

### یادآوری

هدف‌های رفتاری: پس از پایان این فصل از فراگیر انتظار می‌رود:

- ۱- اصطلاحات، تعریف مفاهیم اولیه، گزاره، برهان، قضیه، اصل و مکان هندسی را توضیح دهد.
- ۲- زاویه را تعریف کند و انواع آن را توضیح دهد.
- ۳- حالات دو زاویه‌ی نسبت به هم را نام برده هر یک را شرح دهد و خاصیت آن‌ها را بیان کند.
- ۴- واحدهای زاویه را نام برده، هر یک را تعریف کند؛ هم‌چنین هر واحد را به واحدهای دیگر تبدیل نماید.
- ۵- فرجه و مسطحه‌ی فرجه را تعریف کند.
- ۶- شرط عمود بودن دو صفحه را توضیح دهد.
- ۷- عمود و مایل را در صفحه تعریف کند و قضایای مربوط به آن را بیان کرده فاصله‌ی نقطه تا خط را توضیح دهد.
- ۸- عمود و مایل در فضا را تعریف کرده شرط عمود بودن خط بر یک صفحه را توضیح دهد.
- ۹- مثلث را تعریف کند.
- ۱۰- انواع مثلث را توضیح دهد.
- ۱۱- مثال‌های حل شده در این فصل را فراگیرد.

### ۱-۱- کلیات

برای شناخت هندسه باید با این نکات آشنا شد:

**تعریف:** تعریف مفهوم هندسی یعنی شناساندن آن به دیگران؛ به گونه‌ای که صفات و ویژگی آن مفهوم را بتوان به اندازه‌ی لازم و کافی بیان نمود. از خصوصیات مهم هر تعریف آن است که جامع و مانع باشد.

**مفاهیم اولیه یا تعریف نشده:** هر تعریف با استفاده از مفاهیم تعریف‌های قبلی بیان می‌شود. برای مثال، در تعریف دو زاویه‌ی مجاور لازم است از قبل تعریف زاویه‌ی ضلع، صفحه و نظایر آن را بدانیم. بدین ترتیب، هر تعریف به یک یا چند تعریف قبلی بستگی دارد. بعضی از تعریف‌ها تعریف قبلی ندارند و خود اولین تعریف هستند. این گونه موارد را «تعریف نشده» می‌نامیم و بدون تعریف آن‌ها را می‌پذیریم. هر مفهوم تعریف نشده را «مفهوم اولیه» یا «مفهوم نخستین» می‌گویند؛ مانند: نقطه، خط، صفحه و فضا.

**گزاره:** هر جمله‌ی خبری را «گزاره» می‌گویند. گزاره ممکن است به صورت درست و نادرست یا شرطی بیان شود. برای نمونه: مجموع دو عدد ۵ و ۷ عدد «۱۲» است (گزاره‌ی درست). حاصل ضرب دو عدد ۴ و ۵ عدد «۲۵» است (گزاره‌ی نادرست). اگر درس بخوانیم در آینده فرد مفیدی خواهیم شد (گزاره‌ی شرطی).

**برهان:** «برهان» عبارت است از استدلال برای اثبات درستی گزاره از طریق گزاره‌هایی که قبلاً درستی آن‌ها پذیرفته شده است.

**قضیه:** در هر گزاره‌ای که برای اثبات درست بودنش از برهان استفاده شود «قضیه» نامیده می‌شود. هر قضیه شامل دو قسمت: «فرض» و «حکم» است. قسمت نخست فرض قضیه، گزاره یا گزاره‌هایی است که درست بودن آن‌ها را پذیرفته‌ایم.

قسمت دوم حکم یا نتیجه‌ی قضیه، گزاره یا گزاره‌هایی است که درست بودن آن‌ها را می‌خواهیم ثابت کنیم؛ مانند: «هر نقطه‌ی واقع بر عمود منصف یک پاره خط، از دو سر آن پاره خط به یک فاصله است» که قسمت اول (هر نقطه واقع بر عمود منصف یک پاره خط) «فرض قضیه» و قسمت دوم (از دو سر آن پاره خط به یک فاصله است) «حکم یا نتیجه‌ی قضیه» است.

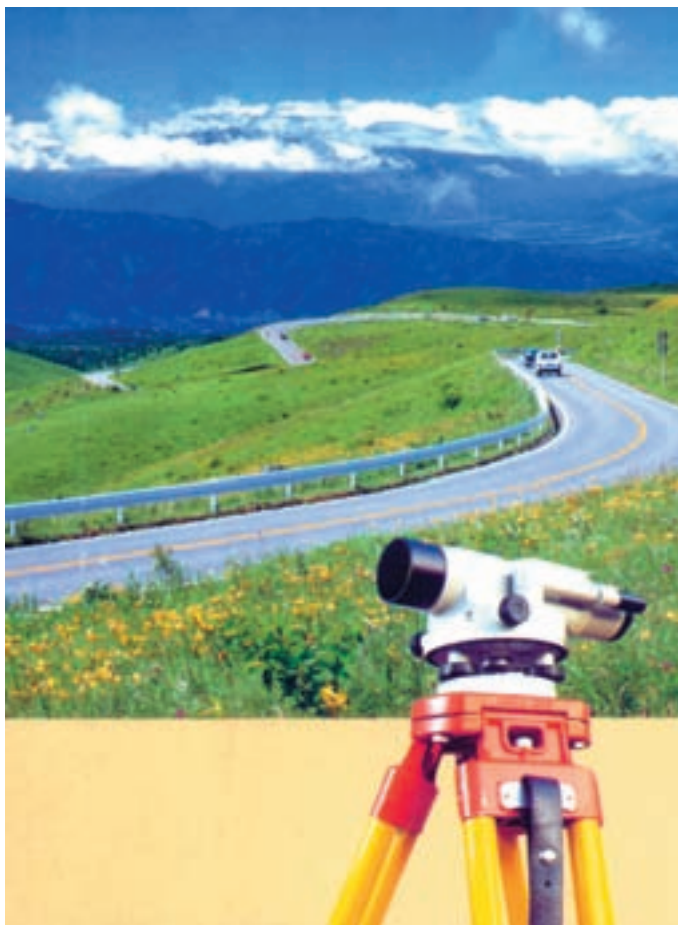
**اصل:** گزاره‌ای که درستی آن را بدون اثبات می‌پذیریم و برای اثبات قضیه‌ها به آن استناد می‌کنیم «اصل» نامیده می‌شود.

**مثال:** هر دو نقطه‌ی متمایز یک خط راست و تنها یک خط راست را مشخص می‌کنند یا از هر نقطه‌ی خارج یک خط فقط یک خط می‌توان موازی آن رسم کرد.

**مکان هندسی:** مکان مجموعه‌ی نقاطی است که همه‌ی آن نقاط دارای ویژگی هندسی مشترکی

باشند و هر نقطه که دارای چنین ویژگی باشد عضو آن مجموعه محسوب شود؛ مانند تعریف دایره : دایره مکان هندسی نقاطی است از یک صفحه که فاصله‌ی آن‌ها از نقطه‌ی ثابتی در آن صفحه مساوی باشند.

تذکر: در این کتاب که مطالب آن به صورت کاربردی است اثبات حکم هر قضیه مطرح نیست و هر قضیه بدون رعایت تقدم و تأخر به گونه‌ی کاربردی عنوان شده است.

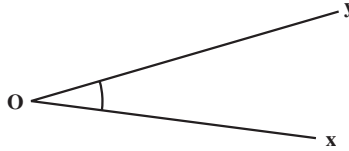


شکل ۱-۱

## ۲-۱- تعریف زاویه (Angle)

زاویه عبارت است از مجموعه‌ی نقاطی از صفحه که به دو خط با مبدأ مشترک محدود باشند و آن دو نیم خط را شامل شوند.

مبدأ مشترک را «رأس زاویه» و هر یک از دو نیم خط را «یک ضلع زاویه» گویند؛ مانند: زاویه‌ی  $xOy$  که آن را به صورت  $\angle O$  و یا  $\angle xOy$  نمایش می‌دهند (شکل ۲-۱).

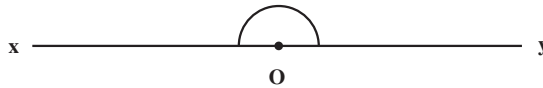


شکل ۲-۱

## ۳-۱- انواع زاویه

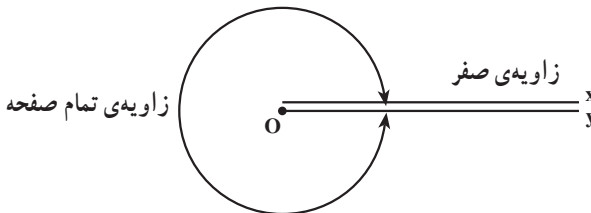
زاویه‌ی نیم صفحه، زاویه‌ی قائمه، زاویه‌ی حاده (تند)، زاویه‌ی منفرجه (باز)، زاویه‌ی صفر، زاویه‌ی کوژ (محدب) و زاویه‌ی کاو (مقعر).

زاویه‌ی نیم صفحه: زاویه‌ای است که دو ضلع آن در یک امتداد باشند؛ مانند زاویه‌ی  $\angle xOy$  (شکل ۳-۱).



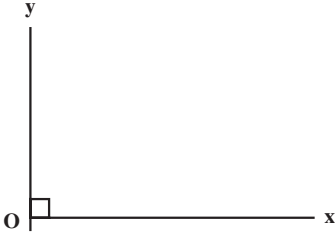
شکل ۳-۱

زاویه‌ی صفر: زاویه‌ای است که دو ضلع آن بر هم منطبق باشند و زاویه‌ی خارجی زاویه‌ی صفر را «زاویه‌ی تمام صفحه» گویند (شکل ۴-۱).



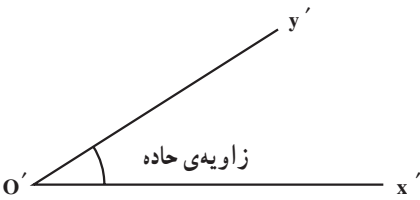
شکل ۴-۱

زاویه قائمه (Rectangle): نصف زاویه  
 نیم صفحه را «زاویه قائمه» گویند (شکل ۵-۱).



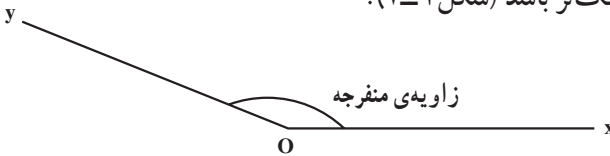
شکل ۵-۱

زاویه حاده یا زاویه تند: زاویه ای است که  
 از زاویه قائمه کوچک تر است (شکل ۶-۱).



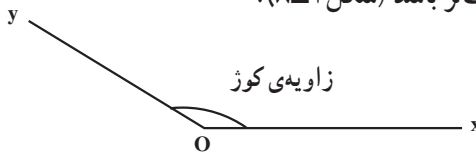
شکل ۶-۱

زاویه منفرجه یا زاویه باز: زاویه ای است که اندازه ی آن از زاویه قائمه بزرگ تر و از  
 زاویه نیم صفحه کوچک تر باشد (شکل ۷-۱).



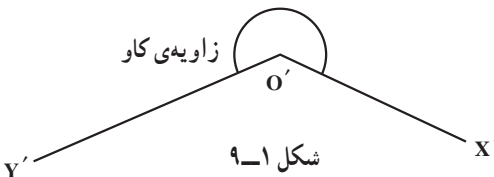
شکل ۷-۱

زاویه کوژ (محدب): زاویه ای است که از  
 زاویه نیم صفحه کوچک تر باشد (شکل ۸-۱).



شکل ۸-۱

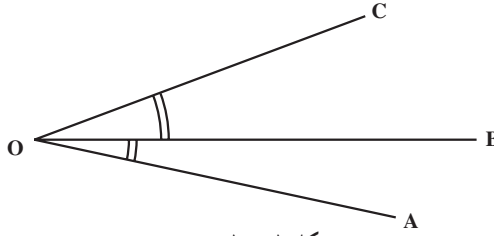
زاویه کاو (مقعر): زاویه ای است که  
 از زاویه نیم صفحه بزرگ تر است (شکل ۹-۱).



شکل ۹-۱

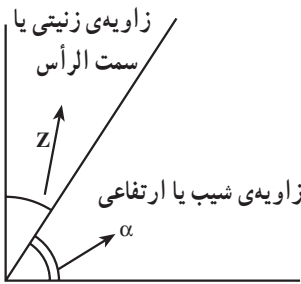
### ۱-۴- حالات دو زاویه نسبت به هم

دو زاویه نسبت به هم ممکن است: مجاور، متمم، مکمل، مجانب و متقابل به رأس باشند.  
 دو زاویه مجاور: دو زاویه‌ای هستند که در رأس و یک ضلع مشترکند و دو ضلع غیر مشترک  
 آن‌ها در دو طرف ضلع مشترکشان قرار دارد؛ مانند دو زاویه  $\angle AOB$  و  $\angle BOC$  (شکل ۱-۱۰).

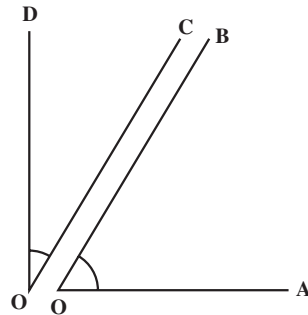


شکل ۱-۱۰

دو زاویه متمم: دو زاویه‌ای هستند که مجموع آن‌ها یک زاویه قائمه باشد؛ مانند دو  
 زاویه متمم  $\angle AOB$  و  $\angle COD$  (شکل ۱-۱۱)، همچنین دو زاویه  $\angle Z$  و  $\alpha$ ، (شکل  
 ۱-۱۲).

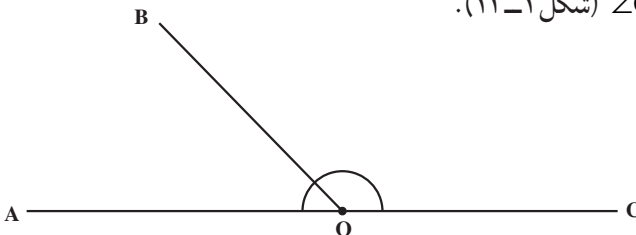


شکل ۱-۱۲



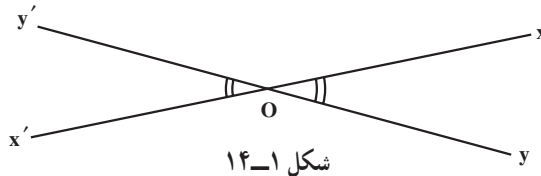
شکل ۱-۱۱

دو زاویه مکمل: دو زاویه‌ای هستند که مجموع آن‌ها  $180^\circ$  درجه باشد.  
 دو زاویه مجانب: دو زاویه‌ی مجاور است که مجموع آن‌ها  $180^\circ$  باشد؛ مانند دو زاویه  
 $\angle AOB$  و  $\angle COB$  (شکل ۱-۱۳).



شکل ۱-۱۳

دو زاویه‌ی متقابل به رأس: دو زاویه‌ای است که در رأس، مشترک و هر ضلع یک زاویه در امتداد ضلع زاویه‌ی دیگر است و دو زاویه‌ی متقابل به رأس با هم برابرند؛ مانند دو زاویه‌ی  $\angle XOY$  و  $\angle X'OY'$  (شکل ۱-۱۴).



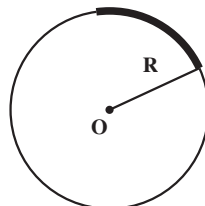
شکل ۱-۱۴

## ۱-۵- واحدهای زاویه

برای اندازه‌گیری زاویه واحدهایی را تعریف کرده‌اند که از آن جمله است: درجه، گراد، رادیان. تعریف درجه (Degree): زاویه‌ی مقابل به  $\frac{1}{360}$  پیرامون دایره را «درجه» گویند. اگر درجه را به  $60$  قسمت مساوی تقسیم کنیم هر قسمت را یک دقیقه می‌گویند و هرگاه یک دقیقه را به  $60$  قسمت مساوی تقسیم کنیم هر قسمت را یک ثانیه می‌نامند. برای مثال کمان سی‌وشش درجه و بیست و چهار دقیقه و پانزده ثانیه به صورت:  $36^{\circ}, 24', 15''$  نمایش داده می‌شود.  
( $^{\circ}$ : درجه،  $'$ : دقیقه و  $''$ : ثانیه)

گراد (Gon): زاویه‌ی مقابل به  $\frac{1}{400}$  محیط دایره را «گراد» گویند و  $\frac{1}{100}$  گراد را «دقیقه‌ی گراد» و  $\frac{1}{10000}$  دقیقه‌ی گراد را «ثانیه‌ی گراد» گویند. عدد گراد به صورت اعشاری نوشته می‌شود. به طوری که ارقام صحیح نشان‌دهنده‌ی «گراد» و دو رقم اول اعشاری نشان‌دهنده‌ی «دقیقه‌ی گراد» و ارقام سوم و چهارم اعشاری نشان‌دهنده‌ی «ثانیه‌ی گراد» است؛ مانند:  $85$  درجه‌ی گراد و  $43$  دقیقه و  $75$  ثانیه. عدد:  $85/4375$  با حرف gr نمایش داده می‌شود.

رادیان (Radian): اندازه‌ی زاویه‌ی مقابل به قوسی از پیرامون یک دایره که برابر شعاع همان دایره باشد یک «رادیان» گویند.



شکل ۱-۱۵

تبدیل واحدهای زاویه به یک دیگر: برای تبدیل واحدهای زاویه به یک دیگر - با توجه به تعاریف آن‌ها - از این فرمول استفاده می‌شود:

$$\frac{D}{180} = \frac{G}{200} = \frac{R}{\pi}$$

تذکر: هر نوع واحد زاویه با یک نماد مشخصی نمایش داده می‌شود؛ مانند: درجه به حرف «D»، گراد به حرف «G» و رادیان به حرف «R».

مثال ۱-۱: زاویه  $\alpha$  که توسط زاویه‌یاب درجه‌ای اندازه‌گیری شده برابر  $25^{\circ}, 42', 30''$  می‌باشد می‌خواهیم بدانیم زاویه فوق برابر چند گراد و چند رادیان است؟  
**راهکار کلی:** ما برای حل این گونه مسائل از فرمول کلی  $\frac{D}{180} = \frac{G}{200} = \frac{R}{\pi}$  که D نماد درجه و G گراد و R رادیان می‌باشد استفاده می‌کنیم و برای حل، هر پارامتر را که معلوم است به جای خود قرار داده و مجهولات دیگر را به دست می‌آوریم.

روش حل: معلومات طبق فرض مسئله  $D = 25^{\circ}, 42', 30''$  و مجهولات R و G هستند حال ابتدا برای به دست آوردن گراد رابطه  $\frac{D}{180} = \frac{G}{200}$  را در نظر می‌گیریم و به جای D مقدار  $25^{\circ}, 42', 30''$  را قرار داده و مجهول G را محاسبه می‌کنیم.

$$\frac{25^{\circ}, 42', 30''}{180} = \frac{G}{200} \Rightarrow 180 \times G = 200 \times (25^{\circ}, 42', 30'')$$

$$G = \frac{200 \times (25^{\circ}, 42', 30'')}{180} = 28 / 5648 \text{ گراد}$$

(تذکر: در محاسبه این فرمول از ماشین حساب استفاده کرده مد درجه را به کار می‌بریم)

سپس برای محاسبه رادیان (R) در فرمول  $\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$  به جای D مقدار  $25^{\circ}, 42', 30''$  را قرار داده و مقدار R (رادیان) را به دست می‌آوریم.

$$\frac{25^{\circ}, 42', 30''}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{(25^{\circ}, 42', 30'') \times \pi}{180} = 0 / 44069 \text{ رادیان}$$

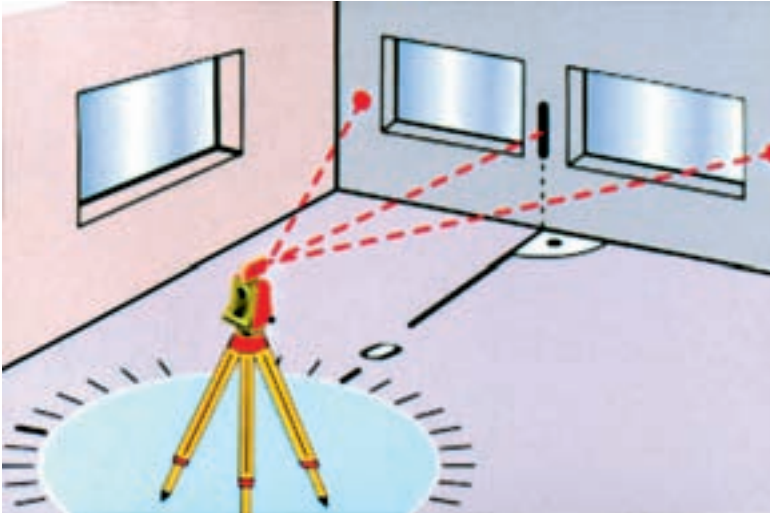
بحث و بررسی: از این مثال نتیجه‌گیری می‌کنیم که اگر ما با زاویه یا بهای درجه‌ای یا گراد کار کنیم با این رابطه می‌توانیم معادل آن را با واحدهای دیگر به دست آوریم و در محاسبات و فرمول‌های نقشه‌برداری از آن استفاده کنیم.



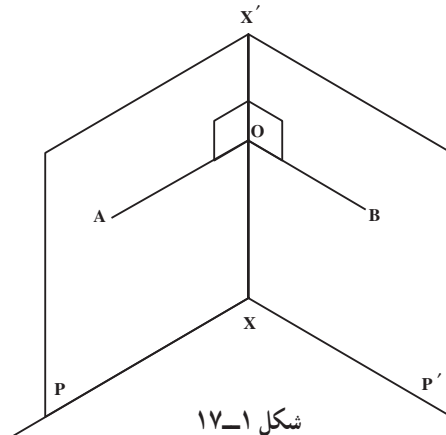
## ۱-۶- تعریف فرجه

مجموعه‌ای از نقاط فضا که بین دو نیم‌صفحه با مرز مشترک محدود باشد «فرجه» نام دارد. مرز مشترک دو صفحه را «یال فرجه» و هر نیم‌صفحه را «وجه فرجه» و زاویه‌ی بین دو نیم‌صفحه را «اندازه‌ی فرجه» می‌نامند.

**مسطحه‌ی فرجه:** زاویه‌ی فرجه یا زاویه‌ی بین دو صفحه را «مسطحه‌ی فرجه» گویند. اگر از نقطه‌ی  $O$  روی فصل مشترک دو صفحه‌ی  $P$  و  $P'$  نیم‌خط  $OA$  داخل صفحه‌ی  $P$  و نیم‌خط  $OB$  داخل صفحه‌ی  $P'$  را عمود بر فصل مشترک  $xx'$  رسم کنیم زاویه‌ی  $\hat{AOB}$  «مسطحه‌ی فرجه» نامیده می‌شود (شکل ۱-۱۷).

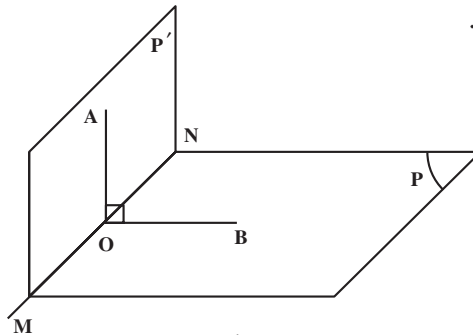


شکل ۱-۱۶- نمایش اندازه‌گیری زاویه‌ی افقی



شکل ۱-۱۷

دو صفحه‌ی عمود برهم: دو صفحه را وقتی عمود برهم گویند که مسطحه‌ی فرجه‌ی آن قائمه باشد (شکل ۱۸-۱).

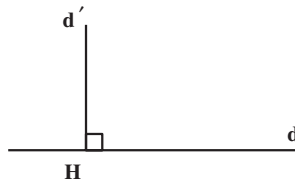


شکل ۱۸-۱

### ۷-۱- عمود و مایل

تعریف خط عمود بر یک خط: هرگاه زاویه‌ی بین دو خط  $d$  و  $d'$  قائم باشد آن‌ها نسبت به هم

عمودند.

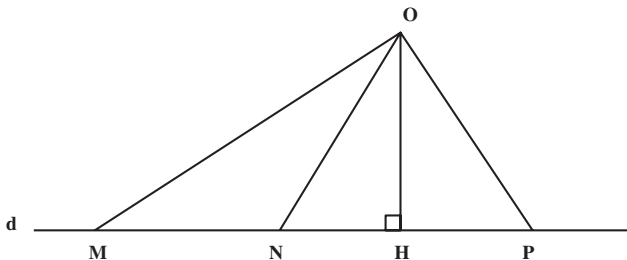


شکل ۱۹-۱

اصل: از یک نقطه‌ی خارج یک خط فقط یک خط می‌توان بر آن عمود رسم کرد و محل تلاقی خط عمود  $d'$  را بر  $d$  (نقطه‌ی  $H$ ) «پای عمود» گویند.

### ۸-۱- عمود و مایل در صفحه

در یک صفحه از یک نقطه، مانند  $O$ ، می‌توان بی‌نهایت خط رسم کرد که خط  $d$  را مطابق شکل ۲۰-۱ قطع کنند و از این بی‌نهایت خط فقط یک خط مانند  $OH$  عمود بر خط  $d$  هستند و بقیه‌ی خطوط نسبت به  $d$  مایل بوده نقاط  $M$  و  $N$  پای مایل‌های  $OM$  و  $ON$  هستند.



شکل ۲۰-۱

### قضیه:

الف) طول عمود از طول هر مایلی کوچک تر است.  
ب) اگر پای هر دو مایل از پای عمود به یک فاصله باشد طول آن دو مایل برابرند و به عکس.  
ج) از هر دو مایل مایلی بزرگ تر است که پایش از پای عمود دورتر باشد.

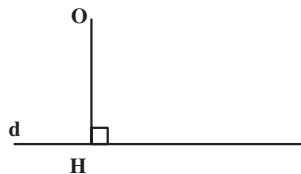


شکل ۱-۲۱- یک نمونه از کاربرد خاصیت عمود و مایل در نقشه برداری

اندازه گیری طول افقی: اگر در مترکشی در حالتی که یک طرف متر در یک نقطه ی ثابت (روی بلندی) و طرف دیگر آن در امتداد ریسمان شاغولی بالا و پایین برده شود تا کم ترین اندازه را بخوانیم در این صورت امتداد متر افقی است زیرا طبق قضیه عمود کوتاه تر از مایل است بنابراین امتداد متر بر امتداد ریسمان شاغول عمود است و در نتیجه افقی می باشد.

فاصله ی نقطه تا خط: عبارت است از طول عمودی که از آن نقطه بر خط فرود آید (مطابق

شکل ۱-۲۲ طول OH).

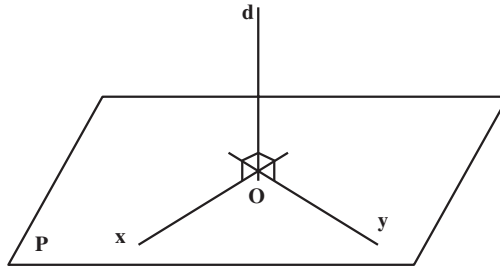


شکل ۱-۲۲

## ۹-۱- عمود و مایل در فضا

تعریف خط عمود بر یک صفحه: قضیه: هرگاه خطی بر دو خط متقاطع از صفحه‌ای عمود باشد بر آن صفحه عمود است.

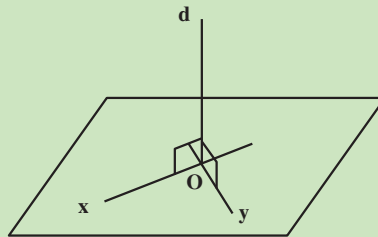
قضیه: هرگاه خطی بر صفحه‌ای عمود باشد بر تمام خطوط آن صفحه عمود است. «از یک نقطه فقط یک خط می‌توان بر صفحه عمود کرد.»



شکل ۱-۲۳

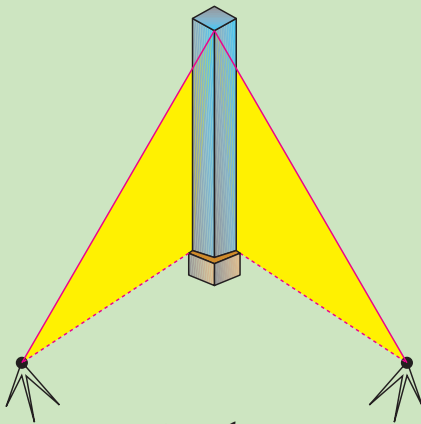
اثبات قضیه: می‌دانیم مطابق شکل ۱-۳۹ از هر نقطه مانند  $O$  خارج صفحه‌ی  $P$  بی‌نهایت خط می‌توان رسم کرد که تنها یک خط مانند  $OH$  عمود بر صفحه‌ی  $P$  است و بقیه‌ی خطوط نسبت به صفحه‌ی  $P$  مایل بوده، نقطه‌ی  $H$  پای عمود  $OH$  و نقاط  $M$  و  $N$  پای مایل‌های  $OM$  و  $ON$  هستند.

مثال ۱-۲: کاربرد خاصیت خط عمود بر یک صفحه در برپایی یک ستون قائم. می‌خواهیم یک ستون فلزی ساخته شده را روی صفحه ستون به صورت قائم نصب و جوشکاری نماییم. راهکار کلی: می‌دانیم طبق قضیه وقتی یک خط بر یک صفحه عمود است که بر دو خط متقاطع از صفحه عمود باشد یعنی مطابق شکل زیر تنها عمود بودن ستون  $od$  بر خط  $oy$  کافی نیست بلکه باید بر خط  $ox$  نیز عمود باشد و در عمل با استفاده از دو دوربین زاویه‌یاب به صورت زیر اجرا می‌کنیم.

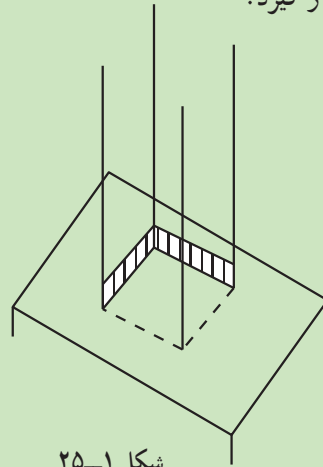


شکل ۱-۲۴

**روش حل:** ابتدا (به وسیله دو عدد نبشی به صورت شکل ۱-۲۵) محل ستون را در روی صفحه ستون مشخص می‌کنیم و سپس ستون را با جرثقیل در محل خود قرار داده و برای تثبیت آن به شکل قائم هم‌زمان از دو زاویه یاب طبق شکل مستقر می‌کنیم و هر دو دوربین را به یک لبه ستون نشانه روی کرده و امتداد قائم تار رتیکول آن‌ها را روی لبه ستون قرار می‌دهیم. وقتی ستون به طور صحیح و دقیق عمود بر صفحه ستون است که امتداد قائم تار رتیکول هر دو زاویه یاب درست بر یک لبه ستون قرار گیرد.



شکل ۱-۲۶

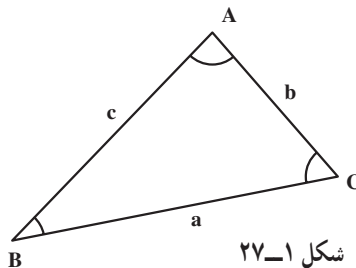


شکل ۱-۲۵

**بحث و بررسی:** نکته مهمی که برای نصب ستون عمود بر صفحه یا سطح تراز وجود دارد حداقل باید امتداد ستون از دو طرف کنترل شود یا به عبارت دیگر در یک زمان دو دوربین زاویه یاب باید مستقر و ستون را کنترل نمود.

### ۱-۱- تعریف مثلث (Triangle)

اگر سه خط دو به دو یک‌دیگر را قطع کنند؛ شکل ایجاد شده را «مثلث» می‌نامند. به عبارت دیگر اگر سه نقطه‌ی غیرواقع بر یک خط راست را دو به دو به یک‌دیگر وصل کنیم؛ شکل به دست آمده را مثلث گویند (شکل ۱-۲۷).



شکل ۱-۲۷

سه ضلع و سه زاویه‌ی هر مثلث را «اجزای اصلی مثلث» می‌نامند.  
اندازه‌ی هر ضلع مثلث را با حرف کوچک رأس مقابل به آن نمایش می‌دهند.  
در هر مثلث همواره اندازه‌ی یک ضلع از مجموع دو ضلع دیگر کوچک‌تر است مثلاً  $a < b + c$   
در هر مثلث مجموع زوایای داخلی برابر  $180^\circ$  درجه (یا  $200^\circ$  گراد) می‌باشد.

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$$

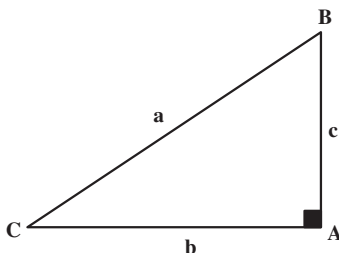
### انواع مثلث

مثلث قائم‌الزاویه: اگر دو ضلع مثلث بر هم عمود باشند؛ مثلث را «قائم‌الزاویه» می‌نامند؛  
بنابراین، در مثلث قائم‌الزاویه یکی از زوایا قائمه است (شکل ۲۸-۱).

$$\hat{A} = 90^\circ$$

$$\hat{B} + \hat{C} = 90^\circ$$

$$a > b \text{ و } a > c$$



شکل ۲۸-۱

یک مثلث قائم‌الزاویه در سه حالت زیر معلوم و قابل ترسیم است:

الف - وتر و یک ضلع معلوم

ب - وتر و یک زاویه

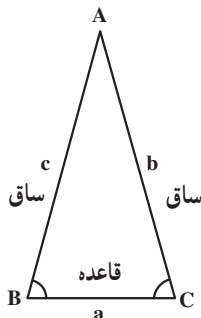
ج - دو ضلع مجاور زاویه‌ی قائمه

مثلث متساوی‌الساقین: اگر دو ضلع مثلثی با هم برابر باشند؛ مثلث را «متساوی‌الساقین»

گویند (شکل ۲۹-۱).

$$b = c$$

$$\hat{B} = \hat{C}$$



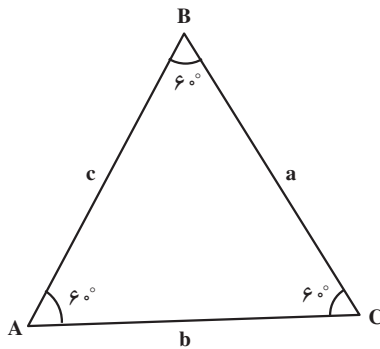
شکل ۲۹-۱

مثلث متساوی الاضلاع: اگر سه ضلع مثلث با هم برابر باشند؛ مثلث را «متساوی الاضلاع» می‌نامند.

تذکره: در هر مثلث متساوی الاضلاع سه زاویه با هم برابرند و هر یک مساوی  $60^\circ$  درجه است (شکل ۱-۳).

$$\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = 60^\circ$$

$$a = b = c$$



شکل ۱-۳

## خودآزمایی

۱- برای شناساندن مفهوم هندسی به دیگران چه باید کرد و چه شرایطی را باید در نظر گرفت؟

۲- هر یک از این عبارات را چنان کامل کنید که یک گزاره‌ی درست یا یک حکم درست حاصل شود:

الف) بعضی از تعریف‌ها تعریف قبلی ندارند و خود ..... هستند. این‌گونه موارد را ..... می‌نامیم و بدون تعریف آن‌ها را می‌پذیریم.

ب) نقطه، خط، صفحه و فضا از مفاهیم ..... هستند.

ج) یک جمله‌ی ..... را گزاره می‌گویند.

د) مجموع دو عدد ۶ و ۴ عدد ۱۵ می‌شود، یک گزاره‌ی ..... است.

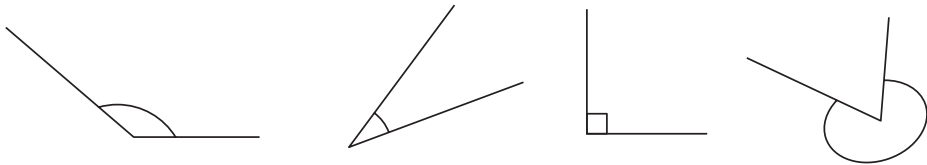
ه) استدلال برای اثبات درستی یک ..... به کمک گزاره‌هایی که قبلاً درستی آن‌ها پذیرفته شده ..... گویند.

و) هر گزاره‌ای که برای اثبات درست بودنش از ..... استفاده شود ..... نامیده می‌شود.

۳- در تمرین‌های زیر گزاره‌های درست را با حرف «د» و گزاره‌های نادرست را با حرف «ن» مشخص کنید.

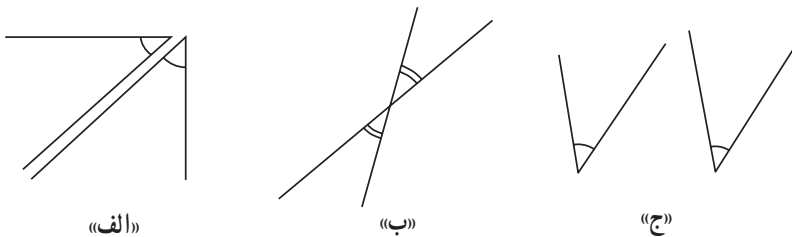
- الف) اصل گزاره‌ای است که درستی آن را با اثبات می‌پذیریم.
- ب) از هر نقطه خارج یک خط می‌توان بیش از یک خط موازی آن رسم کرد.
- ج) مکان هندسی، مجموعه نقاطی است که همه‌ی آن نقاط دارای ویژگی هندسی مشترکی باشند.

۴- در شکل ۳۱-۱ زاویه‌های کوژ و کاو را معین کنید.



شکل ۳۱-۱

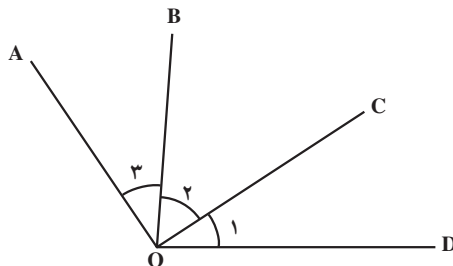
۵- در شکل‌های زیر کدام یک از دو زاویه نسبت به هم مجاور، متقابل یا مجانب هستند؟



شکل ۳۲-۱

۶- با استفاده از خاصیت دو زاویه‌ی متمم اگر ضلع AO عمود بر OC و BO عمود بر OD باشد

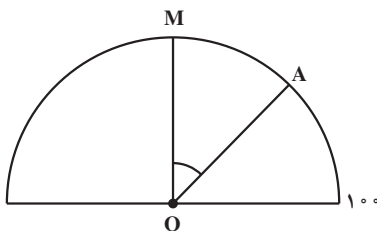
باشد ثابت کنید:  $\angle AOB \cong \angle COD$  یعنی  $\hat{1} = \hat{3}$



شکل ۳۳-۱

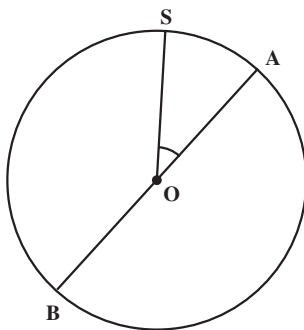


- ۷- دو زاویه‌ی شیب و زینتی در دوربین‌های زاویه‌یاب نسبت به هم چگونه‌اند؟ اگر با یک دوربین زاویه‌یاب زاویه‌ی زینتی آن  $۲۳'$ ،  $۸۵^\circ$  باشد، زاویه‌ی شیب آن چند درجه است؟
- ۸- زاویه‌ی فراز و نشیب را تعریف کنید و کاربرد آن‌ها را در عمران بنویسید.
- ۹-  $۳۵^\circ$ ،  $۲۷'$  چند گراد و چند رادیان است؟
- ۱۰- مطابق شکل ۱-۳۴ که لمب قائمی را نمایش می‌دهد اگر زاویه‌ی گراد  $\angle MOA = ۴۶ / ۵۸$  باشد زاویه‌ی شیب چند درجه است؟



شکل ۱-۳۴

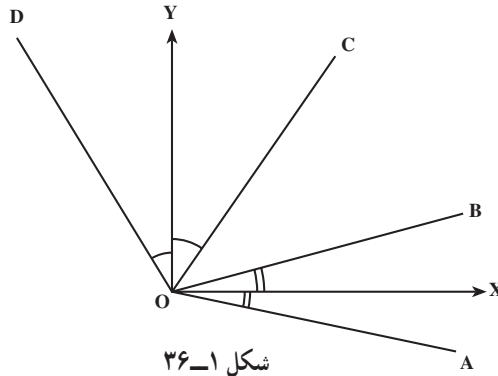
- ۱۱- آیا دو زاویه‌ی  $۱۷۶$  گراد و  $۲۱^\circ$ ،  $۳۶'$  مکمل یک‌دیگر هستند؟
- ۱۲- مطابق شکل ۱-۳۵ زاویه‌ی  $\angle SOA$   $۲۳^\circ$ ،  $۴۵'$  است. زاویه‌ی مقابل به کمان  $\angle SAB$  چند گراد و چند رادیان است؟



شکل ۱-۳۵

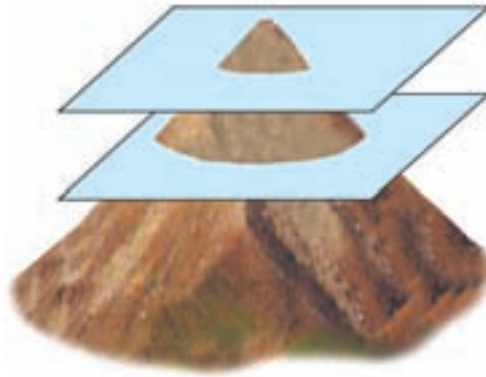
- ۱۳- ضلع‌های غیرمشترک دو زاویه‌ی مجاور بر هم عمودند اگر یکی از آن دو زاویه برابر  $۳^\circ$  گراد باشد، زاویه‌ی دیگر چند درجه است؟
- ۱۴- از چهار زاویه‌ی مجاور  $\alpha$ ،  $\beta$ ،  $\gamma$  و  $\theta$  که حول نقطه‌ی M تشکیل شده‌اند زاویه‌های  $\alpha = ۵۸$  گراد،  $\beta = ۸۷^\circ$ ،  $۳۰'$  و  $\gamma = \frac{2\pi}{3}$  رادیان هستند. اندازه‌ی زاویه‌ی  $\theta$  چند درجه است؟

۱۵- زاویه قائمه‌ی  $\angle xoy$  داده شده است اگر  $ox$  نیم‌ساز زاویه‌ی  $\angle AOB$  و  $oy$  نیز نیم‌ساز زاویه‌ی  $\angle COD$  باشد، ثابت کنید که زاویه‌های  $\angle AOC$  و  $\angle BOD$  مکمل هستند (شکل ۱-۳۶).



شکل ۱-۳۶

۱۶- در شکل ۱-۳۷، قله‌ی کوه با صفحات موازی برش خورده است. چرا مقاطع و محیط‌های آن‌ها با یک‌دیگر موازی‌اند؟ اگر صفحات، متساوی‌الفاصله باشند فصل مشترک صفحات موازی با سطح کوه منحنی‌هایی را تشکیل می‌دهند. این منحنی‌ها در نقشه برداری چه نامیده می‌شود و چه کاربردی دارد؟



شکل ۱-۳۷

۱۷- آیا می‌توان مسطحه‌ی هر فرجه را با دوربین زاویه‌یاب اندازه‌گیری کرد؟ اصولاً چه نوع زاویه‌هایی را می‌توان به وسیله‌ی زاویه‌یاب اندازه‌گیری کرد؟

۱۸- برای برپا نمودن یک ستون به صورت عمود بر صفحه‌ی افق چه شرایطی باید برقرار

باشد؟ چگونه و با چه وسایلی باید این کار را انجام داد؟  
۱۹- قضیه‌ی طول عمود کوتاه‌تر از طول مایل است. چه خاصیتی در مترکشی سطح شیب‌دار دارد که می‌توان از آن استفاده نمود؟

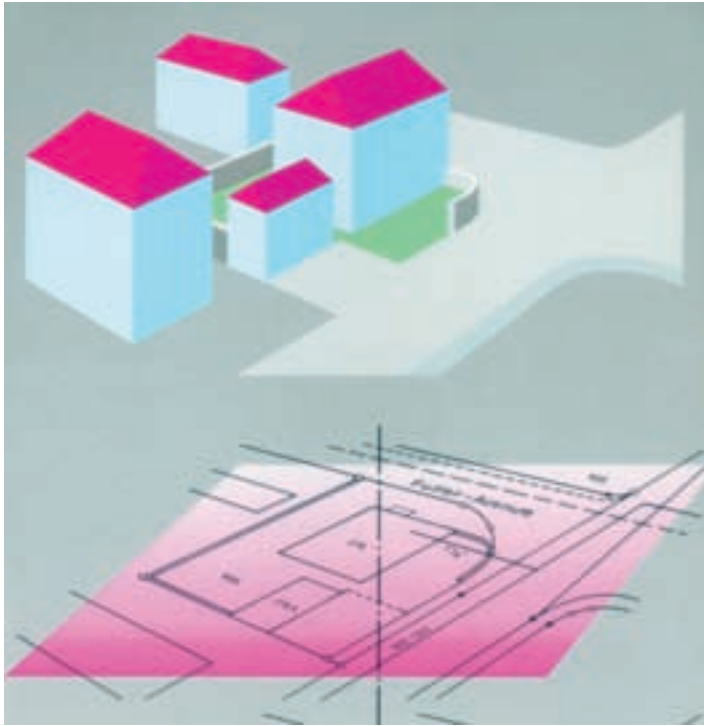
### کارگروهی

دانش‌آموزان کلاس را به گروه‌های کوچک تقسیم کنید. برای هر گروه به صورت چرخشی در هر هفته سرگروه تعیین کنید. در هر گروه دانش‌آموزان به زبان خودشان درس را بازگو کنند و برای ارزیابی میزان یادگیری برای یکدیگر سؤال طرح کنند و پاسخ‌های دریافتی را ارزیابی کنند.  
سه مسأله مهم دیگری که به نظر شما لازم بود در این بخش آورده می‌شد ولی جای آن خالی است.

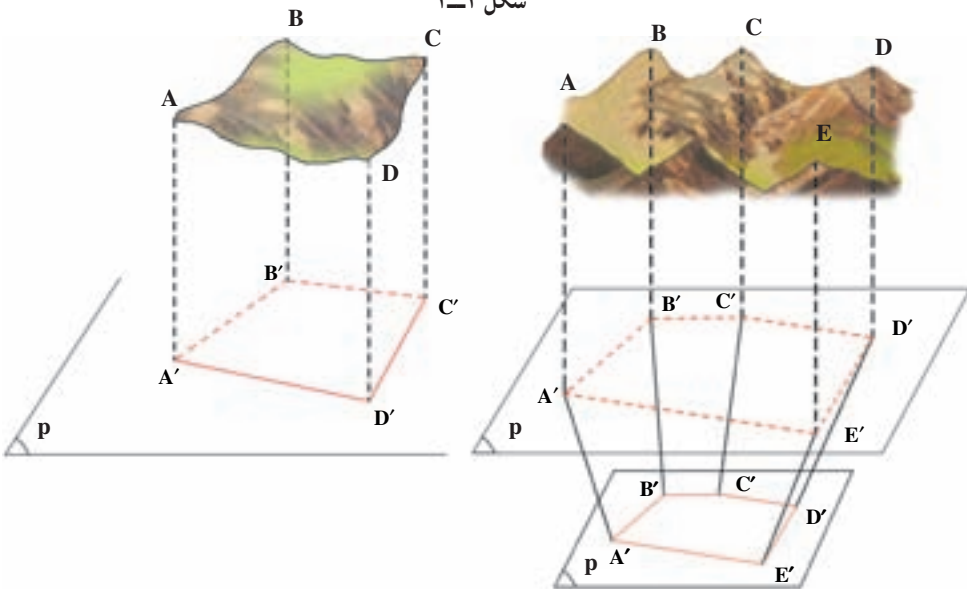
## تصویر (Projection)

هدف‌های رفتاری: پس از پایان این فصل از فراگیر انتظار می‌رود:

- ۱- تصویر قائم یک نقطه بر یک خط راست را توضیح دهد.
- ۲- تصویر یک پاره‌خط بر یک خط راست را توضیح دهد.
- ۳- اندازه‌ی طول تصویر یک پاره‌خط را محاسبه کند.
- ۴- تصویر یک نقطه را بر یک صفحه تعریف کرده، فاصله‌ی یک نقطه از صفحه‌ی تصویر را توضیح دهد.
- ۵- تصویر یک پاره‌خط بر یک صفحه را تعریف کرده، روش اندازه‌گیری طول این تصویر را توضیح دهد.
- ۶- فاصله‌ی دو صفحه‌ی موازی را تعریف کرده، کاربرد آن را در نقشه‌برداری شرح دهد.
- ۷- زاویه‌ی شیب یا زاویه‌ی ارتفاعی را تعریف نموده، کاربردهای آن‌ها را در نقشه‌برداری بیان کند.
- ۸- تصویر یک زاویه بر یک صفحه را تعریف کند.
- ۹- زاویه‌ی افقی را تعریف کرده، کاربرد آن را در نقشه‌برداری توضیح دهد.
- ۱۰- زاویه‌ی زینتی و زاویه‌ی سمت الرأسی را تعریف کرده، رابطه‌ی بین آن دو را بیان کند.
- ۱۱- با دانستن زاویه‌ی شیب یک امتداد بتواند زاویه‌ی زینتی همان امتداد را محاسبه کند.
- ۱۲- با دانستن زاویه‌ی زینتی یک امتداد بتواند زاویه‌ی شیب همان امتداد را محاسبه کند.
- ۱۳- مثال‌های حل شده‌ی فصل را فرا بگیرد.



شکل ۱-۲



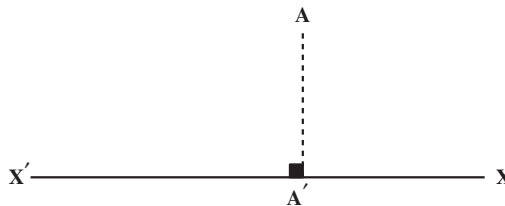
شکل ۲-۲- نقشه‌ی یک منطقه، تصویر افقی و کوچک شده‌ی سطح منطقه و عوارض آن بر روی یک صفحه‌ی افقی است.

## ۱-۲- تصویر قائم یک نقطه بر خط راست (Orthogonal Projection)

از نقطه‌ی  $A$  خطی بر  $x'x$  عمود می‌کنیم نقطه‌ی  $A'$  پای عمود را «تصویر قائم» و نقطه‌ی  $A$  بر خط  $x'x$  و عمود  $AA'$  را «مصور نقطه‌ی  $A$ » می‌نامند.

چون در این کتاب تنها تصویر قائم مورد نظر است از این پس هر جا سخن از تصویر قائم به میان آید برای اختصار کلمه‌ی «تصویر» را به کار می‌بریم و منظور از تصویر یک شکل، تصویر قائم آن شکل خواهد بود.

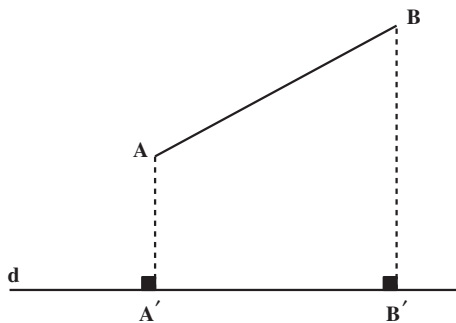
تذکر: تصویر هر نقطه روی خط  $x'x$  بر خود منطبق است.



شکل ۲-۳

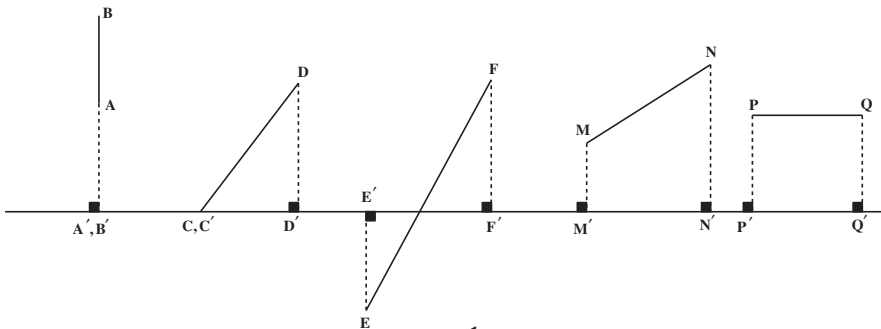
## ۲-۲- تصویر پاره خط بر خط راست

اگر تصویر پاره خط  $AB$  بر خط  $d$  عمود نباشد تصویر آن پاره خط بر خط  $d$  پاره خطی است که دو سر آن تصاویر دو سر پاره خط مفروض باشند (شکل ۲-۴). در شکل ۲-۵ پاره خط  $A'B'$  تصویر پاره خط  $AB$  بر خط  $d$  است.



شکل ۲-۴

اگر پاره خط  $AB$  بر  $d$  عمود باشد، تصویر همه‌ی نقطه‌های  $AB$  یکی خواهد بود؛ در نتیجه تصویر پاره خط  $AB$  یک نقطه می‌شود.



شکل ۵-۲

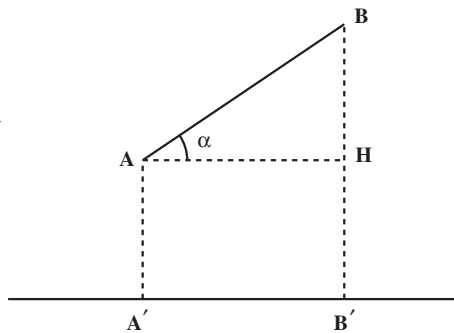
### ۲-۳- اندازه‌ی تصویر (مقدار جبری تصویر یک پاره‌خط بر یک خط)

می‌خواهیم اندازه‌ی  $A'B'$  را مطابق شکل زیر به دست آوریم. در مثل قائم‌الزاویه  $\triangle BAH$

داریم:

$$\cos \alpha = \frac{AH}{AB}$$

(۱)



شکل ۶-۲

در نتیجه:  $AH = AB \cos \alpha$ ؛ چون  $A'B' = AH$  است.

بنابراین با جای‌گزینی در رابطه‌ی ۱:  $A'B' = AB \cos \alpha$  است. از این رو، مقدار جبری تصویر یک پاره‌خط بر یک خط برابر است با حاصل ضرب اندازه‌ی پاره‌خط در کسینوس زاویه‌ی بین پاره‌خط و تصویر آن.

مثال ۲-۱: محاسبه طول افقی (تصویر افقی روی صفحه تراز) در صورتی که طول مایل و

زاویه شیب آن معلوم باشند.

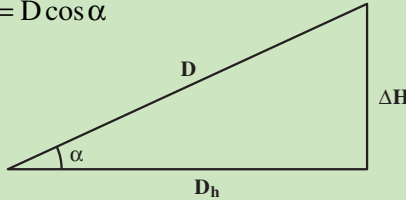
اندازه طول زمینی در سطح شیب‌دار که با افق زاویه  $36^\circ, 25', 46''$  می‌سازد  $32/349$

متر است مقدار آن در روی سطح افق چه قدر است؟

راهکار کلی: برای به دست آوردن طول افقی از روی زاویه شیب و طول مایل طبق فرمول و

شکل زیر به دست می آید مطابق شکل  $D$  طول مایل و  $D_h$  طول افقی و  $\alpha$  زاویه شیب می باشد طبق تعریف کسینوس زاویه حاده در مثلث قائم الزاویه برابر است با ضلع مجاور بر وتر بنابراین :

$$\cos \alpha = \frac{D_h}{D} \Rightarrow D_h = D \cos \alpha$$



شکل ۲-۷

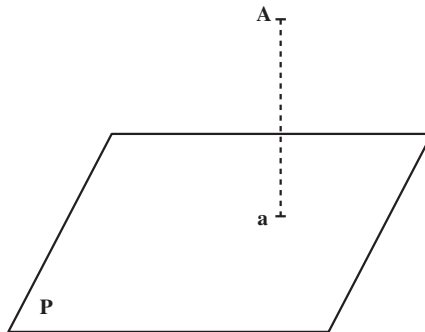
در این فرمول مقدار  $D$  و  $\alpha$  معلومند و  $D_h$  طول افقی از فرمول فوق محاسبه می شود. روش حل: از فرمول  $D_h = D \cos \alpha$  استفاده می کنیم مقدار  $D$  طول مایل معلوم و برابر است با  $249/32$  متر و مقدار زاویه شیب  $46^\circ, 25', 36''$  می باشد پس از قراردادن در رابطه فوق و با استفاده از ماشین حساب مقدار طول افقی برابر می شود با

$$D_h = 249 / 32 \cos(46^\circ, 25', 36'') = 171 / 85 \text{ متر}$$

بحث و بررسی: در نقشه برداری برای محاسبه مساحت یا برداشت و پیاده کردن نقاط طول افقی مورد نیاز می باشد بنابراین لازم است یا به صورت مستقیم یا مسئله فوق (غیر مستقیم) طول افق را به دست آوریم.

## ۲-۴- تصویر یک نقطه بر یک صفحه

اگر از نقطه  $A$  واقع در خارج صفحه خطی بر صفحه (تصویر) عمود کنیم و پای عمود را  $a$  بنامیم، نقطه  $a$  را «تصویر قائم نقطه  $A$ » می نامند (شکل ۲-۸).



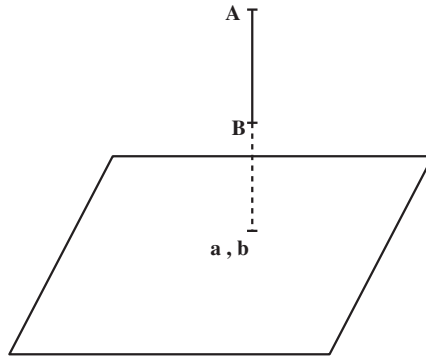
شکل ۲-۸



قضیه: هر نقطه فقط یک تصویر بر روی یک صفحه‌ی تصویر دارد.

## ۲-۵- فاصله‌ی یک نقطه تا صفحه‌ی تصویر

فاصله‌ی هر نقطه تا صفحه‌ی تصویر برابر است با طول عمودی که از آن نقطه بر آن صفحه رسم شود. در شکل ۲-۹ فاصله  $Aa$  است.

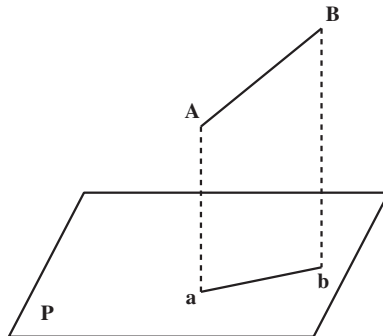


شکل ۲-۹

تذکر: اگر خط  $AB$  عمود بر صفحه‌ی تصویر باشد تصویر خط  $AB$  یک نقطه است.

## ۲-۶- تصویر یک پاره‌خط بر یک صفحه

تصویر پاره‌خط  $AB$  بر صفحه‌ی  $P$  عبارت است از پاره‌خط  $ab$  بر روی صفحه‌ی تصویر که از تصویر انتهای دو سر پاره‌خط  $AB$  به دست آمده باشد (شکل ۲-۱۰).



شکل ۲-۱۰

## ۷-۲ اندازه‌ی تصویر یک پاره‌خط بر یک صفحه

مطابق شکل ۱۱-۲ در مثلث قائم‌الزاویه  $\triangle BAH$  داریم:

$$\cos \alpha = \frac{AH}{AB}$$

$$AH = AB \cos \alpha$$

در نتیجه:

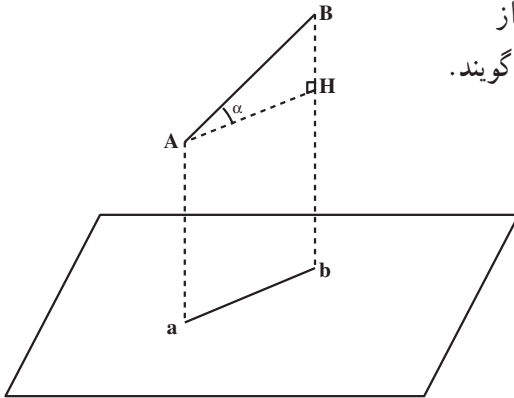
چون چهارضلعی  $AHAb$  یک مستطیل است، بنابراین:  $AH = ab$  است.

$$ab = AB \cos \alpha$$

در نتیجه:

تذکر: اگر صفحه‌ی  $P$  موازی سطح تراز

باشد زاویه‌ی  $\alpha$  را «زاویه‌ی شیب خط  $AB$ » گویند.



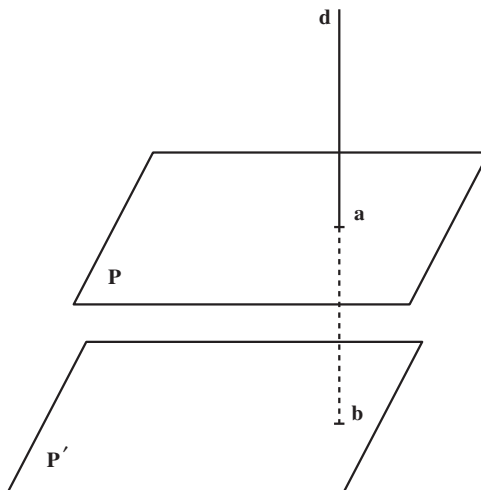
شکل ۱۱-۲

## ۸-۲ فاصله‌ی دو صفحه‌ی موازی

خط  $d$  را عمود بر دو صفحه‌ی موازی  $P$  و  $P'$  رسم می‌کنیم؛ خط  $d$  صفحه‌ی  $P$  را در نقطه‌ی

$a$  و صفحه‌ی  $P'$  را در نقطه‌ی  $b$  قطع می‌کند. طول  $ab$  را «فاصله‌ی دو صفحه‌ی موازی» گویند

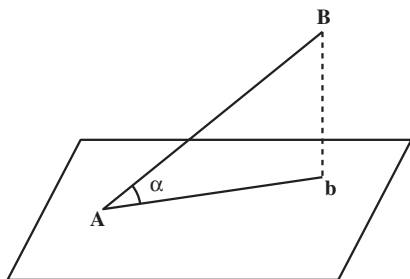
(شکل ۱۲-۲).



شکل ۱۲-۲

## ۹-۲- تعریف زاویه‌ی شیب و یا زاویه‌ی ارتفاعی (Slope Angle)

زاویه‌ای که هر پاره‌خط یا هر امتداد با تصویر خود روی صفحه‌ی افق می‌سازد را «زاویه‌ی شیب یا زاویه‌ی ارتفاعی آن پاره‌خط» گویند.

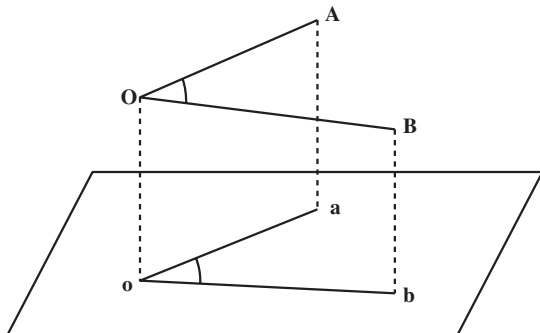


شکل ۲-۱۳

## ۱۰-۲- تصویر یک زاویه بر یک صفحه

تصویر هر زاویه بر صفحه‌ی تصویر به وضعیت صفحه‌ی زاویه نسبت به صفحه‌ی تصویر

بستگی دارد. اگر صفحه‌ی زاویه با صفحه‌ی تصویر موازی باشد؛ تصویر زاویه با خود زاویه مساوی می‌شود (شکل ۲-۱۴).



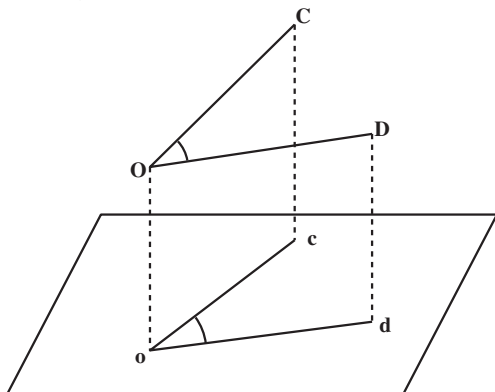
شکل ۲-۱۴

اگر صفحه‌ی زاویه نسبت به صفحه‌ی تصویر مایل باشد، مانند زاویه‌ی  $\angle COD$  برای به‌دست

آوردن تصویر زاویه، تصاویر نقاط  $O$  و  $C$  و  $D$  را بر روی صفحه‌ی تصویر به‌دست می‌آوریم. نقاط

$c$  و  $d$  و  $o$  زاویه‌ی  $\angle cod$  بوده تصویر زاویه نیز

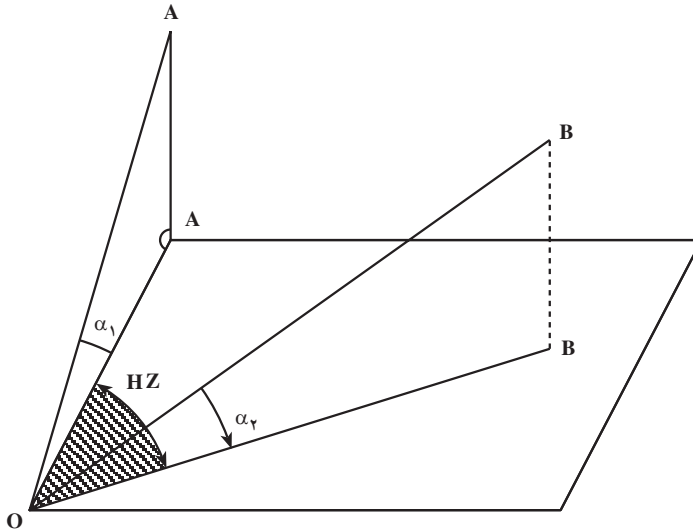
$\angle COD$  است (شکل ۲-۱۵).



شکل ۲-۱۵

تذکر مهم: اگر صفحه‌ی P یک صفحه‌ی افقی باشد، تصویر زاویه‌ی  $\angle COD$  را «زاویه‌ی افقی» گویند. (صفحه‌ی افقی صفحه‌ای است که عمود بر امتداد شاغولی باشد.)

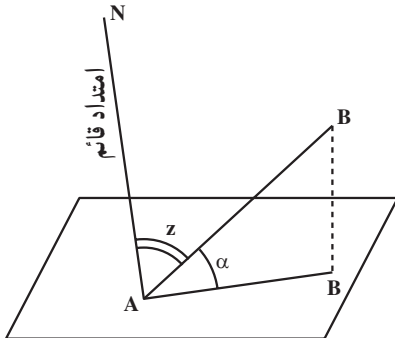
۱۱-۲- نمایش زاویه‌ی افقی (Horizontal Angle) و شیب (Slope Angle)  
 زاویه‌ی HZ (شکل ۱۶-۲) «زاویه‌ی افقی» و زوایای  $\alpha_1$  و  $\alpha_2$  را «زوایای شیب» گویند.



شکل ۱۶-۲

۱۲-۲- تعریف زاویه‌ی زینیتی یا سمت الرأسی (Zenith Angle)

زاویه‌ای که امتداد AB با امتداد قائم بر صفحه‌ی افق گذرنده از A پدیدار می‌سازد «زاویه‌ی زینیتی یا سمت الرأسی» گویند. می‌دانیم که مجموع زوایای شیب و زینیتی  $90^\circ$  درجه است:  $\hat{\alpha} + \hat{z} = 90^\circ$  (شکل ۱۷-۲).



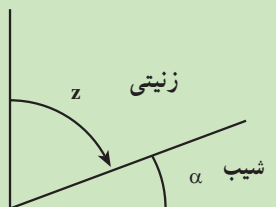
شکل ۱۷-۲

مثال ۲-۲: تبدیل زوایای زینتی به زاویه‌ی شیب یا ارتفاعی

با دوربین تئودولیت (زاویه‌یاب زینتی) پس از نشانه روی مقدار لمب قائم آن  $۸۴^{\circ}, ۳۷', ۲۴''$  قرائت شده است مقدار زاویه ارتفاعی آن را به دست آورید و یا به عبارت دیگر در فرمول‌های تاکنومتری به جای  $\alpha$  چه مقدار را قرار دهیم.

**راهکار کلی:** می‌دانیم لمب قائم دوربین‌های تئودولیت به دو گونه ساخته می‌شود: ۱- صفر لمب قائم در امتداد افق است که در این حالت زاویه ارتفاعی یا شیب اندازه‌گیری می‌شود. ۲- صفر لمب قائم در امتداد قائم است که در این صورت زاویه‌ی زینتی به دست می‌آید و این دو مقدار با هم برابر نیستند و در ربع اول دو زاویه زینتی و ارتفاعی متمم یکدیگرند.

$$\alpha = 90^{\circ} - z$$

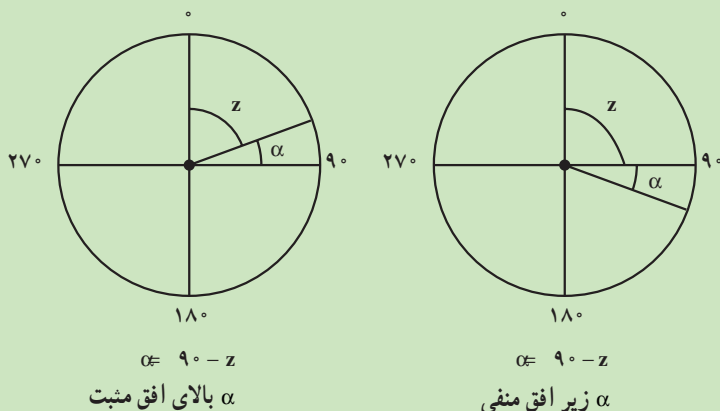


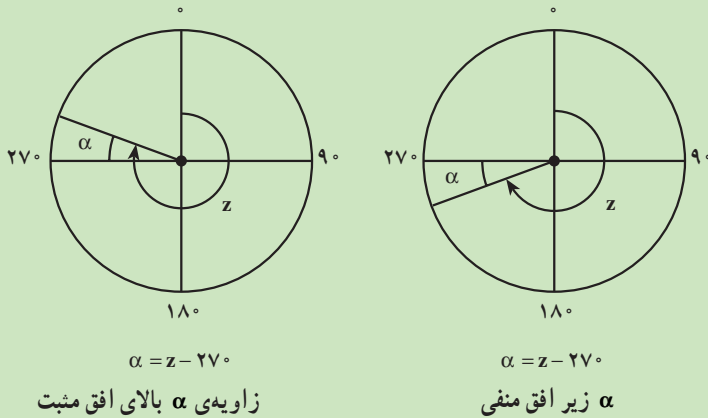
شکل ۲-۱۸

**روش حل:** در این مسئله طبق شکل زاویه قرائت شده زینتی می‌باشد. بنابراین برای به دست آوردن زاویه ارتفاعی از رابطه  $90^{\circ} - z$  استفاده می‌کنیم به طوری که مقدار  $z = ۸۴^{\circ}, ۳۷', ۲۴''$  و مقدار  $\alpha$  مجهول است در نتیجه:

$$\alpha = 90^{\circ} - ۸۴^{\circ}, ۳۷', ۲۴'' = ۵^{\circ}, ۲۲', ۳۶''$$

**بحث و بررسی:** نتیجه می‌گیریم برای به دست آوردن مقدار زاویه شیب  $\alpha$  از روی زاویه‌ی زینتی  $z$  با توجه به شکل‌ها و حالات مختلف زیر آن را به دست آورد.





شکل ۲-۱۹

## خودآزمایی

- ۱- در چه صورت تصویر شکل F بر یک محور یا بر یک صفحه، منحصر به یک نقطه است؟
- ۲- در چه صورت تصویر شکل F بر صفحه، یک خط راست است؟
- ۳- کدام یک از گزاره‌های زیر درست و کدام نادرست است؟
  - الف) تصویرهای دو خط متوازی بر هر صفحه دو خط متوازی اند.
  - ب) اگر تصویرهای دو خط بر یک صفحه موازی باشند آن دو خط متوازی اند.
  - ج) تصویرهای دو پاره خط متساوی بر هر صفحه دو پاره خط متساوی اند.
  - د) اگر تصویرهای دو پاره خط بر یک صفحه متساوی باشند آن دو پاره خط متساوی اند.
  - ه) اگر صفحه‌ی شکل مسطح بر صفحه‌ی تصویر عمود باشد تصویر قائم آن شکل منحصر به یک خط راست است.
- ۴- ثابت کنید اندازه‌ی تصویر هر پاره خط بر یک خط برابر است با حاصل ضرب اندازه‌ی پاره خط در کسینوس زاویه‌ی بین پاره خط و تصویر آن.
- ۵- آیا به وسیله‌ی شاغول و ریسمان می‌توان یک نقطه را بر صفحه‌ی افق یا صفحه‌ی تراز، تصویر نمود؟ چرا؟
- ۶- تصویر هر زاویه روی صفحه‌ی افقی را زاویه‌ی ..... گویند. این زاویه را به وسیله‌ی چه دوربینی اندازه‌گیری می‌کنند؟

۷- اندازه‌ی طول زمینی در سطح شیب‌دار که با افق زاویه‌ی  $30^\circ, 28'$  می‌سازد  $128/25$  متر است. مقدار آن در روی سطح افق چه قدر است؟

### کارگروهی دانش‌آموزان

- ۱- برای این فصل هم مانند صفحه ۱۹ دانش‌آموزان درس را به زبان خود برای اعضای گروه با نظارت سرگروه خود بازگو کنند و با طرح سؤالات مربوط به درس میزان یادگیری گروه را ارزیابی کنند.
- ۲- پنج پرسش که قالب آن با متن پرسش‌های ۱ تا ۷ متفاوت باشد طرح کنید.