بخش دوم

راهنمای آموزش فصل ششم از بخش اول کتاب دانش‌آموز

شامل:

- آموزش صفحات ٦٨ تا ٧٤
- حل مسائل بیش‌تر

آموزش صفحه‌ی ۶۸

با توجه به هدف این فصل، که یادآوری ترکیب دو تابع است، پیش‌آزمون (۶) طراحی شده است.

دانش‌آموزان، در کلاس و در زمان حدود ۳۰ دقیقه، این پیش‌آزمون را اجرا خواهند کرد. از نحوه‌ی اجرای پیش‌آزمون و سؤالات احتمالی که پرسیده می‌شود می‌توان به میزان دانش آن‌ها در مورد موضوعِ درس پی برد.

آموزش صفحه‌ی ۶۹

شکل بالای این صفحه معلم را راهنمایی می‌کند که آموزش را با مثال‌های واقعی شروع کند. البته در واقعیت برای تولید هر محصول، چند عمل و تابع رخ می‌دهد. مثلاً :

کاشت بذر گندم ← برداشت گندم ← تهیه‌ی آرد ← پخت نان. بدیهی است که هریک از قسمت‌های بالا نیز از چندین عمل تشکیل شده است (از دانش‌آموزان بخواهید که مراحل هر قسمت را بازگو نمایند).

آموزش این صفحه، که بر شهود و شکل تأکید دارد، برای مشخص‌نمودن دامنه‌ی gof است. توجه داشته باشید که از ارائه‌ی مثال‌های پیچیده احتراز کنید، زیرا در حالت کلی تعیین R_f ساده نیست. لذا، در مثال‌ها و تمرین‌هایی که ارائه می‌کنید به این نکته توجه داشته باشید که دانش‌آموزان قادر باشند R_f و D_g را به‌راحتی تعیین کنند و تعیین D_{gof} با توجه به $R_f \cap D_g$ ساده باشد. مثال زیر را برای دانش‌آموزان مستعد مطرح کنید و ملاحظه کنید که چه ریزه‌کاری‌هایی در حل آن وجود دارد.

مثال: اگر $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ و $g(x)=\sqrt{2x-1}$ تعیین کنید.

الف) $D_f \ , \ R_f$

ب) $D_g \ , \ R_g$

پ) D_{gof}

حل: واضح است که :

الف) $D_f=[-1,1] \ , \ R_f=[0,1]$

ب) $D_g=\left[\frac{1}{2},+\infty\right) \ , \ R_g=[0,+\infty)$

پ) داریم :

$$D_{gof}=\left\{x\in D_f : f(x)\in\left[\frac{1}{2},+\infty\right)\right\}$$

$$=\left[-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

آموزش صفحه‌های ۷۰ و ۷۱

تمرین ۱۱ـ۱ باید در کلاس و با نظارت معلم، در زمانی حدود ۴۵ دقیقه، حل شود. حل این تمرین را به‌طور خلاصه در زیر ملاحظه می‌کنید.

۱ـ با توجه به این‌که $f(x)=x^2+2x$ داریم :

$f(1)=3 \ , \ f(2)=8 \ , \ f(t)=t^2+2t$

$f(2t+1)=(2t+1)^2+2(2t+1)=4t^2+8t+3$

$f(t^2)=(t^2)^2+2t^2=t^4+2t^2$

$f(\sqrt{t})=(\sqrt{t})^2+2\sqrt{t}=t+2\sqrt{t}$

۲ـ داریم : $gof(1)=g(f(1))=g(3)=9$

$fog(1)=f(g(1))=f(1)=3$

لذا، $fog \neq gof$.

۳ـ ضابطه‌ی gof و fog در هر حالت حساب شده است.

الف) $(gof)(x)=1-6x \ , \ (fog)(x)=2-6x$

ب) $(gof)(x)=x^2+1 \ , \ (fog)(x)=(x+1)^2$
$=x^2+2x+1$

پ) $(gof)(x)=x^6 \ , \ (fog)(x)=x^6$

ت) $(gof)(x)=\sqrt{x^2}=|x| \ , \ (fog)(x)=x$

۴ـ واضح است که

$(Iof)(x)=(foI)(x)=f(x)$

۵ـ داریم :

$$(gof)(x)=g(2x+1)=\frac{1}{2}(2x+1)-\frac{1}{2}=x$$

$$(fog)(x) = f(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}) = 2(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}) + 1 = x$$

به عبارت دیگر،

$$(gof)(x) = (fog)(x) = I(x)$$

و f و g معکوس یک‌دیگرند.

۶ــ داریم :

$$(gof)(x) = g(x^2 + 1) = \sqrt{(x^2 + 1) - 1} = |x|$$

$$(fog)(x) = f(\sqrt{x - 1}) = (x - 1) + 1 = x$$

توجه کنید که این دو تابع برابر نیستند، زیرا،

$$(gof)(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$$

ولی $\frac{1}{2}$ در دامنه‌ی fog نیست. چرا؟

۷ــ ب) داریم :

$$(fof)(x) = f(2x) = 4x = 2^2 x$$

$$f^3(x) = 8x = 2^3 x, \cdots, \ f^n(x) = 2^n x$$

پ) $f^2(x) = x^4 = x^{2^2}, \ f^3(x) = x^8 = x^{2^3}$

$$\cdots, f^n(x) = x^{2^n}$$

دربارهٔ بازی و ریاضی ۲ــ۶ــ۱

در فضای لایتناهی ناحیه‌هایی وجود دارد که تاریک و **سیاه‌اند** و اگر اشیای مُعَلَّق در فضا در نزدیکی آن‌ها قرار گیرند به داخل آن نواحی سقوط می‌کنند. لذا، این ناحیه‌ها را **سیاه‌چاله** نامند.

با این مقدمه در ریاضیات نیز سیاه‌چاله‌هایی تعریف شده است. اگر تابعی چون f داشته باشیم و مجموعه‌ای ثابت مانند A یافت شود به‌قسمی که

$$\forall x \in D_f \ \exists n : \ f^n(x) \in A$$

گوییم A یک سیاه‌چاله برای فرایند f است.

در مورد هریک از مثال‌های این بازی و ریاضی می‌توان با استدلال ریاضی هم مجموعه‌ی A را به‌دست آورد. (توجه داشته باشید که با هزاران مثال هم نمی‌توان به حکم قطعی رسید، مگر آن‌که حکم مستدلاً ثابت شود.)

۱) به‌سادگی معلوم است که یکان عدد n^2 مساوی یکانِ مربعِ یکانِ n است. لذا، کافی است یکان اعداد 0^2، 1^2، ...، 9^2 را به‌دست آوریم که اعداد ۰، ۱، ۴، ۵، ۶، ۹ می‌شود.

مجدداً اگر یکان مربع این اعداد را حساب کنیم به مجموعه‌ی $\{0,1,6,5\}$ می‌رسیم.

۲) واضح است که مربع یکان n اعداد زیر است :

۸۱، ۶۴، ۴۹، ۳۶، ۲۵، ۱۶، ۹، ۴، ۱، ۰

و مربع یکان این اعداد عبارت‌اند از :

۰،۱،۱۶،۸۱،۳۶،۲۵

بالأخره مربع یکان این اعداد مجموعه A را می‌دهند :

$A = \{۰,۱,۲۵,۳۶\}$

۳ــ استدلال ریاضی این سیاه‌چاله به‌قرار زیر است : به‌سادگی ملاحظه می‌شود که n هر عددی باشد پس از اجرای چند بار فرایند تعریف‌شده به یک عدد سه رقمی می‌رسیم (برای اعدادی که حداکثر ۹رقم دارند، پس از یک بار اجرای فرایند f عددی سه‌رقمی حاصل می شود). البته هرچه تعداد رقم‌های n بیش‌تر باشد با اجرای بیش‌تری از فرایند f به یک عدد سه‌رقمی می‌رسیم. مثلاً فرض کنید عدد n دارای **هزار** رقم باشد که ۵۷۶ رقم آن زوج و ۴۲۴ رقم آن فرد است.

در این صورت، $f(n) = ۱۰۰۰۵۷۶۴۲۴$

و $f^{۲}(n) = ۱۰۷۳$

$f^{۳}(n) = ۴۱۳$

ملاحظه می‌کنید که پس از سه بار اجرای فرایند به یک عدد سه‌رقمی رسیدیم. بنابراین، کافی است ثابت کنیم اعداد سه‌رقمی با اجرای این فرایند به ۳۱۲ ختم می‌شوند. این فرایند روی اعداد سه‌رقمی، برحسب این‌که ۰، ۱، ۲ یا ۳ رقم زوج داشته باشند به‌صورت‌های زیر است :

۳۰۳، ۳۲۱، ۳۱۲، ۳۳۰

و داریم :

$۳۰۳ \xrightarrow{f} ۳۱۲$

$۳۲۱ \xrightarrow{f} ۳۱۲$

$۳۳۰ \xrightarrow{f} ۳۱۲$

یعنی، پس از این‌که به یک عدد سه‌رقمی برسیم این عدد ۳۱۲ است یا با یک بار دیگر اجرای فرایند f به عدد ۳۱۲ می‌رسیم!

در زیر یک تابع دیگر و سیاه‌چاله‌ی مربوط به آن تعریف شده است (برای مثال‌های دیگر به [۱۵] مراجعه کنید).

الف) $f(n)=$(مجموع مکعبات رقم‌های n) و $n \in N, ۳|n$ (n عددی طبیعی است که بر ۳ بخش‌پذیر است).

$A = \{۱۵۳\}$

آموزش صفحه‌ی ۷۲

از دانش‌آموزان بخواهید که آزمون پایانی (۶) را، در زمانی حدود ۴۰ دقیقه، در کلاس اجرا کنند و به سؤالات احتمالی آن‌ها پاسخ دهید. حل سؤالات این آزمون پایانی را در زیر ملاحظه می‌کنید.

۱ــ داریم :

$$f(۲) = \frac{۱}{۳} \ , \ f(\frac{۱}{۲}) = -\frac{۱}{۳} \ ,$$

$$f(\sqrt{۳}) = \frac{\sqrt{۳}-۱}{\sqrt{۳}+۱} = ۲-\sqrt{۳}$$

$$f(\frac{۱}{x}) = \frac{۱-x}{۱+x}$$

$$(fof)(x) = \frac{\frac{x-۱}{x+۱}-۱}{\frac{x-۱}{x+۱}+۱} = \frac{-۲}{۲x} = -\frac{۱}{x}$$

۲ــ داریم :

الف) $f\big(g(۲)\big)=f(۰)=۱$

$$g\big(f(۱)\big)=g(\sqrt{۲})=\sqrt{۲-\sqrt{۲}}$$

ب) $f\big(g(x)\big)=\sqrt{(۲-x)+۱}=\sqrt{۳-x}$

$$g\big(f(x)\big)=\sqrt{۲-\sqrt{x^۲+۱}}$$

پ) خیر. مثلاً، $g\big(f(۰)\big)=۱\neq f\big(g(۰)\big)=\sqrt{۳}$.

۳ــ الف) واضح است که $D_f=\mathbb{R}$ ، برای تعیین R_g

فرض می‌کنیم $g(x)=\frac{۱}{x-۱}=y$ در این صورت

$$yx=۱+y$$

لذا، اگر $y\neq ۰$ ، $x=\frac{۱+y}{y}$ یعنی

$$R_g=\mathbb{R}-\{۰\}$$

ب) با توجه به (الف) و

$$D_{fog}=\mathbb{R}-\{۱\}$$

پ) $(fog)(x)=\frac{۱}{(x-۱)^۲}+\frac{۵}{x-۱}=\frac{۵x-۴}{(x-۱)^۲}$

۴ــ چون $۳\notin D_f$ پس $(gof)(۳)$ قابل محاسبه نیست.

۵ــ $f^n(x)$ را برای چند n حساب می‌کنیم.

$$f^۲(x)=f\big(f(x)\big)=f(\frac{۱}{x})=\frac{۱}{\frac{۱}{x}}=x$$

$$f^۳(x)=f\big(f^۲(x)\big)=f(x)=\frac{۱}{x}\ ,\ f^۲(x)=x$$

بنابراین،

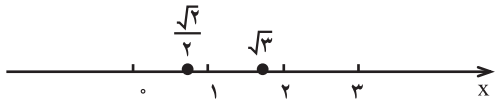
$$f^n(x)=\begin{cases} x\ , & \text{اگر n زوج باشد} \\ \frac{۱}{x}\ , & \text{اگر n فرد باشد}\end{cases}$$

آموزش صفحه‌های ۷۳ و ۷۴

در این دو صفحه آن‌چه در بخش اول یادآوری شد تمرین می‌شود. درواقع می‌توان گفت که این دو صفحه یک آزمون از بخش اول کتاب است و این تمرین‌ها سؤالات نمونه هستند. مدت انجام این تمرین‌ها ۹۰ دقیقه است و دانش‌آموزان باید به بیش از ۹۰ درصد سؤالات پاسخ درست بدهند. زمان اجرا و رسیدن به این تمرین‌های تکمیلی حدود هفته‌ی دهم سال تحصیلی است.

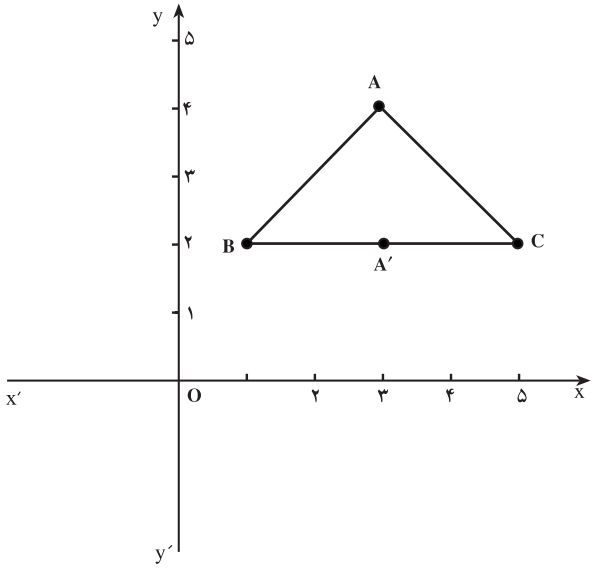
گرچه این تمرین‌ها بسیار ساده‌اند، ولی حل آن‌ها را در زیر می‌آوریم.

۱ــ عددهای $\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۳}$ را تا یک رقم اعشار گرد می‌کنیم :



$$\sqrt{۳} \cong ۱/۷ \quad , \quad \frac{\sqrt{۲}}{۲} \cong \frac{۱/۴}{۲} = ۰/۷$$

۲ــ الف) نقطه‌ها را در دستگاه مختصات مشخص می‌کنیم.



ب) داریم : $AB = AC$ و مثلث متساوی‌الساقین است.

پ) $A'(۳,۲)$

ت) $\overline{AA'} = ۲ = \sqrt{(۳-۳)^۲ + (۴-۲)^۲}$

۳ــ باید داشته باشیم :

$$\begin{cases} a+۲ = b-۱ \\ ۳b = -(۱-a) \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} b = -۲ \\ a = -۵ \end{matrix} \Rightarrow M\left|\begin{matrix} -۳ \\ ۶ \end{matrix}\right. ، \; M'\left|\begin{matrix} -۳ \\ -۶ \end{matrix}\right.$$

۴ــ خیر، چون $۲m-۱$ فرد است و x_B زوج

۵ــ جواب نامعادله‌ها در مقابل نوشته شده است :

الف) $(-۳,۱)$

ب) $(-\frac{۱}{۵},+\infty)$

۶ــ جواب درمقابل نوشته شده است :

الف) $A \cap B = [۲,۴]$

ب) $A \cup B = [-۳,۵]$

پ) $A - B = [-۳,۲)$

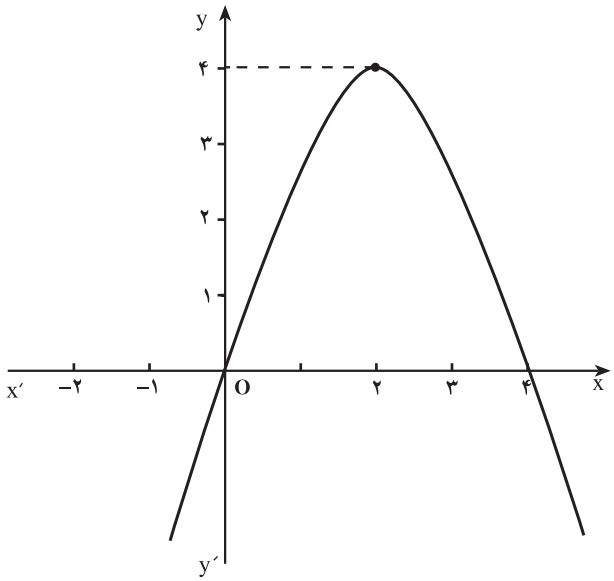
۷ــ از فرمول $V_۲ = aV_۱$ داریم :

$۲۳۰ = a \times ۱۱/۵ \Rightarrow a = ۲۰$

۸ــ با توجه به ویژگی تابع مجموعه روبه‌رو تابع است :

الف) $\{(۲,۵),(۳,-۱),(۴,۶),(-۲,۲)\}$

۹ــ جواب (الف) و (ت) است.



۱۰ــ جواب (ب) و (پ) است.

۱۱ــ الف) نمودار $y = -x^۲ + ۴x$ رسم شده است :

ب) چون $۴ = -۲^۲ + ۴ \times ۲$ نقطه‌ی A روی نمودار است.

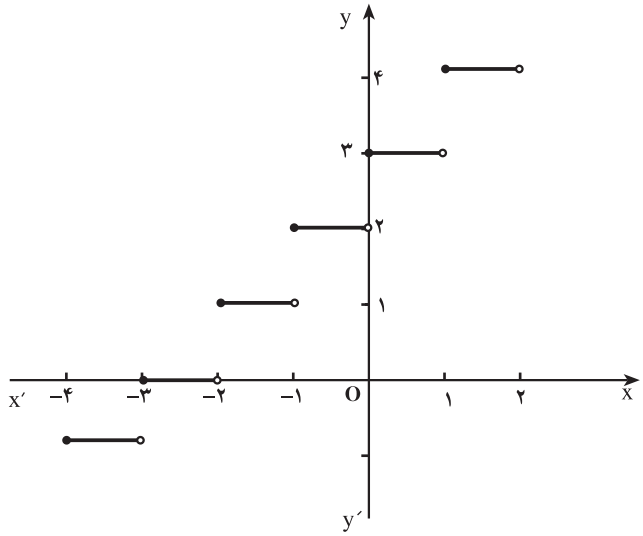
پ) باید داشته باشیم :

$$۱ = -(۲m)^۲ + ۴ \times ۲m \Rightarrow ۴m^۲ - ۸m + ۱ = ۰$$

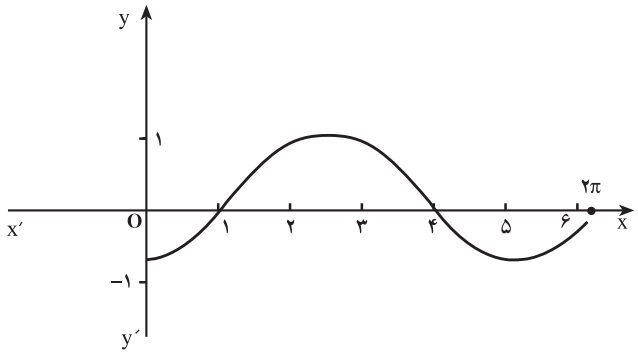
$$m = \frac{۴ \pm \sqrt{۱۶ - ۴}}{۴} \begin{cases} \frac{۲ + \sqrt{۳}}{۲} \\ \frac{۲ - \sqrt{۳}}{۲} \end{cases}$$

۱۲ــ $f(۲) = ۴a + ۶ - a = ۸ \Rightarrow \boxed{a = \frac{۲}{۳}}$

۱۳ــ الف) با توجه به این‌که $y = [x + ۳] = [x] + ۳$ نمودار $y = [x]$ را رسم و به اندازه ۳ واحد به بالا انتقال می‌دهیم.



ب) نمودار $y=\sin x$ را برای xهای متعلق به بازه‌ی $\left[-\frac{\pi}{۳},\ ۲\pi-\frac{\pi}{۳}\right]$ رسم می‌کنیم.



۱۴ــ الف) دامنه‌ی تابع $y=-۲x^۲+x$ مجموعه $\mathbb{R}$ است.

ب) برای تعیین دامنه‌ی تابع $y=\frac{۳x}{x^۲-۱}$ داریم :

$$x^۲-۱=۰\Rightarrow x=\pm۱\ ,\ D_y=\mathbb{R}-\{-۱,۱\}$$

پ) دامنه‌ی تابع $y=\sin ۲x$ مجموعه $\mathbb{R}$ است.

ت) دامنه‌ی تابع $y=\sqrt{۵x+x^۲}$ چنین تعیین می‌شود :

$$۵x+x^۲=۰\Rightarrow x=۰ \text{ یا } x=-۵$$

$$D_y=(-\infty,-۵]\cup[۰,+\infty)$$

۱۵ــ چون $f(x)=\sqrt{x^۲+۱}$ و $g(x)=x^۲-۱$ داریم :

الف) $(f\times g)(x)=\sqrt{x^۲+۱}(x^۲-۱)$

ب) $(gof)(x)=(x^۲+۱)-۱=x^۲$

پ) $f(۲)\times g(۲)=\sqrt{۵}(۴-۱)=۳\sqrt{۵}$

ت) $g\left(f(۲\sqrt{۲})\right)=g(۳)=۸$

ث) $f(۳)\times g(\frac{۱}{۳})=\sqrt{۱۰}(\frac{۱}{۹}-۱)=-\frac{۸}{۹}\sqrt{۱۰}$

۱۶ــ $(gof)(x)=(\sqrt{۲x})^۲-۱=۲x-۱$

حل مسائل بیش‌تر

۱ــ هرگاه $f(x)=۲x+۱$ و $g(x)=۳x+۷$ باشند، معادله‌ی زیر را حل کنید.

$(fog)(x)=۱۳$

حل:

$f(g(x))=۱۳$

$f(۳x+۷)=۱۳$

$۲(۳x+۷)+۱=۱۳$

$۶x+۱۵=۱۳$

$۶x=-۲ \Rightarrow x=-\frac{۱}{۳}.$

۲ــ اگر $(fog)(x)=-f(x)$ و $f(x)=\frac{x+۱}{x-۱}$ باشد، $g(x)$ کدام است؟

حل:

$f(g(x))=-f(x)$

$\frac{g(x)+۱}{g(x)-۱}=\frac{-x-۱}{x-۱}$

$g(x)x-g(x)+x-۱=$

$-xg(x)+x-g(x)+۱$

$۲xg(x)=۲ \Rightarrow g(x)=\frac{۱}{x}$

۳ــ اگر $f(x+۱)=x^۲-۲x+۱$ تابع f با ضابطه‌ی $f(x)$ کدام است؟

حل:

$x+۱=t \Rightarrow x=t-۱$

$f(t)=(t-۱)^۲-۲(t-۱)+۱$

$f(t)=t^۲-۴t+۴=(t-۲)^۲$

$f(x)=(x-۲)^۲$

۴ــ اگر $f(x)=۳x+۷$ و $g(x)=۲x-۳$ معادله‌ی $۳fog(x)+۲gof(x)=۷$ را حل کنید.

حل:

$۳fog(x)+۲gof(x)$

$=۳(۳(۲x-۳)+۷)+۲(۲(۳x+۷)-۳)$

$=۳۰x+۱۶=۷ \Rightarrow x=-\frac{۳}{۱۰}$

۵ــ اگر $f(\frac{x}{x^۲+x+۱})=\frac{x^۲}{x^۴+x^۲+۱}$ باشد $f(\frac{۱}{۳})$ را محاسبه کنید.

حل:

$x=۱$

$f(\frac{۱}{۳})=\frac{۱}{۳}$

بخش سوم

راهنمای آموزش بخش دوم کتاب دانش آموز

شامل:

ـ مقدمه

ـ راهنمای آموزش فصل‌های بخش دوم کتاب دانش آموز

طبق جدول زیر:

فصل	عنوان	صفحه
اول	حد	۷۷ تا ۹۸
دوم	پیوستگی	۹۹ تا ۱۰۸
سوم	تعمیم حد	۱۰۹ تا ۱۲۸

ـ حل تمرین‌های تکمیلی بخش دوم کتاب دانش آموز

مقدمه

در بخش دوم کتاب دانش‌آموز مفهوم حد مورد بررسی قرار می‌گیرد. همان‌طورکه در زیر شرح داده شده است، این مفهوم در تلاش برای تعریف سرعت لحظه‌ای، نقش کلیدی ایفا کرده است و در بررسی دنباله‌ها، محاسبه‌ی مجموع بی‌نهایت مقدار (حاصل‌جمع سری‌های نامتناهی)، پیوستگی ومشتق کاربرد پیدا می‌کند.

در بخش دوم کتاب، با شروعِ مفهوم سرعت لحظه‌ای، مفهوم حد، تعمیم آن، محاسبه‌ی برخی سری‌های عددی و پیوستگی مورد بررسی قرار گرفته است و با مثال‌های متنوع سعی شده است که تا حدودی درک مفهوم حد را برای دانش‌آموزان آسان کنیم و آن‌ها را با برخی کاربردهای مقدماتی این مفهوم آشنا سازیم.

همان‌طورکه در زیر ملاحظه خواهید کرد، حدود چهارصدسال طول کشید تا مفهوم حد برای دانشمندان ریاضی درک شد و به شکل امروزی در دسترس ما قرار گرفت.

رجبعلی‌پور (۱۳۶۴) در مورد مفهوم بی‌نهایت و ارتباط آن با حد می‌نویسد :

دانشمندان قدیم سرعت یک متحرک را یک کیفیت آن می‌پنداشتند و تندی و کندی حرکت چیزی همانند پررنگی و کم‌رنگی محسوب می‌شد.

فرضیه‌ی *خواجه نصیرالدین طوسی* در قرن سیزدهم میلادی که هر منحنی از خطوط کوچک غیرقابل تقسیم تشکیل یافته است، راه را برای درک سرعت لحظه‌ای، که عبارت از سرعت یک‌نواخت متحرک در هر قطعه کوچک از مسیر بود، گشود.

طبیعی‌ترین تصور از سرعت لحظه‌ای، خارج‌قسمت دو بی‌نهایت کوچک است که صورت آن طول پاره‌خط بی‌نهایت کوچک و مخرج آن زمان پیمایش آن پاره‌خط توسط متحرک است. ولی جهان باید تا قرن هفدهم صبر می‌کرد تا نیوتن برای تقسیم‌کردن دو بی‌نهایت کوچک راهی بیابد.

مطالعه‌ی حرکت‌های تخیلی، که در آن‌ها مقدار سرعت از یک فاصله (معمولی و نه بی‌نهایت کوچک) به فاصله‌ی بعدی تغییر می‌کرد ولی در هر فاصله سرعت ثابت بود، منجر به کشف مفهوم سری بی‌نهایت (مجموع بی‌نهایت مقدار) گردید. به‌عنوان نمونه *سواینیزهد*[1] مسئله‌ی ذیل را طرح و آن را با روش‌های مکانیکی بغرنجی حل کرد :

اگر متحرکی در نصف یک فاصله‌ی زمانی معین با سرعتی یک‌نواخت حرکت کند و در ربع بعدی آن فاصله‌ی زمانی با سرعتی معادل دو برابر سرعت قبل و در یک هشتم بعدی با سرعتی معادل سه برابر سرعت اولیه و همین‌طور تا بی‌نهایت دفعه سرعت خود را تغییر دهد و حرکتش ادامه یابد، در این صورت سرعت متوسط این متحرک دو برابر سرعت اولیه‌ی او خواهد بود.

حل این مسئله معادل با اثبات تساوی زیر است :

$$۲=\frac{۱}{۲}+\frac{۲}{۲^{۲}}+\frac{۳}{۲^{۳}}+\cdots+\frac{n}{۲^{n}}+\cdots$$

که امروزه ترجیح می‌دهیم از طرفین رابطه‌ی زیر

$$\frac{۱}{۱-x}=۱+x+x^{۲}+\cdots+x^{n}+\cdots \quad (|x|<۱)$$

مشتق بگیریم و در x ضرب کنیم تا حاصل شود

$$\frac{x}{(۱-x)^{۲}}=x+۲x^{۲}+\cdots+nx^{n}+\cdots$$

و بعد به جای x مقدار $\frac{۱}{۲}$ را قرار دهیم.

ساده‌ترین راه‌حل در **قرن چهاردهم** توسط *اورم*[2] پیشنهاد شد. او از شکل‌های صفحه‌ی بعد تساوی

$$\frac{۱}{۲}+\frac{۲}{۲^{۲}}+\frac{۳}{۲^{۳}}+\cdots+\frac{n}{۲^{n}}+\cdots=۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\cdots+\frac{۱}{۲^{n}}+\cdots$$

را ثابت کرد و نتیجه‌ی لازم را به‌دست آورد.

(ضمناً، از تساوی بدیهی

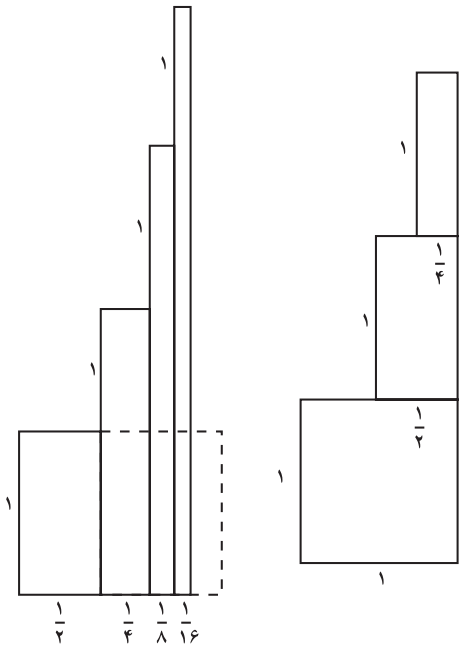
$$۱=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۸}+\cdots+\frac{۱}{۲^{n}}+\cdots$$

استفاده شده است.)

---

۱. Richard Swineshead

۲. Nicole Oresme



بدین ترتیب یکی از رخدادهای مهم ریاضی قرن چهاردهم ریختن ترس ریاضی‌دانان از محاسبه‌ی حاصل‌جمع بی‌نهایت مقدار است.

در خلال قرن‌های چهاردهم، پانزدهم و شانزدهم میلادی ریاضی‌دانان اروپایی ضمن تسلط‌یافتن بیش‌تر بر کارهای یونانیان و مسلمانان و بسط و تعمیم آن‌ها و شناسایی بهتر سری‌ها، علایم جبری و هندسه‌ی تحلیلی را پایه‌گذاری کردند. درنتیجه درک روش‌های بی‌نهایت کوچک و کاربرد آن‌ها در مسائل مربوط به اندازه‌گیری طول، مساحت، حجم و سرعت به نحو چشم‌گیری تحقق یافت. پنجمین مفهوم پیوستگی، که قبلاً فقط برای کمیت‌های هندسی و فیزیکی قابل پذیرش بود، به‌تدریج به‌اعداد حسابی و جبری نیز سرایت کرد و رشته‌ی جدیدی در ریاضیات به نام **آنالیز** تکوین یافت.

تا ظهور نیوتن[۱] و لایب‌نیتز[۲] درنیمه‌ی دوم **قرن هفدهم** میلادی، مفهوم سری‌ها، حاصل‌جمع آن‌ها و نیز مفهوم دنباله‌هایی نظیر $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ و میل‌کردن جملات آن به صفر کاملاً جا افتاده بود، گرچه تا قرن نوزدهم می‌بایست صبر کرد تا تعاریفی دقیق و منطقی برای آن‌ها و اعمال روی آن‌ها بیان شود. هم‌چنین کارهای *ائودوکسوس* و *ارشمیدس*، که توسط ریاضی‌دانان اسلامی از قبیل *ثابت‌بن قره حرانی* (قرن نهم میلادی)، *حسن‌بن‌هیثم* (قرون دهم و یازدهم میلادی)، *خواجه‌نصیرالدین طوسی* (قرن سیزدهم میلادی) و *غیاث الدین جمشید کاشانی* (قرن پانزدهم میلادی) دنبال شده بود، توسط ریاضی‌دانان اروپایی مانند *کپلر*[۳] (قرون شانزدهم و هفدهم میلادی)، *کاوالیری*[۴] (نیمه‌ی اول قرن هفدهم)، *جان‌والیس*[۵] (قرن هفدهم) و *فرما* (قرن هفدهم) به حد وسیعی گسترش یافت.

یکی از کارهای مهم ریاضی‌دانان نیمه‌ی دوم قرن هیجدهم تا پایان قرن نوزدهم، مانند *دالامبر*[۶]، *بولتانو*[۷]، *کوشی*[۸]، *وایرشتراس*[۹]، *ریمان*[۱۰]، و *فوریه*[۱۱]، این بود که در یافتن تعاریف دقیقی برای مفاهیم حد، پیوستگی و مشتق و امثال آن‌ها و توجیه منطقی قضایای موجود بود تا جای‌گزین‌کردن روش‌ها و مفاهیم بی‌نهایت کوچک بسیار تلاش کردند.

در قرن بیستم که به نظر می‌رسید مسئله‌ی بی‌نهایت کوچک‌ها به کلی حل شده است و یک ریاضی‌دانان جدید دیگر نباید آن‌ها را، به‌عنوان مفاهیم جدی ریاضیات تلقی کند، ناگهان *آبراهام رابینسون*[۱۲] داغ را تازه کرد و در سال **۱۹۶۵** ثابت نمود که بی‌نهایت کوچک‌ها به‌عنوان مفاهیمی اصیل در ریاضی وجود دارند و می‌توان حسابان و آنالیز را به‌طور مستحکم و منطقی براساس آن‌ها بنا کرد. اکنون، مطلب را، بی‌آن‌که خود را با کارهای رابینسون درگیر سازیم، با این نکته ختم می‌کنیم، اگر کسی نخواهد مفاهیم حد و پیوستگی را به روش معمول کتب دبیرستانی و دانشگاهی مطالعه کند باید مفهوم بی‌نهایت کوچک‌ها را آن‌طورکه رابینسون ابداع کرده است بیاموزد و درک کند. آنالیز ابداعی رابینسون را **آنالیز غیراستاندارد** می‌نامند؛ گرچه به قول یکی از همکاران، همین آنالیز غیراستاندارد تا اواسط قرن هیجدهم آنالیز معمول و استاندارد بوده است!

برای کسب اطلاعات دقیق‌تر در مورد مطالب بالا به [۱۷] مراجعه کنید.

۱. Newton
۲. Leibniz
۳. Kepler
۴. Cavalieri
۵. John Wallis
۶. D'Alembert
۷. Bolzano
۸. Cauchy
۹. Weirstrass
۱۰. Riemann
۱۱. Fourier
۱۲. Abraham Robinson

با ریاضی‌دانان نامی آشنا شوید

ابوالوفا محمدابن‌محمدابن یحیی‌ابن اسماعیل‌ابن عباس بوزجانی، یکی از مفاخر علمی ایران و از بزرگ‌ترین ریاضی‌دانان و منجمان دوره‌ی اسلامی است به گفته ابن ندیم در روز چهارشنبه، اول ماه رمضان سال ۳۲۸ هـ. ق در شهر بوزجان متولد شد. بوزگان، پوزگان یا یوچگان، شهر قدیمی در خراسان بود که ویرانه‌های آن در حدود هجده کیلومتری شرق تربت جام به یادگار مانده است ابوالوفا در حدود ۳۴۸ هـ. ق زادگاهش را به خاطر کسب علم و دانش و عرضه توانایی‌های علمی و فکری خود، ترک و به‌طرف بغداد حرکت کرد. او در بغداد با شرکت در محافل علمی توانایی خود را در محاسبات ریاضی به سرعت نشان داد. رهاورد این تلاش‌ها و سخت‌کوشی‌ها، انتخاب او برای دیوانی و ثبت و محاسبات مالی حکومت بود. ابوالوفا علاوه‌بر فعالیت‌های یادشده، به پژوهش‌های نجومی و ستاره‌شناسی نیز مشغول بود. دانشمندان، هنرمندان و ریاضی‌دانان عصر خود به او لقب مهندس داده بودند. مهندس به معنای ماهرترین و مطلع‌ترین هندسه‌دان بود.

ابوالوفا در به‌دست‌آوردن وترها مطالب بسیار سودمندی دارد. تألیف‌های فراوانی در زمینه‌های حساب هندسه، مثلثات و نجوم داشته است. نبوغ بوزجانی به‌عنوان یک مهندس این بوده است که مطالب مهم و پیچیده را به‌شکلی ساده و قابل فهم در اختیار دیگران قرار می‌داد.

ابوالوفا درباره حساب عملی، با عنوان «کتاب فی‌مایحتاج‌الیه‌الکتاب و العمال من علم‌الحساب» از شهرت گسترده‌ای برخوردار گردید. او همه‌ی اعداد و محاسبات را تنها با کلمات بیان کرده است. این کتاب که ترجمه فارسی نام عربی کتاب «آن‌چه از علم حساب که کاتبان و کاسبان را به‌کار آید» می‌باشد از جهت تاریخ حساب اهمیت فراوانی دارد و محاسبات مربوطه به چهار عمل اصلی اعداد و هم‌چنین کسرها و محاسبه مساحت مثلث‌ها، مربع‌ها و محاسبه مالیات را شامل می‌شود.

کتاب درسی عملی دیگر ابوالوفا «کتاب فی‌مایحتاج‌الیه‌الصانع من‌الاعمال‌الهندسه» است که شامل ترسیم‌های مسطح ساده و ترسیم چندوجهی‌های منتظم و نیمه‌منتظمی که در کره‌ای مفروض شده‌اند و مطالب سودمندی برای کار معماران و صنعت‌گران دیده می‌شود. هم‌چنین درباره‌ی ترکیب و تجزیه‌ی مربع‌ها و کنارهم‌گذاشتن آن‌ها که ظاهراً از مسائلی بوده است که غالباً مسلمانان در کارهای معماری و خصوصاً در تزیین ساختمان‌ها به آن‌ها برمی‌خورده‌اند مطالبی آمده است.

کتاب نجومی بزرگ ابوالوفا، به نام «المجسطی» یا «کتاب الکامل»، دقیقاً از «مجسطی» بطلمیوس تبعیت می‌کند. کتاب درباره علم مثلثات است. دستورهای مهم مثلثات، چه در مثلثات مسطح و چه در مثلثات کروی ثابت شده و حل مسائل آن را به‌صورت ساده درآورد و قضیه مماس ها را در حل مثلث‌های قائم‌الزاویه کروی به کار برد. یکی از نخستین برهان‌های قضیه‌ی کلی جیب‌ها (سینوس‌ها)، که در حل مثلث‌های غیر قائم‌الزاویه به‌کار برده می‌شد، نیز از ابوالوفا سرچشمه گرفته است. در کارهای مهم بوزجانی در توسعه علم مثلثات، مخصوصاً بهبود جداول مثلثاتی و روش‌های حل مثلثات کروی، تردیدی نیست. در تدوین جدول‌های جدید سینوس، با استفاده از روش درونیابی خودش، سینوس ۳۰ دقیقه را با دقت بیش‌تری محاسبه کرد. به افتخار ابوالوفا، بر دهانه‌ی آتشفشانی در ماه نیز نام او را نهاده‌اند. بیرونی در چند قسمت از آثار خود، از بوزجانی نام برده و نوشته است که ابوالوفا در

محاسبات نجومی خود، میزان انحراف محور زمین را محاسبه و آن را مساوی ۳۵ (دقیقه) و ۲۳ (درجه) دانسته و از محل رصدهای او در شهر بغداد و ناحیه باب‌التبن نیز یاد کرده است. و نیز در جای دیگر نوشته است که بوزجانی به محاسبه‌ی ادوار (روزهای گذشته ازمبدأ یک تاریخ خاص) براساس رصدهای بطلمیوس اقدام کرده است. نکته‌ی بسیار مهم و جالب در زمینه‌ی حساب کاربردی و آثار بوزجانی، رشد و تحول مفهوم عدد است. او با واردکردن اعداد منفی به حساب، کار بزرگ و مهمی انجام داده است. این مهندس نابغه برای محاسبه ذهنی حاصل ضرب دوعدد دورقمی که رقم‌های دهگان آن یکسان باشد، دستوری بیان کرده است.

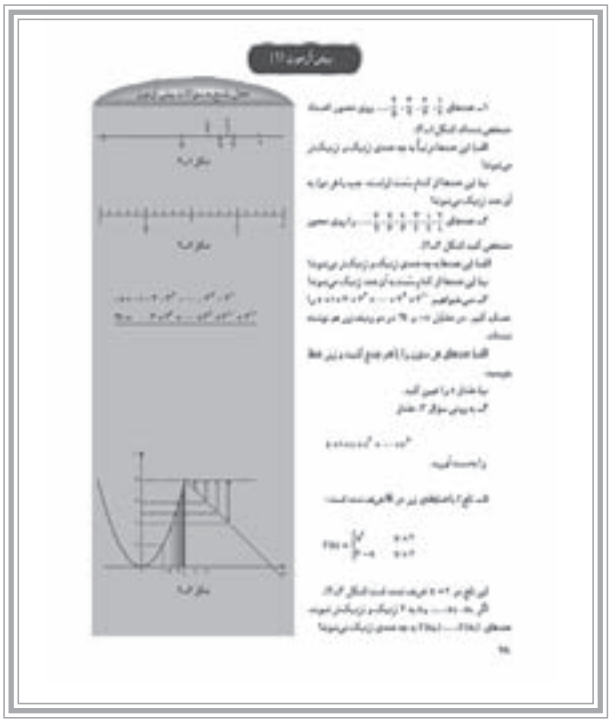
بخش سوم

راهنمای آموزش فصل اول از بخش دوم کتاب دانش‌آموز

شامل:

- آموزش صفحات ۷۸ تا ۹۸
- دانستنی‌های لازم برای مدرسان
- حل مسائل بیش‌تر

آموزش صفحه‌ی ۷۸



این پیش‌آزمون برای اطمینان از اطلاعات دانش‌آموزان برای ورود به بحث حد است.

پیش‌نیازهای مفهوم حد میل‌کردنِ از چپ یا راست یا هر دو، مقادیری عددی به یک عدد مشخص است، که معمولاً این اعداد از یک فرمول یا ضابطه‌ی تابع حاصل می‌شوند. از دانش‌آموزان بخواهید پیش‌آزمون را در کلاس و در زمانی حدود ۳۰ تا ۴۰ دقیقه اجرا کنند.

پاسخ به سؤالات پیش‌آزمون (۱) ساده است چرا که موضوع آن‌ها برای دانش‌آموزان آشناست و پاسخ به سؤالات با کمی تأمل سرراست است.

دانش‌آموزان را آزاد بگذارید تا به سؤالات ۴ و ۵ پاسخ دهند. ممکن است سؤال ۴ را با استفاده از مجموع جملات یک تصاعد هندسی پاسخ بدهند، که اشکالی ندارد. در مورد سؤال ۵ نیز آن‌ها را آزاد بگذارید تا مقادیر x را کم کم به ۲ نزدیک کنند (از دو طرف) و تغییرات f(x) را، با توجه به ضابطه‌ی آن، تعیین کنند.

آموزش صفحه‌ی ۷۹

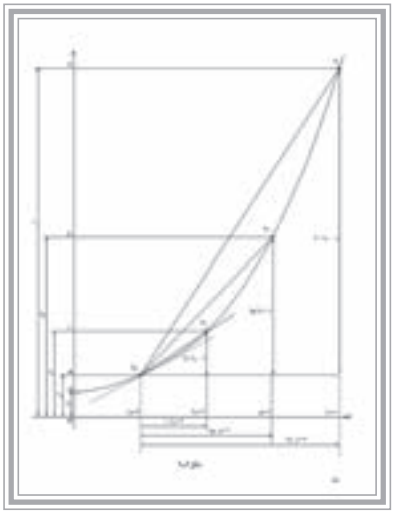
اصولاً مفهوم حد برای اولین بار از مفهوم مشتق شروع شده است. هرچند از نظر آموزشی، برخی آموزشگران ابتدا حد و پیوستگی و بعد مشتق را آموزش می‌دهند. البته این روش برای یادگیرندگان غیرریاضی توصیه نمی‌شود. ما نیز در کتاب دانش‌آموز راه طبیعی ورود به حد، یعنی از طریق مشتق تابع، را انتخاب کردیم. البته نباید انتظار داشته باشید که دانش‌آموزان این مفهوم را در یکی دو صفحه و یا در یکی دو جلسه به‌طور کامل بفهمند. بنابراین، به آن‌ها فرصت دهید که با مثال‌ها، کار در کلاس‌ها و فعالیت‌های متعدد به‌تدریج مفهوم حد را درک کنند.

در ابتدای آموزش صفحه‌ی ۷۹ از دانش‌آموزان سؤال کنید : وقتی سرعت‌سنج ماشین یا موتورسیکلت عدد ۶۰ را نشان می‌دهد این به چه معنی است؟

دانش‌آموزان اظهارنظرهای متفاوتی خواهند داشت، که اکثر آن‌ها دقیق نیست. از آن‌ها بخواهید که صفحه‌ی ۷۹ را

بخوانند و کارهایی که از آن‌ها خواسته شده اجرا کنند.

در نهایت می‌خواهیم دانش‌آموزان به تعریف سرعت متوسط برسند.



آموزش صفحه‌های ۸۰ و ۸۱

واقعیت این است که شکل صفحه‌ی ۸۰ بسیار مفصل! است. سعی کنید ابتدا توجه دانش‌آموزان را به نقاط این شکل جلب کنید و با توجه به تعریف سرعت متوسط، هدف از انتخاب این نقاط را شرح دهید.

سپس از دانش‌آموزان بخواهید که مطالب صفحه‌ی ۸۱ را مطالعه کنند و در صورت نیاز آن‌ها را راهنمایی کنید. در صورت امکان، ابتدا بزرگ‌شده‌ی تدریجی شکل صفحه‌ی ۸۰ را روی تابلو ارائه کنید، سپس مطالب صفحه ی ۸۱ را روی آن توضیح دهید. امید است که با توجه به پیش‌آزمون (۱) و مطالب این چند صفحه، حداقل، مفهوم سرعت متوسط و سرعت لحظه‌ای برای دانش‌آموزان روشن شده باشد.

ایده‌آل خواهد بود اگر تعدادی از دانش‌آموزان پی برده باشند که سرعت لحظه‌ای حد سرعت متوسط است وقتی Δt به صفر میل می‌کند.

آموزش صفحه‌ی ۸۲

همان‌طورکه در صفحه‌ی قبل دیدید، درواقع سرعت لحظه‌ای حد $\frac{\Delta y}{\Delta t}$ است وقتی Δt به صفر میل می‌کند (درواقع مشتق تابع، در صورت وجود، در نقطه‌ی مورد بررسی است) که با توجه به نمودار، شیب خط مماس در آن نقطه است. ملاحظه می‌کنید که مفهوم حد در این‌جا با چه مفاهیم ملموس، کاربردی و شهودی ارتباط برقرار کرده است.

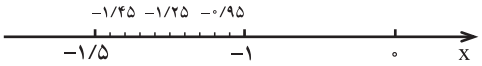
از این‌جا به بعد سعی شده است مفاهیمی چون میل‌کردن به یک عدد حقیقی، از چپ یا راست یا چپ و راست، میل‌کردن به $+\infty$ یا $-\infty$، در قالب مثال‌هایی ارائه شود.

ازجمله، شکل اتوموبیل‌ها که به محل اخذ عوارض نزدیک می‌شوند، بیان میل‌کردن از دو طرف به یک نقطه است!

آموزش صفحه‌ی ۸۳

لازم است برای آموزش این صفحه دانش‌آموزان خودشان به مطالعه‌ی مطالب آن بپردازند و در انتها به اجرای کار در کلاس ۱ـ۲ بپردازند.

در خاتمه‌ی کار این صفحه، مثال‌هایی مشابه جدول‌های ۵ـ۲ تا ۷ـ۲، که از قبل تهیه کرده‌اید، در اختیار آن ها قرار دهید تا بگویند متغیر به چه عددی میل می‌کند. در نهایت از آن‌ها بخواهید که جدول‌های مربوط به $x \to ۲/۵$ و $x \to -۱/۵^{+}$ را رسم کنند (با توجه به محورهای اعداد زیر)

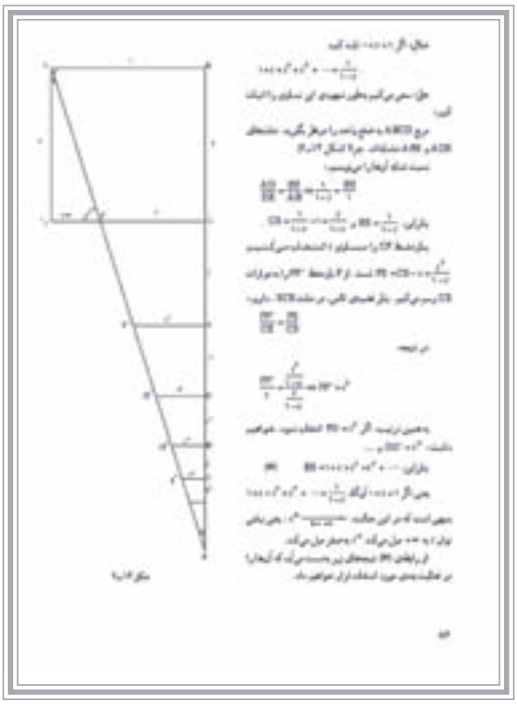


$x \to -۱/۵+$

آموزش صفحه‌های ۸۴ و ۸۵

در این دو صفحه سعی شده است میل‌کردن متغیر و چند تابع مربوط به آن به صفر، با مثال‌هایی آموزش داده شود. این مطلب از این جهت دارای اهمیت است که $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ معادل است با $\lim\limits_{(x-a) \to ۰} (f(x) - b) = ۰$

اطلاعاتی که برای درک مطالب این دو صفحه ضرورت دارد، بسیار کم است (این‌که وقتی وسط دو ضلع مثلث) به هم وصل می‌شوند پاره‌خطی به طول نصف ضلع سوم حاصل می‌شود و درنتیجه محیط شکل بعدی $\frac{۱}{۲}$ محیط شکل قبلی و مساحت آن $\frac{۱}{۴}$ مساحت شکل قبلی می‌شود.



آموزش صفحه‌ی ۸۶

هدف از ارائه‌ی مثال این صفحه پیدا کردن حاصل‌جمع سری‌های ذیل است که در اجرای فعالیت‌ها و تمرین‌های صفحات بعد مورد نیاز هستند.

$$۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۱۶}+\cdots=۲$$

$$۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۹}+\frac{۱}{۲۷}+\cdots=۱/۵$$

با توجه به شکل صفحه‌ی ۸۶ ملاحظه می‌شود که اگر $۰<r<۱$

$$r^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} ۰$$

آن‌چه در این شکل مهم جلوه می‌کند این است که نقطه‌ی S، و درنتیجه طول BS، فقط بستگی به r دارد و با مشخص‌شدن r نقطه‌ی S کاملاً مشخص می‌شود (محل تلاقی BC و AE).

البته در پرسش ۴، دانش‌آموزان از پیش‌آزمون (۱) نیز دریافته‌اند:

$$۱+r+\cdots+r^n=\frac{۱-r^{n+۱}}{۱-r}$$

که با استفاده از این هم می‌توان نتیجه گرفت:

$$۱+r+\cdots+r^n+\cdots=\frac{۱}{۱-r}$$

زیرا، $r^{n+۱} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} ۰$.

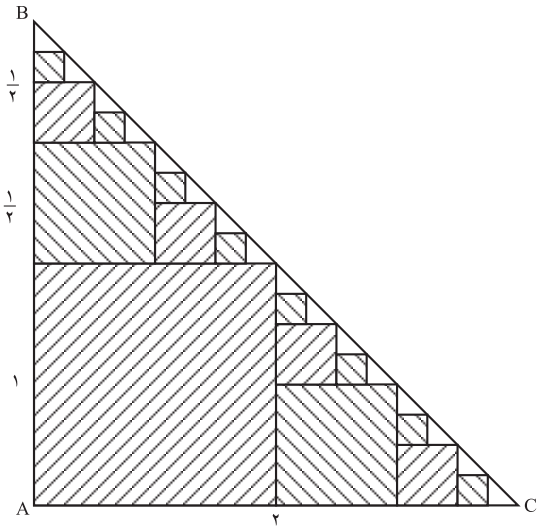
آموزش صفحه‌ی ۸۷

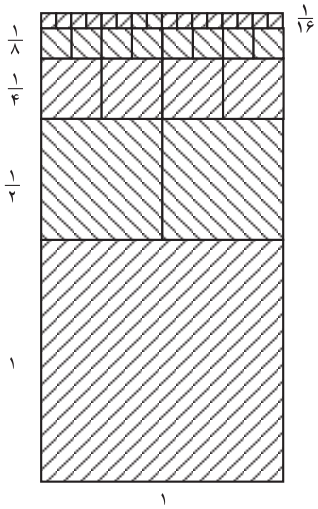
در فعالیت ۲ــ۲ هدف آن است که فرایندی را به دفعات زیاد اجرا کنیم و نتیجه‌ی نهایی را اعلام نماییم. در مثال صفحه‌ی ۸۷، بدیهی است که قسمت‌های بدون سایه مرتباً کوچک و کوچک‌تر شده‌اند و مساحت آن‌ها به صفر میل می‌کند.

بنابراین، بدون استفاده از ریاضیات و سری بالای صفحه‌ی ۸۷، می‌توان گفت که مساحت قسمت‌های سایه‌زده به عدد ۲، یعنی مساحت کل مثلث، میل می‌کند و مساحت کل قسمت‌های

بدون سایه به صفر میل می‌کند.

در مقابل، بعضی از کارها که توسط فعالیت ۲ــ۲ خواسته شده، برای راهنمایی شما اجرا شده است. البته انتظار نمی‌رود که کار، بیش‌تر از این ادامه یابد ولی انتظار می‌رود که ادامه‌ی کار حدس زده شود و نتیجه‌ی نهایی بیان گردد.





آموزش صفحه‌ی ۸۸

تمرین ۱ــ۲ بسیار ساده و مشابه فعالیت ۲ــ۲ است.

توجه داشته باشید هربار مثلث مورد نظر به چهار مثلث کوچک‌تر تقسیم می‌شود، که مساحت هریک $\frac{1}{4}$ مساحت مثلث قبلی و محیط آن نصف محیط مثلث قبلی است، بدیهی است که

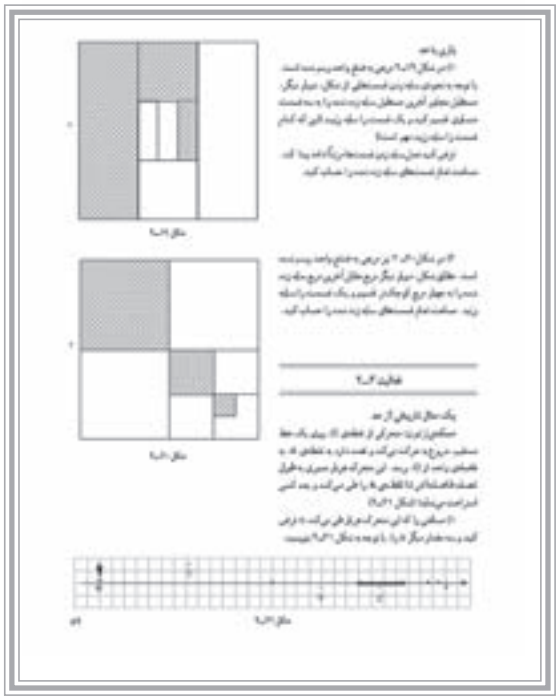
$$s_n \to 0 \quad , \quad x_n \to 0$$

بنابراین، علاوه‌بر سؤالات مطرح‌شده در این صفحه می‌توانید از دانش‌آموزان بخواهید محیط مثلث‌ها را هم با q_0، q_1، ...، q_n نشان دهند ونتیجه بگیرند که

$$q_n \to 0$$

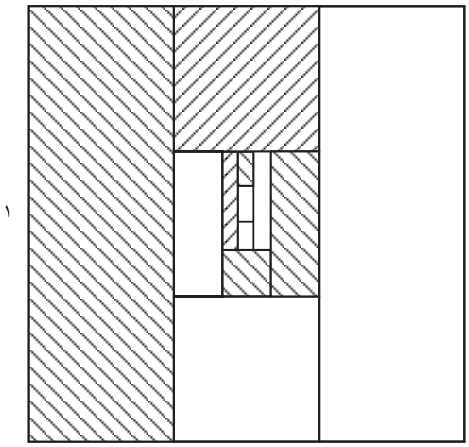
آموزش صفحه‌ی ۸۹

در این صفحه، به بهانه‌ی بازی، چند فرایند روی یک مربع اجرا شده است، تا با استفاده از آن‌ها مفهوم حد به طرق دیگر هم مطرح شود.



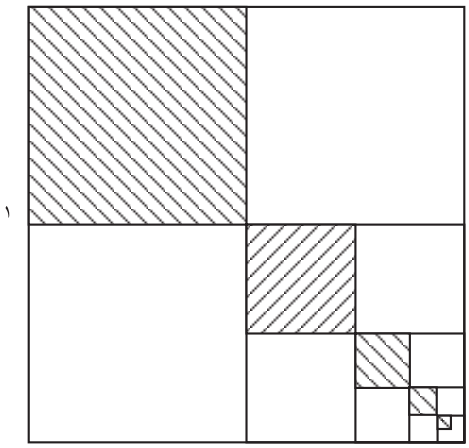
مطابق شکل‌های مقابل، دومرحله‌ی دیگر از سایه‌زدن‌ها اجرا شده است. با کمی تأمل و هوشمندی معلوم می‌شود که، در مورد شکل ۱۹ــ۲،

$$\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۹}+\frac{۱}{۲۷}+\frac{۱}{۸۱}+\cdots=\frac{۳}{۲}-۱=\frac{۱}{۲}$$



و در مورد شکل ۲۰ــ۲، با استفاده از مثال صفحه‌ی ۸۶

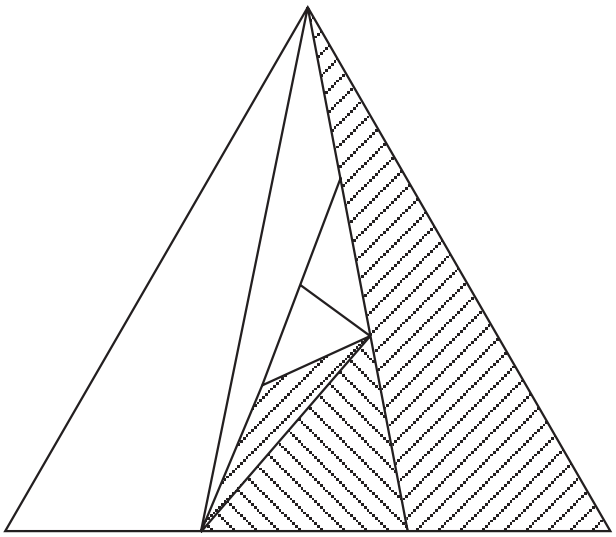
$$\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۱۶}+\cdots=\frac{۱}{۱-\frac{۱}{۴}}-۱=\frac{۱}{۳}$$



در خصوص بازی با حد می‌توان دو مثال دیگر به کتاب اضافه کرد و به‌صورت کار در کلاس ارائه نمود. مثال اول مشابه اولین مثال کتاب و مثال دوم مشابه دومین مثال کتاب است.

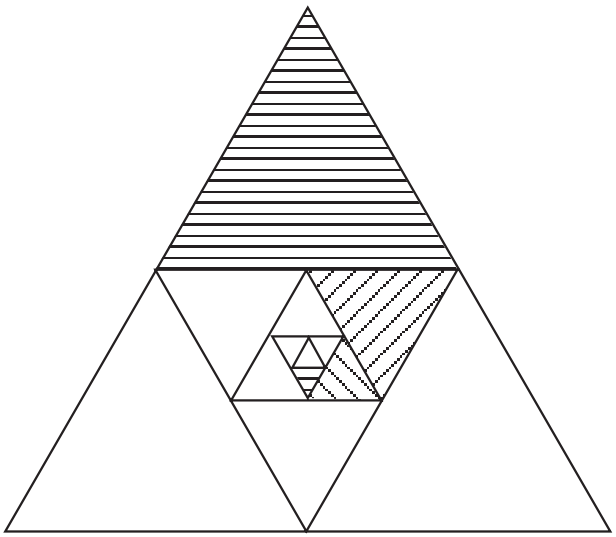
۱ــ مثلثی به ضلع واحد را مطابق شکل تقسیم‌بندی کنید و سایه بزنید. مساحت قسمت سایه‌زده را حساب کنید.

جواب : $\frac{\sqrt{۳}}{۸}$



۲ــ مثلثی به ضلع واحد را مطابق شکل روبه‌رو تقسیم‌بندی کنید و سایه بزنید. مساحت قسمت سایه‌زده را حساب کنید.

جواب : $\frac{\sqrt{۳}}{۱۲}$



یک راه هوشمندانه برای محاسبه‌ی قسمت سایه‌زده‌ی شکل ۱۹ــ۲ و مثال اول این صفحه، آن است که بگوییم از سه قسمت برابرِ شکل، یک قسمت سایه‌زده و یک قسمت بدون سایه است و قسمت دیگر در فرایند سایه‌زدن شرکت دارد. پس از قسمت‌هایی که در فرایند شرکت ندارند $\frac{۱}{۲}$ سایه زده است!

لذا، قسمت سایه زده $\frac{۱}{۲}$ مساحت کل شکل است.

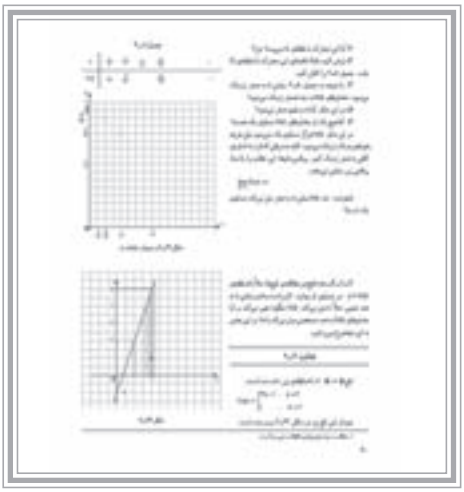
در مورد شکل ۲۰ــ۲ و مثال دوم این صفحه، با همین استدلال، می‌گوییم که از قسمت‌هایی که در فرایند سایه‌زدن شرکت ندارند یک قسمت سایه‌زده و دو قسمت بدون سایه است. پس نسبت به قسمت سایه‌زده به کل $\frac{۱}{۳}$ است. لذا، مساحت قسمت سایه‌زده $\frac{۱}{۳}$ مساحت کل شکل است. در شکل‌های بالا مساحت مثلث $\frac{۱}{۲}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}\times۱=\frac{\sqrt{۳}}{۴}$ است.

در مورد مسئله‌ی زنون، هدف این است که دانش‌آموزان با ویژگی مهم حد یک تابع آشنا شوند. در این مسئله متحرک هرگز به نقطه‌ی A نمی‌رسد ولی هرچه بخواهیم می‌تواند به آن **نزدیک** شود. جدول به‌صورت روبه‌رو توسط دانش‌آموزان تکمیل می‌شود.

x	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۸}$	$\frac{۱}{۱۶}$	$\frac{۱}{۳۲}$	$\frac{۱}{۶۴}$	$\frac{۱}{۱۲۸}$
f(x)	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۳}{۴}$	$\frac{۷}{۸}$	$\frac{۱۵}{۱۶}$	$\frac{۳۱}{۳۲}$	$\frac{۶۳}{۶۴}$	$\frac{۱۲۷}{۱۲۸}$

$$f(x)=۱-x \ , \ \lim_{x\to ۰} f(x)=۱$$

به این ترتیب وارد مبحث حد می‌شوید. البته تمرین‌ها، فعالیت‌ها و مثال‌های قبلی باید تا حدودی دانش‌آموزان را برای درک این مفهوم مهم آماده ساخته باشد. اگر حس می‌کنید که هنوز آماده نیستند مثال‌های مناسب دیگری ارائه کنید.



آموزش صفحه‌ی ۹۱

از این صفحه به بعد لازم است کلیه‌ی دانش‌آموزان ماشین‌حسابی داشته باشند که حداقل، برای چهار عمل اصلی از آن استفاده شود. جدول تکمیل‌شده و پاسخ‌ها را در مقابل ملاحظه می‌کنید.

x	...	۱	۱/۵	۱/۷	۱/۹	۱/۹۹...	۲	...۲/۰۱	۲/۱	۲/۵	۳	...
f(x) = ۳x − ۱	...	۲	۳/۵	۴/۱	۴/۷	۴/۹۷...		...۵/۰۳	۵/۳	۶/۵	۸	

پاسخ:

۲) x به عدد ۲ میل می‌کند.

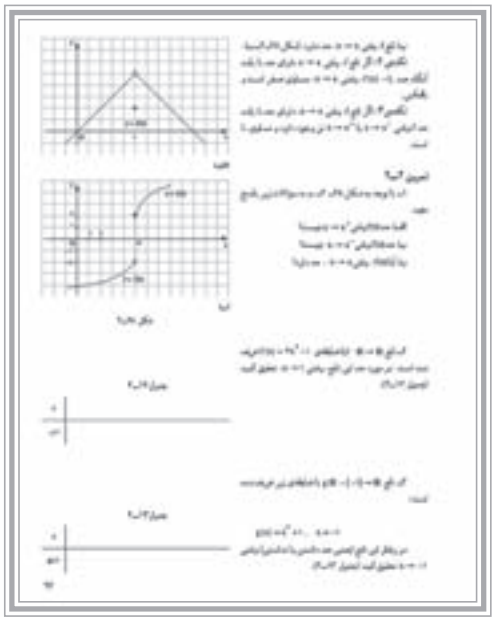
۳) f(x)ها به عدد ۵ نزدیک می‌شوند.

۴) وقتی x به ۲ نزدیک می‌شود f(x) به ۵ نزدیک می‌شود.

در مورد فعالیت ۵ـ۲ توجه کنید که تابع f در $x = ۲$ تعریف نشده است ولی می‌توان راجع به این‌که وقتی x به ۲ نزدیک می‌شود f(x)ها چگونه تغییر می‌کنند، صحبت کرد. جدول تکمیل‌شده را در مقابل ملاحظه می‌کنید.

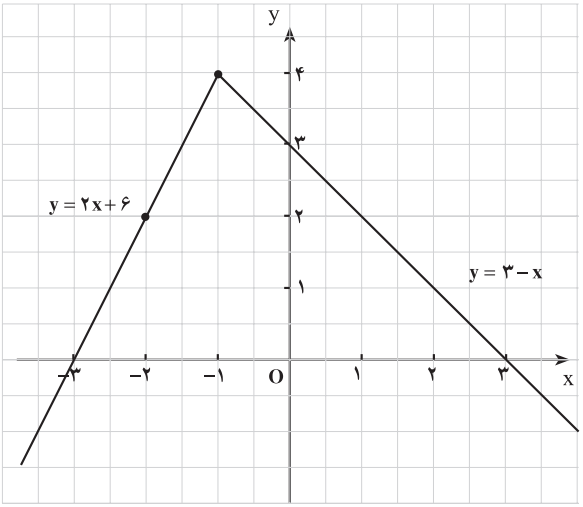
x	...	۱	۱/۵	۱/۷	۱/۹	۱/۹۹...	۲	...۲/۰۱	۲/۱	۲/۵	۳	...
f(x)		۱	۱/۲۵	۱/۸۹	۲/۶۱	۲/۹۶...		...۲/۹۹	۲/۹	۲/۵	۲	

در صفحه‌ی ۹۲، ابتدا کار در کلاس توسط دانش‌آموزان اجرا می‌شود (در زمانی حدود ۱۰ دقیقه). برای راهنمایی شما این کار در کلاس به‌طور کامل اجرا شده است.



۱ــ نمودار رسم شده است (دو نیم‌خط بدون مبدأ!)

۲ــ $\lim_{x\to -۱} f(x) = ۴$



۳ــ جدول در مقابل تنظیم شده است (البته هر دانش‌آموزی به میل خود xها را به ۱- میل می‌دهد و نظیر آن ها f(x) را می‌نویسد).

x	...	−۲	−۱/۷	−۱/۱۰۰۰	−۱۰۰۰	−۰/۹	−۰/۸	۰	...
f(x)	...	۲	۲/۶	۳/۸		۳/۹	۳/۸	۳	...

۴ــ نمودار و جدول مؤید آن است که : $\lim_{x\to -۱} f(x) = ۴$

نکته‌هایی که در پایین صفحه‌ی ۹۲ و بالای صفحه‌ی ۹۳ وجود دارد بسیار با اهمیت‌اند و در صورت لزوم با شکل‌های بیش‌تری آن‌ها را توضیح دهید.

تمرین ۲ــ۲ نیز به راحتی توسط دانش‌آموزان اجرا می‌شود (در زمانی حدود ۱۵ دقیقه).

سه سؤال اول این تمرین در روبه رو پاسخ داده شده است.

حل بقیه‌ی تمرین ساده است.

۱ــ الف) $\lim_{x\to a^+} f(x) = ۲$

ب) $\lim_{x\to a^-} f(x) = -۲$

پ) خیر، زیرا f(x)ها به یک عدد میل نمی‌کنند.

توجه کنید که این سؤال نشان می دهد تا چه مقدار دانش‌آموزان به مفهوم حد پی برده‌اند.

۲ــ جدول نشان می‌دهد که $\lim_{x\to ۱}(۳x^۲ - ۱) = ۲$

x	۰	۰/۳	۰/۹	۰/۹۹۰۰۰	۱۰۰۰	۱/۰۱	۱/۱	۱/۷	۲	...
f(x)	−۱	−۰/۷۳	۱/۴۳	۱/۹۴۰۳		۲/۰۶۰۳	۲/۶۳		۱۱	

۳ــ جدول نشان می‌دهد که $\lim_{x\to -۱}(x^۳ + ۱) = ۰$

x	...	−۱/۵	−۱/۳	−۱/۰۱۰۰۰	−۱۰۰۰	−۰/۹۹	−۰/۷	−۰/۵	...
f(x)	...	−۲/۳۷۵	−۱/۱۹۷	−۰/۰۳۰۳۰۱۰۰۰		۰۰۰۰/۰۲۹۷۰۱	۰/۶۵۷	۰/۸۷۵	...