوم دوران را درک کند و زاویه و محور (مرکز) دوران را تشخیص دهد.

۲ــ نمادهای دوران را بشناسد و دورانی را که هرکدام روی شکل انجام می‌دهد، تشخیص دهد.

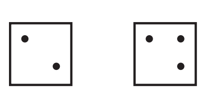
۳ــ مجموعه دوران‌های یک شکل را پیدا کند.

نمونه‌ی سؤال برای ارزش‌یابی

۱ــ با توجه به نمادهای دوران داده شده، شکل نهایی را پیدا کنید.



۲ــ مجموعه دوران‌های شکل‌های زیر را پیدا کنید.



یادداشت معلم

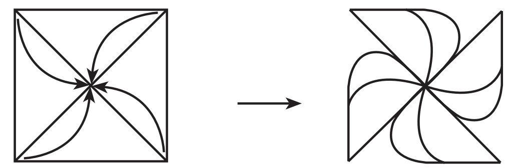
شناسنامه‌ی مبحث دوران

درس‌ها	صفحات	مفاهیم و محتوا	هدف‌ها	فعالیت‌ها	پیش‌بینی امکانات	واژگان
نمادهای دوران	۸۴ ۸۵	ــ مفهوم دوران ــ نمادهای دوران	ــ مفهوم دوران را درک کند. ــ زاویه‌ی دوران و محور (مرکز) دوران را تشخیص دهد. ــ نمادهای دوران رابشناسد. ــ صورت دوران یافته‌ی هر شکل را نسبت به دوران داده شده پیدا کند.	ــ مطالعه‌ی متن و درک نمادها ــ انجام دادن کار در کلاس برای درک اثر هریک ازدوران‌ها روی شکل	چند شکل برای نمایش دوران‌ها	دوران مرکز دوران محور دوران ساعت دوار
مجموعه‌ی دوران‌های یک شکل	۸۶ ۸۷	مجموعه‌ی دوران‌ها	ــ مجموعه دوران‌های یک شکل رابنویسد.	ــ مطالعه‌ی متن برای فهم تعریف مجموعه دوران‌های یک شکل	چند شکل برای پیدا کردن مجموعه دوران‌ها	مجموعه دوران

نمادهای دوران

ایجاد انگیزه کنید:

ــ دستور ساخت فرفره را با کاغذ سفید به دانش‌آموزان آموزش دهید. سپس، از آن‌ها بخواهید فرفره بسازند و پره‌های آن را رنگ‌آمیزی کنند.



ــ یک مربع با چهارگوشه‌ی رنگی را در کلاس آماده کنید و از دانش‌آموزان بپرسید : چگونه می‌توانید آن را بچرخانید و در هر حالت پیش‌بینی کنید که چه خواهد شد.

ــ از دانش‌آموزان بخواهید مثال‌هایی از چرخش را درزندگی روزمره بیان کنند ؛ مثل چرخش فرش و یکسان کردن خواب آن، کپی گرفتن (مخصوصاً کپی دورو) یا قراردادن اجزای مختلف یک وسیله‌ی برقی روی هم و مثال‌های دیگر.

شروع کنید:

در ادامه‌ی ایجاد انگیزه در کلاس، چند نمونه از علامت‌های دوران را معرفی کنید. سپس، از هر گروه بخواهید علامت‌های چرخش‌های دیگررا که خودشان پیدا کرده‌اند، طراحی کنند. از هر گروه بخواهید یک مربع یا چهار گوشه ی دیگر را در حالت‌های مختلف بچرخانند و دوران دهند و برای هرحرکت یک علامت قرار دهند. پس از بررسی نظریات گروه‌ها در کلاس، از دانش‌آموزان بخواهید به پرسش‌های صفحات ۸۴ و ۸۵ کتاب درسی به دقت پاسخ دهند.

هدف فعالیت:

هدف اصلی این فعالیت، آشنایی با انواع دوران و علامت‌های آن است که به همراه یک بار تجربه‌ی ذهنی هریک از آن‌هاست.


دوران

نمادهای دوران

به شکل‌های بالا توجه کنید: اگر شکل سمت چپ در جهت حرکت عقربه‌های ساعت (ساعتگرد) حول مرکز مربع به اندازه‌ی ۹۰° دوران کند، شکل سمت راست به‌دست می‌آید.

نماد این دوران را نشان می‌دهد.

در هر یک از شکل‌های زیر، به دوران داده‌شده توجه کنید. مانند نمونه، مرکز (یا محور) دوران و زاویه‌ی آن را مشخص کنید.

مرکز دوران: مرکز شکل
زاویه‌ی دوران: ۹۰°

۸۴

توصیه‌های آموزشی:

ــ از دانش‌آموزان بخواهید حتماً ازمداد رنگی استفاده کنند.

ــ توضیح در مورد علت درستی جواب و تجسم آن بسیار مناسب است.

ــ از دانش‌آموزان بخواهید بین نماد هر دوران و مفهوم آن ارتباطی را کشف کنند تا همیشه در یادشان بماند.

ــ عبارت‌های چرخش در «جهت عقربه‌های ساعت» و «خلاف جهت عقربه‌های ساعت» را در کلاس به کار برید و کاربرد آن‌ها را در مثلاً باز شدن شیر آب و باز شدن پیچ و … بررسی کنید.

فعالیت موازی:

نمادها را طوری طراحی کنید که پس از چهار دوران، شکل اولیه به‌دست آید.

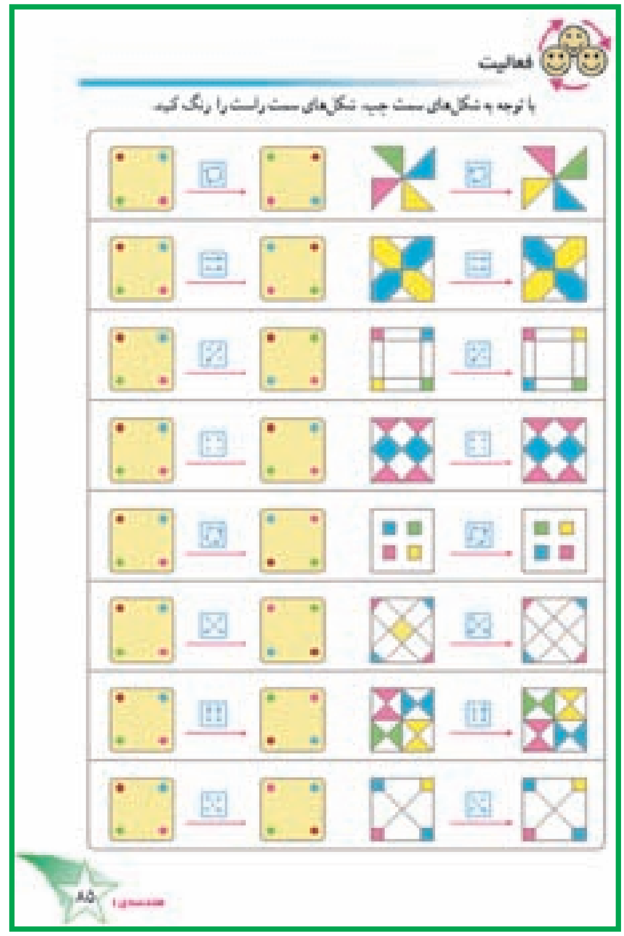
هرچند حالت را که می‌توانید، طراحی کنید.

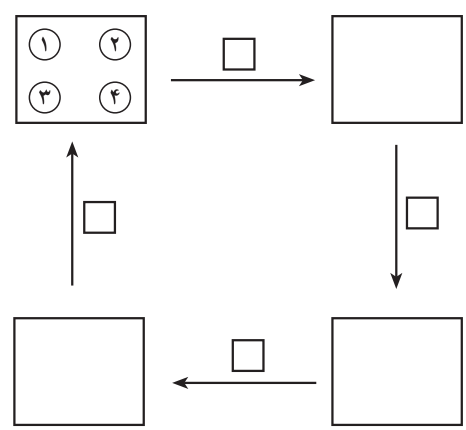
توسعه:

با گروه‌های چهارنفره، مسابقه‌ای ترتیب دهید. هر چهار نفر روی رأس‌های یک مربع با ضلع ۰/۵ متر در حیاط مدرسه بایستند. با فرمان شما هر گروه مثلاً دوران ۹۰ درجه‌ی مرکزی ساعت‌وار انجام دهند. اگر حرکت‌های گروه هماهنگ باشد، امتیاز مثبت خواهد داشت.

فعّالیّت خارج از کلاس:

از دانش‌آموزان بخواهید که در فعالیت‌های روزمره، کاربردهای دوران را پیدا کنند. اجسام مختلف را در اطراف خود درنظر بگیرند و دوران‌های مختلف را بر روی آن‌ها بررسی کنند.





یادداشت معلم

مجموعه‌ی دوران‌های یک شکل

ایجاد انگیزه کنید:

یک شکل را در کلاس رسم کنید. از دانش‌آموزان بخواهید تمامی حالت‌های دورانی را که ظاهر این شکل را تغییر نمی‌دهند، پیدا کنند. سپس، شکلی رسم کنند که بیش‌ترین حالت دوران بدون تغییر را داشته باشد.

شروع کنید:

پس از بحث در باره‌ی مثال‌ها، قرارداد مجموعه دوران‌های یک شکل را در کلاس معرفی کنید. سپس، از دانش‌آموزان بخواهید مثال‌هایی را طراحی کرده و مجموعه‌ی دوران‌های هر یک را رسم نمایند.

توصیه‌های آموزشی:

هدف اصلی تمرین‌های این قسمت، تجسم ذهنی پس از دوران توسط دانش‌آموزان است. در تمرین سوم، هدف ترکیب چند دوران با هم و ساخت یک دوران دیگر مورد بررسی قرار می‌گیرد.

فعّالیّت خارج از کلاس:

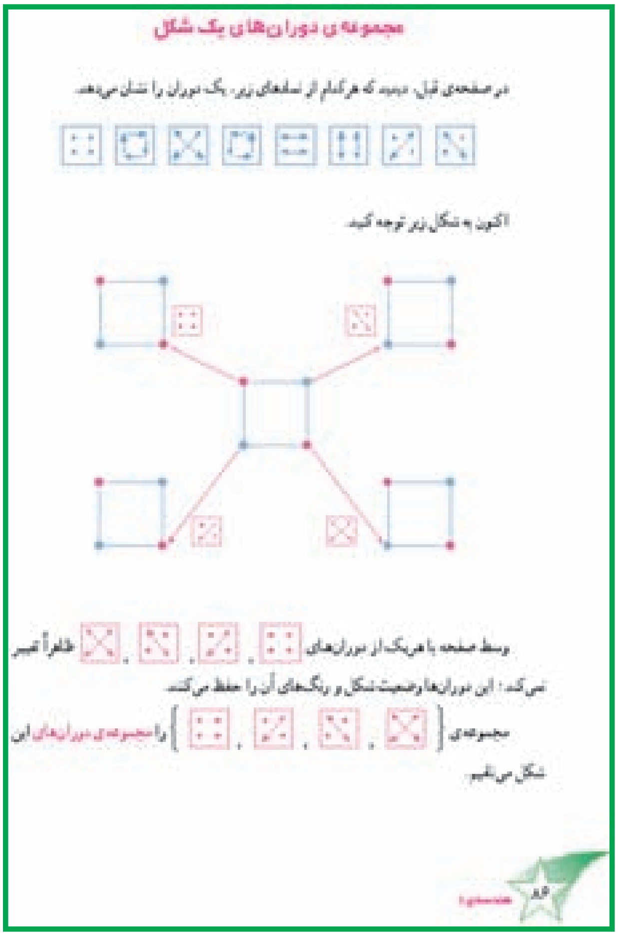
ــ از دانش‌آموزان بخواهید شکل‌های متقارن اطراف خود ــ مثلاً کاشی‌های سنتی یا رومیزی و ... ــ را پیدا کنند و مجموعه دوران‌های آن‌ها را بنویسند.

ــ از دانش‌آموزان بخواهید که در مورد چگونگی ترسیم نقوش سنتی تحقیق کنند.

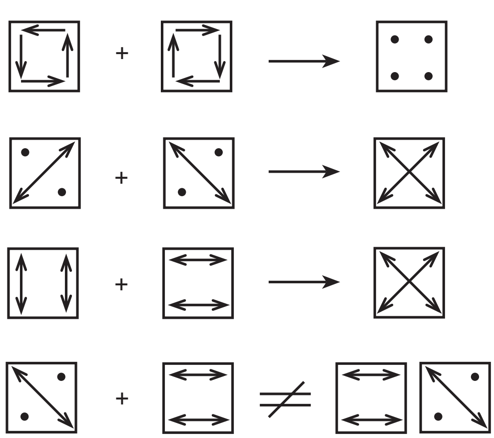
ــ از دانش‌آموزان بخواهید دوران‌های دیگری را پیشنهاد کنند و برای آن‌ها علامت معرفی نمایند.

توسعه:

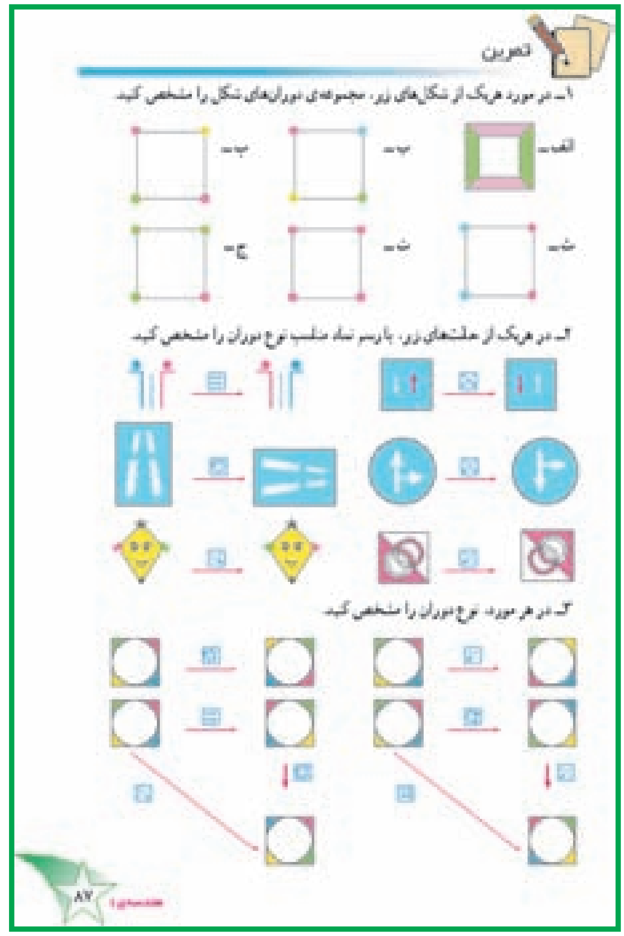
بحث درباره‌ی تلفیق نمادها و ترتیب نمادها در نتیجه‌ی دوران، می‌تواند مسیر خوبی برای توسعه باشد.



مثال:



ازدانش‌آموزان بخواهید مثال‌های دیگری را تولید کنند.


تمرین

۱ـ در مورد هریک از شکل‌های زیر، مجموعه‌ی دوران‌های شکل را مشخص کنید.

الف ـ ب ـ پ ـ ت ـ ث ـ ج ـ

۲ـ در هریک از حلقه‌های زیر، با رسم نماد مناسب نوع دوران را مشخص کنید.

۳ـ در هر مورد، نوع دوران را مشخص کنید.

۸۷

استفاده از ابزار و تکنولوژی:

در برخی از نرم‌افزارهای گرافیکی یا کاربردی، می‌توانید علائم دوران را پیدا کنید. از دانش‌آموزان بخواهید مثال و کاربرد آن را بیابند.


رسم ۴

الف ـ با توجه به شکل نهایی، در قسمت زیر رسم را انجام دهید و شکل را کامل کنید.

۱ـ مربعی به ضلع ۱۶ سانتی‌متر در وسط کاغذ رسم کنید.
۲ـ وسط هریک از ضلع‌های مربع را به‌دست آورید.
۳ـ هر رأس مربع را به وسط‌های دو ضلعی که این رأس بر آن‌ها قرار ندارد، وصل کنید.
۴ـ وسط‌های اضلاع را نیز به یکدیگر وصل کنید.
۵ ـ خطوط اضافی را پاک کنید.

شکل نهایی

ب ـ به نظر شما نکات مهم این رسم چیست؟ در این مورد، قبل و بعد از کشیدن رسم در کلاس، با دوستان خود گفت‌وگو کنید.

۸۸

رسم ۴

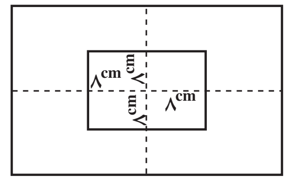
معمای اصلی این رسم، پیدا کردن الگوی آن است. احتمالاً دانش‌آموزان از حل کردن این معما لذت خواهند برد. پیش‌بینی می‌شود که دانش‌آموزان الگوهای مشابهی را نیز ارائه دهند.

شروع کنید:

از دانش‌آموزان بخواهید قسمت الف را به دقت تکمیل کنند. پیچیدگی اصلی این رسم پیدا کردن الگوی آن است. اگر در کلاس این مسئله کمی مشکل به‌نظر می‌رسد، از دانش‌آموزان بخواهید که آن را به صورت گروهی حل کنند. به دانش‌آموزان توصیه کنید که به کمک شکل نهایی پایین صفحه، نظم خطوط اصلی را بیابند و در این مورد با یک‌دیگر بحث کنند. از آن‌ها بخواهید کلیه‌ی خطوط را به چند دسته خط تقسیم کنند که هر دسته حاوی خطوط مشابه رسم باشد.

طریقه‌ی کشیدن رسم

ابتدا باید یک کادر مربع شکل با ضلع ۱۶ سانتی‌متر رسم شود. برای یادآوری، می‌توان از بیان دانش‌آموزان استفاده کرد. یکی از روش‌های مناسب به کمک شکل مقابل بیان شده است.



در این رسم، سه دسته خط وجود دارد: دسته‌ی اول خطوطی هستند که از چهار گوشه به وسط دو ضلع مقابل هر گوشه کشیده شده‌اند. دسته‌ی دوم، خطوطی هستند که وسط هر ضلع را به اضلاع مجاور آن متصل می‌کنند و دسته‌ی سوم، پاره‌خط‌های کوتاهی هستند که از وسط ضلع به محل برخورد خطوط دسته‌ی اول وصل می‌شوند.

با رسم این سه دسته خط، کشیدن رسم پایان می‌یابد.

این رسم به‌جز در هنگام کشیدن کادر، خطوط اضافی ندارد.

نکات مهم رسم

ــ محل برخوردها در این رسم باید یک نقطه و دقیق باشد؛ به طوری که در محل برخورد، مثلث‌های کوچک به‌وجود نیاید.

ــ این رسم به‌جز در هنگام کشیدن کادر، خطوط اضافی دیگری ندارد؛ بنابراین، انتظار می‌رود که بیشتر دانش‌آموزان رسم‌های تمیزی به معلم تحویل دهند.

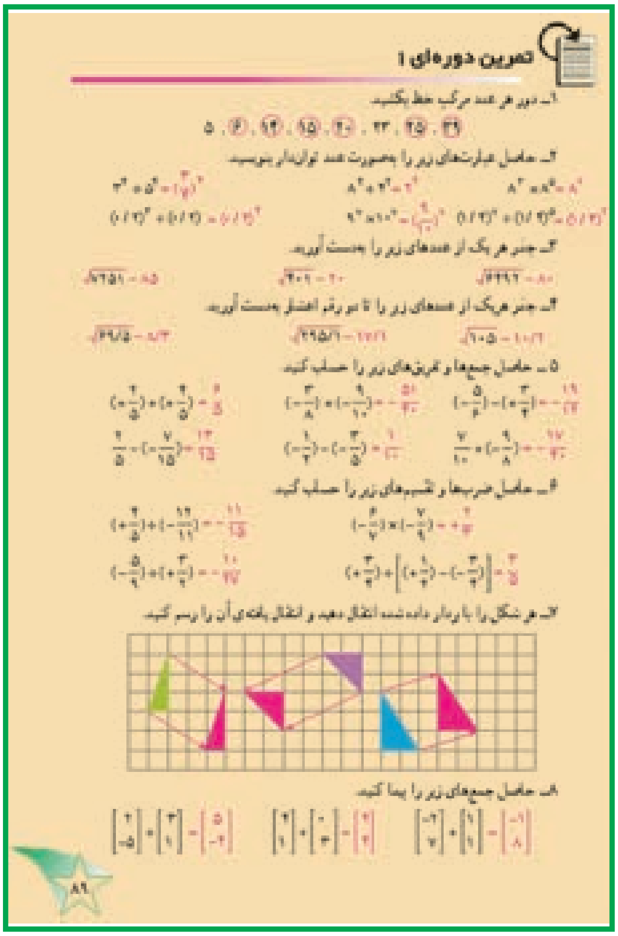
ــ یک‌نواخت بودن خطوط در زیبایی این رسم اهمیت ویژه‌ای دارد.

ــ کشیدن این رسم، به دانش‌آموزان ضعیف‌تر انگیزه‌ی فعالیت را می‌دهد.

توسعه:

این رسم از اتصال هماهنگ تعدادی نقاط مهم در حاشیه‌ی مربع به‌وجود آمده است. با تغییر ترتیب وصل کردن آن‌ها به هم یا جابه‌جایی یا ایجاد نقاط جدید می‌توان الگوهای جدیدی را به‌وجود آورد.

از دانش‌آموزان بخواهید به کمک خلاقیت خود الگوهای تازه‌ای ایجاد کنند و رسم‌های جدیدی بکشند.



نکاتی درباره‌ی تمرین دوره‌ای ۱

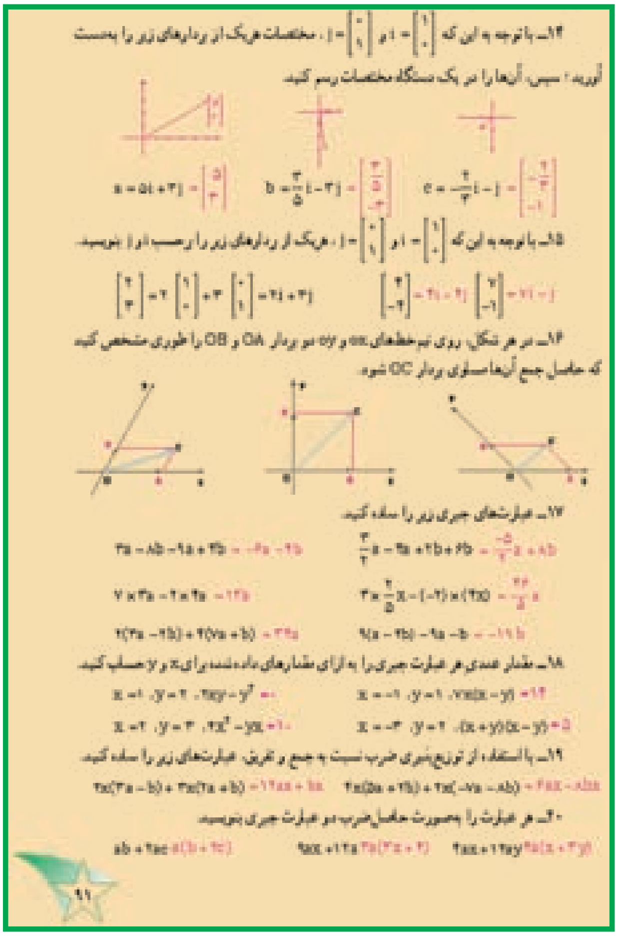
هدف از تمرین‌های این قسمت، دوره‌ی مطالب آموزش داده شده در نیم سال اول است. این تمرین‌ها دانش‌آموزان را برای امتحان پایانی نیم‌سال اول آماده می‌کنند. هدف‌ها و توصیه‌های خاص مربوط به بعضی از تمرین‌ها در زیر آمده و سپس، تمرینات تکمیلی ارائه شده است.

۱ــ در تمرین ۱۲، توجه دانش‌آموزان را به این توضیح جلب کنید که در ضرب $\frac{۸}{۵}\begin{bmatrix}۳\\۱\end{bmatrix}$ عدد ۳ $\times\frac{۸}{۵}$ و ۱$\times\frac{۸}{۵}$ می‌شود.

در این‌گونه تمرین‌ها، دانش‌آموزان به اشتباه ۳ را در ۸ و ۱ را در ۵ ضرب می‌کنند.

یادآوری ضرب یک کسر در عدد در حل این تمرین توصیه می‌شود.

۲ــ در حل قسمت‌های مختلف تمرین ۱۸ ترتیب انجام دادن عملیات را یادآوری و بر آن تأکید کنید.



۳ــ در تمرین ۲۱ حروف به گونه‌ای انتخاب شده‌اند که دانش‌آموزان را از حالت‌های کلیشه‌ای خارج می‌کند.

۴ــ در تمرین ۲۲، یادآوری ضرب طرفین معادله در مخرج مشترک کسرها توصیه می‌شود.

۵ــ در تمرین ۲۸ یکی از کاربردهای رابطه‌ی فیثاغورس را در طرح یک مسئله می‌توان مطرح کرد.

۶ــ در تمرین‌هایی که به عنوان حل مسئله مطرح شده‌اند، نمونه‌هایی از کاربرد تشکیل معادله و روش‌های دیگر حل مسئله را مشاهده می‌کنیم.

تمرین‌های تکمیلی دوره‌ای ۱

۱ــ حاصل عبارت‌های زیر را به صورت عدد توان‌دار بنویسید.

۱) $۲۷^{۴} \times ۹^{۳} \times ۳^{۲}$

۲) $(۰/۸)^{۵} \times (\frac{۴}{۵})^{۳} \times (\frac{۴}{۵})$

۳) $\frac{۲^{۹} \times ۵^{۱۰}}{۲^{۷} \times ۵^{۸}}$

۴) $\frac{۷^{۶} \times ۲^{۵}}{۷^{۸} \times ۲^{۳}}$

۵) $\frac{۱۰^{۶} \times ۱۰^{۳}}{۲^{۹}}$

۶) $۲^{۹} \times ۳^{۵} \times ۲^{۲} \times ۳^{۶}$

۲ــ حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

۱) $(-۱۰)^{۳} \div ۲^{۲} \times (-۱)^{۴}$

۲) $\dfrac{(-۱)^{۴}+(-۲)^{۳}+۵}{(-۳)^{۲}-(۰۷)}$

۳ــ آیا عدد ۱۳۱ اوّل است؟ چرا؟

۴ــ حاصل کسرهای زیر را به‌دست آورید.

۱) $\dfrac{-۲\frac{۳}{۵}+۲\frac{۱}{۳}}{-۳\frac{۵}{۶}+۳\frac{۳}{۴}}$

۲) $۱۰۰\frac{۵}{۵}+۲۰۰\frac{۶}{۶}-۳۰۰\frac{۷}{۷}$

۳) $۳\times\sqrt{۹}-۴\times\sqrt{۲۵}+\sqrt{۱۶+۹}$

۴) $۷-\sqrt{۲}\times\sqrt{۸}$

۵) $\sqrt{۲۵}\div\sqrt{۹}\times\sqrt{۴}$

۵ــ مجموعه‌ی $\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,\cdots,۱۰\}$ دارای چند عدد مرکب است؟

۶ــ در مجموعه‌ی $\{۱,۱۱,۲۱,۳۱,۴۱,۵۱,۶۱,۷۱,۸۱,۹\}$ دور اعداد اوّل دایره بکشید.

۷ــ معادله‌های زیر را حل کنید.

۱) $\dfrac{۳۸-۴}{۸}=\dfrac{۵x-۱}{۳}$

۲) $۳\begin{bmatrix}-۲\\ ۵\end{bmatrix}+۵x=\begin{bmatrix}۲\\ ۱\end{bmatrix}$

۳) $x^{۲}=۴$

۴) $۳^{۲x+۱}=۹$

۵) $۷\times ۲^{x}-۴\times ۲^{x}=۳$

۶) $۲^{۳x+۱}=۱$

۸ــ آیا $x=-۱$ جواب معادله‌ی $x^{۳}+۳x^{۲}-۴x=۱$ است؟ چرا؟

۹ــ آیا صفر جواب معادله‌ی $x^{۸}-x^{۷}+۵x^{۶}=۰$ است؟ چرا؟

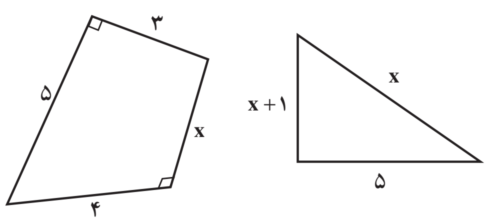
۱۰ــ بردار $\begin{bmatrix}۳\\ ۴\end{bmatrix}$ ابتدا در مبدأ را رسم کنید. بردار $\begin{bmatrix}-۲\\ -۱\end{bmatrix}$ ابتدا در مبدأ را رسم کنید.

الف) برای هر یک، جمع متناظر بنویسید.

ب) برای دو بردار جمع برداری بنویسید.

پ) با رسم بردار حاصل‌جمع و به کمک قسمت ب، درباره‌ی درستی پاسخ‌های خود تحقیق کنید.

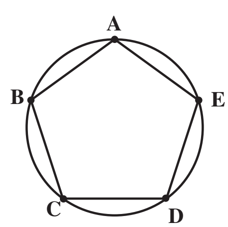
۱۱ــ در شکل‌های زیر، مقدار مجهول را به‌دست آورید.



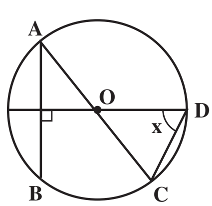
۱۲ــ شکل زیر، پنج ضلعی منتظم است ؛ مقادیر خواسته شده را به‌دست آورید.

$\hat{A}=$

$\overset{\frown}{AED}=$



۱۳ــ شخصی تعدادی سکه‌ی ۱ ریالی، ۲ ریالی، ۵ ریالی، ۱۰ ریالی و ۵۰ ریالی به مبلغ ۲۰۴ ریال دارد. اگر تعداد انواع سکه‌ها با هم برابر باشند، مقدار همه‌ی سکه‌ها چند عدد است؟



۱۴ــ اگر O مرکز دایره و کمان AB برابر ۱۲۰° باشد، مقدار زاویه‌ی x را به‌دست آورید.

۱۵ــ در شکل‌های زیر، مقدار x را محاسبه کنید.