آموزش صفحه‌ی ۴۱

هدف از این صفحه آن است که :

الف) تأکید شود که برای متغیر مستقل می‌توان نمادهای متناوبی اختیار کرد.

ب) تأکید شود که هر تابعی دارای ضابطه نیست.

پ) دامنه و برد به دانش‌آموزان شناسانده شود. با ارائه‌ی مثال‌های متنوع، یا رجوع به مثال‌های قبلی کتاب، تعیین دامنه و برد را توسط دانش‌آموزان تمرین کنید. ضمناً با تأکید بر این مطلب که در هر تابع به ازای هر مقدار متغیر **فقط یک مقدار برای تابع** مشخص می‌شود، نمایش تابع توسط زوج‌های مرتب را بیان کنید.

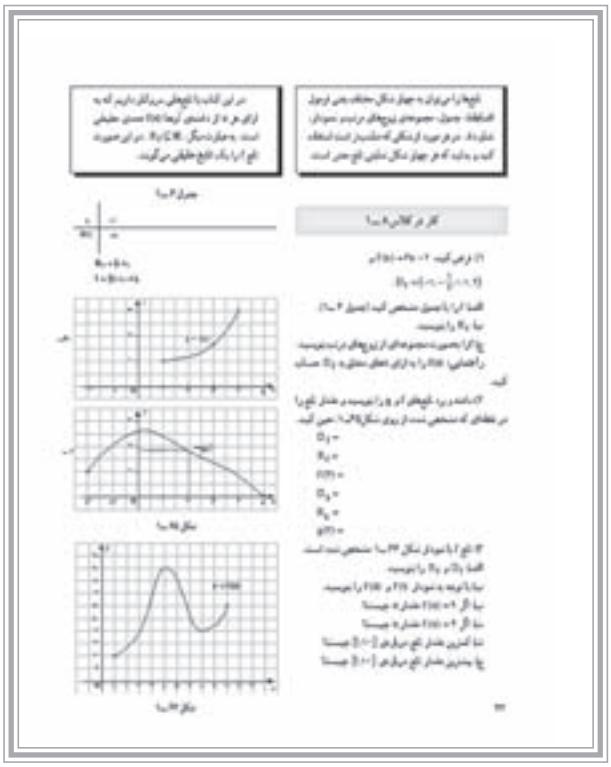
در پایان آموزش این صفحه، و برای آمادگی جهت آموزش صفحه‌ی ۴۲، از دانش‌آموزان سؤال کنید :

به چند صورت یک تابع مشخص می‌شود؟

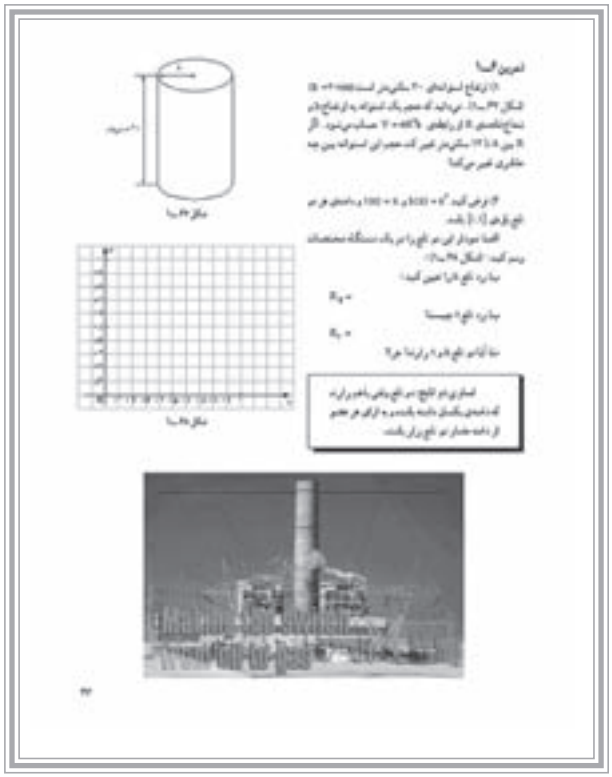
دانش‌آموزان را آزاد بگذارید تا نظر بدهند، البته طبق آن‌چه تاکنون عمل کرده‌اند باید جواب دهند : به چهار صورت و این صورت‌ها را بیان کنند.

با توجه به زمینه‌سازی انجام شده در آموزش صفحه‌ی ۴۱، دانش‌آموزان درخواهند یافت که هر تابع را می‌توان به چهار صورت نمایش داد و در هر مورد آن نمایشی را به کار می‌بریم که مناسب‌تر باشد. گفتنی است که نمایش تابع با استفاده از زوج‌های مرتب و جدول تنها زمانی امکان دارد که دامنه‌ی تابع مجموعه‌ای متناهی باشد یا تابع دارای ضابطه باشد.

اجرای کار در کلاس ۸ــ۱ ساده است و مروری بر آن‌چه قبلاً گفته شده، خواهد بود. یکی از فواید جنبی، که از این کار در کلاس می‌توان برد، تعیین ماکسیمم نسبی و مینیمم نسبی توابع با استفاده از نمودار آن‌هاست که در بخش‌های بعدی کتاب به آن‌ها پرداخته می‌شود.



آموزش صفحه‌ی ۴۳



هدفِ تمرین ۶ــ۱ تعیین برد توابع است.

۱ــ در این تمرین $\pi \le R \le ۱۲$ و $V = \pi R^۲ h$ چون $h = ۲۰cm$ اگر فرض کنیم $\pi \cong ۳/۱۴$ داریم :

$$۴۰۱/۹۲ = ۳/۱۴ \times ۸^۲ \times ۲۰ \le V \le ۳/۱۴ \times ۱۲^۲ \times ۲۰$$
$$= ۹۰۴/۳۲$$

۲ــ در این تمرین داریم :

$$R_h = R_t = [۰,۱]$$

ولی چون ضابطه‌ی دو تابع، و درنتیجه نمودار دو تابع یکسان نیستند، دو تابع برابر نمی‌باشند. البته ممکن است ضابطه‌ی دو تابع : ظاهراً، متفاوت باشند ولی دو تابع برابر باشند. مثلاً، اگر $x \in \mathbb{R}$ آن‌گاه دو تابع با ضابطه‌های زیر برابرند :

$$f(x) = \sqrt{x^۲}$$
$$f(x) = |x|$$

و یا اگر $x \in [۰,۱)$ دوتابع بالا برابرند :

$$f(x) = ۰ \quad , \quad g(x) = [x]$$

لازم است که دبیران محترم، راجع به تصویر پایین صفحه‌ی ۴۳، اطلاعات لازم را در اختیار دانش‌آموزان قرار بدهند و اهمیت استفاده از گاز با حفظ اصول ایمنی به جای نفت، گازوئیل و بنزین را گوشزد نمایند.

دبیران محترم توجه داشته باشند که برخی از دانش‌آموزان می‌توانند در هر مورد، برای اطلاع بقیه‌ی دانش‌آموزان توضیحات کافی، ارائه نمایند و جوّ کلاس را به امور اجتماعی و اقتصادی بکشانند.

۳ــ نمودارهای (الف) و (پ) مربوط به تابع هستند.

۴ــ در هر مورد، کافی است x‌ی را ارائه کنید که متناظر با آن بیش از یک مقدار برای y حاصل شود.

الف) $x = ۳ \Rightarrow y = \pm ۱$

ب) $x = ۱ \Rightarrow y = \pm ۲$

پ) $x = ۴ \Rightarrow y = \pm ۲$

۵ــ الف) رسم $y = x^۲ - ۱$ به‌سادگی اجرا می‌شود.

ب) با توجه به این‌که $۸ = ۳^۲ - ۱$ نقطه‌ی $A\left|\begin{matrix}۳\\۸\end{matrix}\right.$ روی نمودار $y = x^۲ - ۱$ است.

پ) برای این‌که $B\left|\begin{matrix}۱\\b\end{matrix}\right.$ روی نمودار این تابع باشد باید داشته باشیم :

$$b = ۱^۲ - ۱ = ۰$$

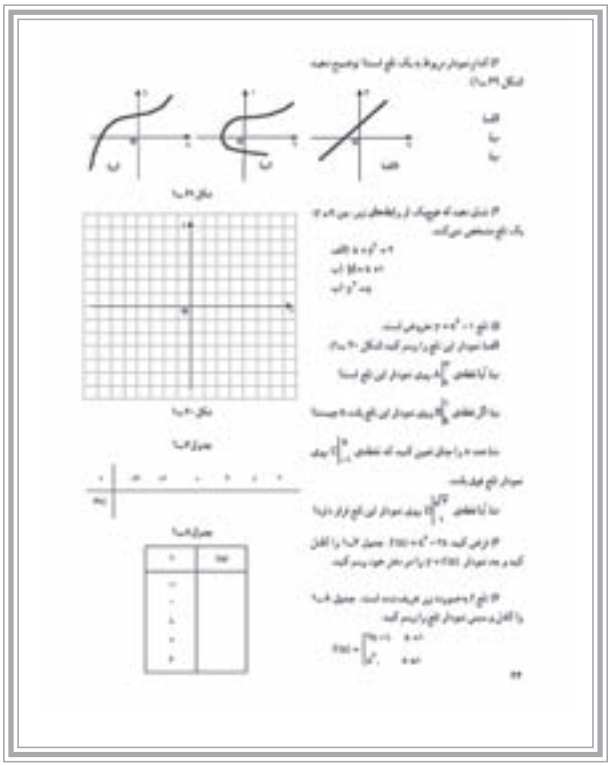
ت) برای این‌که $C\left|\begin{matrix}a\\-۱\end{matrix}\right.$ روی نمودار باشد باید :

$$-۱ = a^۲ - ۱ \Rightarrow a^۲ = ۰ \Rightarrow a = ۰$$

ث) با توجه به این‌که $۱ \ne (\sqrt{۳})^۲ - ۱$ نقطه‌ی $D\left|\begin{matrix}\sqrt{۳}\\۱\end{matrix}\right.$ روی نمودار تابع نیست.

۶) با توجه به این‌که $f(x) = x^۲ - ۲x$ جدول ۷ــ۱ چنین خواهد بود و نمودار آن توسط همین ۷ نقطه به‌سادگی رسم می‌شود.

x	−۲	−۱	۰	۱	۲	۳
f(x)	۸	۳	۰	−۱	۰	۳



۷ــ جدول با توجه به ضابطه‌های تابع تکمیل‌شده است :

x	f(x)
−۱	−۳
۰	−۱
۱	۱
۲	۴
۳	۹

۸ــ الف) $f(۰)=\frac{۱}{۲}$, $f(\frac{\pi}{۲})=\frac{\pi^۲}{۴}-\frac{\pi}{۲}+\frac{۱}{۲}$

ب) $g(-۱)=۴$, $g(۱)=۲$

پ) $h(-۲)=\frac{-۲}{۴+۱}=-\frac{۲}{۵}$, $h(۰/۵)=۰/۴$

۹ــ با توجه به $f(x)=x^۲-x$ داریم :

$$f(۳)=۹-۳=۶$$

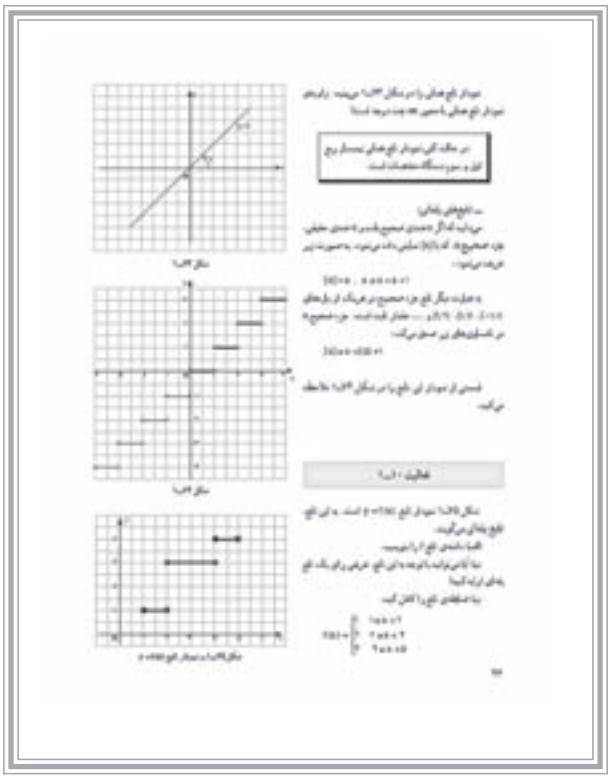
$$f(۳+h)=(۳+h)^۲-(۳+h)=h^۲+۵h+۶$$

$$f(۳+h)-f(۳)=h^۲+۵h$$

این تمرین بعداً در تعیین مشتق تابع f در نقطه‌ی $x=۳$ به‌کار خواهد رفت.

آموزش بقیه‌ی صفحه‌ی ۴۵ ساده است. درصورتی که دبیران عزیز با مثال‌های ملموس دیگری بتوانند توابع ثابت و همانی را تشریح کنند بر غنای آموزشی خود می‌افزایند. لازم به توضیح است که اگر واحد انتخاب‌شده روی محورها متفاوت باشد زاویه‌ی خط $y=x$ با محور ox مساوی ۴۵° نخواهد بود!

آموزش صفحه‌های ۴۶ و ۴۷



هدف مطالب این دو صفحه بررسی توابع پله‌ای، به‌ویژه تابع جزء صحیح است. باید توجه داشت که تابع $y=[x]$ تابع پله‌ای خاصی است.

در فعالیت ۱۰ــ۱ سعی شده است که حالت کلی‌تری از یک تابع پله‌ای ارائه شود.

الف) دامنه‌ی تابع بازه‌ی $[۱,۵)$ است.

ب) ممکن است دانش‌آموزان نتوانند تعریف تابع پله‌ای را در این مرحله بیان کنند.

پ) با توجه به شکل تابع

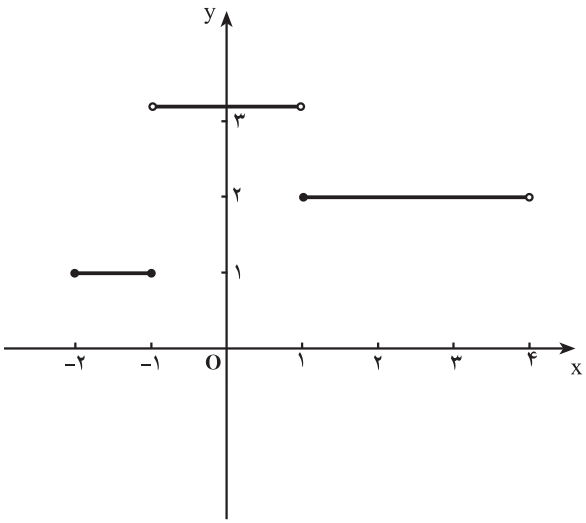
$$f(x)=۳ \quad , \quad ۲\leq x<۴$$

ت) این تابع چند*ضابطه‌ای* است.

ث) انتظار می‌رود که در پایان این فعالیت دانش‌آموزان به تعریف زیر از یک تابع پله‌ای برسند :

اگر دامنه‌ی تابع f از اجتماع بازه‌هایی با طول مثبت و دوبه‌دو مجزا تشکیل شده باشد و f بر هریک از این زیربازه‌ها دارای مقدار ثابت باشد تابع f پله‌ای است.

گفتنی است که تابع پله‌ای ممکن است صعودی، نزولی یا نه صعودی و نه نزولی (مانند تابع پله‌ای زیر) باشد.



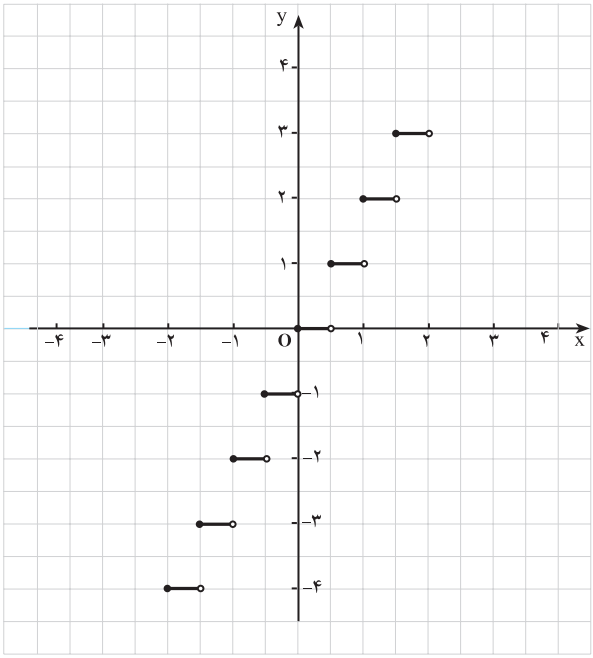
ضمناً، خطوط قرمز، که در شکل اهدای جوایز ملاحظه می‌شود یک تابع پله‌ای را مشخص می‌کند!

هدف از کار در کلاس ۹ــ۱ رسم توابعی به‌صورت $y=[\alpha x]$ است که در آن α عددی مشخص است. همان‌طورکه در جدول ۹ــ۱ عمل شده است، وقتی $\alpha=۲$، از یک عدد صحیح شروع می‌کنیم و با گام‌های $\frac{۱}{۲}$ به جلو می رویم، زیرا دو برابر گام $\frac{۱}{۲}$ همان گام واحد را تولید می‌کند. لذا، در حالت کلی، اگر $\alpha>۰$ طول گام را $\frac{۱}{\alpha}$ و اگر $\alpha<۰$ طول گام را $-\frac{۱}{\alpha}$ اختیار کنید.

جدول کامل‌شده‌ی ۹ــ۱ و نمودار $y=[۲x]$ را در مقابل ملاحظه می‌کنید.

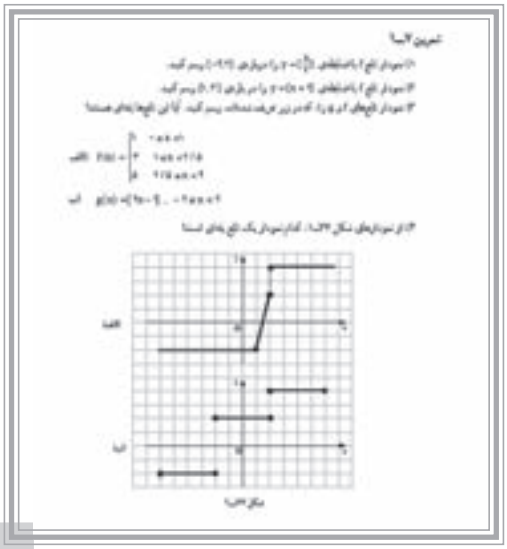
جدول ۹ــ۱

x	f(x)
$x\in[-۲,-\frac{۳}{۲})$	۴-
$x\in[-\frac{۳}{۲},-۱)$	۳-
$x\in[-۱,-\frac{۱}{۲})$	۲-
$x\in[-\frac{۱}{۲},۰)$	۱-
$x\in[۰,\frac{۱}{۲})$	۰
$x\in[\frac{۱}{۲},۱)$	۱
$x\in[۱,\frac{۳}{۲})$	۲
$x\in[\frac{۳}{۲},۲)$	۳
۲	۴



آموزش صفحه‌ی ۴۸

هدف از این صفحه تمرین روی رسم توابع به‌صورت $y=[f(x)]$ است که تابع f خطی است. در انتهای این قسمت رسم $y=[f(x)]$ برای تابع f دل‌خواه بیان خواهد شد (فقط برای اطلاع شما و در صورت لزوم جهت راهنماییِ دانش‌آموزان علاقه‌مند).



۱ــ برای رسم $y=\left[\frac{x}{۲}\right]$ بازه‌هایی به طول ۲ واحد را در نظر می‌گیریم :

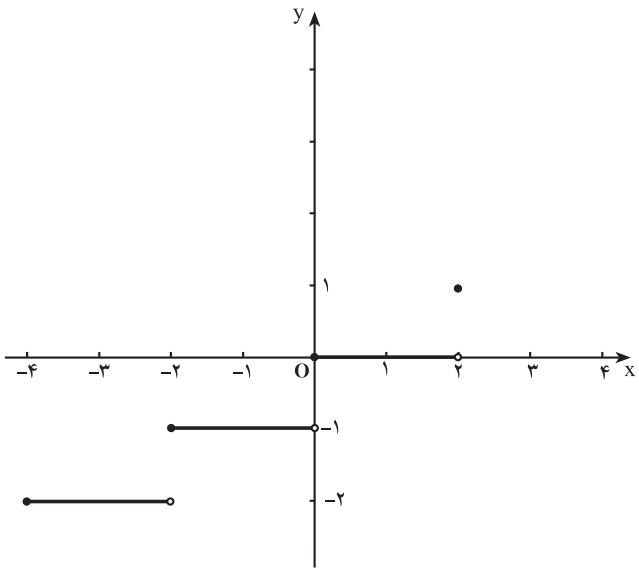
$$-۴\le x<-۲ \Rightarrow -۲\le \frac{x}{۲}<-۱ \Rightarrow \left[\frac{x}{۲}\right]=-۲$$

$$-۲\le x<۰ \Rightarrow -۱\le \frac{x}{۲}<۰ \Rightarrow \left[\frac{x}{۲}\right]=-۱$$

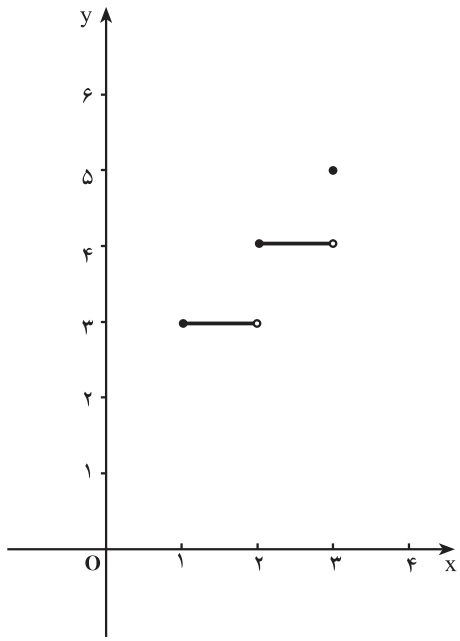
$$۰\le x<۲ \qquad ۰\le \frac{x}{۲}<۱ \Rightarrow \left[\frac{x}{۲}\right]=۰$$

$$x=۲ \qquad \Rightarrow \qquad \left[\frac{x}{۲}\right]=۱$$

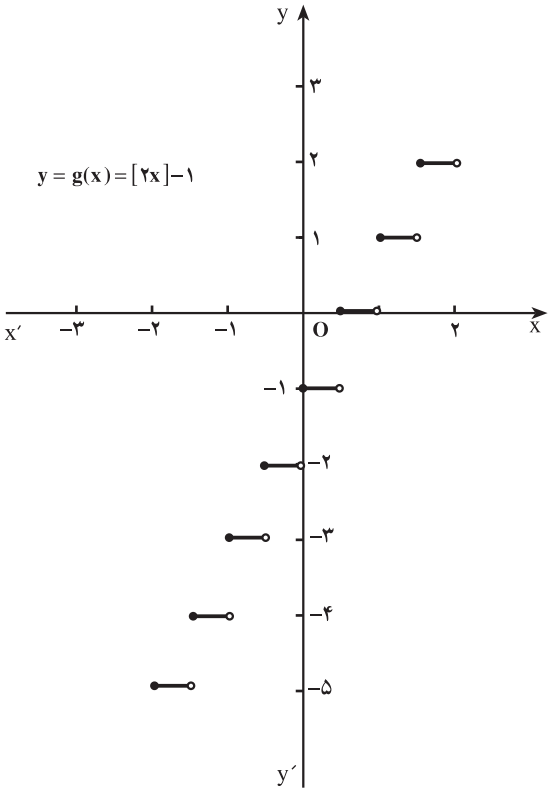
$y=\left[\frac{x}{۲}\right]$ در بازه‌ی $[-۴,۲]$ در مقابل رسم شده است.

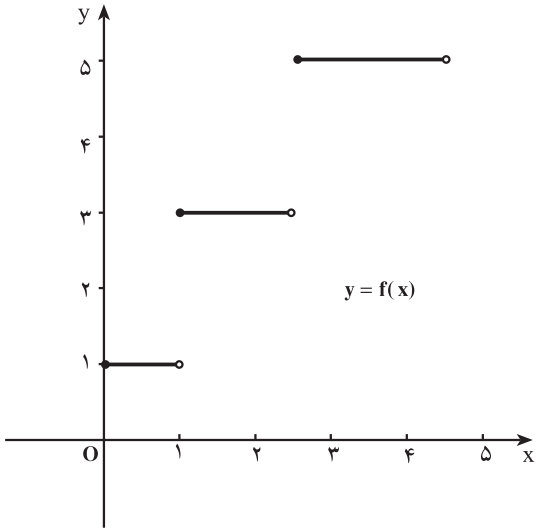


۲ــ برای رسم نمودار $y=[x+۲]$ کافی است توجه کنید که اگر m عددی صحیح باشد $[x+m]=[x]+m$ بنابراین، باید $y=[x]+۲$ را در $[۱,۳]$ رسم کرد. نمودار این تابع در مقابل رسم شده است.



۳ــ نمودار f در زیر و نمودار g در مقابل رسم شده است. هر دو تابع پله‌ای هستند.



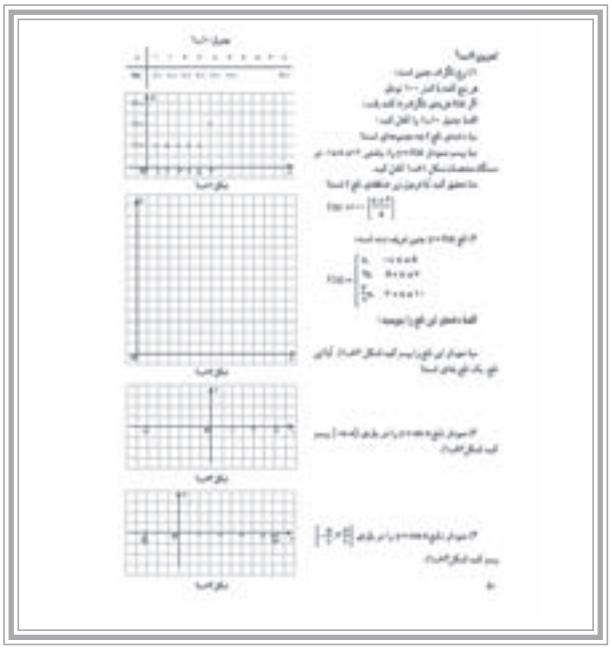


آموزش صفحه‌ی ۴۹

هدف از ارائه‌ی مطالب این صفحه یادآوری ویژگی‌های توابع مثلثاتی است. توصیه می‌شود که دبیران محترم در ابتدا کمی راجع به دایره‌ی مثلثاتی، محور سینوس‌ها و محور کسینوس‌ها صحبت کنند. سپس، همانند بقیه‌ی فعالیت‌ها، از دانش‌آموزان بخواهند که به سؤالات مطرح‌شده در این صفحه پاسخ دهند. به دبیران محترم توصیه می‌شود که مطالب مربوط به مثلثات را از کتاب‌های ریاضیات ۱ و ۲ به دقت مطالعه کنند و به روش‌های ارائه‌شده در آن کتاب‌ها، بازآموزی یا راهنمایی دانش‌آموزان را به عهده گیرند.

آموزش صفحه‌ی ۵۰

هدف تمرین ۸ــ۱ کار با توابع مختلف است، رسم توابع، تشخیص نوع توابع و تعیین دامنه‌ی آن‌ها.



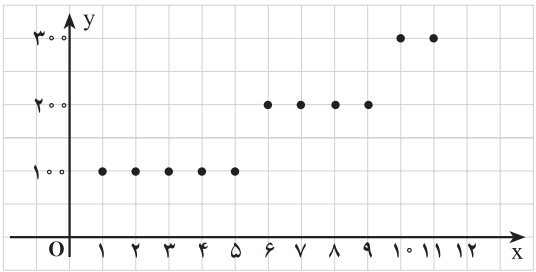
۱ــ الف) جدول ۱۰ــ ۱ کامل شده است.

ب) دامنه‌ی تابع مجموعه اعداد طبیعی است.

پ) رسم تابع کامل شده است.

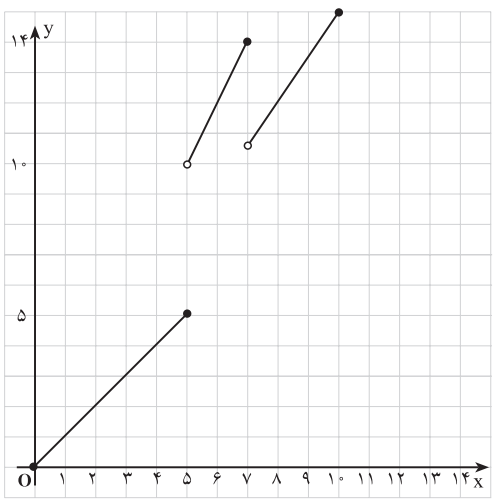
ت) با آزمایش معلوم می‌شود که $f(x)=100\left[\frac{x+4}{5}\right]$

x	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۱۰	۱۱	۱۲
f(x)	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۲۰۰	۲۰۰	۲۰۰	۳۰۰	۳۰۰

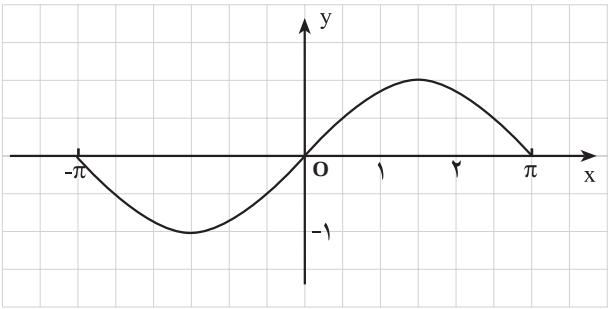


۲ــ الف) دامنه‌ی تابع f بازه‌ی [۰,۱۰) است.

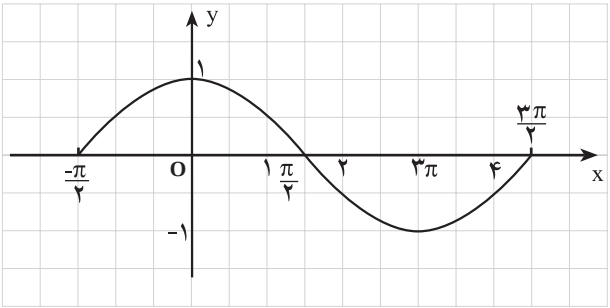
ب) نمودار این تابع در مقابل رسم شده است. واضح است که این تابع **پله‌ای نیست**.



۳ــ با توجه به مقادیر sinx نمودار آن در $[-\pi,\pi]$ در مقابل رسم شده است.

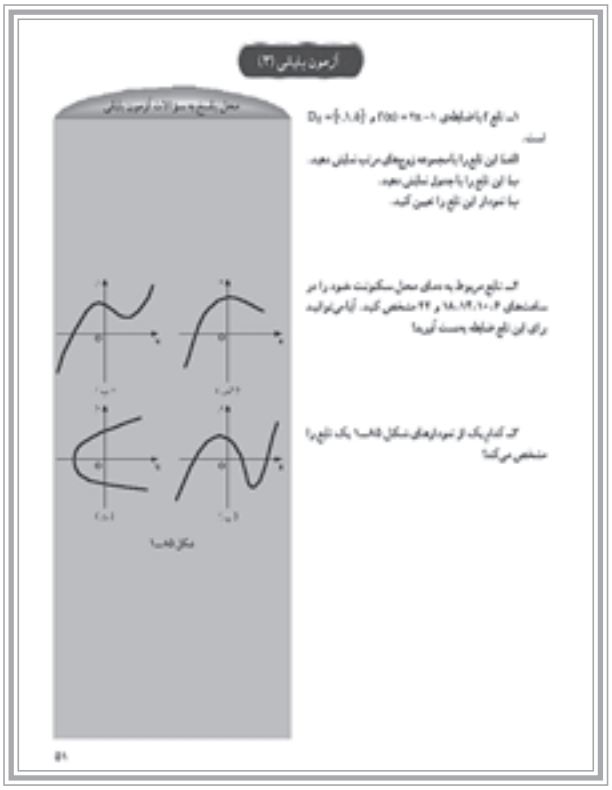


۴ــ با توجه به مقادیر cosx نمودار آن در $\left[-\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲}\right]$ رسم شده است.



آموزش صفحه‌ی ۵۱

آزمون پایانی (۳) بسیار ساده است و دانش‌آموزان نباید هیچ مشکلی در پاسخ‌گویی به سؤالات آن داشته باشند. البته پاسخ‌گویی به سؤال ۲ مستلزم کار در خارج از کلاس است.


آزمون پایانی (۳)

۱ـ تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=x^{۲}-۱$ و $D_f=\{-۱,۰,۱\}$ است.

الف) این تابع را با مجموعه زوج‌های مرتب نمایش دهید.

ب) این تابع را با جدول نمایش دهید.

پ) با نمودار این تابع را تعیین کنید.

۲ـ تابع مربوط به دمای محل سکونت خود را در ساعت‌های ۶، ۱۰، ۱۴، ۱۸ و ۲۲ مشخص کنید. آیا می‌توانید برای این تابع ضابطه بدست آورید؟

۳ـ کدام یک از نمودارهای شکل ۵۸ـ۱ یک تابع را مشخص می‌کند؟

شکل ۵۸ـ۱

۵۱

الف) در مورد توابع جدولی همیشه این سؤال مطرح است که آیا می‌توان ضابطه‌ی این تابع را به‌دست آورد. در حالت کلی جواب منفی است، مگر آن‌که بدانیم تابع یک چندجمله‌ای است.

به‌طورکلی اگر مقادیر تابع f در $(n+1)$ نقطه‌ی متمایز

$$x_0, x_1, \cdots, x_n$$

مقادیر معلوم

$$y_0, y_1, \cdots, y_n$$

باشند ثابت می‌شود یک چندجمله‌ای حداکثر از درجه‌ی n مانند $p(x)$ وجود دارد به‌قسمی که

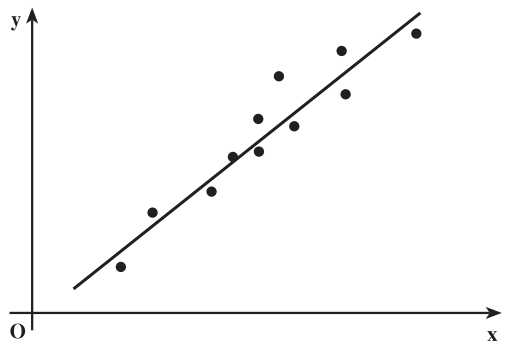
$$p(x_i) = y_i \ , \ i = 0, 1, \ldots, n \qquad (*)$$

بدیهی است که اگر تابع f چندجمله‌ای نباشد $p(x)$ تقریبی از $f(x)$ خواهد بود. چون در حالت کلی مقادیر y_i به‌طور تقریبی و از طریق ترتیب‌دادن آزمایش و غیره به‌دست می‌آید لذا اصرار به تعیین تابعی که در (*) صدق کند چندان معقول نیست. پیش‌نهاد می‌شود که تابع $f(x)$ چنان تعیین شود که

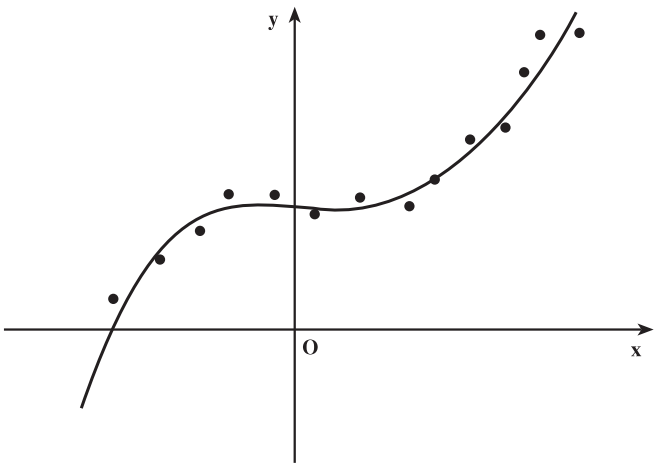
$$S_n = \sum_{i=0}^{n} (p(x_i) - y_i)^2$$

کم‌ترین مقدار را داشته باشد. ضمناً، درجه‌ی $p(x)$ با توجه به تغییر y_iها مشخص می‌شود. مثلاً، در شکل الف بهتر است $p(x)$ از درجه‌ی یک اختیار شود ولی در شکل (ب) یک چندجمله‌ای درجه ۳ مناسب است.

الف



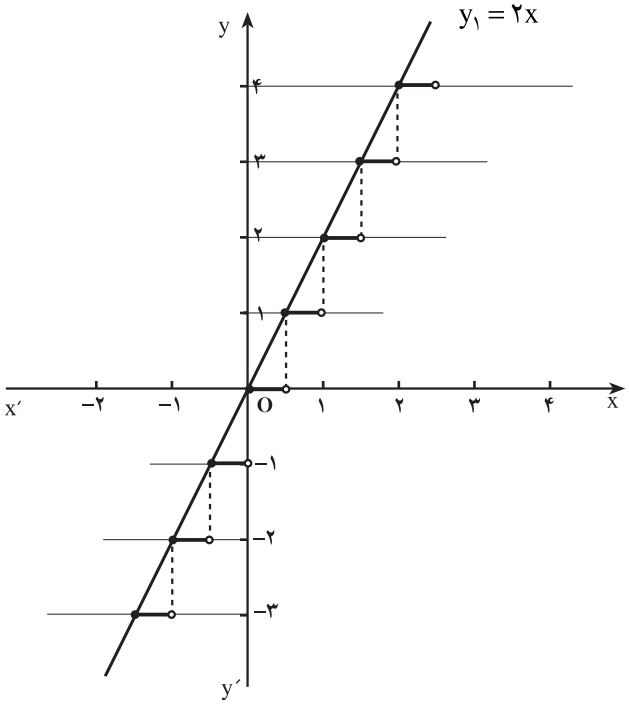
ب



البته ممکن است تغییرات تابع نمایی باشد و به جای چندجمله‌ای یک تابع نمایی به‌صورت ae^{bx} مناسب باشد. برای اطلاع بیش‌تر در مورد تقریب توابع جدول به [۱۴] مراجعه کنید.

۱ــ بابلیان ۱۳۸۳

ب) یکی از روش‌های ساده برای رسم تابع $y=[f(x)]$ آن است که تابع $y_1=f(x)$ را رسم کنیم و بعد تصویر آن را روی خطوط $y=m$ ، که m عددی صحیح است، به‌دست آوریم. ابتدا درزیر، این کار برای رسم $y=[2x]$ ارائه شده است. نمودار $y=[2x]$ با رنگ سایه (روی خطوط) مشخص شده است.



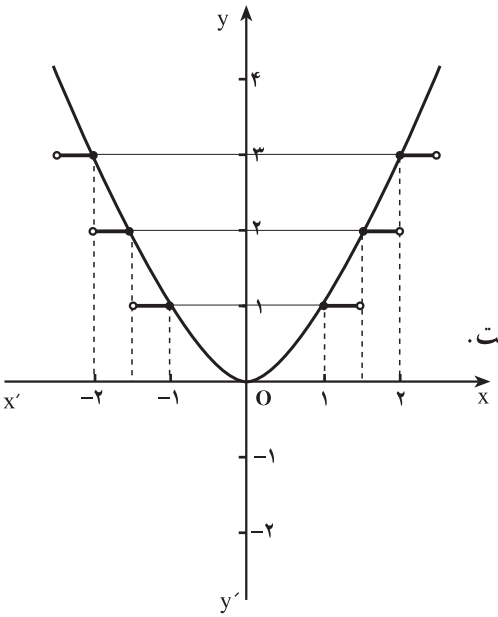
به همین ترتیب می‌توان، مثلاً با رسم نمودار $y=\left[x^2\right]$ ، توجه کنید که به روش بازه‌ای و با استفاده از تعریف،باید زیربازه‌ها را به‌طریق زیر انتخاب کرد ؛

$$\left[x^2\right]=0 \quad 0\le x^2<1 \quad \Rightarrow \quad 0\le x<1$$

$$\left[x^2\right]=1 \quad 1\le x^2<2 \quad \Rightarrow \quad 1\le x<\sqrt{2}$$

$$\left[x^2\right]=2 \quad 2\le x^2<3 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2}\le x<\sqrt{3}$$

$$\left[x^2\right]=3 \quad 3\le x^2<4 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{3}\le x<2$$



واضح است که نمودار $y=\left[x^2\right]$ نسبت به محور oy قرینه است.

حل مسائل بیش‌تر

۱ــ آیا روابط زیر ضابطه‌ی تابع می‌باشند؟ چرا؟

الف) $x^۲ + y^۲ = ۴$

ب) $|x| + y = ۲$

ج) $y = \sqrt[۳]{x^۲ - ۱}$

۲ــ فرض کنید $f(x) = \begin{cases} ۳x - ۲ & x < ۱ \\ x^۲ + ۱ & x \geq ۱ \end{cases}$ حاصل عبارت $f(۲) + f(-۱)$ را به‌دست آورید.

۳ــ فرض کنید تابع f به‌صورت زیر تعریف شده باشد.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & x \neq ۰ \\ ۱ & x = ۰ \end{cases}$$

مطلوب است :

الف) $f(۱)$ ب) $f(-۱)$

ج) $f(x^۲)$ د) $f(-x^۲)$ ، $x \neq ۰$.

۴ــ نمودار تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = [x - ۴]$ را بر بازه‌ی $[-۱,۱)$ رسم کنید.

$-۱ \leq x < ۰ \Rightarrow -۵ \leq x - ۴ < -۴$

$\Rightarrow f(x) = -۵$

$۰ \leq x < ۱ \Rightarrow -۴ \leq x - ۴ < -۳$

$\Rightarrow f(x) = -۴$

حل

حل:

الف) خیر زیرا اگر $x = ۰$ $y^۲ = ۴ \Rightarrow y = \pm ۲$

ب) بله برای هر ورودی x حداکثر یک خروجی y وجود دارد.

ج) بله

حل:

$f(۲) = ۲^۲ + ۱ = ۵$, $f(-۱) = ۳(-۱) - ۲ = -۵$

$f(۲) + f(-۱) = ۵ - ۵ = ۰$

حل:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x} = ۱ & x > ۰ \\ \frac{-x}{x} = -۱ & x < ۰ \\ ۱ & x = ۰ \end{cases}$$

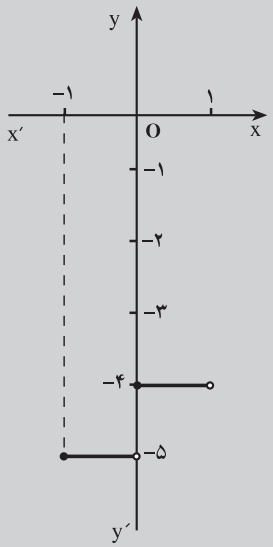
الف) $f(۱) = ۱$

ب) $f(-۱) = -۱$

ج) $f(x^۲) = ۱$

د) $f(-x^۲) = -۱$

حل:



۵ــ نمودار توابع زیر را بر بازه‌ی $[-۲,۲]$ رسم نمایید.

الف) $f(x)=\left[x^{۲}\right]$

ب) $f(x)=[۲x]$

ج) $f(x)=\left[\frac{۱}{۲}x\right]$

د) $f(x)=[۳x]$

هـ) $f(x)=\left[\frac{۱}{۳}x\right]$

۶ــ مقدار a را چنان بیابید که نقطه‌ی $A(۰,a+۱)$ روی نمودار تابع با ضابطه‌ی $y=۳x+۲$ باشد.

حل به معلم محترم واگذار می‌شود.

حل: باید داشته باشیم.

$a+۱=۳\times۰+۲$

$a=۱$

با ریاضیدانان نامی آشنا شوید

ابوجعفر محمدبن‌موسی خوارزمی از نوابغ دنیا و مفاخر ایران و اسلام است. وی در قرن دوم هجری به دنیا آمد و در حدود سال ۲۳۲ هجری زندگی را بدرود گفت. معروف‌ترین اثر خوارزمی کتاب **جبر و مقابله** است که یکی از مشهورترین و رایج‌ترین کتاب‌های علمی در دنیا بوده است. واژه جبر نخستین بار در کتاب المختصر فی حساب‌الجبر و المقابله تألیف محمدبن موسی خوارزمی به‌کار رفت و پس از آشنایی اروپاییان با این کتاب به زبان‌های دیگر راه یافت. این واژه (الجبر) از ریشه جَبَرَ در عربی گرفته شده است که به معنای شکسته‌بندی است. خوارزمی آن را بر عمل افزودن جمله‌های مساوی بر دو سوی یک معادله، برای حذف جمله‌های منفی اطلاق می‌کند. واژه مقابله نیز در کتاب خوارزمی به معنای حذف مقدار مساوی از دو طرف معادله است. از نظر خوارزمی جبر، روش بیان عملیات جبری بود. در آن زمان از نمادهایی مانند x و y استفاده نمی‌شد و به جای آن واژه‌هایی مخصوص به کار می‌بردند و مسأله و روش حل آن را با واژه‌ها شرح می‌دادند. واژه‌های جبری خوارزمی عبارت بودند از شیء (مقدار مجهول یا x)، مال (توان دوم مقدار مجهول یا x^2) و عدد یا درهم نیز با مقدار معلوم متناظر بود.

خوارزمی، دو کتاب نیز درباره‌ی اسطرلاب نوشت. یکی عمل الاسطرلاب که درباره‌ی چگونگی ساختن اسطرلاب بود و دیگری العمل بالاسطرلاب که درباره چگونگی به‌کاربردن آن بود. کتاب‌الرخامه درباره ساعت آفتابی افقی و تعیین اوقات نمازها از دیگر آثار او بود. او گفته «تصمیم دارم که اگر عمرم کفاف دهد، تمام تاریخ این دوره را ثبت کنم، چون نوشتن تاریخ خیلی مهم‌تر از کارهای دیگر است». پس از ترجمه آثار خوارزمی به لاتین بزرگ‌ترین تأثیر را داشته‌اند. نام خوارزمی مرادف شد با هر کتابی که درباره‌ی حساب جدید نوشته می‌شد و اصطلاح الگوریتم که در زبان‌های فرانسوی و انگلیسی به معنی روش و قوانین محاسبه است از نام «الخوارزمی» گرفته شده است. کتاب جبر و مقابله خوارزمی به فارسی برگردانده شده است.

بخش دوم

راهنمای آموزش فصل چهارم از بخش اول کتاب دانش‌آموز

شامل:

- آموزش صفحات ٥٤ تا ٦٠
- دانستنی‌های لازم برای مدرسان
- حل مسائل بیش‌تر

آموزش صفحه‌ی ۵۴

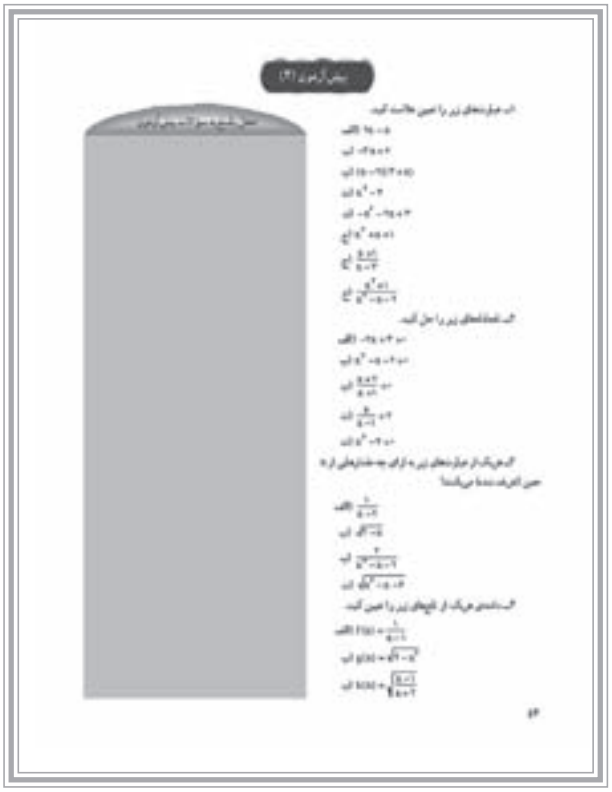
هدف کلی این فصل تعیین دامنه‌ی توابع حقیقی است. این توابع، چندجمله‌ای، کسری، رادیکالی یا ترکیبی از این‌ها هستند.

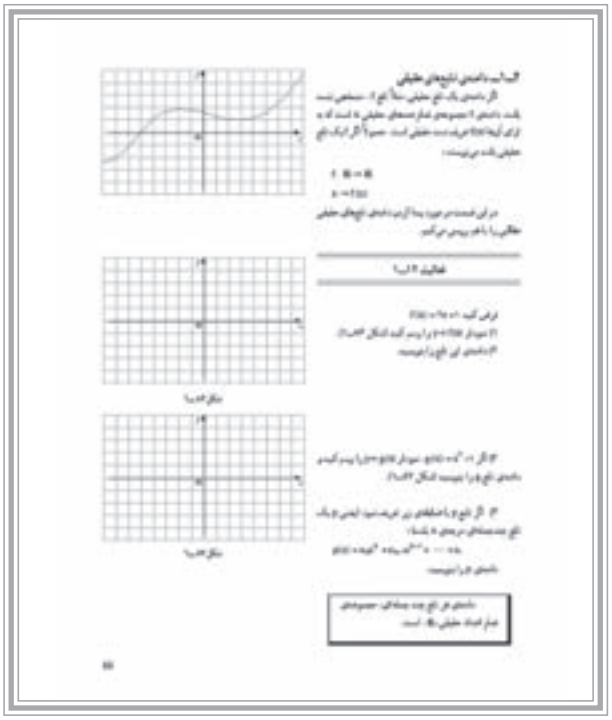
در پیش‌آزمون (۴) مقدمات لازم برای تعیین دامنه‌ی توابع فراهم می‌شود. آن‌چه در چهار سؤال این پیش‌آزمون آمده در ریاضیات ۱ و ۲ به‌طور مفصل بررسی شده است. ضمناً، در کتاب کار دانش‌آموز به اندازه‌ی کافی مثال و تمرین ارائه شده است.

قبل از این که دانش‌آموزان به حل این پیش‌آزمون بپردازند صفحاتی از کتاب کار دانش‌آموز را مشخص کنید و از آن‌ها بخواهید که مطالعه کنند. سپس پیش‌آزمون را در منزل اجرا کنند (زیرا بین ۷۰ تا ۹۰ دقیقه زمان لازم دارد و محل پاسخ‌گویی هم به اندازه‌ی کافی نیست و باید از برگه‌ای جداگانه استفاده کنند).

پس از بررسی پاسخ‌های دانش‌آموزان ممکن است لازم باشد نمونه‌ای از هریک از چهار سؤال پیش‌آزمون را در کلاس مطرح و حل کنید.

توجه داشته باشید که باز هم در ادامه‌ی این فصل راجع به این موضوع کار خواهد شد.





آموزش صفحه‌ی ۵۵

در این صفحه نمونه‌هایی از توابع حقیقی با دامنه‌ی $\mathbb{R}$ معرفی شده‌اند. برای این منظور نمودار این توابع را به گونه‌ای می‌کشیم که از محدوده‌ی شطرنجی حداکثر استفاده شده باشد (برای نشان‌دادن نامحدودبودن دامنه‌ی تابع از دو طرف).

فعالیت ۱۲ـ۱ ــ با توجه به ساده‌بودنش ــ توسط تک‌تک دانش‌آموزان قابل اجراست.

آموزش صفحه‌ی ۵۶

به دلیل اهمیت کار در کلاس ۱۰ـ۱ آن را به‌طور کامل حل می‌کنیم.

الف) $g(x)=\frac{1}{2x-1}$

۱ـ ابتدا مقادیری از x را که به‌ازای آن‌ها g(x) تعریف نشده است، به‌دست می‌آوریم.

۲ـ لذا، $D_g=\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}$

۳ـ برای $h(x)=x^2+5x+6$ داریم :

و درنتیجه $D_h=\mathbb{R}-\{-2,-3\}$

۴ـ داریم : $D_f=\mathbb{R}-A$

ب) با فرض $f(x)=\sqrt{x(3x+2)}$ داریم :

۱ـ عبارت $x(3x+2)$ تعیین علامت می‌شود.

۲ـ $D_f=\mathbb{R}-(-\frac{2}{3},0)$

پ) با فرض $f(x)=\sqrt[3]{x^2-x}$

۱ـ f(x) به‌ازای هر x تعریف شده است.

۲ـ $D_f=\mathbb{R}$

ث) دامنه‌ی توابع زیر در مقابل نوشته شده است :

۱ـ $f(x)=\sin x$

۲ـ $g(x)=\cos x$

۳ـ $h(x)=[x]$

۴ـ $t(x)=\sin x-\cos x$

حل

الف) $2x-1=0\Rightarrow x=\frac{1}{2}$

$x^2+5x+6=0\Rightarrow(x+2)(x+3)=0$

$\Rightarrow x=-2$ یا $x=-3$

ب) $x(3x+2)=0\Rightarrow x=0$ یا $x=-\frac{2}{3}$

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		0		$+\infty$
$x(3x+2)$		+	0	−	0	+	

$D_f=\mathbb{R}$

$D_g=\mathbb{R}$

$D_h=\mathbb{R}$

$D_t=\mathbb{R}$

ث) $f(x)=\frac{۱}{\sqrt{x^۲+۵x+۶}}$

۱ــ با توجه به قسمت (۳) از بند (الف) داریم :

۲ــ عبارت $x^۲+۵x+۶$ در $\mathbb{R}-[-۳,-۲]$ ثبت شده است.

۳ــ لذا، $D_f=\mathbb{R}-[-۳,-۲]$

$x=-۲\ ,\ x=-۳$

x	$-\infty$		-۳		-۲		$+\infty$
$x^۲+۵x+۶$		$+$	$\circ$	$-$	$\circ$	$+$	

ج) $h(x)=\frac{x-۱}{x^۲-۱}$

۱ــ معین می‌کنیم $x^۲-۱$ به‌ازای چه مقادیری از x صفر می‌شود : پس $D_h=\mathbb{R}-\{-۱,۱\}$.

$x^۲-۱=\circ \Rightarrow x=\pm ۱$

۲ــ استدلال دانش‌آموز غلط است. زیرا عبارت $(x-۱)$ را وقتی می‌توان از صورت ومخرج کسر حذف کرد که مخالف صفر باشد، یعنی $x\neq ۱$ پس $x=۱$ در دامنه‌ی h نیست.

چ) $f(x)=\tan x$

۱ــ $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ صفرهای مخرج را تعیین می‌کنیم :

$\cos x=\circ \Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۲}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$

بنابراین، $D_f=\mathbb{R}-\left\{k\pi+\frac{\pi}{۲}|k\in\mathbb{Z}\right\}$

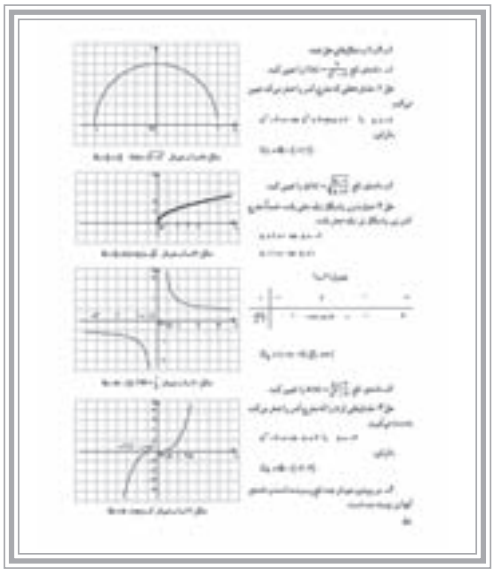
۲ــ $y=\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$ صفرهای مخرج را تعیین می‌کنیم :

$\sin x=\circ \Rightarrow x=k\pi\ ,k\in\mathbb{Z}$

بنابراین، $D_y=\mathbb{R}-\{k\pi|k\in\mathbb{Z}\}$

آموزش صفحه‌ی ۵۸

از دانش‌آموزان بخواهید که این صفحه را **بخوانند**. راه‌حل‌های این صفحه باید الگوی مناسبی را در اختیار آن‌ها قرار دهد. درصورتی که باز هم دانش‌آموزی مشکل داشته باشد علت را جویا شوید و به رفع مناسب آن بپردازید.



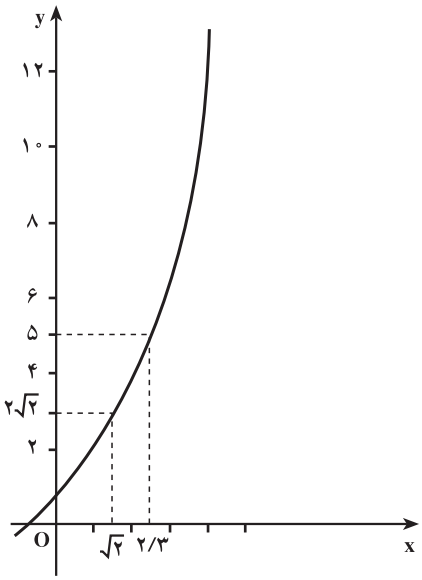
آموزش صفحه‌ی ۵۹

هدف این صفحه تمرین روی موضوع فصل است.

۱ــ $D_f = \mathbb{R} - \{-۲,۲\}$, $D_g = [۰,۲]$

۲ــ الف) و ب) جدول ۱۲ـ۱ در زیر کامل شده و نمودار f رسم شده است.

x	−۱	۰	۱	۲	۳	۴
f(x)	$\frac{۱}{۲}$	۱	۲	۴	۸	۱۶



پ) $۲^{\sqrt{۲}} \cong ۲/۷$

ت) $x \cong ۲/۳$ یعنی $۲^{۲/۳} \cong ۵$

ث) واضح است که $D_f = \mathbb{R}$

۳) الف) $D_f = \mathbb{R}$

ب) $D_g = \mathbb{R}$

پ) $D_h = \mathbb{R} - (۰,۱]$

ت) $D_k = [۰,+\infty)$

۴) $f(x) = x - \sin x \ , \ g(x) = \cos x + x$

$D_f = D_g = \mathbb{R}$

و مقادیر خواسته‌شده در روبرو حساب‌شده اند (البته به‌طور تقریبی و تا ۳ رقم اعشار).

الف) $f(۰) + g(۰) = ۱$

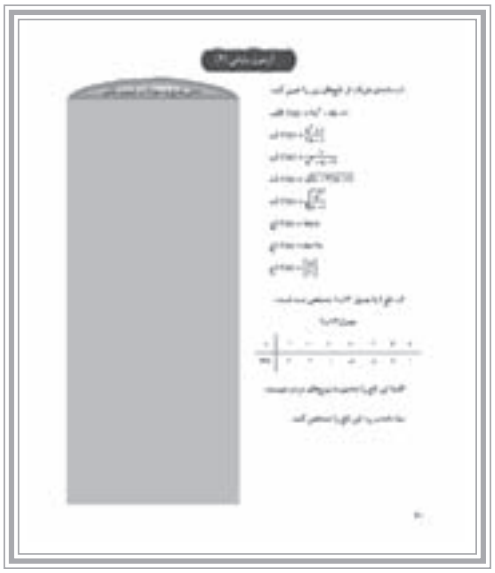
ب) $f(\frac{\pi}{۲}) + g(\frac{\pi}{۲}) = \pi - ۱$

پ) $f(\frac{\pi}{۴}) - g(\frac{\pi}{۴}) = -\sqrt{۲}$

ت) $f(۱) + g(۱) = ۱ - ۰/۸۴۱ + ۰/۵۴۰ + ۱ = ۱/۶۹۹$

آموزش صفحه‌ی ۶۰

با توجه به موضوع این فصل، انتظار می‌رود که دانش‌آموزان بتوانند پاسخ هر قسمت را به‌طور صحیح ارائه کنند و حداقل ۹۰ درصد پاسخ‌های آن‌ها درست باشد. زمان اجرای آزمون بین ۲۰ تا ۳۰ دقیقه است.



با توجه به سادگی آزمون پایانی (۴) فقط پاسخ‌ها را در مقابل ملاحظه کنید.

الف) $D_f = \mathbb{R}$

ب) $D_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{۱}{۲}\right\}$

پ) $D_f = \mathbb{R} - \{-۱,۲\}$

ت) $D_f = (-\infty,-۱] \cup [۳,+\infty)$

ث) $D_f = (۱,+\infty)$

ج) $D_f = \mathbb{R} - \left\{k\pi + \frac{\pi}{۲} | k \in \mathbb{Z}\right\}$

چ) $D_f = \mathbb{R}$

ح) $D_f = \mathbb{R}$

برای تعیین علامت عبارت دل‌خواه $f(x)$ می‌توان تابع $y=f(x)$ را توسط یکی از نرم‌افزارهای MAPLE، MATLAB، MATHEMATICA و ... رسم کرد و بازه‌هایی که در آن‌ها $f(x)$، مثبت یا منفی است و نقاطی که $f(x)=0$ را تعیین کرد. اما اگر تجزیه‌ی $f(x)$،را داشته باشیم با استفاده از صفرهای $f(x)$ و بستایی آن‌ها می‌توان به‌سادگی $f(x)$ را تعیین علامت کرد. با یک مثال مطلب را شرح می‌دهیم. فرض کنید $f(x)=(x-1)^3|x+3|(x^2+1)(x+2)^4$ جدول زیر را تشکیل می‌دهیم.

$f(x)=0 \Rightarrow x=1$ یا $x=-3$ یا $x=-2$

x	$-\infty$		-3		-2		1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

واضح است که علامت عبارت به‌ازای $-\infty$ منفی است. در عبور از -3 چون $|x+3|$ داریم تغییری در علامت عبارت رخ نمی‌دهد. در عبور از -2 چون توان $x+2$ زوج است باز هم تغییری در علامت عبارت نخواهیم داشت ولی در عبور از ۱ چون توان $(x-1)$ فرد است تغییر علامت خواهیم داشت. از روی این جدول به‌سادگی نواحی مورد پرسش مشخص می‌شوند. با نمونه‌های دیگر این روش را تمرین کنید!

حل مسائل بیش‌تر

۱ــ دامنه‌ی توابع زیر را به‌دست آورید.

الف) $f(x)=\begin{cases} x+۵ & x<-۵ \\ \sqrt{۲۵-x^۲} & -۵\le x\le ۵ \\ x-۵ & x>۵ \end{cases}$

ب) $g(x)=\tan ۲x$

ج) $h(x)=۷\cot x$

د) $y=\left[x^۲\right]$

هـ) $t(x)=\sqrt{۴x-x^۲}$

و) $k(x)=\dfrac{\sqrt{۹-x^۲}}{[x]-۲}$

ز) $u(x)=\dfrac{۱}{\sqrt{x^۲+۳x+۲}}$

حل

حل:

الف) $(-\infty,+\infty)$

ب)

$$\tan ۲x=\frac{\sin ۲x}{\cos ۲x}$$

$$\cos ۲x=۰\Rightarrow ۲x=k\pi+\frac{\pi}{۲}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$D_g=\mathbb{R}-\left\{\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴}:k\in\mathbb{Z}\right\}$$

ج)

$$h(x)=۷\frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\sin x=۰\Rightarrow x=k\pi$$

$$D_h=\mathbb{R}-\{k\pi:\ k\in\mathbb{Z}\}$$

د) $\mathbb{R}$

هـ) باید

$$۴x-x^۲\ge ۰$$

$$۴x-x^۲=۰\Rightarrow x(۴-x)=۰$$

$$\Rightarrow x=۰ \text{ یا } x=۴$$

$$D_f=[۰,۴]$$

و) باید

$$۹-x^۲\ge ۰$$

$$x^۲\le ۹\Rightarrow |x|\le ۳\Rightarrow -۳\le x\le ۳$$

و

$$[x]-۲=۰\Rightarrow [x]=۲\Rightarrow ۲\le x<۳$$

$$D_k=[-۳,۳]-[۲,۳)=[-۳,۲)\cup\{۳\}$$

ز) باید

$$x^۲+۳x+۲>۰$$

$$D_f=(-\infty,-۲)\cup(-۱,+\infty)$$

۲ــ دامنه‌ی تابع f با ضابطه‌ی

$$f(x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{[x]+[-x]}$$

را تعیین کنید

حل:

$$1-x^2\geq 0$$

$$x^2\leq 1\Rightarrow |x|\leq 1$$

$$\Rightarrow -1\leq x\leq 1$$

و

$$[x]+[-x]=\begin{cases}0 & x\in\mathbb{Z}\\ -1 & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$D_f=[-1,1]-\{-1,0,1\}$$

$$=(-1,1)-\{0\}$$

$$=(-1,0)\cup(0,1)$$

بخش دوم

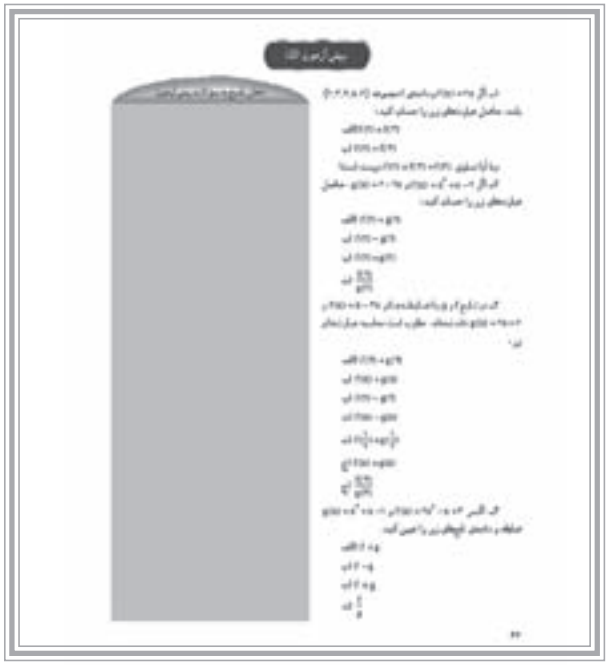
راهنمای آموزش فصل پنجم از بخش اول کتاب دانش‌آموز

شامل:

- آموزش صفحات ۶۲ تا ۶۶
- دانستنی‌های لازم برای مدرسان
- حل مسائل بیش‌تر

آموزش صفحه‌ی ۶۲

اجرای این پیش‌آزمون، در کلاس و در زمانی حدود ۳۰ دقیقه، سبب می‌شود که در آموزش صفحات بعد با دقت بیش‌تری عمل کنید و مطالبی را که دانش‌آموزان نسبت به آن‌ها ضعیف‌اند، با تأمل بیش‌تری آموزش دهید.



آموزش صفحه‌های ۶۳ و ۶۴

در این دو صفحه با ارائه‌ی دو مثال ملموس سعی شده حاصل جمع دو تابع آموزش داده شود. به ویژه، در مثال مربوط به قطار، مسافت طی‌شده توسط شخص دونده روی کفی قطار، نسبت به ابتدای واگن و نسبت به مبدأ حرکت آن سنجیده می‌شود. البته وقتی از ابتدای سمت راست به طرف مبدأ حرکت قطار می‌دود واضح است که به مبدأ نزدیک می‌شود.

در صفحه‌ی ۶۳ به‌خوبی دامنه‌ی توابع f+g، f-g و $f \times g$ مشخص شده است و دانش‌آموزان می‌توانند با خواندن این دو صفحه به‌راحتی مطالب آن را یاد بگیرند.

آموزش صفحه‌ی ۶۵

در این صفحه دامنه‌ی تابع $\frac{f}{g}$ معین می‌شود. برای این منظور باید مجموعه‌ی زیر را تعیین کرد :

$$\{x : g(x) = ۰\}$$

لذا، در مثال‌هایی که حل می‌کنید یا در تمرین‌هایی که ارائه می‌دهید توجه کنید که دانش‌آموزان قادر باشند صفرهای $g(x)$ را تعیین کنند. در این مورد بهترین مثال‌ها آن است که $g(x)$ را

الف) چندجمله‌ای درجه‌ی اول یا دوم

ب) توابع $\sin\alpha x$ یا $\cos\beta x$

انتخاب کنید.

البته می‌توانید چندجمله‌ای‌های درجه‌ی ۳ یا بیش‌تر هم به‌کار برید ولی به‌گونه‌ای که تعیین صفرهای آن‌ها میسر باشد، در انتهای این فصل رهنمودهایی ارائه شده است.

حل تمرین ۱۰ـ۱ را در زیر ملاحظه کنید :

۱ـ الف) $D_{f+g} = \mathbb{R} = D_{f-g} = D_{f\times g}$

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x) = x^۲ - ۱ + x + ۱ = x^۲ + x$$

$$(f-g)(x) = f(x)-g(x) = x^۲ - ۱ - (x+۱)$$
$$= x^۲ - x - ۲$$

$$(f\times g)(x) = f(x)\times g(x) = (x^۲ - ۱)(x+۱)$$

ب) $(f+g)(۰) = f(۰)+g(۰) = -۱+۱ = ۰$

$$(f-g)(۱) = f(۱)-g(۱) = ۰ - ۲ = -۲$$

$$(f\times g)(۲) = f(۲)\times g(۲) = ۳\times ۳ = ۹$$

$$(\frac{f}{g})(۴) = \frac{f(۴)}{g(۴)} = \frac{۱۵}{۵} = ۳$$

۲ـ در این تمرین مختصات نقاط M و N به پارامتر t بستگی دارند.

الف) $x_P = \frac{(t+۱)+(t-۱)}{۲} = t$

$$y_P = \frac{(t+۳)+(t+۱)}{۲} = t+۲$$

ب) $y_R = y_Q = ۰$

$$x_Q = x_M = t-۱$$

$$x_R = x_N = t+۱$$

پ) اگر ارتفاع ذوزنقه را QR در نظر بگیریم داریم :

$$\overline{QR} = x_R - x_Q = t+۱-(t-۱) = ۲$$

و) $s(t) = \frac{\overline{QR}}{۲}(y_M + y_N)$

$$= \frac{۲}{۲}(t+۱+t+۳) = ۲t+۴$$

آموزش صفحه‌ی ۶۶

حل آزمون پایانی ساده است و می‌توان از دانش‌آموزان خواست که آن را در کلاس و حداکثر در ۲۰ دقیقه اجرا کنند.

حل دو تمرین آزمون پایانی (۵) در زیر ملاحظه می‌شود.

۱ــ الف) لیتر $f(۱)+g(۱)=۲+۵=۷$

از دستور $f(t)+g(t)=۷t$ به‌ازای $t=۱$.

ب) لیتر $(f+g)(۵)=۷\times ۵=۳۵$

پ) $۳۵۰۰۰=۷t$

$t=۵۰۰۰$ ثانیه

$=$ ۱ساعت و ۲۳دقیقه و ۲۰ثانیه

۲ــ اگر وسط MN را P بنامیم داریم :

$$x_p=\frac{(t^۲-۱)+(t-۱)}{۲}=\frac{t^۲+t-۲}{۲}$$

$$y_p=\frac{(t^۲+۱)+(t+۱)}{۲}=\frac{t^۲+t-۲}{۲}$$

$$\overline{MN}=\sqrt{\left[(t^۲-۱)-(t-۱)\right]^۲+\left[(t+۱)-(t^۲+۱)\right]^۲}$$

$$=\sqrt{۲(t^۲-t)^۲}=\sqrt{۲}(t^۲-t)$$

معمولاً در تعیین دامنه‌ی توابع، به‌ویژه توابعی که به‌صورت چندجمله‌ای تعریف شده‌اند، لازم است که صفرهای آن را تعیین کنیم. در زیر رهنمودی برای تعیین صفرهای یک چندجمله‌ای ارائه می‌کنیم. برای اطلاعات بیش‌تر به [۱۳] مراجعه کنید.

فرض کنید می‌خواهیم ریشه‌های معادله‌ی زیر را به‌دست آوریم :

$$Q(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0=0\ ,\ a_0.a_n\neq 0 \text{ و } n>2$$

قضیه‌ی زیر نحوه‌ی به‌دست‌آوردن ریشه‌های گویا را ارائه می‌دهد.

قضیه: اگر $x=\frac{p}{q}$ که $(p,q)=1$ ریشه‌ی $Q(x)=0$ باشد آن‌گاه $p|a_0$ و $q|a_n$.

اثبات:

$$Q(\frac{p}{q})=\frac{1}{q^n}(p^na_n+p^{n-1}qa_{n-1}+\cdots+pq^{n-1}a_1+q^na_0)=$$

بنابراین $p|a_0$ و $q|a_n$.

لذا، برای چندجمله‌ای‌های درجه‌ی ۳ که حداقل یک ریشه‌ی گویا داشته باشند، می‌توان دامنه‌ی توابعی چون $f(x)=\sqrt{Q(x)}$ یا $g(x)=\frac{1}{Q(x)}$ یا $h(x)=\frac{1}{\sqrt{Q(x)}}$ را به‌دست آورد.

مثال: فرض کنید : $f(x)=\sqrt{2x^3-3x^2+1}$

حل: باید ریشه‌های معادله‌ی $2x^3-3x^2+1=0$ را تعیین کنیم. اگر این معادله بخواهد ریشه‌ی $\frac{p}{q}$ داشته باشد با $p|1$ و $q|2$ پس $p=\pm 1$ و $q=\pm 2$ و $\frac{p}{q}=\pm\frac{1}{2}$ پس دو عدد $\frac{1}{2}$ و $-\frac{1}{2}$ را امتحان می‌کنیم :

$$2(\frac{1}{2})^3-3(\frac{1}{2})^2+1=\frac{1}{4}-\frac{3}{4}+1=\frac{1}{2}\neq 0$$

$$2(-\frac{1}{2})^3-3(-\frac{1}{2})^2+1=-\frac{1}{4}-\frac{3}{4}+1=0$$

پس یک ریشه $-\frac{1}{2}$ است و داریم :

$$2x^3-3x^2+1=(x+\frac{1}{2})(2x^2-4x+2)$$

$$=2(x+\frac{1}{2})(x^2-2x+1)=0\Rightarrow x=-\frac{1}{2},x=1$$

$$D_f=[-\frac{1}{2},+\infty)$$

ضمناً می‌توانید توابعی با ضابطه‌ی

$$f(x)=ax^4+bx^2+c$$

ارائه کنید که پس از قراردادن $z=x^2$ و حل معادله‌ی درجه‌ی دوم $az^2+bz+c=0$ می‌توان ریشه‌های حقیقی $f(x)=0$ را حساب کرد و D_f را نوشت.

حل مسائل بیش‌تر

۱ــ هرگاه

$$f=\{(۱,۲),(۲,۴),(۳,۶)\}$$
$$g=\{(۱,۱),(۲,۳),(۳,-۳)\}$$

باشند آن‌گاه $\frac{۳f}{f-g}$ را بیابید.

حل:

$$۳f=\{(۱,۶),(۲,۱۲),(۳,۱۸)\}$$
$$\frac{۳f}{f-g}=\{(۱,۶),(۲,۱۲),(۳,۲)\}$$

۲ــ اگر $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=x^۲$ حاصل $\left(\frac{g}{f}\right)(۴)$ را بیابید.

حل:

$$g(۴)=۴^۲=۱۶,\ f(۴)=۲$$
$$(\frac{g}{f})(۴)=\frac{g(۴)}{f(۴)}=\frac{۱۶}{۲}=۸$$

۳ــ اگر $f(x)=x^۲-۶x+۸$, $g(x)=x-۲$ و ضابطه‌ای $(\frac{f}{g})(x)$ را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.

حل:

$$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$$
$$=\frac{x^۲-۶x+۸}{x-۲}$$
$$=\frac{(x-۲)(x-۴)}{x-۲}=x-۴$$

توجه کنید که $x=۲$ ریشه‌ی مخرج است و در دامنه‌ی تابع $\frac{f}{g}$ نیست.

۴ــ اگر $f(x)=\frac{x+۱}{x-۱}$ و $g(x)=\frac{۱}{x}$ مطلوب است :

الف ــ $f+g$

ب ــ $(\frac{f+g}{f-g})(۲)$

حل: الف ــ

$$D_f=\mathbb{R}-\{۱\}$$
$$D_g=\mathbb{R}-\{۰\}$$
$$D_{f+g}=\mathbb{R}-\{۰,۱\}$$
$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\frac{x+۱}{x-۱}+\frac{۱}{x}$$
$$=\frac{x^۲+۲x-۱}{x^۲-x}$$

ب ــ

$$(\frac{f+g}{f-g})(۲)=\frac{(f+g)(۲)}{(f-g)(۲)}$$
$$=\frac{f(۲)+g(۲)}{f(۲)-g(۲)}$$
$$=\frac{۷}{۵}$$