فصل چهارم

کاربرد مثلث در نقشه‌برداری

هدف‌های رفتاری: پس از پایان این فصل از فراگیر انتظار می‌رود :

۱ــ رابطه‌ی فیثاغورث را در هر مثلث قائم‌الزاویه بنویسد.

۲ــ روابط مهم در هر مثلث قائم‌الزاویه مانند ارتباط مربع ارتفاع و مربع هر یک از اضلاع را با تصاویر اضلاع مثلث بنویسد.

۳ ــ ارتفاع تنه‌ی درختی که از نقطه‌ی معلوم شکسته است را به کمک رابطه‌ی فیثاغورث محاسبه کند.

۴ــ نسبت‌های مثلثاتی : سینوس، کسینوس، تانژانت و کتانژانت هر زاویه‌ی حاده در مثلث قائم‌الزاویه را بنویسد.

۵ــ در هر مثلث قائم‌الزاویه، یک زاویه‌ی مجهول را با مشخص بودن اندازه‌ی دو ضلع در هر مثلث قائم‌الزاویه محاسبه کند.

۶ــ در هر مثلث قائم‌الزاویه به کمک یک ضلع و زاویه‌ی معلوم، اندازه‌ی ضلع مجهول را محاسبه کند.

۷ــ در هر مثلث قائم‌الزاویه با استفاده از اندازه‌ی دو ضلع معلوم، اندازه‌ی ضلع دیگر را محاسبه کند.

۸ــ اصطلاحات :اختلاف ارتفاع، طول مایل، زاویه‌ی شیب و طول افقی را روی یک مثلث قائم‌الزاویه مشخص کند و روابط بین آن‌ها را بنویسد و شرح دهد.

۹ــ ارتفاع ساختمان، ستون، درخت، ارتفاع ساختمان از روی ارتفاع پنجره را به کمک روابط مثلثاتی محاسبه کند.

۱۰ــ ارتفاع دکل غیرقابل دسترس را با استفاده از روابط مثلثاتی محاسبه کند.

۱۱ــ مساحت زمین‌های شکل‌های مثلث، با ذوزنقه، مربع و ... را به کمک

اندازه‌های داده شده محاسبه کند.

۱۲ــ با مشخص بودن اندازه‌ی اضلاع در هر مثلث دلخواه به کمک روابط مثلثاتی زوایای مثلث را محاسبه کند.

۱۳ــ اختلاف ارتفاع دو ساختمان روبروی هم را محاسبه کند.

۱۴ــ با مشخص بودن زاویه‌ی فراز بلندترین نقطه برج با حرکت به طرف برج و پیمودن مسافت، ارتفاع برج را محاسبه کند.

۱۵ــ رابطه‌های کسینوس‌ها و سینوس‌ها را در هر مثلث غیرمشخص بنویسد و اندازه‌ی اضلاع را روی یک مثلث دلخواه تشخیص دهد.

۱۶ــ با رسم یک مثلث و با معلوم بودن دو زاویه و یک ضلع از یک مثلث، اندازه‌ی سایر اضلاع و زوایا را محاسبه کند.

۱۷ــ با رسم یک مثلث و با معلوم بودن دو ضلع و زاویه‌ی مقابل به یکی از این دو ضلع معلوم، اندازه‌ی سایر اضلاع و زوایا را محاسبه کند.

۱۸ــ با رسم یک مثلث و با معلوم بودن دو ضلع و زاویه‌ی بین در یک مثلث، اندازه‌ی سایر اضلاع و زوایا را محاسبه کند.

۱۹ــ با رسم یک مثلث و با معلوم بودن سه ضلع آن، زاویه‌ی سایر اضلاع و زوایا را محاسبه کند.

۲۰ــ اندازه‌ی زاویه‌ی $B\hat{A}C$ که نقاط B، C آن به علت وجود مانع دید به طور مستقیم امکان ندارد را محاسبه کند.

۲۱ــ مثال‌های حل شده در این فصل را فرابگیرد.

آیا می‌دانید

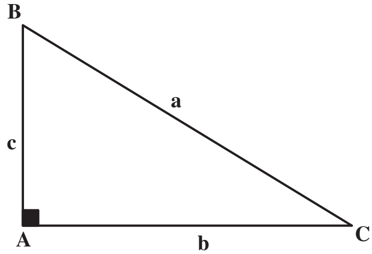
در فرانسه هنوز یک قضیه کسینوس‌ها را به یاد بود غیاث‌الدین جمشید کاشانی «تئورم کاشی» می‌خوانند.

۴ــ۱ــ رابطه‌ی فیثاغورث در مثلث قائم‌الزاویه

در هر مثلث قائم‌الزاویه مربع وتر برابر است با مجموع مربعات دو ضلع دیگر :

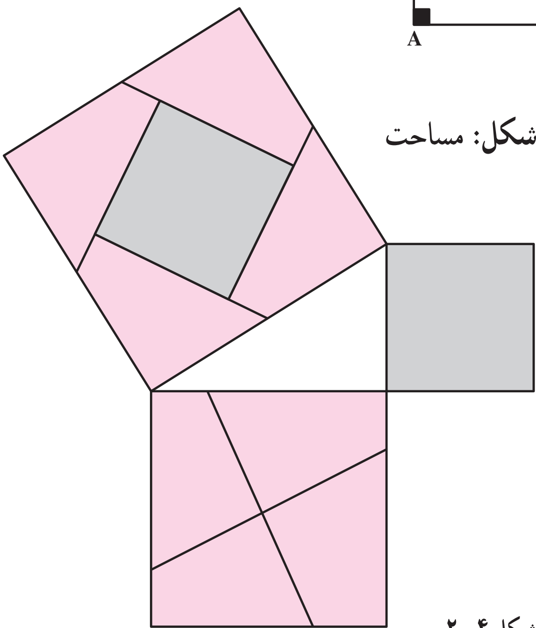
$$\overline{BC}^{۲} = \overline{AC}^{۲} + \overline{AB}^{۲}$$

$$a^{۲} = b^{۲} + c^{۲}$$



شکل ۴ــ۱

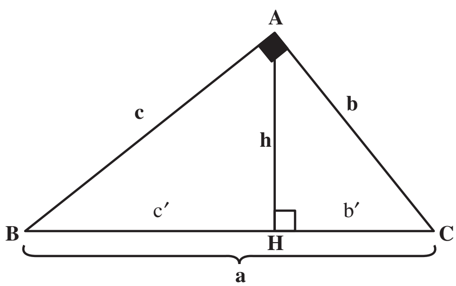
اثبات رابطه فیثاغورث از طریق شکل: مساحت مربعی که روی وتر ساخته شده، مساوی است با مجموع مساحت‌های دو مربعی که روی دو ضلع دیگر ساخته شده است (شکل ۴ــ۲).



شکل ۴ــ۲

در هر مثلث قائم‌الزاویه (مانند شکل ۴ــ۳) همواره روابط زیر برقرار است :

$$\begin{cases} h^{۲} = b'c' \\ b^{۲} = ab' \\ c^{۲} = ac' \end{cases}$$



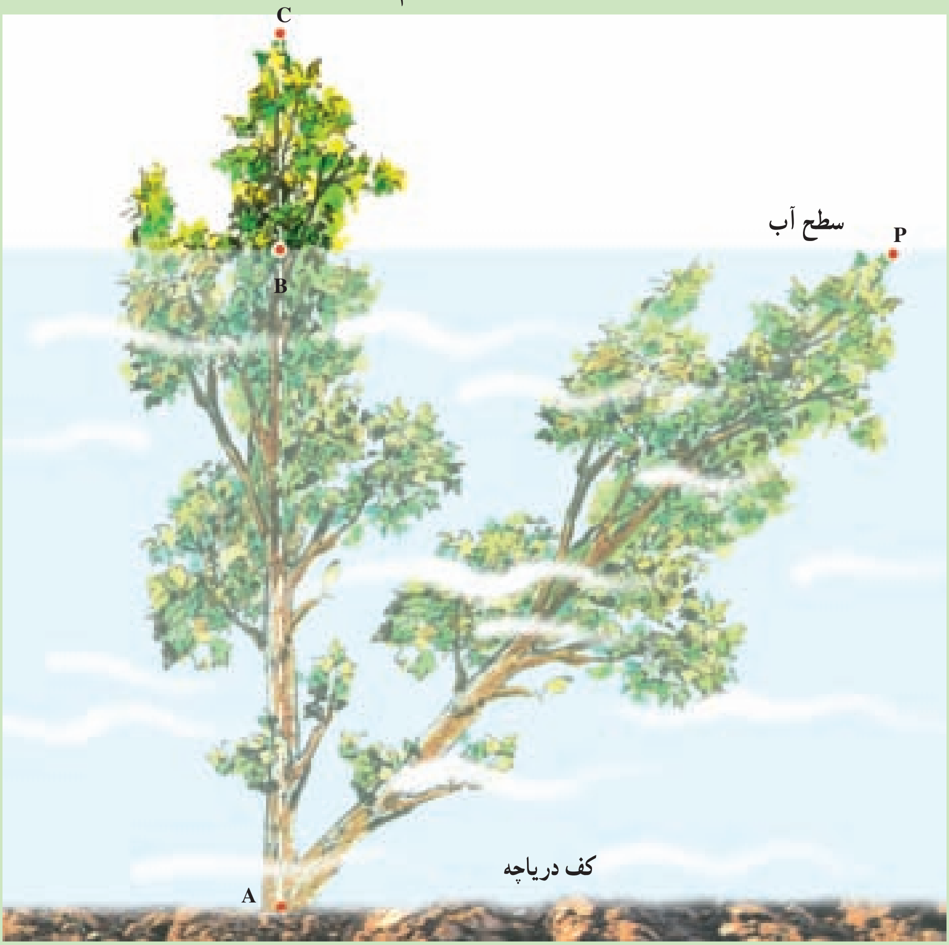
شکل ۴ــ۳

۴ــ۲ــ مثال‌هایی با استفاده از رابطه‌ی فیثاغورث

مثال ۴ــ۱ــ درختی $\frac{۱}{۲}$ متر از آب بیرون است اگر آن را (مطابق شکل ۴ــ۴ کتاب) خم کنیم تا به نقطه‌ی P در فاصله‌ی ۲ متری جای نخست برسد در زیر آب قرار می‌گیرد. عمق دریاچه، یعنی طول پاره‌خط AB را پیدا کنید؟

راهکار کلی: در این مسئله ابتدا مطابق شکل و فرض مسئله معلومات و مجهولات را مشخص می‌کنیم اگر فرض کنیم طول $AB = x$ باشد طبق فرض طول متر $BC = \frac{۱}{۲}$ و مقدار طول AP برابر است با :

$$AP = AC = AB + BC = x + \frac{۱}{۲}$$



شکل ۴ــ۴

و همچنین طول متر $BP = ۲$ می‌باشد و مثلث $\overset{\Delta}{ABP}$ یک مثلث قائم‌الزاویه است یعنی $BP \perp AB$ زیرا سطح آب یک سطح تراز افقی است و امتداد درخت به‌صورت قائم است.

رابطه فیثاغورث را در این مثلث قائم‌الزاویه می‌نویسیم

$AP^۲ = AB^۲ + BP^۲$ (مربع وتر برابر است با مجموع مربعات دو ضلع دیگر)

اگر به‌جای اضلاع مثلث مقادیر آن را برحسب x قرار دهیم خواهیم داشت :

$$(x + \frac{۱}{۲})^۲ = x^۲ + ۲^۲$$

روش حل: رابطه‌ی $(x + \frac{۱}{۲})^۲ = x^۲ + ۲^۲$ را ساده می‌کنیم

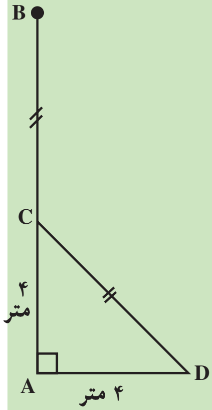
$$x^۲ + \frac{۱}{۴} + x = x^۲ + ۴$$

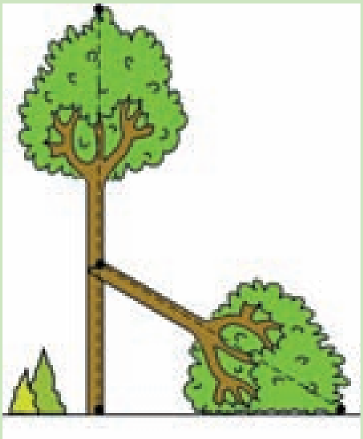
$$\frac{۱}{۴} + x = ۴ \Rightarrow x = ۴ - \frac{۱}{۴} = \frac{۳}{۴} \Rightarrow x = ۰/۷۵$$ متر   عمق دریاچه

بحث و بررسی: با توجه به حل مسئله فوق که به شکلی از مثلث قائم‌الزاویه تشکیل شده است با استفاده از رابطه فیثاغورث بسیاری از مجهولات را می‌توان محاسبه کرد.

مثال ۴ــ۲ــ تنه‌ی درخت AB از نقطه‌ی C که از زمین ۴متر ارتفاع دارد شکسته شده و رأس آن در نقطه‌ی D در فاصله‌ی ۴ متری نقطه‌ی A به زمین افتاده است. ارتفاع تنه‌ی درخت (AB) را پیدا کنید (شکل ۴ــ۵).

راهکار کلی: با توجه به شکل مسئله ارتفاع تنه‌ی درخت برابر است با $AB = AC + BC$ و طبق فرض مسئله طول متر $AC = ۴$ و طول متر $AD = ۴$ و $BC = CD$ می‌باشد برای به‌دست آوردن ارتفاع AB کافی است که طول مجهول BC را محاسبه کنیم از طرف دیگر طول BC که با طول CD برابر است از مثلث قائم‌الزاویه $\overset{\Delta}{ACD}$ رابطه فیثاغورث به‌دست می‌آید.





شکل ۴ــ۵

روش حل: رابطه فیثاغورث را در مثلث $\overset{\Delta}{ACD}$ می‌نویسیم

$$CD^۲ = AC^۲ + AD^۲$$

مقادیر AD و AC را که هرکدام ۴ متر است دررابطه فوق قرار می‌دهیم.

$$CD^۲ = ۴^۲ + ۴^۲ = ۳۲ \Rightarrow CD = \sqrt{۳۲} = ۵/۶۵ \text{ متر}$$

از طرف دیگر $BC = CD = ۵/۶۵$ متر می‌شود

بنابراین AB برابر است با

$$AB = AC + BC = ۴ + ۵/۶۵ = ۹/۶۵ \text{ متر}$$

بحث و بررسی: با توجه به این نوع مسائل که شکلی از مثلث قائم‌الزاویه هستند و با استفاده از رابطه فیثاغورث پارامترهای مجهول به‌دست می‌آید.

۴ـ۳ـ حل مثلث قائم‌الزاویه

روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه

نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه: در مثلث قائم‌الزاویه (شکل ۴ـ۶) سینوس هر زاویه‌ی حاده عبارت است از نسبت ضلع مقابل آن زاویه بر وتر :

$$\sin B = \frac{b}{a}$$

کسینوس هر زاویه‌ی حاده عبارت است از نسبت ضلع مجاور آن زاویه بر وتر :

$$\cos B = \frac{c}{a}$$

تانژانت هر زاویه‌ی حاده عبارت است از نسبت ضلع مقابل آن زاویه بر ضلع مجاور :

$$tgB = \frac{b}{c}$$

کتانژانت هر زاویه‌ی حاده عبارت است از نسبت ضلع مجاور آن زاویه بر ضلع مقابل :

$$cotgB = \frac{c}{b}$$

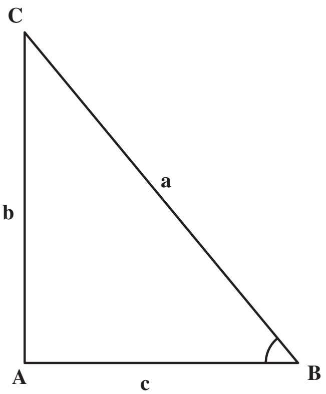
همچنین برای زاویه‌ی $\hat{C}$ نیز می‌توان نوشت :

$$\sin\hat{C} = \frac{c}{a}$$

$$\cos\hat{C} = \frac{b}{a}$$

$$tg\hat{C} = \frac{c}{b}$$

$$cotg\hat{C} = \frac{b}{c}$$



شکل ۴ــ۶

محاسبه‌ی یک زاویه‌ی مجهول از روی دو ضلع معلوم: با در نظر گرفتن این نکته که دو ضلع معلوم نسبت به زاویه‌ی مجهول چه وضعیتی داشته باشد از یکی از روابط زیر استفاده می‌شود :

$$\sin\hat{B} = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{b}{a} \Rightarrow \hat{B} = \sin^{-1}(\frac{b}{a})$$

$$\cos\hat{B} = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{c}{a} \Rightarrow \hat{B} = \cos^{-1}(\frac{c}{a})$$

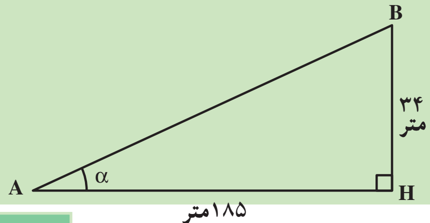
$$tg\hat{B} = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{b}{c} \Rightarrow \hat{B} = tg^{-1}(\frac{b}{c})$$

مثال ۴ــ۳ــ اختلاف ارتفاع دو نقطه A و B ۳۴ متر است و طول افقی امتداد آن را از طریق مترکشی ۱۸۵ متر به‌دست آورده‌ایم شیب و زاویه شیب را محاسبه کنید.

راهکار کلی: شکل زیر را با توجه به صورت مسئله و معلومات داده شده ترسیم می‌کنیم.

چون مثلث ABH یک مثلث قائم‌الزاویه است از فرمول $tg\alpha = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}}$ استفاده می‌کنیم.

AH و BH دو ضلع معلومند $tg\alpha = \frac{BH}{AH}$



شکل ۴ــ۷

که α از رابطه فوق به‌دست می‌آید که به آن شیب امتداد AB نیز می‌گویند.

روش حل: در رابطه $tg\alpha = \dfrac{BH}{AH}$ به‌جای BH و AH مقدارشان قرار می‌دهیم نتیجه می‌شود

(با تقریب) $tg\alpha = \dfrac{۳۴}{۱۸۵} = ۰/۱۸۳$

$$\alpha = \text{Arc tg}\left(\frac{۳۴}{۱۸۵}\right) = \text{Arc tg}(۰/۱۸۳) = ۱۰^\circ, ۲۲', ۱۳''$$

بحث و بررسی: با حل این مسئله می‌توانیم علاوه بر شیب $(tg\alpha)$، زاویه شیب (α) را که در نقشه‌برداری مورد نیاز است را به‌دست آوریم.

محاسبه‌ی یک ضلع مجهول از روی یک ضلع معلوم و زاویه‌ی معلوم: با در نظر گرفتن این نکته که ضلع و زاویه‌ی معلوم نسبت به ضلع مجهول چه وضعیتی داشته باشد از یکی از روابط زیر استفاده می‌شود:

$$b = \text{وتر} \times \sin(\text{زاویه‌ی مقابل}) = a \sin \hat{B}$$

$$b = \text{ضلع مجاور} \times tg(\text{زاویه‌ی مقابل}) = \cot g\, \hat{B}$$

$$\text{وتر}\ a = \frac{\text{ضلع}}{\sin(\text{زاویه‌ی مقابل به ضلع})} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{c}}$$

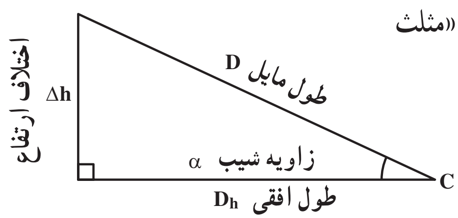
توضیح این که $\hat{B} + \hat{C} = ۹۰^\circ$ لذا با معلوم بودن یکی، دیگری قابل محاسبه خواهد بود.

محاسبه‌ی یک ضلع مجهول از روی دو ضلع معلوم دیگر: در این حالت می‌توان مستقیماً از رابطه‌ی فیثاغورث استفاده نمود:

$$\text{وتر}\ a^۲ = b^۲ + c^۲$$

$$\text{ضلع}\ b^۲ = a^۲ - c^۲$$

نکته: در مساحی مثلث قائم‌الزاویه با عنوان «مثلث شیب» کاربرد فراوانی دارد.



شکل ۴ـ۸

با توجه به شکل ۴ــ ۸ و روابط قبل می‌توان دید :

$$\begin{cases} \text{طول افقی} = \text{طول مایل} \times \cos(\text{زاویه‌ی شیب}) \\ D_h = D \times \cos(\alpha) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{اختلاف ارتفاع} = \text{طول مایل} \times \sin(\text{زاویه‌ی شیب}) \\ \Delta h = D \times \sin(\alpha) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{اختلاف ارتفاع} = \text{طول افقی} \times tg(\text{زاویه‌ی شیب}) \\ \Delta h = D_h \times tg(\alpha) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\text{طول مایل})^۲ = (\text{طول افقی})^۲ \times (\text{اختلاف ارتفاع})^۲ \\ D^۲ = D_h^۲ \times \Delta h^۲ \end{cases}$$

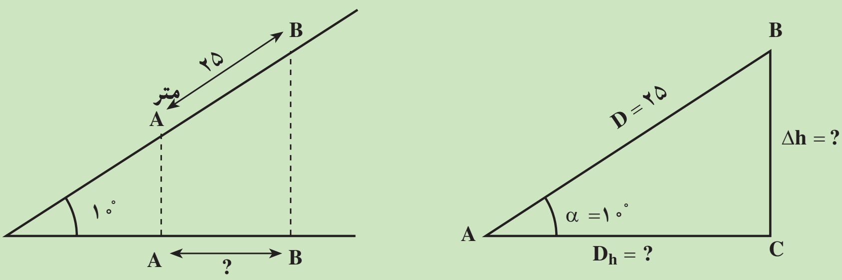
مثال ۴ــ۴ــ فاصله‌ی مایل بین دو نقطه در روی خیابانی با شیب طولی ثابت ۱۰ درجه برابر ۲۵ متر می‌باشد. اختلاف ارتفاع و فاصله‌ی افقی بین دو نقطه‌ی فوق چند متر است؟

$D_h = D\cos\alpha = ۲۵\cos ۱۰^\circ$

$= ۲۴/۶۲$ متر

$\Delta h = D\sin\alpha = ۲۵\sin ۱۰^\circ$

$= ۴/۳۴$ متر

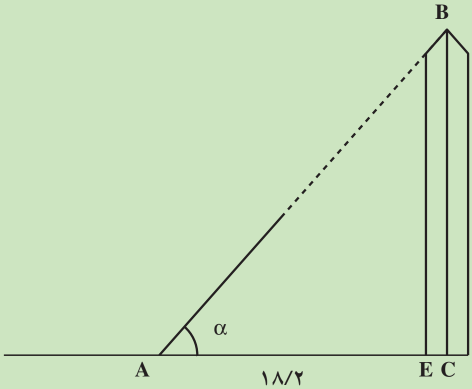


(الف) شکل ۴ــ۹ (ب)

۴ــ۴ــ کاربرد مثلث قائم‌الزاویه در مسائل نقشه‌برداری

روابط مثلثاتی در حل مسائل نقشه‌برداری کاربرد بسیاری دارد ؛ از این‌رو چند مثال به‌منظور آشنایی بیش‌تر آورده می‌شود.

مثال ۴ــ۵ــ مطلوبست محاسبه ارتفاع ستون سنگی مطابق شکل زیر به‌طوری که طول سایه آن ۱۸/۲ متر و زاویه $\alpha = ۶۲^\circ,۷'$ اندازه‌گیری شده است (تذکر قطر پایه ستون سنگی ۲ متر است).



شکل ۴ــ۱۰

راهکار کلی: با استفاده از رابطه تانژانت‌ها در مثلث قائم‌الزاویه $\overset{\Delta}{ABC}$ می‌توان نوشت :

$$tg\alpha = \frac{BC}{AC} \Rightarrow BC = ACtg\alpha$$

می‌دانیم طول AC برابر مجموع طول سایه ستون سنگی به‌اضافه نصف قطر پایه ستون می‌باشد. با داشتن α و AC طول BC محاسبه می‌شود.

روش حل: در فرمول $BC = AC\, tg\alpha$ ابتدا مقدار AC را به‌دست می‌آوریم

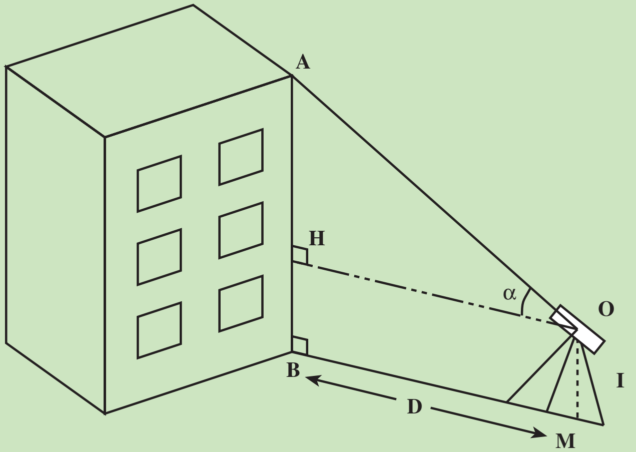
درنتیجه $AC = AE + EC = ۱۸/۲ + ۱ = ۱۹/۲$ متر

$BC = ۱۹/۲ tg(۶۲^\circ,۷') = ۳۶/۲۸$ متر (با استفاده از ماشین‌حساب)

بحث و بررسی: فرمول‌های خطوط مثلثاتی از قبیل تانژانت ــ کتانژانت ــ سینوس ــ کسینوس در نقشه‌برداری کاربرد زیادی دارد که در مساحی فراخواهید گرفت.

مثال ۴ــ۶ــ برای محاسبه ارتفاع ساختمان دوربین زاویه‌یاب را مطابق شکل در نقطه M به فاصله ۱۵متری تا پای ساختمان مستقر کرده و به نقطه بالای ساختمان نشانه‌روی می‌کنیم زاویه ارتفاعی α برابر $۳۸^\circ,۳۹',۳۵'$ شده است. اگر ارتفاع زاویه‌یاب یک متر و پنجاه‌و چهار سانتی‌متر

باشد ارتفاع ساختمان (طول AB) را به‌دست آورید (سطح زمین افقی می‌باشد).



شکل ۴ــ۱۱

راهکار کلی: می‌دانیم طبق فرض مسئله طول $BH = OM = I$ ارتفاع دستگاه معلوم است همچنین طول افقی $OH = BM = D$ اندازه‌گیری شده است چون طول $BM = D$ در سطح افق می‌باشد مثلث $A\overset{\Delta}{O}H$ قائم‌الزاویه است یعنی امتداد OH موازی BM عمود بر AB ارتفاع ساختمان است از رابطه مثلثاتی (تانژانت) برای حل این مسئله استفاده می‌کنیم.

$$tg\alpha = \frac{AH}{HO} \Rightarrow AH = HOtg\alpha \Rightarrow \boxed{AH = Dtg\alpha}$$

$AB = AH + BH = Dtg\alpha + I$ (مقادیر معلوم AH و BH را در رابطه فوق قرار می‌دهیم)

$\boxed{AB = Dtg\alpha + I}$ نتیجه می‌شود

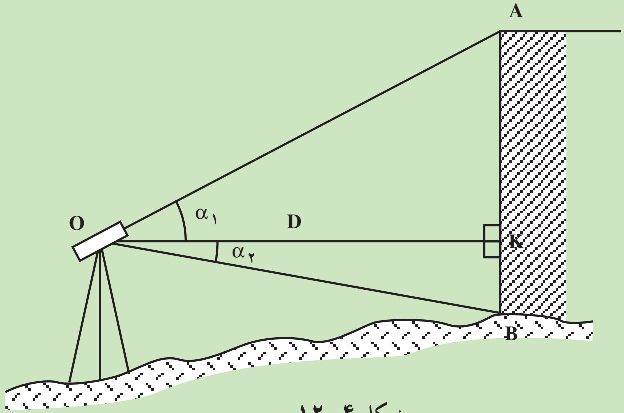
روش حل: در فرمول $AB = Dtg\alpha + I$ طبق فرض متر $D = ۱۵$ و $\alpha = ۳۸^\circ, ۳۹', ۳۵''$ و متر $I = ۱/۵۴$

مقادیر معلوم را جاگذاری می‌کنیم

$AB = ۱۵tg(۳۸^\circ, ۳۹', ۳۵'') + ۱/۵۴ = ۱۱/۹۹۹ \simeq ۱۲$ متر

بحث و بررسی: این روش تعیین ارتفاع را که با اندازه‌گیری زاویه قائم و طول افقی به‌دست می‌آید و از روابط مثلثاتی در حل آن استفاده می‌شود ترازیابی مثلثاتی نیز می‌گویند و در مواردی که ترازیابی هندسی (مستقیم با نیوو و شاخص) امکان‌پذیر نباشد به‌کار می‌رود.

مثال ۴ــ۷ــ برای اندازه‌گیری ارتفاع ساختمان دوربین تئودولیت را در فاصله ۲۰متری ساختمان در نقطه M مستقر می‌کنیم و به بالاترین و پایین‌ترین نقطه ساختمان نشانه‌روی کرده و طبق شکل زیر زاویه‌های $\alpha_{۱}$ و $\alpha_{۲}$ را اندازه‌گیری شده و به ترتیب برابرند با $\alpha_{۱} = ۴۷^\circ,۴۳',۳۵'$ و $\alpha_{۲} = ۲۱^\circ,۴۸',۵'$ مطلوبست محاسبه ارتفاع ساختمان (سطح زمین افقی نیست).



شکل ۴ــ۱۲

راهکار کلی: می‌دانیم طبق شکل مسئله ارتفاع ساختمان AB از دو قسمت AK و BK تشکیل شده $(AB = AK + BK)$ که هرکدام از آن‌ها را می‌توان از مثلث‌های قائم‌الزاویه $O\overset{\Delta}{A}K$ و $O\overset{\Delta}{B}K$ به‌دست آورد.

در مثلث $O\overset{\Delta}{A}K$ داریم رابطه ۱ $\quad tg\alpha_{۱} = \dfrac{AK}{OK} = \dfrac{AK}{D} \Rightarrow \boxed{AK = Dtg\alpha_{۱}}$

و در مثلث $O\overset{\Delta}{B}K$ داریم رابطه ۲ $\quad tg\alpha_{۲} = \dfrac{BK}{OK} = \dfrac{BK}{D} \Rightarrow \boxed{BK = Dtg\alpha_{۲}}$

دو طرف رابطه‌های ۱ و ۲ را با هم جمع می‌کنیم

$$AK + BK = Dtg\alpha_{۱} + Dtg\alpha_{۲}$$

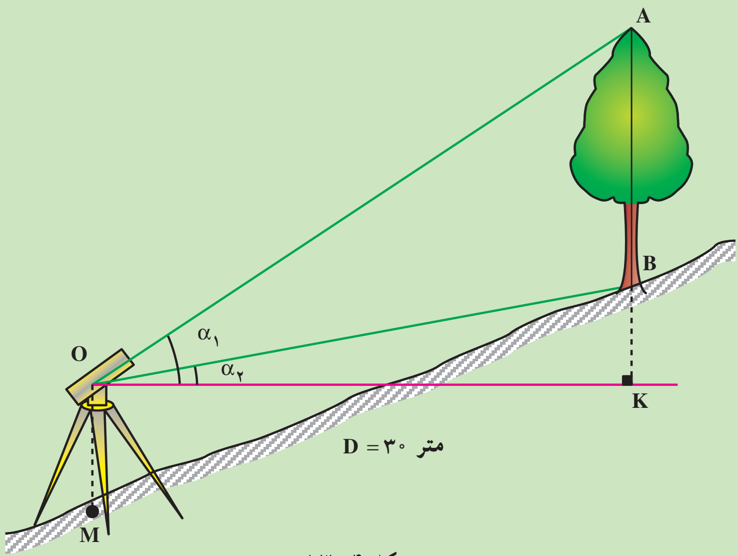
رابطه ۳ $\quad \boxed{AB = D(tg\alpha_{۱} + tg\alpha_{۲})}$

روش حل مسئله: طبق فرض مسئله مقدار فاصله افقی D برابر است با ۲۰ متر و زوایای $\alpha_{۱} = ۴۷^\circ,۴۳',۳۵'$ و $\alpha_{۲} = ۲۱^\circ,۴۸',۱۵'$ بنابراین برای به‌دست آوردن ارتفاع AB پارامترهای معلوم را در رابطه ۳ قرار می‌دهیم.

$$AB = D(tg\alpha_{۱} + tg\alpha_{۲}) = ۲۰\left[tg(۴۷^\circ,۴۳',۳۵') + tg(۲۱^\circ,۴۸',۵')\right\} = ۳۰ \text{ متر}$$

بحث و بررسی: این مسئله یک نوع ترازیابی مثلثاتی است که با اندازه‌گیری طول افقی و زاویه‌های شیب توسط زاویه‌یاب محاسبه می‌گردد.

مثال ۴ــ۸ــ برای اندازه‌گیری ارتفاع درخت زاویه‌یاب را درفاصله (افقی) ۳۰متری آن قرار می‌دهیم و طبق شکل زوایای $\alpha_۱$ و $\alpha_۲$ را اندازه‌گیری کرده و مقدار آن‌ها $\alpha_۱ = ۴۶^\circ,۵۰',۵۱''$ و $\alpha_۲ = ۱۳^\circ,۸',۳''$ شده است مطلوب است محاسبه ارتفاع درخت (AB) (سطح زمین افقی نیست).



شکل ۴ــ۱۳

راهکار کلی: با توجه به شکل مسئله مقدار ارتفاع AB برابر است با رابطه ۱ $AB = AK - BK$ مقادیر AK و BK را می‌توانیم از مثلث‌های قائم‌الزاویه $\overset{\Delta}{OAK}$ و $\overset{\Delta}{OBK}$ به‌صورت زیر به دست آوریم

رابطه ۲ $\boxed{AK = Dtg\alpha_۱} \Leftarrow \dfrac{AK}{D} = \dfrac{AK}{OK} = tg\alpha_۱$ در مثلث $\overset{\Delta}{OAK}$

رابطه ۳ $\boxed{BK = Dtg\alpha_۲} \Leftarrow \dfrac{BK}{D} = \dfrac{BK}{OK} = tg\alpha_۲$ در مثلث $\overset{\Delta}{OBK}$

رابطه‌های ۲ و ۳ را در رابطه ۱ قرار می‌دهیم

$$AB = AK - BK = Dtg\alpha_۱ - Dtg\alpha_۲ = D(tg\alpha_۱ - tg\alpha_۲)$$

$$\boxed{AB = D(tg\alpha_1 - tg\alpha_2)}$$

روش حل: با توجه به فرض مسئله طول افقی متر $D = ۳۰$ و زاویه‌های $\alpha_1 = ۴۶^\circ, ۵۰', ۵۱''$ و $\alpha_2 = ۱۳^\circ, ۸', ۳''$ می‌باشد اگر مقادیر معلوم فوق را در فرمول قرار دهیم ارتفاع به‌دست می‌آید

$$AB = D(tg\alpha_1 - tg\alpha_2) = ۳۰\left[tg(۴۶^\circ, ۵۰', ۵۱'') - tg(۱۳^\circ, ۸', ۳'')\right] =$$

$$۲۴/۹۹۹ \cong ۲۵ \text{ متر} \Rightarrow \boxed{AB = ۲۵ \text{ متر}}$$

بحث و بررسی: مسئله فوق نیز یک نوع ترازیابی مثلثاتی است که دوربین در سطح افق قرار ندارد و با قرائت زاویه شیب و اندازه‌گیری طول افقی ارتفاع محاسبه می‌شود.

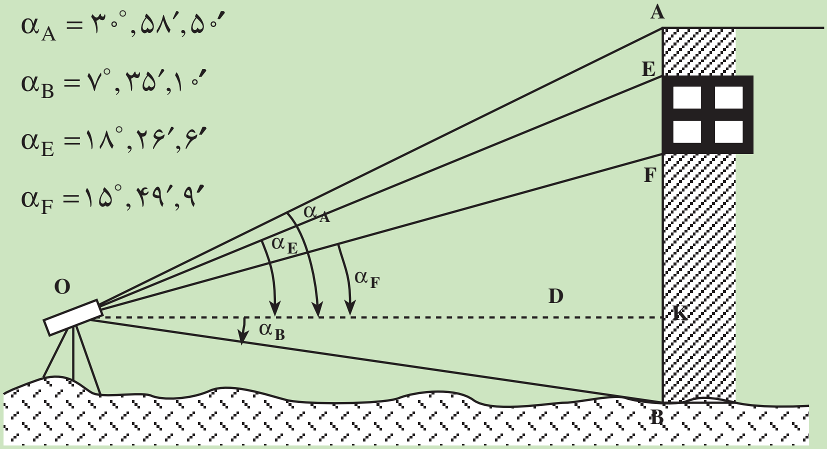
مثال ۴ــ۹ــ مطابق شکل زیر ارتفاع پنجره ۱/۵ متر می‌باشد تنها با استقرار دوربین در فاصله‌ای از ساختمان و قرائت زوایای ارتفاعی که به ترتیب برابر است با :

$\alpha_A = ۳۰^\circ, ۵۸', ۵۰''$

$\alpha_B = ۷^\circ, ۳۵', ۱۰''$

$\alpha_E = ۱۸^\circ, ۲۶', ۶''$

$\alpha_F = ۱۵^\circ, ۴۹', ۹''$



شکل ۴ــ۱۴

ارتفاع ساختمان را به‌دست آورید.

راهکار کلی: با توجه به شکل مسئله ارتفاع ساختمان AB برابر است با :

(و فاصله افقی OK برابر مقدار معلوم D می‌باشد)

$$AB = AK + KB$$

$$EF = EK - FK$$

مقادیر AK و BK از مثلث‌های قائم‌الزاویه $A\overset{\Delta}{O}K$ و $B\overset{\Delta}{O}K$ به‌صورت زیر محاسبه می‌گردند :

رابطه ۱ $\quad$ $A\overset{\Delta}{O}K$ در مثلث $\quad tg\alpha_A = \frac{AK}{OK} = \frac{AK}{D} \Rightarrow \boxed{AK = Dtg\alpha_A}$

رابطه ۲ $\boxed{BK = D tg\alpha_B}$ $\Rightarrow$ $tg\alpha_B = \frac{BK}{OK} = \frac{BK}{D}$ در مثلث $\overset{\Delta}{BOK}$

طرفین رابطه‌های ۱ و ۲ را باهم جمع می‌کنیم $AK + BK = D tg\alpha_A + D tg\alpha_B$

نتیجه می‌شود $\boxed{AB = D(tg\alpha_A + tg\alpha_B)}$ رابطه ۳

و هم‌چنین مقادیر EK و FK را از مثلث‌های قائم‌الزاویه $\overset{\Delta}{EOK}$ و $\overset{\Delta}{FOK}$ به‌دست می‌آوریم.

رابطه ۴ $\boxed{EK = D tg\alpha_E}$ $\Rightarrow$ $tg\alpha_E = \frac{EK}{OK} = \frac{EK}{D}$ در مثلث $\overset{\Delta}{EOK}$

رابطه ۵ $\boxed{FK = D tg\alpha_F}$ $\Rightarrow$ $tg\alpha_F = \frac{FK}{OK} = \frac{FK}{D}$ در مثلث $\overset{\Delta}{FOK}$

طرفین دو رابطه ۴ و ۵ را از هم کم می‌کنیم نتیجه می‌شود

$$EK - FK = D tg\alpha_E - D tg\alpha_F = D(tg\alpha_E - tg\alpha_F)$$

نتیجه می‌شود $EF = D(tg\alpha_E - tg\alpha_F)$ رابطه ۶

حال اگر دو رابطه ۳ و ۶ را برهم تقسیم کنیم خواهیم داشت

$$\frac{AB}{EF} = \frac{D(tg\alpha_A + tg\alpha_B)}{D(tg\alpha_E - tg\alpha_F)} = \frac{tg\alpha_A + tg\alpha_B}{tg\alpha_E - tg\alpha_F}$$

بنابراین $$AB = EF\left(\frac{tg\alpha_A + tg\alpha_B}{tg\alpha_E - tg\alpha_F}\right)$$

با معلوم بودن زوایا و ارتفاع پنجره EF ارتفاع ساختمان (AB) به‌دست می‌آید.

روش حل: در فرمول $AB = EF\left(\frac{tg\alpha_A + tg\alpha_B}{tg\alpha_E - tg\alpha_F}\right)$ مقادیر معلوم طبق فرض مسئله را قرار می‌دهیم نتیجه می‌شود

$$AB = ۱/۵\left[\frac{tg(۳۰^\circ, ۵۸', ۵۰'') - tg(۷^\circ, ۳۵', ۱۰'')}{tg(۱۸^\circ, ۲۶', ۶'') - tg(۱۵^\circ, ۴۹', ۹'')}\right] = ۱۸/۰۱$$ متر

$\boxed{AB = ۱۸/۰۱}$ متر

بحث و بررسی: با استفاده از روابط مثلثاتی و قرائت زاویه‌های ارتفاعی و داشتن طول یک پارامتر از ساختمان می‌توان ارتفاع آن را به‌دست آورد.

۴ــ۵ــ کاربرد مثلث‌قائم‌الزاویه (استفاده از مثلث متساوی‌الساقین)

می‌دانیم اگر ارتفاع وارد بر قاعده مثلث متساوی الساقین را رسم کنیم، آن را به دو مثلث قائم‌الزاویه تقسیم کرده‌ایم.

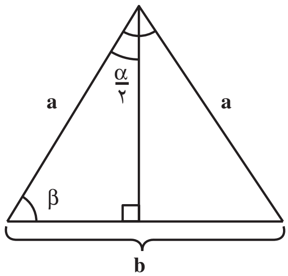
پس طبق شکل خواهیم داشت :

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{b}{2}}{a} = \frac{b}{2a}$$

$$1)\ \alpha = 2\sin^{-1}\left(\frac{b}{2a}\right)$$

$$2)\ a = \frac{b}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$3)\ b = 2a\sin\frac{\alpha}{2}$$



شکل ۴ــ۱۵

نکته: چون دو زاویه‌ی $\frac{\alpha}{2}$ و β متمم یکدیگرند، بنابراین می‌توانیم بگوییم :

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \cos\beta$$

حال می‌توانیم فرمول‌های بالا را با زاویه‌ی β محاسبه نماییم. (به عهده‌ی هنرجو)

۴ــ۶ــ روابط کلی در هر مثلث

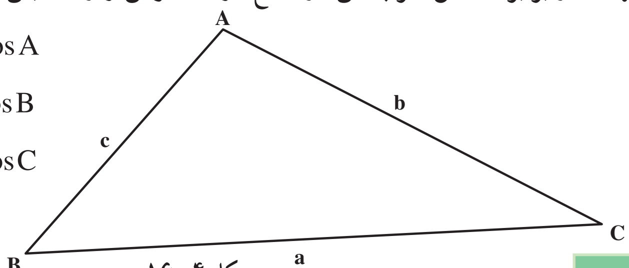
برای حل مثلث غیرمشخص دو فرمولِ مشهور موجود است : الف) رابطه‌ی کسینوس‌ها، ب) رابطه‌ی سینوس‌ها.

قضیه: مربع اندازه‌ی هر ضلع مثلث مساوی است با مجموع مربع‌های اندازه‌های دو ضلع دیگر منهای دو برابر حاصل‌ضرب این دو ضلع در کسینوس زاویه‌ی بین همین دو ضلع :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$



شکل ۴ــ۱۶

تذکر: برحسب این‌که C زاویه‌ی حاده یا منفرجه باشد علامت آن تغییر می‌کند.

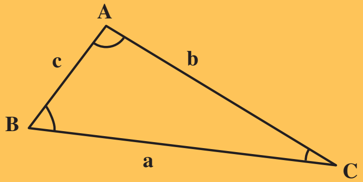
قضیه: در هر مثلث نسبت طول هر ضلع بر سینوس زاویه‌ی مقابل به همان ضلع مساوی دو برابر شعاع دایره‌ی محیطی است:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$ (رابطه‌ی سینوس‌ها)

آیا می‌دانید

ابوریحان بیرونی کتاب مقالید علم الهیة که در حقیقت موضوع اصلی آن علم مثلثات کروی است و نخستین کتاب مستقل از علم نجوم درباره مثلثات است به تحریر در آورده به‌طوری که مثلثات کروی کلید علم هیأت است

رابطه سینوس‌ها $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ یکی از فرمول‌های مهم حل مثلث می‌باشد که بیرونی آن را در فصل هشتم از مقاله‌ی سوّم کتاب قانون مسعودی اثبات کرده است.



۴ــ۷ــ حالات کلاسیک حل مثلث

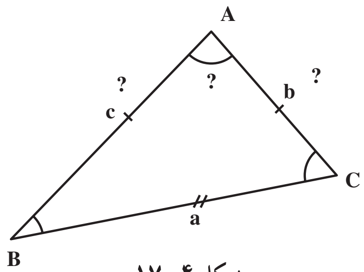
الف) از یک مثلث دو زاویه و یک ضلع معلوم است. برای به‌دست آوردن بقیه‌ی پارامترها از این روابط استفاده می‌کنیم:

$$\hat{A}=۱۸۰-(\hat{B}+\hat{C})$$

معلوم a,b,c

$$b=\frac{a\sin B}{\sin A} \qquad c=\frac{a\sin C}{\sin A}$$

مجهول A,b,c



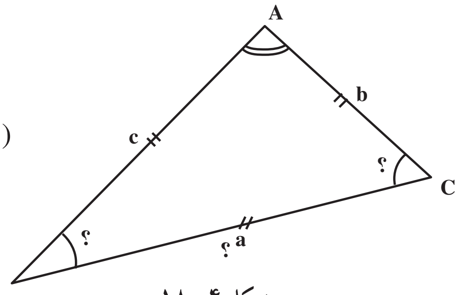
شکل ۴ــ۱۷

ب) دو ضلع و زاویه‌ی مقابل به یکی از دو ضلع معلوم است. برای به‌دست آوردن زوایا و ضلع دیگر مثلث از این روابط استفاده می‌کنیم:

$$\sin B=\frac{b\sin A}{a}$$

$$C=۱۸۰-(A+B)$$

$$c=\frac{a\sin C}{\sin A}$$



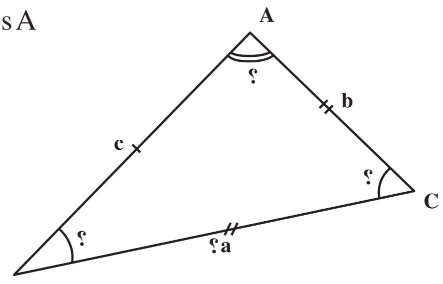
شکل ۴ـ۱۸

ج) دو ضلع و زاویه‌ی بین از مثلثی معلوم است. برای به‌دست آوردن زوایا و ضلع دیگر مثلث از رابطه‌ی کسینوس‌ها استفاده می‌کنیم :

$$a^{۲}=b^{۲}+c^{۲}-۲bc\cos A$$

$$\cos B=\frac{a^{۲}+c^{۲}-b^{۲}}{۲ac}$$

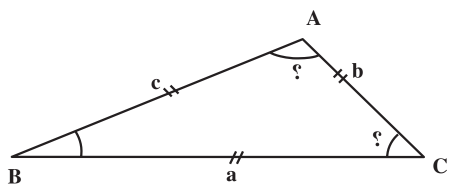
$$\hat{C}=۱۸۰-(\hat{A}+\hat{B})$$



شکل ۴ـ۱۹

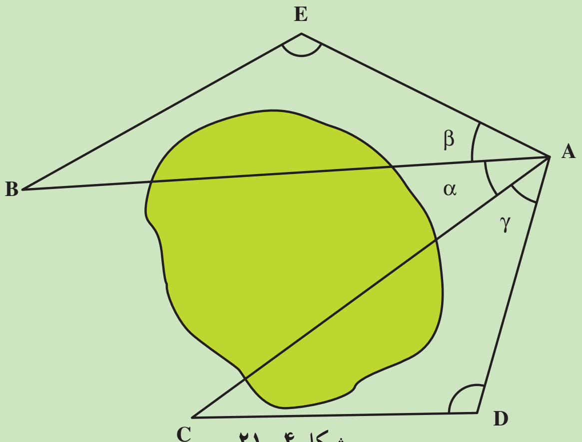
د) سه ضلع از مثلثی معلوم است. برای به‌دست آوردن زوایای مثلث از رابطه‌ی کسینوس‌ها استفاده می‌کنیم :

$$\cos B=\frac{a^{۲}+c^{۲}-b^{۲}}{۲ac}\qquad \cos A=\frac{b^{۲}+c^{۲}-a^{۲}}{۲bc}\qquad \hat{C}=۱۸۰-(\hat{A}+\hat{B})$$



شکل ۴ـ۲۰

مثال ۴ـ۱۰ـ اندازه‌گیری زاویه‌ی $B\hat{A}C=\alpha$ که نقاط B و C به علت وجود مانع دید (دهکده) به‌طور مستقیم امکان ندارد (شکل ۴ـ۲۱).



شکل ۴ــ۲۱

حل: نقاط D و E را خارج از محل تعیین می‌کنیم و زوایای $\hat{D}$ ، $\hat{E}$ و $\hat{A}$ را اندازه‌گیری کرده اضلاع AE ، EB ، AD و DC را نیز اندازه‌گیری می‌کنیم.

از حل مثلث معلوم ADC زاویه‌ی γ و از حل مثلث $\overset{\Delta}{BEA}$ زاویه‌ی β، سپس با داشتن زاویه‌ی A زاویه‌ی $\hat{\alpha}$ به‌دست می‌آید :

$$\hat{\alpha} = \hat{A} - \hat{\beta} - \hat{\gamma}$$

آیا می‌دانید

ابوعبداله محمدبن موسی خوارزمی *ریاضیدان و منجم و مورخ و جغرافیدان ایرانی نیمه‌ی دوّم سده‌ی دوّم و نیمه‌ی اول سده‌ی سوّم یکی از زبردست‌ترین دانشمندان مسلمان و بزرگ‌ترین عالم عصر خود بود.*

وی در ریاضیات و مخصوصاً نجوم ایران پیش از اسلام و تعالیم مکتب جندی‌شاپور که در زمان وی هنوز از خاطره‌ها محو نشده بود دست داشت و آن‌ها را با ریاضیات هندی در آمیخت و نخستین کتاب‌های حساب و جبر و نجوم (زیج) را به زبان عربی نوشت و آثار او در بسط و پیشرفت ریاضیات چه در کشورهای اسلامی وچه بعداً در کشورهای اروپایی تأثیر فراوان داشت.

کتاب جبر و مقابله او قدیمی‌ترین کتابی است که در این‌باره نوشته شده است.

این کتاب قرن‌ها مرجع و مأخذ اروپائیان تا سده‌ی شانزدهم میلادی مبنای مطالعات

علمی آنان در این رشته بود.

کتاب حساب خوارزمی نخستین کتابی است که در دوره اسلامی راجع به فن حساب هندی تألیف گردیده است.

خوارزمی در حدود سال ۱۸۰ هـ ــ ق یا پیش از آن تاریخ در خوارزم متولد شده و در دهه‌ی آخر سده‌ی دوم هجری به حوزه‌ی علمی بغداد رفته و بعد از سال ۲۳۲ درگذشته است و در زمان خلافت مأمون یعنی در بین سال‌های ۱۹۸ تا ۲۱۸ هجری دانشمندی مورد توجه خلیفه وقت بوده.

ــ واژه‌ی «الگوریتم» که به معنای یافتن روش کلّی حل مسأله است از نام «الخوارزمی» گرفته شده است.

ــ واژه‌ی «جبر» که امروزه در تمامی جهان و به همین صورت به شاخه‌ای از ریاضیات اطلاق می‌شود از کتاب «الجبر و المقابله» خوارزمی برداشته شده است.

ــ عددنویسی اگر چه در هند کشف شد، اما به وسیله‌ی ایرانیان تکامل یافت و از طریق ترجمه‌ی کتاب‌های ریاضی دانان ایرانی به اروپا رفت.

ــ اصطلاحات مثلثات مثل «سینوس و کسینوس و تانژانت» دقیقاً ترجمه‌ی واژه‌هایی است که در نوشته‌های ریاضی‌دانان ایرانی و به خصوص کتاب «کشف القناع» خواجه‌نصیرالدین طوسی به کار رفته است. در واقع در هیچ زمینه‌ای از ریاضیاتِ محاسبه‌ای مثل حساب و جبر و مثلثات نمی‌توان قانون یا دستوری را یافت که به وسیله‌ی ریاضی‌دانان ایرانی کشف نشده باشد.

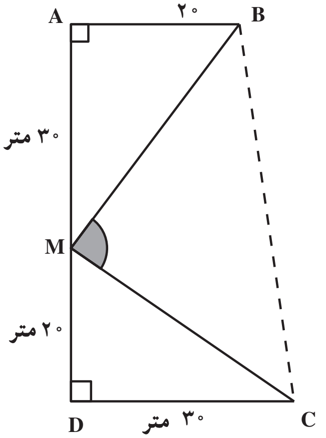
خودآزمایی

۱ــ زمینی است به شکل مثلث متساوی‌الاضلاع که هر ضلع آن ۵۸ متر است. با استفاده از قضیه‌ی فیثاغورث ابتدا اندازه‌ی ارتفاع مثلث، سپس مساحت آن را حساب کنید.

۲ــ در شکل روبه‌رو زمینی به شکل ذوزنقه که اندازه‌ی اضلاع AB ، MA ، MD و DC داده شده است و زوایای $\hat{A}=\hat{D}=90^\circ$ است.

نخست، ثابت کنید زاویه‌ی $\angle BMC$ برابر 90° است.

سپس، اندازه‌ی طول BC را حساب کنید.

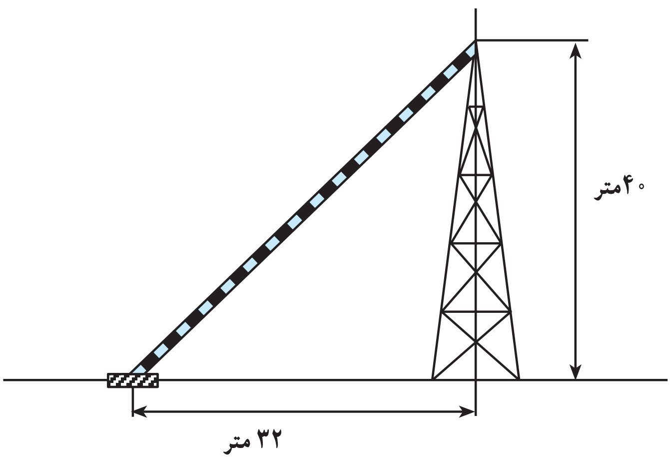


شکل ۴ــ۲۲

۳ــ مساحت باغچه‌ای مربع شکل ۱۴۴ مترمربع است. طول قطر باغچه چه‌قدر است؟

۴ــ با استفاده از رابطه‌ی فیثاغورث برای ترسیم پاره‌خطی به طول $\sqrt{3}$ چگونه عمل می‌کنیم؟

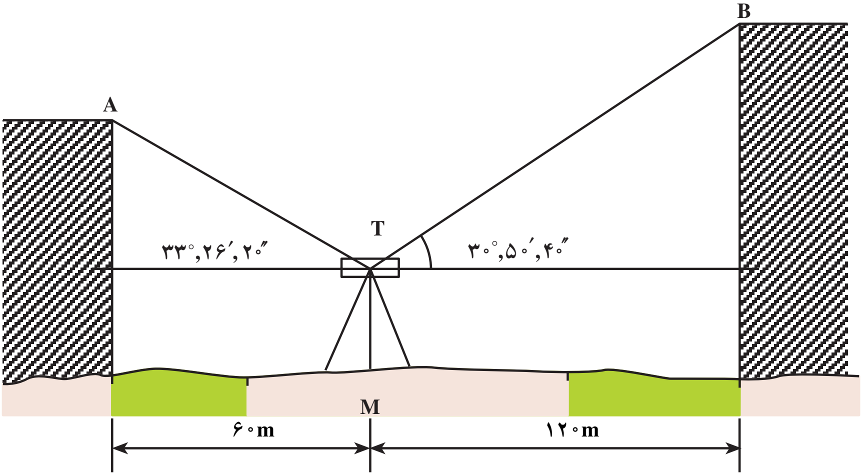
۵ــ یک آنتن تلویزیونی از ارتفاع ۴۰ متری با یک سیم به شکل قائم نگه داشته شده است. این سیم به فاصله‌ی ۳۲ متر از پایه‌ی آنتن به زمین وصل شده است (شکل ۴ــ۲۳) طول این سیم چند متر است؟



شکل ۴ــ۲۳

۶ــ اندازه‌های سه ضلع مثلثی ۸، ۱۰ و ۱۲ متر است. زوایای مثلث را حساب کنید.

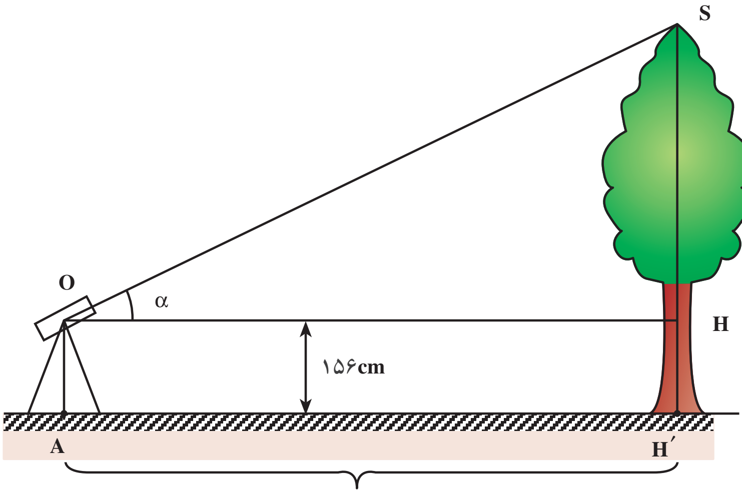
۷ــ دو ساختمان بلند روبه‌روی هم در کنار جاده‌ای مطابق شکل ۴ــ۲۴ قرار دارند. می‌خواهیم اختلاف ارتفاع آن‌ها را به‌دست آوریم. بدین‌منظور، یک دستگاه دوربین زاویه‌یاب را در نقطه‌ی M (مطابق شکل) مستقر می‌کنیم (به‌گونه‌ای که فاصله‌ی افقی دوربین از ساختمان A ۶۰ متر و از ساختمان B ۱۲۰متر باشد) و به لبه‌ی پشت‌بام ساختمان‌ها نشانه روی کرده زوایای شیب را اندازه‌گیری می‌کنیم زاویه‌ی شیب ساختمان A ″۲۰,′۲۶,°۳۳ و ساختمان B ″۴۰,′۵۰,°۳۰ است :



شکل ۴ــ۲۴

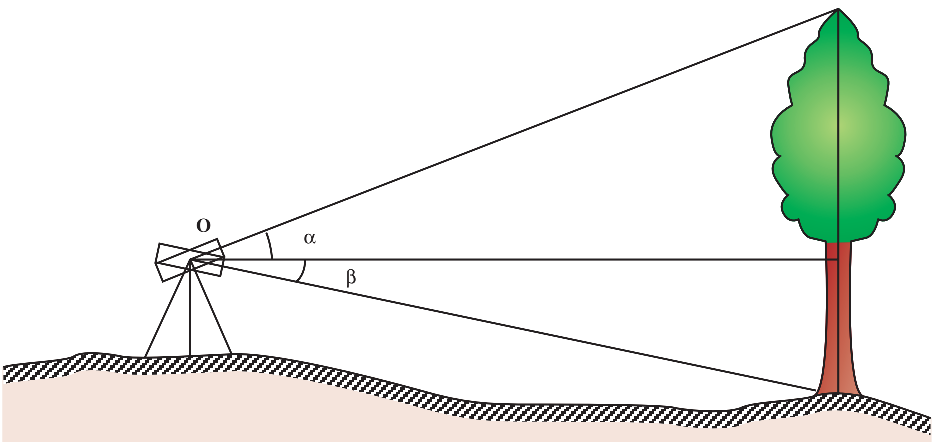
مسائل

مسأله‌ی ۱ــ برای به‌دست آوردن ارتفاع یک درخت دستگاه زاویه‌یابی را مطابق شکل ۴ــ۲۵ به فاصله‌ی ۸۰ متر از درخت مستقر کرده زاویه‌ی شیب آن یعنی زاویه‌ی α را اندازه‌گیری می‌کنیم که ′۲۴,°۳۶ می‌شود. اگر ارتفاع دستگاه زاویه‌یاب ۱۵۶ سانتی‌متر باشد ارتفاع درخت را محاسبه کنید (حالت خاص سطح زمین را افقی فرض می‌کنیم).



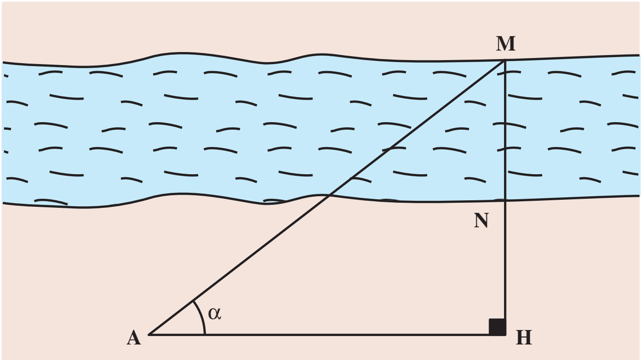
شکل ۴ــ۲۵

مسأله‌ی ۲ــ اگر براساس مسأله‌ی ۱، زمین افقی نباشد (مطابق شکل ۴ــ۲۶) می‌خواهیم با اطلاعات زیر ارتفاع درخت را محاسبه کنیم. زوایای شیب α و β هر یک به‌ترتیب $23^\circ,15'$ و $12^\circ,10'$ می‌باشد. اگر فاصله‌ی افقی دستگاه تا درخت ۱۸۳ متر باشد ارتفاع درخت را به‌دست آورید.



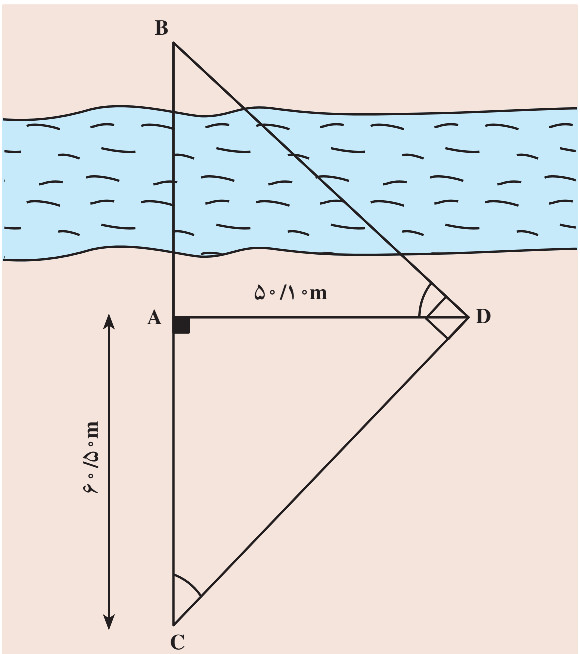
شکل ۴ــ۲۶

مسأله‌ی ۳ــ عرض یک رودخانه‌ی عبورناپذیر برای احداث پلی مورد نیاز است. برای این‌کار دستگاه زاویه‌یابی را در نقطه‌ی دل‌خواه A مستقر کرده مطابق شکل ۴ــ۲۷ زاویه‌ی افقی α را اندازه‌گیری می‌کنیم که نتیجه ′۲۵,°۴۳ شده است. اگر طول‌های AH و NH که بر هم عمودند به‌ترتیب ۵۰ و ۲۰ متر باشد عرض رودخانه یعنی طول MN را به‌دست آورید.



شکل ۴ــ۲۷

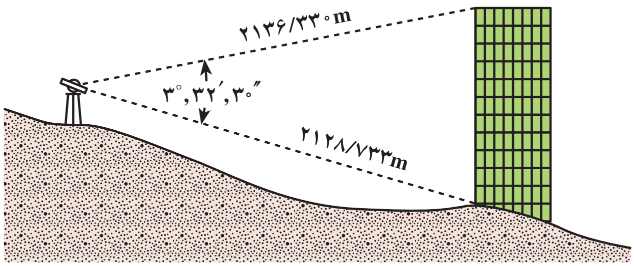
مسأله‌ی ۴ــ در شکل ۴ ــ۲۸ امتداد CD عمود بر ضلع BD و امتداد AD عمود بر AB است. اگر طول AD = ۵۰/۱۰m و طول AC = ۶۰/۵۰m باشد مطلوب است محاسبه‌ی طول AB.



شکل ۴ــ۲۸

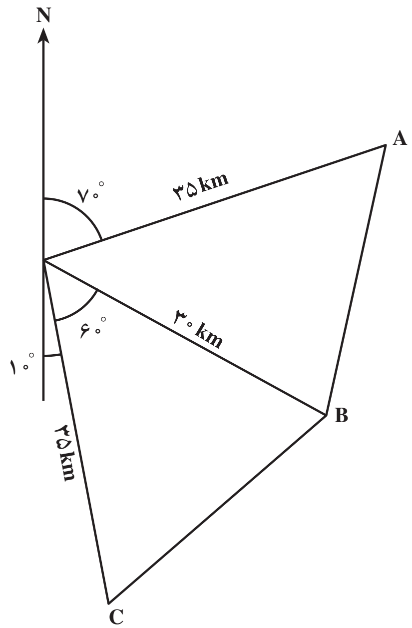
مسأله‌ی ۵ــ زمینی به شکل مثلث روی نقشه ترسیم شده است و اندازه‌های دو ضلع $a = ۱۵$ و $b = ۲۰$ سانتی‌متر و اندازه‌ی زاویه‌ی بین این دو ضلع ۱۲۰ درجه است. ضلع سوّم را به‌دست آورید.

مسأله‌ی ۶ــ مطلوب است محاسبه‌ی ارتفاع برج مطابق شکل ۴ــ۲۹.



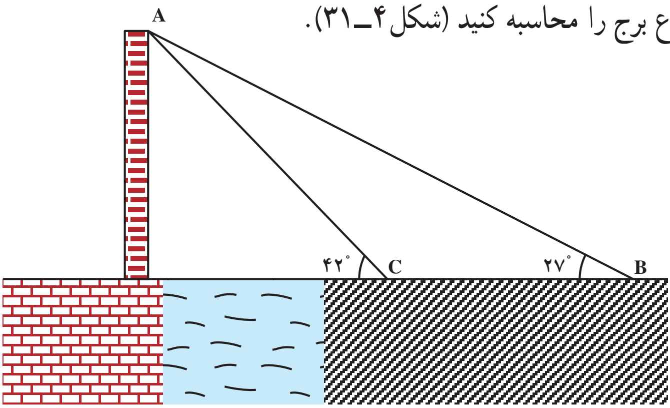
شکل ۴ــ۲۹

مسأله‌ی ۷ــ براساس اطلاعاتی که در شکل ۴ــ۳۰ داده شده مطلوب است محاسبه‌ی اضلاع AB و BC :



شکل ۴ــ۳۰

مسأله‌ی ۸ــ از نقطه‌ی B زاویه‌ی فراز سربرجی (زاویه‌ی فراز بلندترین نقطه‌ی برج) °۲۷ است. با حرکت کردن به طرف برج و پیمودن مسافت ۱۹/۶۳ متر زاویه‌ی فراز همان نقطه از برج °۴۲ است ارتفاع برج را محاسبه کنید (شکل ۴ــ۳۱).

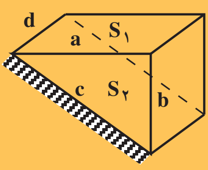


شکل ۴ــ۳۱

کار گروهی

مانند فصل اول و دوم، با نظارت سرگروه، کار آموزش با زبان خود را تکرار کنید و با طرح سؤال میزان یادگیری اعضای گروه را ارزیابی کنید.

نکته: خرید و فروش زمین در سطح شیبدار کوهستانی: از آن‌جایی که در اندازه‌گیری‌ها، فواصل افقی و سطوح مستوی مد نظر قرار می‌گیرد، لذا زمین‌هایی که در دامنه‌ی کوه‌ها و تپه‌ها برای ویلاسازی خرید و فروش می‌شود و چنانچه که به بحث ظریف نقشه‌برداری آن توجهی نشود، باعث خسارت‌های مالی فراوان برای خریدار می‌شود ؛ چرا که خریدار در واقع باید مساحت زمین مورد نظر در سطح شیبدار را به صفحه‌ی افقی تصویر کرده و مساحت سطح مستوی آن را پرداخت نماید. طبق شکل زیر $a^۲ = c^۲ - b^۲$ می‌باشد در صورتی که توجه به امر فوق نشود باعث می‌شود که به جای پرداخت برای $S_۱ = ad$ مقدار بیشتری یعنی برای $S_۲ = cd$ پرداخت می‌شود.



به عنوان مثال اگر قسمت زمینی به مساحت یک هکتار که در یک منطقه شیبدار با شیب ۲۰٪ قرار گرفته باشد حدود ۵۰۰ میلیون به مبلغ ۴۹۰ میلیون تومان کاهش پیدا خواهد کرد.