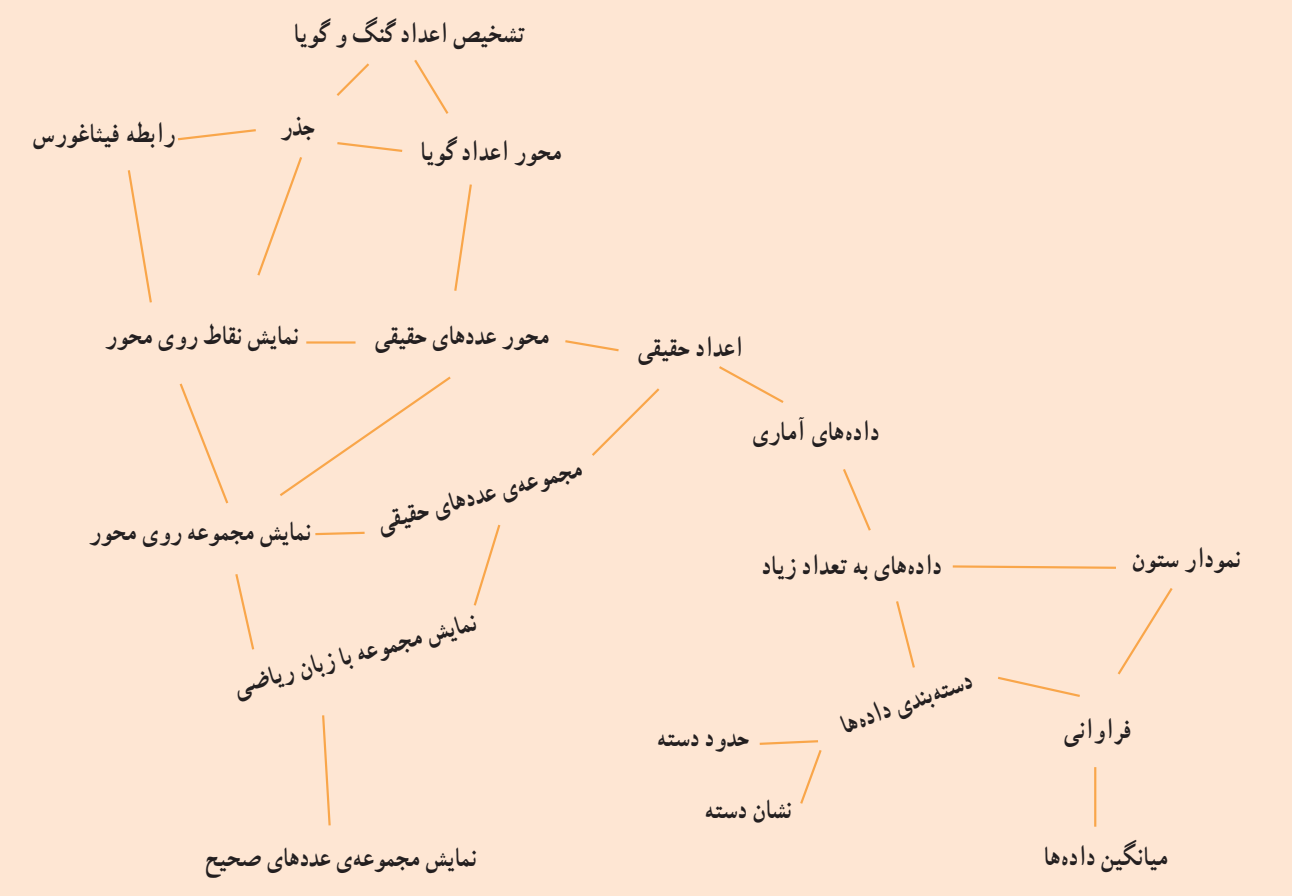
فصل چهارم

اعداد حقیقی و آمار

این فصل شامل دو موضوع اصلی است ؛ در قسمت اول، محور عددهای حقیقی، تشخیص اعداد گنگ و گویا، پیدا کردن عددهای حقیقی روی محور آموزش داده می‌شود. در آموزش این درس از موضوع جذر استفاده می‌شود اما به‌طورکلی، این درس برای دانش‌آموزان تازگی دارد. در قسمت دوم، موضوع آمار تدریس می‌شود. تمام مفاهیم این درس در کلاس اول راهنمایی آموزش داده شده‌اند اما در آن‌جا تعداد داده‌ها محدود بوده است. در کلاس سوم، موضوع آمار با تعداد داده‌های زیاد و لزوم دسته‌بندی برای دانش‌آموزان تازگی دارد. همچنین نحوه‌ی پیدا کردن میانگین از موضوعات مهم به شمار می‌رود. مفاهیم و محتوای این فصل به‌صورت زیر با هم در ارتباط‌اند.



وقتی با داده‌های آماری سروکار داریم، داده‌ها می‌توانند از مجموعه‌های مختلف اعداد باشند ؛ حتی اعداد حقیقی. البته ممکن است به جهت نیازها و هدف‌های کار آماری موردنظر، از داده‌های تقریبی استفاده کنیم اما لازم است دانش‌آموزان درک درستی از اعداد حقیقی داشته باشند.

قسمت اعداد حقیقی بیشتر به درس‌ها و فصل‌های گذشته مربوط می‌شود ؛ برای مثال، استفاده‌ی زیاد از رابطه‌ی فیثاغورس در پیدا کردن نقطه‌ی نمایش عددهای حقیقی و

همچنین درس جذر و محاسبه‌ی جذر دقیق و تقریبی در پیدا کردن تعداد تقریبی عددهای حقیقی. همچنین، می‌توان به نمایش مجموعه‌ی عددهای حقیقی به زبان ریاضی اشاره کرد که ارتباط زیادی با همین موضوع در قسمت مجموعه‌ی عددهای صحیح دارد. هدف از بیان این ارتباط‌ها، آشنا کردن دانش‌آموزان با این موضوع است که مفاهیم و محتوای ریاضی همه با هم در ارتباط‌اند و نباید آن‌ها را جدا از هم تصور کرد.

زمان‌بندی

ماه بهمن

هفته‌ی اول: نمایش عددهای حقیقی، محور اعداد حقیقی

هفته‌ی دوم: نمودار ستونی ــ میانگین داده‌های محدود

هفته‌ی سوم: میانگین داده‌ها با تعداد زیاد

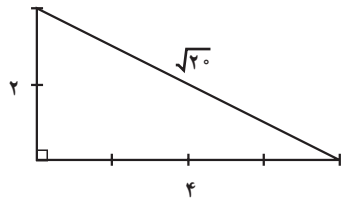
همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، این فصل کوتاه است و برای تدریس آن حداکثر سه هفته کافی است. این سه هفته فرصت خوبی است تا در صورتی که از درس‌های قسمت اول کتاب مطلبی باقی مانده است، جبران شود. همچنین، باید پیش آمدن تعطیلات اتفاقی و موردی را نیز در نظر گرفت.

نمونه‌ی سؤال برای مشخص کردن ارتباط‌ها

۱ــ با توجه به واحد داده شده و نمونه‌ی نوشته شده، پاره‌خط‌هایی به طول‌های $\sqrt{۱۸}$ ، $\sqrt{۱۷}$ و $\sqrt{۲۷}$ پیدا کنید.

۱ واحد

$$\sqrt{۲۰} = \sqrt{۴+۱۶} = \sqrt{۲^۲ + ۴^۲}$$



۲ــ مقدار تقریبی هر یک از عددهای حقیقی زیر را با تقریب کم‌تر از ۰/۱ به‌دست آورید.

$\sqrt{۵} - ۱ =$, $\sqrt{۳} + \sqrt{۲}$, $\sqrt{۶} - \sqrt{۸}$, $۱ + ۲\sqrt{۳}$

$۱ - \sqrt{۵}$, $\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$, $۰/۵ - \frac{\sqrt{۵}}{۲}$

۳ــ مجموعه‌های زیر را با دقت روی محور اعداد نمایش دهید.

$\{x | -۲ < x \leq \sqrt{۲}\}$

$\{x | x \in z \ -۲ \leq x < ۵\}$

یادداشت معلم

مجموعه‌ی عددهای حقیقی

موضوعات در یک نگاه

تا این صفحه از کتاب، دانش‌آموزان با عددهای حقیقی سروکار داشته‌اند اما آن‌ها را به این نام نمی‌شناسند. درس با معرفی محور اعداد حقیقی و نمایش نقاط مربوط به اعداد حقیقی روی محور شروع می‌شود و محور اصلی آن، تشخیص اعداد گنگ و گویاست. در ادامه، کاربرد رابطه‌ی فیثاغورس در پیدا کردن طول‌هایی با اندازه‌ی اعداد حقیقی مطرح می‌شود و در درس بعدی، نمایش مجموعه‌های اعداد حقیقی با زبان ریاضی و روی محور آموزش داده می‌شود.

اهداف

در فرایند آموزش این درس، انتظار می‌رود هر دانش‌آموز به هدف‌های زیر برسد.

۱ــ مجموعه اعداد حقیقی را بشناسد و آن‌ها را روی محور مشخص کند.

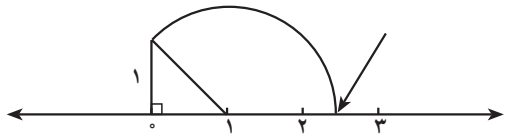
۲ــ از رابطه‌ی فیثاغورس برای پیدا کردن طول‌هایی با اندازه‌ی عددهای گویا استفاده کند.

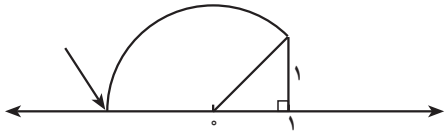
۳ــ مجموعه‌های اعداد حقیقی را با زبان ریاضی مشخص کند.

۴ــ مجموعه‌های اعداد حقیقی را روی محور اعداد نشان دهد.

نمونه‌ی سؤال برای ارزش‌یابی

۱ــ در هر یک از شکل‌های زیر، نقاط مشخص شده چه عددی را نشان می‌دهند؟





۲ــ مجموعه‌های زیر را روی محور اعداد مشخص کنید.

$\{x \mid -۲ \leq x < \sqrt{۲}\}$

$\{x \mid x \geq \sqrt{۲}\}$

۳ــ حاصل تقریبی هر یک از عبارت‌های عددی را مشخص کنید.

$\sqrt{۲} + \sqrt{۳}$ $\qquad$ $\sqrt{۵} - ۱$

یادداشت معلم

شناسنامه‌ی مبحث مجموعه‌های عددهای حقیقی

درس‌ها	صفحات	مفاهیم و محتوا	هدف‌ها	فعالیت‌ها	پیش‌بینی امکانات	واژگان
نمایش عددهای حقیقی	۹۴ ۹۵ ۹۶	مجموعه عددهای حقیقی پیدا کردن عددهای حقیقی روی محور	ــ مجموعه عددهای حقیقی را بشناسد و عددهای حقیقی را تشخیص دهد. ــ با استفاده از رابطه‌ی فیثاغورس، پاره‌خط‌هایی به طول عددهای حقیقی را پیدا کند. ــ تفاوت عددهای گنگ و گویا را درک کند.	ــ مطالعه‌ی متن در مورد مجموعه عددهای حقیقی ــ انجام دادن کار در کلاس برای تمرین پیدا کردن عددهای حقیقی روی محور	پرگار خط‌کش	عدد حقیقی گنگ اصم
محور عددهای حقیقی	۹۶ ۹۷ ۹۸	نمایش روی محور اعداد زبان ریاضی برای بیان مجموعه‌ی عددهای حقیقی	ــ مجموعه‌های عددهای حقیقی را به زبان ریاضی بیان کند. ــ مجموعه‌های عددهای حقیقی را با به‌کار بردن نمادها و قواعد، روی محور اعداد نشان دهد.	مطالعه‌ی متن و پاسخ دادن به سؤال‌ها ــ انجام دادن کار در کلاس برای پیدا کردن مجموعه‌های عددهای حقیقی روی محور با زبان ریاضی	خط‌کش	متوالی

مجموعه‌ی عددهای حقیقی

پیروان فیثاغورس، فیلسوف و ریاضی‌دان سده‌ی پنجم پیش از میلاد، برای عدد، ارزش و اهمیت زیادی قائل بودند. آن‌ها طول، سطح، حجم، زمان و وزن را با عدد بیان می‌کردند و حتی معتقد بودند که پدیده‌های معنوی ــ مانند غم و شادی ــ را هم می‌توان با عدد نشان داد. فیثاغورس، پاره‌خط راست را حاصل کنار هم قرار گرفتن نقطه‌ها می‌دانست و از آن‌جا که نقطه‌ها را می‌توان شمرد، معتقد بود که طول هر پاره‌خط راست اندازه‌پذیر است.

افلاطون که خود یکی از هواداران فلسفه‌ی فیثاغورس است، در کتاب «جمهور» از «معجزه»ی عدد سخن می‌گوید و معتقد است که به یاری عدد می‌توان زندگی آینده را پیش‌بینی کرد.

از طرف دیگر، ریاضی‌دانان یونان باستان، عدد را نسبت دو عدد طبیعی می‌شناختند و گمان می‌کردند که هر عددی را می‌توان به یاری نسبت دو عدد طبیعی نشان داد.

وقتی قضیه‌ای را که خود فیثاغورس یا یکی از هواداران او در مثلث قائم‌الزاویه کشف کرد، برای نمونه از بیان قطر مربعی که ضلع آن برابر واحد باشد، در ماندند، ــ این قطر، عددی گنگ و برابر $\sqrt{۲}$ است ــ فیثاغورسیان پدیده‌های طبیعت را به دو گونه تقسیم کردند : «گویا» و «گنگ» ؛ یعنی، آن‌ها که با عدد قابل بیان‌اند و آن‌ها که با عدد قابل بیان نیستند. اصطلاح «گویا» و «گنگ» هنوز هم باقی است.

از طرف دیگر، می‌توان عددها را با نقطه‌های واقع بر یک خط راست، متناظر کرد. با عددهای گویا نمی‌توان تمامی خط راست را پر کرد. خیام نخستین کسی بود که عدد را به صورت نقطه‌ای که بر خط راست حرکت می‌کند، تعریف کرد. او با وارد کردن حرکت به قلمرو هندسه، توانست معنای عدد حقیقی را به ما نشان دهد.

با پیوستن عددهای گنگ رادیکالی نیز، خط راست پر نمی‌شود. از این‌جا عددهای گنگِ غیرجبری، مانند عدد پی (π) پیدا شدند ولی در نیمه‌ی دوم سده‌ی نوزدهم سرانجام، غیرجبری بودن عدد π ثابت شد. لیندمان، ریاضی‌دان آلمانی در سال ۱۸۸۲، غیرجبری بودن عدد π را ثابت کرد و روشن ساخت که هرگونه تلاشی برای رسم پاره‌خطی راست، به طول برابر π به یاری خط‌کش و پرگار، به نتیجه نمی‌رسد.

عدد گنگ را نمی‌توان به یاری نسبت دو عدد طبیعی نشان داد. $\frac{m}{n}$ را کسری ساده نشدنی ــ یعنی m و n را نسبت به هم اول ــ می‌گیریم ؛ یعنی، دو عدد m و n، بر هیچ عدد مشترکی جز واحد بخش‌پذیر نیستند. اگر $\sqrt{۲} = \frac{m}{n}$ ، یعنی $۲ = \frac{m^۲}{n}$ باشد، باید داشته باشیم :

$$m^۲ = ۲n^۲ \quad (۱)$$

پس m باید بر ۲ بخش پذیر باشد : $m = ۲k$. این مقدار m را، به‌جای m در رابطه‌ی (۱) می‌گذاریم :

$$۴k^۲ = ۲n^۲ \Rightarrow ۲k^۲ = n^۲$$

از برابری $n^۲ = ۲k^۲$ نتیجه می‌گیریم که n هم بر ۲ بخش‌پذیر است. m و n هر دو بر ۲ بخش‌پذیر شدند ؛ در حالی که آن‌ها را نسبت هم اول فرض کرده بودیم. این تناقض ثابت می‌کند که فرض ما که $\sqrt{۲}$ را برابر کسر $\frac{m}{n}$ گرفته بودیم، نادرست است. $\sqrt{۲}$ عددی گویا نیست.

یادداشت معلم

اعداد حقیقی و آمار

مجموعه‌ی عددهای حقیقی

نمایش عددهای حقیقی

نمایش عددهای حقیقی

ایجاد انگیزه کنید:

همان‌طورکه می‌دانید، اعداد گویا مانند ۱/۵، $\frac{۳}{۴}$ و ۳− را به راحتی می‌توان روی محور نشان داد. هر عدد گویا نشان دهنده‌ی یک نقطه روی محور است. در قسمت هندسه‌ی ۱ با رابطه‌ی فیثاغورس به وجود اعدادی مثل $\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۳}$ و ... پی بردیم. اکنون این سؤال پیش می‌آید که آیا مقدار دقیق اعداد مثل $\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۳}$ را می‌توان روی محور نشان داد.

شروع کنید:

مربعی به ضلع ۱ رسم کنید. اگر قطر آن را محاسبه کنید، به عدد $\sqrt{۲}$ می‌رسید. آیا می‌توانیم $\sqrt{۲}$ را روی محور نشان دهیم؟ برای این منظور، با توجه به متن کتاب در صفحه‌ی ۹۴ چگونگی نمایش $\sqrt{۲}$ را برای دانش‌آموزان توضیح دهید.

برای دانش‌آموزان توضیح دهید که $\sqrt{۲}$ عددی گویا نیست. دانش‌آموزان علّت این امر را در سال سوم دبیرستان فرا خواهند گرفت. البته در صفحات قبل نیز به‌طور شهودی در این مورد توضیح داده‌ایم.

توصیه‌های آموزشی:

۱ــ رابطه‌ی فیثاغورس را مجدداً یادآوری کنید و با دادن ضلع‌های زاویه‌ی قائمه، از دانش‌آموزان بخواهید طول وتر را به‌طور ذهنی محاسبه کنند.

۲ــ خواص دایره و یکسان بودن شعاع را در همه‌ی نقاط یادآوری کنید.

هدف کار در کلاس:

در تمرین ۱ کار در کلاس، دانش‌آموزان با نقطه‌ی نمایش عدد $\sqrt{۵}$ و $-\sqrt{۲}$ آشنا می‌شوند.

دانش‌آموزان در تمرین ۲، ایده‌ای برای نمایش نقطه نمایش‌های $\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۳}$ و $\sqrt{۵}$ و ... پیدا می‌کنند و توضیح رسم روی جلد کتاب را ملاحظه می‌کنند.

در تمرین ۳، نقطه‌ی نمایش $\sqrt{۲}+\sqrt{۵}$ را ملاحظه می‌کنند.

توصیه‌های آموزشی:

۱ــ برای دانش‌آموزان توضیح دهید که $۱+\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۲}+\sqrt{۳}$ عبارت‌هایی هستند که به همین شکل باقی می‌مانند و ساده‌تر نمی‌شوند ولی $۲\sqrt{۲}+۳\sqrt{۲}=۵\sqrt{۲}$ خواهد بود.

۲ــ برای نوشتن نقطه‌ی نمایش هر عدد، باید از ۰ محور شروع کرد و آن را نمایش داد ؛ مثلاً در تمرین ۳ کار در کلاس، با آیینه‌ی به مرکز A نیم دایره ترسیم شده است ولی عدد نمایش نقطه B $\sqrt{۲}+\sqrt{۵}$ است.

۳ــ تمرین ۳ کار در کلاس کمی مشکل است و باید درباره‌ی آن بیش‌تر توضیح دهید.

۴ــ در تمرین ۲ کار در کلاس، تأکید کنید که چون جواب‌ها به‌هم وابسته‌اند، دقت داشته باشند که در مراحل قبلی اشتباه نکنند.

اشتباهات رایج دانش‌آموزان:

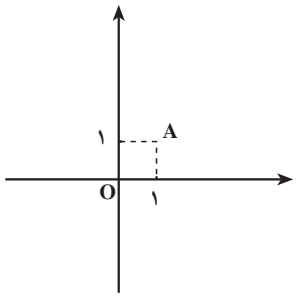
۱ــ دانش‌آموزان تصور می‌کنند که $\sqrt{۲}+\sqrt{۳}=\sqrt{۵}$ می‌شود.

۲ــ در نوشتن اعداد روی محور، فقط به طول شعاع کمانی که رسم کرده‌ایم، توجه دارند.

فعالیت موازی:

این فعالیت را می‌توانید بعد از ایجاد انگیزه انجام دهید.

۱ــ دستگاه مختصات زیر را در نظر بگیرید ؛



طول قطر مربع (OA) چه‌قدر است؟

به مرکز O و به شعاع OA یک کمان رسم کنید. محل برخورد آن را با محور xها، B بنامید ؛ OB چه‌قدر است؟

نقطه‌ی B چه عددی را روی محور نشان می‌دهد؟

اگر این کمان طرف دیگر محور xها را در نقطه‌ی B' قطع کند، نقطه‌ی B' چه عددی را نشان می‌دهد؟ چرا؟

۲ــ آیا روش‌های نشان دادن اعداد حقیقی، به‌ویژه اعداد اصم روی محور منحصر به فرد است؟

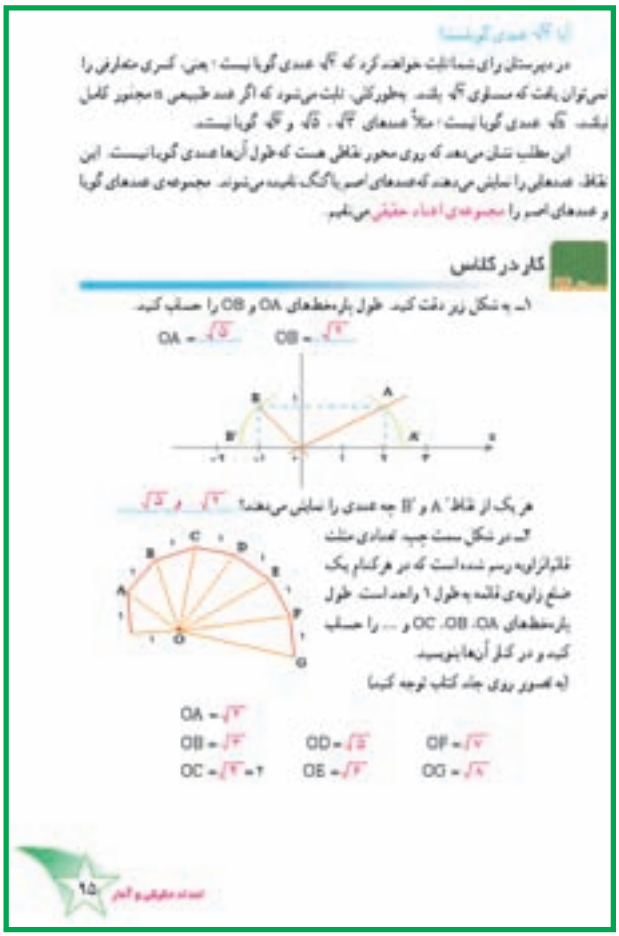
به روش‌های مختلف، $\sqrt{۵}$ را روی محور نشان دهید.

توسعه:

۱ــ $\sqrt{۱۷}$ ، $۲\sqrt{۵}$ و $۱+\sqrt{۲}$ و $-\sqrt{۱۷}$ و $-۲\sqrt{۵}$ و $-(۱+\sqrt{۲})$ را روی محور نشان دهید.

۲ــ آیا حاصل جمع، تفریق، ضرب و تقسیم در اعداد گویا همیشه گویاست؟ (پاسخ : بله)

۳ــ آیا حاصل جمع و تفریق و ضرب و تقسیم در عدد گنگ همیشه عددی گنگ است؟ (جواب : خیر)



در دبیرستان برای شما ثابت خواهند کرد که $\sqrt{۲}$ عددی گویا نیست ؛ یعنی کسری متعارفی را نمی‌توان یافت که مساوی $\sqrt{۲}$ باشد. بطورکلی، ثابت می‌شود که اگر عدد طبیعی n مجذور کامل نباشد، $\sqrt{n}$ عددی گویا نیست ؛ مثلاً عددهای $\sqrt{۳}$ ، $\sqrt{۵}$ و $\sqrt{۷}$ گویا نیستند.

این مطلب نشان می‌دهد که روی محور نقاطی هست که طول آن‌ها عددی گویا نیست. این نقاط عددهایی را نمایش می‌دهند که عددهای اصم یا گنگ نامیده می‌شوند. مجموعه‌ی عددهای گویا و عددهای اصم را مجموعه‌ی اعداد حقیقی می‌نامیم.

کار در کلاس

۱ــ به شکل زیر دقت کنید. طول پاره‌خط‌های OA و OB را حساب کنید.

$OA=\sqrt{۵}$ $OB=\sqrt{۲}$

هر یک از نقاط A و B چه عددی را نمایش می‌دهند؟ $\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۵}$

۲ــ در شکل سمت چپ، تعدادی مثلث قائم‌الزاویه رسم شده است که در هر کدام یک ضلع زاویه‌ی قائمه به طول ۱ واحد است. طول پاره‌خط‌های OA، OB، OC و ... را حساب کنید و در کنار آن‌ها بنویسید.

(به تصویر روی جلد کتاب توجه کنید)

$OA=\sqrt{۲}$

$OB=\sqrt{۳}$ $OD=\sqrt{۵}$ $OF=\sqrt{۷}$

$OC=\sqrt{۴}=۲$ $OE=\sqrt{۶}$ $OG=\sqrt{۸}$

۱۵ اعداد حقیقی و اصم

$$\sqrt{۲}+(۱-\sqrt{۲})=۱\in Q \quad \sqrt{۲}-\sqrt{۲}=۰\in Q$$

$$\sqrt{۲}\times\sqrt{۸}=\sqrt{۱۶}=۴\in Q \quad , \quad \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}}=۱\in Q$$

۴ــ مجموع، تفاضل، ضرب، تقسیم یک عدد گویا و یک عدد گنگ همیشه گنگ است. مگر آن‌که در ضرب و تقسیم آن عدد گویا صفر باشد.

مثال:

$$۵\sqrt{۲}+۷\sqrt{۲}+۵\sqrt{۳}-\sqrt{۳}=۱۲\sqrt{۲}+۴\sqrt{۳}$$

$$۲\times\sqrt{۵}-۴\times\sqrt{۲}+۷-۳\times\sqrt{۵}=-\sqrt{۵}-۴\sqrt{۲}+۷$$

۵ــ اثبات این که چرا $\sqrt{۲}$ گنگ است.

$$\sqrt{۲}=\frac{a}{b} \quad ((a,b)=۱)$$

$a \Rightarrow ۲b^۲=۴k^۲ \Rightarrow$ زوج است

$a^۲ \Rightarrow$ زوج است $a=\sqrt{۲}b \Rightarrow a^۲=۲b^۲ \Rightarrow$

$b^۲ \Rightarrow$ زوج است b. و این متناقض یا فرض دارد.

$b^۲=۲k^۲ \Rightarrow$ زوج است

فعّالیّت خارج از کلاس:

۱ــ از دانش‌آموزان بخواهید طول‌های $\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۳}$ و $\sqrt{۵}$ را روی یک خط‌کش نشان دهند. در واقع، خط‌کشی بسازند که بعضی از اعداد اصم روی آن نمایش داده شده باشد.

۲ــ دانش‌آموزان می‌توانند درباره‌ی حرف R که از آن برای نمایش اعداد حقیقی استفاده می‌شود و علت نام‌گذاری این مجموعه به این نام تحقیق کنند.

۳ــ به کمک ماشین‌حساب مقدار تقریبی $\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۳}$ و $\sqrt{۵}$ را به‌دست آوردند و آن را حفظ کنند.

استفاده از ابزار و تکنولوژی:

۱ــ دانش‌آموزان می‌توانند به کمک ماشین حساب، مقدار تقریبی $\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۳}$ و $\sqrt{۵}$ را با مقدار واقعی آن روی محور مقایسه کنند.

۲ــ دانش‌آموزان به کمک ماشین حساب، تعدادی عدد گنگ بین ۲ و ۳ را پیدا کنند.

یادداشت معلم

محور عددهای حقیقی

ایجاد انگیزه کنید:

شما با اعداد طبیعی و مجموعه‌ی آن به صورت $N=\{1,2,\cdots\}$ ، اعداد حسابی و مجموعه‌ی آن $J=\{0,1,2,\cdots\}$ ، اعداد صحیح و مجموعه‌ی آن $Z=\{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\}$ و اعداد گویا و مجموعه‌ی آن به‌صورت $Q=\{\frac{a}{b}|a,b\in z,b\neq 0\}$ آشنا شدید. آیا می‌توان مجموعه اعداد حقیقی را به‌صورت حرف‌های بالا یعنی به صورت اعضا یا با بیان ریاضی مانند Q نشان داد؟ اگر جواب مثبت است، چه‌طور؟ اگر جواب منفی است، چرا؟

در کلاس، بحث‌های بسیاری در می‌گیرد ؛ بعضی می‌گویند بله و آن را به صورت $\{\cdots,-1,\cdots,0,\cdots,1,\cdots 2,\cdots\}$ نشان می‌دهند که نادرست است ؛ زیرا زمانی، از علامت سه نقطه استفاده می‌کنیم، که بتوانیم عدد بعد را به‌راحتی بنویسیم.

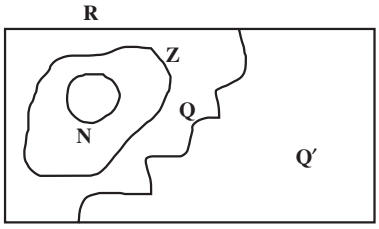
کلاس باید به سمتی هدایت شود که دانش‌آموزان به پاسخ سؤال بالا پی ببرند و به آن جواب دهند (خیر نمی‌توان)

شروع کنید:

با توجه به توضیحات بالا ناچاریم اعداد حقیقی را روی محور نشان دهیم ؛ زیرا بین هر دو عدد حقیقی، عدد حقیقی دیگری وجود دارد.

در واقع، ارتباط بین N و Z و Q و Q′ و R را می‌توانیم به صورت زیر نمایش دهیم :

$$\mathbb{R}=Q\cup Q'$$



پس، هر عدد اصم و هر عدد گویا بیان کننده‌ی یک عدد حقیقی است.

چون مجموعه‌ی R و بیشتر زیر مجموعه‌های $\mathbb{R}$ را

نمی‌توان به صورت اعضا نشان داد، برای بیان آن‌ها از بیان ریاضی یا محور استفاده می‌کنیم.

با توجه به مثال‌های داخل متن کتاب، نمونه‌هایی را برای دانش‌آموزان مطرح و نمودار آن‌ها را رسم کنید.

بپرسید!

۱ــ از دانش‌آموزان بپرسید : چرا نمی‌توان مجموعه اعداد حقیقی را به‌صورت اعضا نوشت؟

۲ــ دو مجموعه‌ی $\{x\in R \mid x<3\}$ و $\{x\in Z \mid x<3\}$ را مقایسه کنید.

توصیه‌های آموزشی:

۱ــ قبل از انجام گرفتن کار در کلاس، مفهوم $x<a$ و $x>a$ ، $x\leq a$ و $x\geq a$ و $a<x<b$ و $a<x\leq b$ و $a\leq x<b$ را برای دانش‌آموزان توضیح دهید.

۲ــ در نوشتن $a<x<b$ همیشه a نیز از b کوچک‌تر

است ؛ یعنی $5 > x > 1$ نادرست است.

۳ــ نامساوی‌ای به صورت $a < x > b$ نداریم.

۴ــ $a < x < b$ یعنی x از a بزرگ‌تر و x از b کوچک‌تر است. پس، در واقع x بین a و b است.

۵ــ از دانش‌آموزان بخواهید عددی را پیدا کنند که در نامساوی $1 < x < 5$ صدق کند و آن‌ها را به اعداد ۱/۱ و ۱/۰۰۱ و ... هدایت کنید.

۶ــ بهتر است بر پیوستگی خطوط به‌دست آمده تأکید کنید.

اشتباهات رایج دانش‌آموزان:

وقتی می‌نویسیم $x < 5$ ، دانش‌آموزان تصور می‌کنند که فقط x می‌تواند ۴ و ۳ و ۲ و ... باشد. وقتی می‌نویسیم $1 < x < 5$ آن‌ها فکر می‌کنند که x فقط می‌تواند ۲ و ۳ و ۴ باشد.

هدف کار در کلاس:

دانش‌آموزان نمایش اعضای R و زیرمجموعه‌های آن را روی محور تمرین می‌کنند. اشکالات احتمالی آن‌ها در کلاس برطرف خواهد شد.

توصیه‌های آموزشی:

در تمرین‌های این قسمت، مطالب گفته شده در کلاس مرور می‌شود. در تمرین ۲ دانش‌آموز می‌آموزد که چگونه یک عدد اصم به صورت رادیکال را بین دو عدد صحیح متوالی قرار دهد و پی‌می‌برد هر عدد اصم بین دو عدد صحیح متوالی قرار دارد.

توسعه:

۱ــ عدد $2+\sqrt{7}$ بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد؟

۲ــ عضوهای مشترک در مجموعه‌ی $\{x|x<\}$ و $\{x|x>\}$ کدام‌اند؟

۳ــ عضوهای مشترک در مجموعه‌ی $\{x|x\leq\}$ و $\{x|x\geq\}$ کدام‌اند؟

(دانش‌آموزان می‌توانند جواب سؤال‌ها را به کمک رسم محور به‌دست آورند.)

طرح سؤال‌هایی شبیه سؤال‌های بالا، ذهنیت خوبی از $\mathbb{R}$ و زیرمجموعه‌های آن ایجاد می‌کند.

۴ــ در جای خالی، $>$ $=$ $<$ بگذارید.

$\sqrt{2} \bigcirc \sqrt{3}$ $\qquad$ $\sqrt{0/1} \bigcirc \sqrt{0/2}$

فعّالیّت خارج از کلاس:

شناخت اعداد حقیقی چه تحولی در زندگی بشر به‌وجود آورده است؟

استفاده از ابزار و تکنولوژی:

۱ــ مقدار $\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{a}}}}}}}$ را برای اعداد دلخواه با

ماشین‌حساب به‌دست آورید ؛ به چه نتیجه‌ای می‌رسید؟ آیا می‌توانید حکم کلی بدهید؟

۲ــ حاصل ..... $\sqrt{۲+\sqrt{۲+\sqrt{۲+\sqrt{۲+\sqrt{\ }}}}}$ را به کمک ماشین‌حساب به‌دست آورید.

۵ـ مجموعه‌هایی را که مشخص شده‌اند، بیان کنید.

الف ـ $A=\{x|x\le -۲\}$

ب ـ $B=\{x|x<-۳\}$

پ ـ $C=\{x|\frac{-۳}{۲}\le x<۲\}$

ت ـ $D=\{x|-۳<x\le ۳\}$

ث ـ $E=\{x|-۳\le x\le ۳\}$

۶ـ با توجه به تمرین قبل، درستی یا نادرستی هریک از عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

$۲\in C$ نادرست — $-\frac{۳}{۲}\in C$ درست — $-۳\in B$ درست — $-۲\in A$ درست

$۳\in E$ درست — $-۳\in E$ درست — $۲\in E$ درست — $-۳\in D$ نادرست

تمرین

۱ـ در شکل مقابل، طول AC را حساب کنید. $\sqrt{۵}$ به مرکز A و شعاع AC یک دایره رسم کنیم تا محور را در نقطه‌ی B قطع کند. نقطه‌ی B چه عددی را نمایش می‌دهد؟ $\sqrt{۵}+۱$ آیا این عدد به مجموعه‌ی اعداد حقیقی مثبت تعلق دارد؟ بله

۲ـ عدد ۹ که بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد؟ بین ۲ و ۵ آیا این عدد به مجموعه‌ی $\{x|x>۳\}$ تعلق دارد؟ بله

۳ـ نمایش هریک از مجموعه‌های زیر را روی یک محور مشخص کنید.

$A=\{x|-۲<x<۲\}$ — $B=\{x|-۱<x\le ۳\}$

$C=\{x|x\le -۱\}$ — $D=\{x|۳\le x\}$

۹۸ اعداد حقیقی و گنگ

تلفیق با سایر دروس:

۱ــ استفاده از کلمات گنگ و حقیقی در ادبیات فارسی برای نام‌گذاری این مجموعه‌ها جالب به نظر می‌رسد.

۲ــ حل معادله‌ای به صورت $x^۲=۲$ در جبر امکان‌پذیر است.

۳ــ به کمک اعداد حقیقی می‌توان قطر مربع، ضلع یا ارتفاع مثلث را محاسبه کرد.

یادداشت معلم

آمار

موضوعات در یک نگاه

در کتاب ریاضی سال اول راهنمایی، موضوع درس آمار مطرح شده است امّا در همه‌ی مسئله‌های مطرح شده در این کتاب، تعداد داده‌ها محدودند. در کلاس سوم راهنمایی همین بحث برای داده‌های به تعداد زیاد مطرح می‌شود. با توجه به زیاد بودن تعداد داده‌ها، ابتدا باید آن‌ها را دسته‌بندی کرد. پس از دسته‌بندی و تعیین فراوانی هر دسته، نمودار ستونی رسم می‌شود. برای محاسبه‌ی میانگین نیز روش کار آموزش داده شده است.

اهداف

در فرایند آموزش این دروس، انتظار می‌رود هر دانش‌آموز به هدف‌های زیر برسد.

۱ــ داده‌های آماری را دسته‌بندی کرده و فراوانی هر دسته را پیدا کند.

۲ــ با توجه به جدول فراوانی، نمودار ستونی رسم کند.

۳ــ با به‌دست آوردن نشان دسته، میانگین داده‌ها را به‌صورت تقریبی حساب کند.

۴ــ برای داده‌های با تعداد محدود، میانگین را از رابطه‌ی مجموع، تقسیم بر تعداد به‌دست آورد.

۵ــ نمودار و جدول داده‌ها را توصیف و نتایج جدیدی استخراج کند.

نمونه‌ی سؤال برای ارزش‌یابی

۱ــ جدول زیر را کامل کنید.

حدود دسته	خط نشان	متوسط دسته	فراوانی	فراوانی توسط دسته
۰ــ۱۰	卌			
۱۰ــ۲۰	卌 卌 //			
		۲۵	۷	
		۳۵		۱۰۵

حالا میانگین داده‌ها را به‌دست آورید و نمودار ستونی آن را رسم کنید.

۲ــ میانگین ۶ نمره‌ی احمد ۱۷/۵ شده است. او نمره‌ی ۱۹ خود را در محاسبه‌ی میانگین حساب نکرده است. با در نظر گرفتن این نمره، معدل او چند است؟

شناسنامه‌ی مبحث آمار

درس‌ها	صفحات	مفاهیم و محتوا	هدف‌ها	فعالیت‌ها	پیش‌بینی امکانات	واژگان
نمودار ستون	۹۹ ۱۰۰	دسته‌بندی داده‌ها نمودار ستونی داده‌ها	ــ داده‌های آماری را دسته‌بندی و فراوانی هر دسته را پیدا کند. ــ از خط نشان برای پیدا کردن فراوانی هر دسته استفاده کند. ــ با توجه به فراوانی به‌دست آمده، نمودار ستونی رسم کند. ــ نمودار رسم شده را توصیف و نتایج جدید را استخراج کند.	ــ مطالعه‌ی متن درس و تکمیل آن ــ انجام دادن کار در کلاس برای تمرین دسته‌بندی و رسم نمودار ستون	شطرنجی کردن تخته چند نمونه نمودار آماری	دسته فراوانی نمودار ستونی داده خط نشان
میانگین	۱۰۱ ۱۰۲ ۱۰۳	میانگین داده‌ها با تعداد زیاد	ــ میانگین داده‌ها با تعداد محدود را محاسبه کند. ــ با تکمیل جدول، میانگین تقریبی داده‌های با تعداد زیاد را حساب کند. ــ با به‌دست آوردن میانگین، داده‌های دو گروه را مقایسه و از آن‌ها نتیجه‌گیری کند.	ــ مطالعه‌ی متن درس درباره‌ی میانگین داده‌ها ــ انجام دادن کار در کلاس برای تمرین محاسبه‌ی میانگین ــ انجام دادن فعّالیّت برای درک چگونگی محاسبه‌ی میانگین داده‌های زیاد ــ انجام کار در کلاس برای تمرین محاسبه میانگین	ــ	میانگین متوسط دسته

آمار

آمار درست به همان معنایی است که در گفت و شنودهای روزانه به کار می‌رود ولی استفاده از واژه‌ی آمار به‌صورت کلی و عام، آگاهی جالبی به ما نمی‌دهد. به شما می‌گویند ۵۰ نفر از ساکنان یک روستا بی‌سوادند ؛ چه نتیجه‌ای به‌دست می‌آورید؟ اگر این روستا، منطقه‌ای آباد و فعال و دارای جمعیتی بالغ بر ۱۲۰۰۰ نفر باشد، می‌توانید بگویید که بی‌سوادی تقریباً در این روستا ریشه کن شده است ؛ زیرا از هر ۲۴۰ نفر، یک نفر بی‌سواد است ولی اگر با روستایی نیمه ویران و متروک سروکار داشته باشید که بیش از ۵۵ نفر در آن زندگی نمی‌کنند، باید نتیجه بگیرند که ساکنان این روستا بی‌سوادند ؛ زیرا از هر ۱۱ نفر ۱۰ نفر سواد ندارند. مطلب به همین‌جا ختم نمی‌شود ؛ باسواد به چه کسی می‌گویید؟ کسی که خواندن و نوشتن را در مرز مقدماتی آن یاد گرفته باشد و به اصطلاح «کوره سوادی» دارد یا می‌تواند کتاب بخواند؟ آیا در روستا کتاب‌خانه‌ی عمومی وجود دارد؟ چه کتاب‌هایی در آن است؟ آمار استفاده‌کنندگان از کتاب چه وضعی دارد؟ آیا کتاب‌ها و نشریه‌هایی که در مرکز منتشر می‌شوند، به‌سرعت و به‌طور منظم در اختیار باسوادان قرار می‌گیرد؟ وضع برق، تلفن و سایر رسانه‌ها چگونه است؟ و ده‌ها پرسش دیگر. باید آمارهای مربوط به یک روستا با آمارهای مشابه در نقاط دیگر مقایسه شود تا میزان عقب‌ماندگی یا پیش‌افتادگی مردم ساکن به روشنی مشخص شود. جمع‌آوری این آمارها، پیدا کردن روش تجزیه و تحلیل آن‌ها و مقایسه‌ی نتیجه‌های حاصل با نتیجه‌های مشابه جاهای دیگر، چیزی است که به آن دانش آمار یا آمارشناسی و به بیان دقیق‌تر، آمار ریاضی می‌گویند.

آمار به معنای عام خود، همیشه با انسان همراه بوده است. از لوح‌های فراوانِ گلی که از تخت جمشید به‌دست آمده است (و همه‌ی آن‌ها از ایران خارج شده و به آمریکا برده شده‌اند) روشن می‌شود که در زمان حکومت هخامنشیان، سازمان اداری گسترده و منظمی وجود داشته است که به همه‌ی زمینه‌های اقتصادی و اجتماعی کشور نظارت می‌کرده است. صورت کارگاه‌های خیاطی و فرش‌بافی و مبل‌سازی و میزان محصول کشتزارها ودام‌داری و سهم ماهانه‌ی هر یک از کسانی که به کار مشغول بوده‌اند و ده‌ها «حساب» دیگر در مراکز استان‌ها نگهداری می‌شده است و این‌ها چیزی جز همان آمار خام نیستند. علاوه بر این، برای لشکرکشی‌ها و آرایش نظام‌های دفاعی و جنگی که همه‌ی ملت‌های باستانی دچار آن بودند، و تهیه‌ی لباس، غذا و ابزار نظامی سربازان، محاسبه‌های کم و بیش پیچیده‌ای لازم بوده که تنها براساس داده‌های آماری ممکن می‌شده است. ساختن برج‌ها، قصرها و پرستشگاه‌ها، تقسیم زمین و آب برای کشت، جابه‌جا کردن کالاهای موردنیاز مردم یا مصالح ساختمانی، روابط بازرگانی با ملت‌های دور و نزدیک، همه نیازمند محاسبه بر مبنای داده‌های آماری بوده است.

با وجود سندهایی که درباره‌ی استفاده‌ی قوم‌ها و ملت‌های مختلف از آمار از بیش از پنج هزار سال تاکنون، در دست است، باید گفت که دانش آمار و آمار ریاضی دانشی جوان است و بیش از ۱۶۰ سال از عمر آن نمی‌گذرد.

در ایران، در سال ۱۳۰۴ خورشیدی، بنا بر قانونی که در خرداد ۱۳۰۴ در دوره‌ی پنجم مجلس شورای ملی به تصویب رسید، اداره‌ای به نام «ثبت احوال» به‌وجود آمد که کار آن ثبت نوزادان برای صدور شناسنامه (که در آن زمان «سجل» نام داشت) و ثبت مرگ‌ومیرها بود. برای مقایسه، در انگلستان، ثبت مرگ‌ها از نیمه‌ی دوم سده‌ی شانزدهم میلادی ــ یعنی بیش از ۴۵۰ سال پیش ــ معمول شده است.

با وجود این، آنچه به آن دانش آمار و آمار ریاضی می‌گوییم، محصولی از تلاش ریاضی‌دانان از آغاز سده‌ی ۱۹ میلادی است. این دانش، به تدریج چنان رشد کرد که امروزه زندگی اقتصادی و اجتماعی انسان را بدون حضور دانش‌های طبیعی همچون اخترشناسی، زمین‌شناسی، فیزیک، هواشناسی، زیست‌شناسی، روان‌شناسی، پزشکی، علوم‌انسانی و غیر آن،به سختی می‌توان تصور کرد.

یکی از نتیجه‌های آمار ریاضی، نظریه‌ی احتمال است. احتمال ریاضی، یک ارزیابی عینی از رویدادی است که ممکن است پیش آید و با تجزیه و تحلیل شرط‌ها و آگاهی‌های موجود

به‌صورت یک عدد بیان شود. به بیان دیگر، احتمال ریاضی، یک ویژگی عددی است که امکان رویداد پیشامدی را ارزیابی می‌کند. احتمال ریاضی، بخشی از شناخت علمی است که نوع خاصی از رابطه‌ی بین پدیده‌ها را بررسی می‌کند. احتمال، براساس قانون‌هایی که قانون‌های احتمالی و آماری نام دارند، بنیان گرفته است.

آندروسکلایه‌ویچ کولموگروف (۱۹۸۷ ــ ۱۹۵۳ میلادی) ریاضی‌دان بزرگ سده‌ی بیستم که خود در کشف قانون‌های نظریه‌ی احتمال، نقشی بزرگ داشته است، می‌گوید :

«... پیشرفت درک و معرفت آدمی، تنها در این نیست که بستگی‌های واقعی موجود بین پدیده‌ها را پیدا کند ؛ در این هم هست که بتواند بستگی غیرواقعی و خیالی را رد کند ؛ یعنی، بتواند استقلال گروه پدیده را در قضیه‌هایی که مطرح است، ثابت کند. فاش کردن تلاش‌های بی‌معنی فال‌گیرها و هواداران اخترشماری (کسانی که گمان می‌کنند، به یاری حرکت ستارگان، می‌توانند آینده را پیش‌گویی کنند) که می‌خواهند بین دو گروه پدیده‌ای که هیچ بستگی با هم ندارند، رابطه‌ای برقرار کنند، یکی از این نمونه‌هاست ولی این، به معنای آن نیست که همه جا می‌توانیم، بدون بحث انتقادی، استقلال و عدم وابستگی پدیده‌ها را بپذیریم. برعکس، این موضوع ما را وامی‌دارد، که در درجه‌ی نخست و با دقت کامل، معیاری برای پژوهش در فرضیه‌ی عدم وابستگی‌ها به‌دست آوریم و سپس، باز هم با دقت کامل، حالت‌های مرزی را پیدا کنیم ؛ حالت‌هایی که در آن‌ها لازم است بستگی بین عامل‌ها را به حساب آوریم...».

ارسطو بحث مربوط به «شانس» را بیرون از مرزهای دانش می دانست، چرا که به نظر او، شانس مجموعه‌ی پیشامدهایی است که درک آن، از توان عقل انسانی خارج است.

«اسپینوزا» با مسئله‌ی شانس، علمی برخورد می‌کند و آن را به معنای ناآگاهی ما از علت‌ها و واقعیت‌ها می‌داند.

برای نخستین بار «کاردان»، ریاضی‌دان ایتالیایی (۱۵۷۶ ــ ۱۵۰۶) و «گالیله»، اخترشناس و فیزیک‌دان ایتالیایی (۱۶۴۲ــ۱۵۶۴ میلادی) تلاش کردند مسئله‌ی شانس را با دیدی علمی بررسی کنند. با این همه، آغاز بحث ریاضی درباره‌ی شانس (که همان احتمال است) را باید در کارهای پاسکال (۱۶۶۲ــ۱۶۲۳) و فرما (۱۶۶۵ــ ۱۶۰۱ میلادی)، ریاضی‌دانان فرانسوی، و «کریستیان هوی گنس» (۱۶۹۵ــ۱۶۲۹)، ریاضی‌دان و فیزیک‌دان هلندی دانست.

برخورد جزمی با دانش‌های طبیعی و پذیرش بی‌چون و چرای قانون‌های حاکم بر آن‌ها (که تا پیش از سده‌ی ۱۹ میلادی همگانی بود) از آغاز سده‌ی ۱۹، به تدریج، نیرو و توان خود را از دست داد.

همراه با پدیدار شدن نظریه‌های تازه‌ی فیزیکی، ابزار ریاضی موردنیاز آن‌ها ــ یعنی آمار ریاضی و نظریه‌ی احتمال ــ گسترش و نفوذ خود را آغاز کرد. قانون‌های عادی فیزیک (قانون‌های «کی‌لوساک»، «بُویل ــ مایوت»، «آووگادرو» و غیر آن) تفسیرهای تازه‌ای پیدا کردند و روشن شد که وقتی با چگالی‌های پایین گاز سروکار داشته باشیم، این قانون‌ها درستی و دقت خود را از دست می‌دهند و گاه از قانون دیگری پیروی می‌کنند ؛ قانون پدیده‌های تصادفی. دانش امروز به این نتیجه رسیده است که همه‌ی پدیده‌های مربوط به طبیعت، خصلتی آماری دارند. فیزیک آماری، نه تنها حاکمیت وجودی خود را ثابت کرده بلکه پایه‌ی اصلی تمامی فیزیک امروزی را تشکیل داده است.

روش آماری نشان داد تا بررسی ریاضی پدیده‌های فیزیک هسته‌ای، به سرعت شکل داده شود. ظهور «رادیو فیزیک» و بررسی مسئله‌های مربوط به پخش علامت‌های رادیویی، نه تنها اهمیت درک آماری را تقویت کرد بلکه به تکامل این نظریه‌ی ریاضی هم یاری رساند و موجب پیدایش نظریه‌های تازه ــ مثل نظریه‌ی «انوراسیون» ــ شد.

لازم نیست در زمینه‌های دیگری مثل واکنش‌های شیمیایی، ساختن نظریه‌ی خط‌ها، بررسی پراکندگی ماده در فضا، سیلاب ذره‌های کیهانی و بسیاری از پدیده‌های دیگر که در آن‌ها باید به‌طور منظم از آمار ریاضی استفاده کرد، صحبت کنیم.

روش آماری، تنها یک سلیقه یا یک روش زودگذر و اضافی نیست. این روش به صورت ریشه‌ای با مسئله‌های دانش امروز در آمیخته است ؛ چراکه امکان می‌دهد به صورتی ژرف‌تر در این مسئله‌ها نفوذ کنیم و شناختی کلی‌تر، گسترده‌تر و نزدیک‌تر به حقیقت، به‌دست آوریم.

مدت‌هاست از روش‌های آماری، برای کشف رمز از نوشته‌هایی که متعلق به زبان‌های مرده‌اند، یاری می‌جویند.

اندیشه‌هایی که «شالیولیون» (ژان فرانسوا ؛ ۱۸۳۲ـ۱۷۹۵)، دانشمند فرانسوی را به کشف رمز خط هیروگلیف مصری هدایت کرد، بر روش‌های آماری تکیه داشت. همین روش آماری کمک کرد تا خط قوم مایا (شاخه‌ای از سرخ‌پوستان آمریکا) کشف شود.

حقیقت جریان‌ها، پیچیده‌تر از آن است که آن را بتوان با همان چند قانون بی‌تغییر و جاودانی شرح داد. گام دوم، برای نزدیک‌تر شدن به حقیقت را باید تنها با تکیه بر آمار ریاضی برداشت. ما می‌توانیم با روش علمی روز و با روش‌های آمار ریاضی، گام به گام به حقیقت نزدیک شویم ولی هرگز به آن نمی‌رسیم. باید این نکته را درک کنیم که هیچ‌چیز ثابت و جزمی وجود ندارد وهیچ قانونی را نمی‌توان همیشگی و ابدی دانست.

یادداشت معلم

نمودار ستونی

ایجاد انگیزه کنید:

ــ قبل از ورود به کلاس، روزنامه‌های موجود را بررسی کنید و یک نمونه اطلاعات را که به صورت نمودار آمده است، به کلاس نشان دهید.

ــ آخرین نمرات دانش‌آموزان کلاس را دسته‌بندی کنید وبه کمک نمودار، وضعیّت علمی کلاس را برای دانش‌آموزان بررسی کنید.

ــ از دانش‌آموزان بخواهید کاربردهایی از آمار را در اطراف خود مثال بزنند.

شروع کنید:

از دانش‌آموزان بخواهید مثال صفحه‌ی ۹۹ را با دقت مطالعه و جدول آن‌را کامل کنند. سپس، نکات اصلی را در کلاس بررسی کنید. نحوه‌ی دسته‌بندی کردن، تعداد دسته و نحوه‌ی علامت‌گذاری نکاتی است که می‌توان آن‌ها را بررسی کرد. در ادامه، از دانش‌آموزان بخواهید کار در کلاس صفحه‌ی ۱۰۰ را انجام دهند. سعی کنید پس از هر مثال، از آن‌ها بخواهید تحلیلی از نتایج ظاهری داده‌ها به کلاس ارائه دهند.

برای مثال، کار در کلاس و مثال اول درس را با هم مقایسه کنند.

هدف کار در کلاس:

هدف اصلی این تمرین، تجربه‌ی دسته‌بندی و رسم نمودار برای اطلاعات پراکنده است.

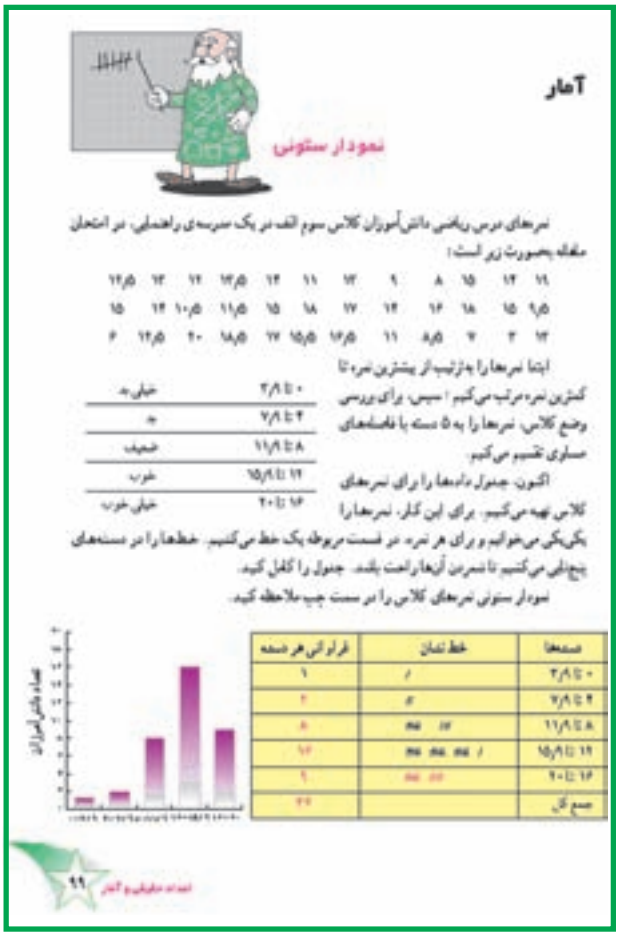
البته تحلیل اولیه‌ی نتایج به‌دست آمده هم می‌تواند هدف دیگری برای این سؤال باشد.

توصیه‌های آموزشی:

ــ درباره‌ی مفید بودن چوب خط در کلاس بحث کنید.

ــ درباره‌ی تعداد دسته‌ها در هر بررسی آماری در کلاس بحث کنید که آیا همیشه باید ۵ دسته باشد یا خیر.

ــ به دانش‌آموزان توصیه کنید که داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب کنند.



آمار

نمودار ستونی

نمرهای درس ریاضی دانش‌آموزان کلاس سوم الف در یک سریه‌ی راهنمایی، در امتحان مقدماتی بصورت زیر است:

۱۱	۱۲	۱۵	۸	۹	۱۲	۱۱	۱۴	۱۳٫۵	۱۲	۱۲	۱۲٫۵
۹٫۵	۱۵	۱۸	۱۲	۱۴	۱۷	۱۸	۱۵	۱۱٫۵	۱۰٫۵	۱۲	۱۵
۱۲	۲	۲	۸٫۵	۱۱	۱۶٫۵	۱۵٫۵	۱۷	۱۸٫۵	۲۰	۱۲٫۵	۶

ابتدا نمرها را به ترتیب از بیشترین نمره تا کمترین نمره مرتب می‌کنیم: سپس، برای بررسی وضع کلاس، نمرها را به ۵ دسته با فاصله‌های مساوی تقسیم می‌کنیم.

اکنون، جدول داده‌ها را برای نمرهای کلاس تهیه می‌کنیم. برای این کار، نمرها را یکی‌یکی می‌خوانیم و برای هر نمره، در قسمت مربوطه یک خط می‌کشیم. خط‌ها را در دسته‌های پنج‌تایی می‌کشیم تا شمردن آن‌ها راحت باشد. جدول را کامل کنید.

۲/۹ تا ۰	خیلی بد	
۷/۹ تا ۴	بد	
۱۱/۹ تا ۸	ضعیف	
۱۵/۹ تا ۱۲	خوب	
۲۰ تا ۱۶	خیلی خوب	

نمودار ستونی نمرهای کلاس را در سمت چپ ملاحظه کنید.

دسته‌ها	خط نشان	فراوانی هر دسته
۲/۹ تا ۰	/	۱
۷/۹ تا ۴	//	۲
۱۱/۹ تا ۸	~~////~~	۴
۱۵/۹ تا ۱۲	~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ /	۱۶
۲۰ تا ۱۶	~~////~~ //	۷
جمع کل		۳۰

تعداد دانش‌آموزان

تعداد دقیق و آمار ۹۹

اشتباهات رایج دانش‌آموزان:

معمولاً دانش‌آموزان در تشخیص مرزهای هر دسته دچار اشتباه می‌شوند؛ این موضوع را در کلاس دقیقاً به بحث بگذارید.

ــ نمونه‌ی رابطه‌های اولیه‌ی آمار استنباطی و برخی از قواعد آن نیز برای توسعه‌ی درس مناسب است.

$$\frac{\text{کوچک‌ترین داده} - \text{بزرگ‌ترین داده}}{\text{تعداد دسته‌ها}} = \text{دامنه‌ی تغییرات}$$

$$\frac{\text{کوچک‌ترین داده} - \text{بزرگ‌ترین داده}}{\text{فاصله‌ی دسته‌ها}} = \text{تعداد دسته‌ها}$$

قاعده: معمولاً اگر در یک دسته‌بندی، فراوانی یکی از دسته‌ها صفر بود، باید دسته‌بندی را تغییر دهیم.

کار در کلاس

نمره‌های ریاضی کلاس سوم ب از هدان مدرسه‌ی راهنمایی به‌صورت زیر است.

۱۵	۱۶	۱۸	۳٫۵	۲	۲	۷	۸	۱۴	۱۵
۱۴	۲۰	۱۶	۱۴	۱۵٫۵	۱۷	۱۸٫۵	۱۳٫۵	۱۴	۵
۱۵	۱۵٫۵	۱۴	۱۶٫۵	۱	۱۷	۹	۸	۱۰	۱۱
		۱۴	۱۰	۱۱	۱۴٫۵	۱۴٫۵	۱۱	۱۴	۱۴

جدول داده‌ها را برای نمره‌های این کلاس تهیه کنید و نمودار ستونی آن را بکشید.

دسته‌ها	خط نشان	فراوانی
۴/۹ تا ۰		۲
۷/۹ تا ۴		۲
۱۱/۹ تا ۸		۷
۱۵/۹ تا ۱۲		۱۴
۲۰ تا ۱۶		۱۱
جمع کل	———	۴۵

تمرین

۱ـ قدّ دانش‌آموزان یک کلاس، برحسب سانتی‌متر به‌صورت زیر داده شده است. جدول داده‌ها و نمودار ستونی آن را تهیه کنید.

۱۴۵	۱۴۲	۱۳۴٫۵	۱۲۸	۱۴۰٫۵	۱۴۵٫۴	۱۳۶٫۵	۱۲۲	۱۴۸	۱۴۵
۱۴۲٫۴	۱۲۸	۱۲۱٫۵	۱۳۱٫۵	۱۲۸٫۵	۱۳۱٫۴	۱۲۴٫۵	۱۴۵٫۴	۱۳۰٫۵	۱۲۱٫۵
۱۲۷	۱۲۲	۱۳۰٫۵	۱۳۱	۱۳۷٫۴	۱۳۶٫۵	۱۳۲٫۴	۱۳۷٫۴	۱۳۰٫۵	۱۲۴
		۱۲۷	۱۲۸	۱۲۱٫۵	۱۲۲٫۴	۱۴۲	۱۳۳٫۵	۱۲۶	۱۲۲

دسته‌ها را (۱۲۲ تا ۱۲۵/۹)، .... (۱۳۴ تا ۱۳۸) بگیرید.

۲ـ از ۳۵ دانش‌آموز مدرسه‌ی خود سه توانشان را بپرسید و یادداشت کنید. سپس، جدول داده‌ها و نمودار ستونی اطلاعات جمع‌آوری را تهیه کنید.

تلفیق با سایر دروس:

ـ یکی از روش‌های تحقیق در علوم اجتماعی، آمارگیری است. با انتخاب یک نمونه و آمارگیری روی آن می‌توان به خصوصیات کل جامعه پی برد ؛ نظرسنجی‌های انتخابات و بسیاری از موارد دیگر از این قبیل‌اند. البته نحوه‌ی انتخاب نمونه، خود بسیار اهمیت دارد.

ـ بسیاری از اطلاعات به کمک نمودارها به سادگی قابل فهم و استنتاج‌اند. با مراجعه به روزنامه‌ها و مجلات به این موضوع به سادگی پی‌خواهید برد.

استفاده از ابزار و تکنولوژی:

ـ به کمک ماشین‌حساب‌های کمی پیشرفته می‌توان برخی از محاسبات آماری را انجام داد. به کمک نرم‌افزارهایی چون Eexeel نیز به سادگی می‌توان نمودارهای ستونی و دایره‌ای اطلاعات را رسم کرد.

فعّالیّت خارج از کلاس:

ـ از دانش‌آموزان بخواهید با بررسی نوشته‌های اطراف خود، نمونه‌هایی از بیان اطلاعات به کمک نمودار را به کلاس معرفی کنند.

ـ از دانش‌آموزان بخواهید یک موضوع را انتخاب کنند و با نظرسنجی در مورد آن در کلاس، نتایج را به کمک نمودار اعلام کنند.

یادداشت معلم

میانگین

ایجاد انگیزه کنید:

ــ از دانش‌آموزان بخواهید درک خود را از مفهوم معدل بیان کنند. این بحث را در کلاس به خوبی هدایت کنید. دانش‌آموزان ذهنیت‌های مختلفی درباره‌ی مفهوم معدل دارند که شنیدن آن‌ها برای همه جالب خواهد بود.

ــ یک سیستم برای ارزش‌یابی، استفاده از سطوح نمره‌ی الف ــ ب ــ ج ــ د است. از دانش‌آموزان بخواهید برای معدل‌گیری در این سیستم، راه‌حلی پیشنهاد کنند.

شروع کنید:

پس از بحث درباره‌ی مفهوم میانگین و معدل، صفحه‌ی ۱۰۱ را در کلاس بخوانید و از دانش‌آموزان بخواهید که به سؤال‌های کار در کلاس ص ۱۰۱ پاسخ دهند. سپس، نتایج حاصل را بررسی کنید. پس از آن، بدون توضیح از دانش‌آموزان بخواهید فعالیت صفحه‌ی ۱۰۲ را انجام دهند.

هدف کار در کلاس:

هدف اصلی این کار در کلاس، یادآوری شیوه‌ی معدل‌گیری و بیان یک نتیجه‌ی ساده از مقایسه‌ی دو میانگین است.

هدف فعالیت:

هدف اصلی این فعالیت، بیان یک روش دیگر برای محاسبه‌ی میانگین است. وقتی که تعداد داده‌ها زیاد است، طبقه‌بندی کردن باعث دسترسی بهتر و مناسب‌تر به آن‌ها خواهد بود.

هدف دیگر فعالیت، ایجاد امکان مقایسه بین این دو روش معدل‌گیری است.

آموزش دهید:

پس از این که دانش‌آموزان فعالیت را انجام دادند، از آن‌ها بخواهید که نتایج به‌دست آمده را به صورت گروهی بررسی کنند. آن‌گاه در کلاس این نتایج را بررسی کنید و مطمئن شوید که

میانگین

نمره‌های زهره و نرگس در امتحان‌های مقطع‌ی ریاضی در سال گذشته به‌صورت زیر است.

زهره:	۱۷/۵	۱۲	۱۶	۱۰	۱۷	۱۲/۵	۱۳	۱۴
نرگس:	۱۸/۵	۱۳	۱۴	۱۲/۵	۱۳	۱۷/۵	۱۱/۵	۱۹

به نظر شما نمره‌های کدام‌یک بهتر است؟

یک راه مقایسه، محاسبه‌ی میانگین نمره‌هاست. برای محاسبه‌ی میانگین، نمره‌های هر یک را جمع می‌کنیم و به تعداد درس‌ها تقسیم می‌کنیم.

$\frac{۱۱۲}{۸} = ۱۴$ = میانگین نمره‌های زهره

$\frac{۱۲۰}{۸} = ۱۵$ = میانگین نمره‌های نرگس

بنابراین، به نظر می‌رسد که در مجموع، نرگس نمره‌های بهتری گرفته است.

کار در کلاس

محصول پنبه‌ی دو مزرعه در پنج سال گذشته به‌صورت زیر بوده است (عددها برحسب تن است).

مزرعه‌ی اول	۸	۲۰	۱۳	۱۵	۱۲
مزرعه‌ی دوم	۱۳	۷	۱۸	۱۷	۱۱

میانگین محصول پنبه‌ی هر مزرعه را در پنج سال گذشته حساب کنید.

مزرعه اول = ۱۳/۲ مزرعه دوم = ۱۳/۲

کدام مزرعه به طور متوسط تولید بیشتری دارد؟

مزرعه اول

برای مقایسه‌ی نمره‌های دو کلاس سوم الف و ب که در صفحه‌های قبل بیان شد، باید میانگین آن‌ها را حساب کنیم اما محاسبه‌ی میانگین نمره‌های یک کلاس، به صورتی که در صفحه‌ی قبل دیدیم، دشوار است. اگر تعداد داده‌ها زیاد باشد، محاسبه‌ی میانگین به روشی دیگر انجام می‌شود.

۱۰۱

روش آموزش داده شده، کاملاً برای دانش‌آموزان روشن شده است. سپس از دانش‌آموزان بخواهید کار در کلاس صفحه‌ی ۱۰۳ را به تنهایی و با دقت کامل پاسخ دهند.

هدف کار در کلاس:

هدف اصلی، به‌کار بستن روش دوم معدل‌گیری پس از حل فعالیت است که میزان یادگیری دانش‌آموزان را روشن خواهد کرد.

بپرسید!

از دانش‌آموزان بخواهید این دو روش را مقایسه کنند و زمان استفاده از هر کدام را پیشنهاد دهند. همچنین، بپرسید: آیا انتخاب متوسط دسته منطقی است؟

از دانش‌آموزان بپرسید: اگر معدل کلاس الف ۱۸/۵ و معدل کلاس ب ۱۸ باشد، آیا می‌توان پیش‌بینی کرد که بالاترین نمره‌ی آزمون از کلاس الف خواهد بود؟ چرا؟

فعالیت

نمره‌های دانش‌آموزان کلاس الف را در نظر بگیرید. در جدول زیر، ابتدا متوسط هر دسته را پیدا کنید. متوسط دسته ۰ تا ۳/۹ عدد ۲ است. در این دسته به‌جای هر عددی که وجود دارد، عدد ۲ را در نظر می‌گیریم.

پس، در این کلاس به جای چه نمره‌ای، عدد ۲ را در نظر می‌گیریم؟

به همین ترتیب در هر دسته به‌جای عددهای آن دسته، متوسط دسته را در نظر می‌گیریم.

حاصل‌ضرب فراوانی در متوسط هر دسته، مجموع داده‌های آن دسته را بطور تقریبی نشان می‌دهد.

جدول را کامل کنید و میانگین تقریبی داده‌ها را بدست آورید.

دسته‌ها	خط نشان	متوسط دسته‌ها	فراوانی	فراوانی × متوسط
۰ تا ۳/۹	/	$\frac{0+3/9}{2}=2$	۱	۲
۴ تا ۷/۹	//	۶	۲	۱۲
۸ تا ۱۱/۹	////	۱۰	۸	۸۰
۱۲ تا ۱۵/۹	//// //// //	۱۴	۱۶	۲۲۴
۱۶ تا ۲۰	//// ////	۱۸	۹	۱۶۲
جمع کل	———	———	۳۶	۵۸۰

$\frac{580}{36}=16/33$ ← $\frac{\text{مجموع نمره‌ها}}{\text{تعداد دانش‌آموزان}}$ ← میانگین نمره‌های دانش‌آموزان کلاس الف

چرا میانگین که بدست می‌آید، تقریبی است؟ چون متوسط هر دسته را در نظر گرفتیم.

با استفاده از ماشین‌حساب، مقدار میانگین را بطور دقیق محاسبه کنید و اختلاف آن را با میانگین تقریبی بدست آورید. ۱۶/۷۷

۱۰۲ تعداد، مقیاس و اندازه‌گیری

کار در کلاس

جدول زیر از کار در کلاس سه صفحه قبل را برای کلاس ب تکمیل کنید و میانگین نمره‌های دانش‌آموزان کلاس را حساب کنید.

نمره‌های دانش‌آموزان این کلاس بهتر است یا کلاس الف؟ الف

دسته‌ها	خط نشان	متوسط دسته‌ها	فراوانی	فراوانی × متوسط
۰ تا ۳/۹	//	۲	۲	۴
۴ تا ۷/۹	/	۶	۲	۱۲
۸ تا ۱۱/۹	//// /	۱۰	۷	۷۰
۱۲ تا ۱۵/۹	//// //// ////	۱۴	۱۴	۱۹۶
۱۶ تا ۲۰	//// //// /	۱۸	۹	۱۶۲
جمع کل			۳۴	۵۴۴

$\frac{544}{34}=16/00$ ← میانگین کلاس ب

تمرین

۱ــ میانگین قد دانش‌آموزان از تمرین ۱ سه صفحه قبل، را حساب کنید.

۲ــ یک کارخانه، دو کارگاه تهیه‌ی لامپ دارد. برای مقایسه‌ی کار دو کارگاه، از هر کدام ۳۰ لامپ بطور تصادفی انتخاب شده و طول عمر لامپ‌ها برحسب ساعت اندازه‌گیری شده است. نتیجه‌ی اندازه‌گیری بصورت زیر است.

کارگاه اول

۱۷۱	۱۶۱	۱۵۷	۱۵۸	۱۶۳	۱۶۴	۱۶۷	۱۵۷	۱۵۴	۱۵۷
۱۶۱	۱۶۳	۱۶۵	۱۵۹	۱۵۶	۱۵۶	۱۶۵	۱۵۸	۱۶۹	۱۵۳
۱۷۰	۱۶۹	۱۶۷	۱۵۸	۱۵۳	۱۵۱	۱۵۹	۱۶۷	۱۶۸	۱۶۳

کارگاه دوم

۱۶۳	۷۷۴	۷۷۱	۱۶۹	۱۶۵	۱۵۴	۱۵۳	۱۵۸	۱۶۰	
۱۶۰	۱۶۱	۱۶۸	۱۶۳	۱۶۵	۱۵۹	۱۵۱	۱۵۴	۱۶۸	۱۶۱
۱۵۳	۱۵۸	۱۵۴	۱۶۳	۱۶۸	۷۷۰	۷۷۹	۱۶۳	۱۵۹	۱۵۴

دسته‌ها را بصورت زیر انتخاب کنید. جدول داده‌ها را در هر دو مورد تهیه کرده و با محاسبه‌ی میانگین، دو کارگاه را با هم مقایسه کنید.

(۱۵۰ تا ۱۵۴/۹)، (۱۵۵ تا ۱۵۹/۹)، (۱۶۰ تا ۱۶۴/۹)، (۱۶۵ تا ۱۶۹/۹)، (۱۷۰ تا ۱۷۵)

۱۰۳ تعداد، مقیاس و اندازه‌گیری

توسعه:

ــ در صورت آمادگی کلاس، دو شاخصه‌ی دیگر ــ یعنی مد و میانه ــ را با چند مثال ساده معرفی کنید ؛ برای مثال، مد یعنی آنچه از همه بیشتر است (معنی لفظی آن نیز قابل بحث است) و میانه، آن چیزی است که در صف داده‌ها در وسط ایستاده است.

ــ درباره‌ی حد میانگین در یک مجموعه‌ی داده ها بحث کنید و نتیجه بگیرید که میانگین همیشه از بزرگ‌ترین داده، کوچک‌تر و از کوچک‌ترین داده، بزرگ‌تر است.

ــ حل مسائل مفهومی میانگین ــ مانند چند مثال زیر ــ در صورت آمادگی کلاس مسیر خوبی برای توسعه‌ی مفهوم میانگین است.

۱ــ میانگین ۱۰ عدد، ۱۵ است ؛ اگر در محاسبه متوجه شویم یکی از داده ها ۱۷ بوده است و ما به اشتباه آن را ۱۲ در نظر گرفته‌ایم، چگونه می‌توانیم جواب صحیح را بیابیم؟

۲ــ میانگین چند داده‌ی یکسان، چه خواهد بود؟

۳ــ میانگین ۹ داده، ۱۵ است. اگر یک داده‌ی ۱۸ به‌آن‌ها اضافه شود، میانگین چه خواهد شد؟

۴ــ اگر داده‌های یک جامعه‌ی آماری ۳ برابر شود، میانگین آن‌ها چه تغییری خواهد کرد؟

۵ــ اگر به داده‌های یک جامعه‌ی آماری ۴ واحد اضافه شود، میانگین آن‌ها چه تغییری خواهد کرد؟

فعالیت موازی:

میانگین نمره‌های زهرا و زهره را محاسبه کنید.

نمره‌های زهرا : ۱۸ و ۱۲ و ۱۶ و ۱۰

نمره‌های زهره : ۱۳/۵ و ۱۴/۵ و ۱۴ و ۱۴

به نظر شما ریاضی کدام یک از این‌دو بهتر است؟ آیا می‌توان در این باره نظر قطعی داد؟

تلفیق با سایر دروس:

ــ بسیاری از اطلاعات با اصطلاح میانگین اعلام می‌شود ؛ برای مثال، میانگین دمای شهر تهران در روز گذشته یا میانگین درآمد نفتی در سال‌های گذشته و ... .

ــ یکی از بهترین معیارهای سنجش تحصیلی در مدارس، معدل یا میانگین دانش‌آموز است.

ــ گاهی متغیرهای اقتصادی ــ مانند درآمد کل کشور ــ به صورت کلی محاسبه می‌شوند امّا برای مقایسه‌ی یک کشور با کشور دیگر، باید درآمد سرانه‌ی کشور را به حساب آورد ؛ یعنی، درآمد کل را بر جمعیت کشور تقسیم کرد.

فعّالیّت خارج از کلاس:

ــ از دانش‌آموزان بخواهید که با جست‌وجو در روزنامه‌ها و مجلات، اطلاعاتی را که با مفهوم میانگین بیان شده‌اند، در کلاس معرفی کنند.

ــ از دانش‌آموزان بخواهید که با یکی از دانش‌آموزان دبیرستانی مصاحبه کنند و نمرات ترم گذشته‌ی آن‌ها را به‌همراه تعداد واحدهای درسی بپرسند ؛ سپس معدل آن‌ها را محاسبه کنند. (توجه داشته باشید که درس‌ها از نظر تعداد واحدها متفاوت‌اند.)

یادداشت معلم