آموزش صفحه‌ی ۹۵

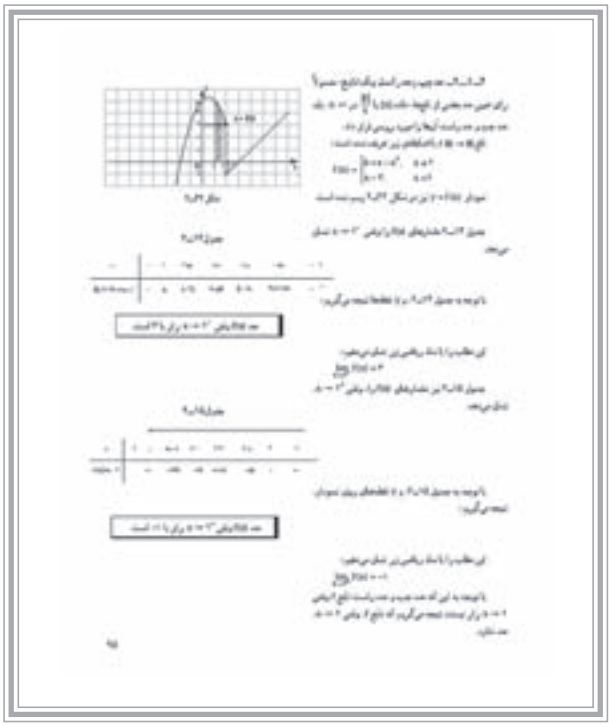
ابتدا از دانش‌آموزان بخواهید که نمودار توابع زیر را رسم کنند :

الف) $f(x)=[x]\ ,\ x\in(-1,1)$

ب) $f(x)=\dfrac{|x|}{x}\ ,\ x\in(-1,1)$

سپس از آن‌ها در مورد حد $f(x)$ ، وقتی $x\to 0^-$ یا $x\to 0^+$ ، سؤال کنید. با این کار به این مطلب پی‌می‌برند که برای برخی توابع، به ویژه آن‌هایی که در نقطه‌ی موردنظر دارای دو ضابطه‌اند، باید حد چپ و حد راست تابع را حساب کنند.

از دانش آموزان بخواهید که صفحه‌ی ۹۵ را مطالعه کنند و در مورد حد چپ و راست یک تابع در یک نقطه، بینش بیش‌تری پیدا کنند.



آموزش صفحه‌های ۹۶و۹۷

انجام فعالیت ۶ـ۲ سر راست است. بدیهی است که :

۱ـ $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-1$

۲ـ برای $x>0$ ، $f(x)=1$

۳ـ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1$

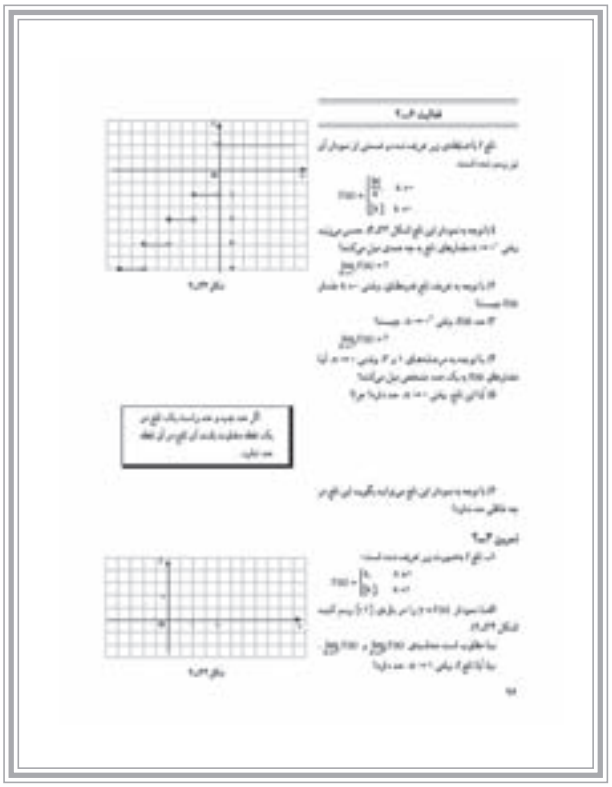
۴ ـ $f(x)$ ، وقتی $x\to 0$ ، به یک عدد مشخص میل نمی‌کند.

۵ـ وقتی $x\to 0$ تابع حد ندارد.

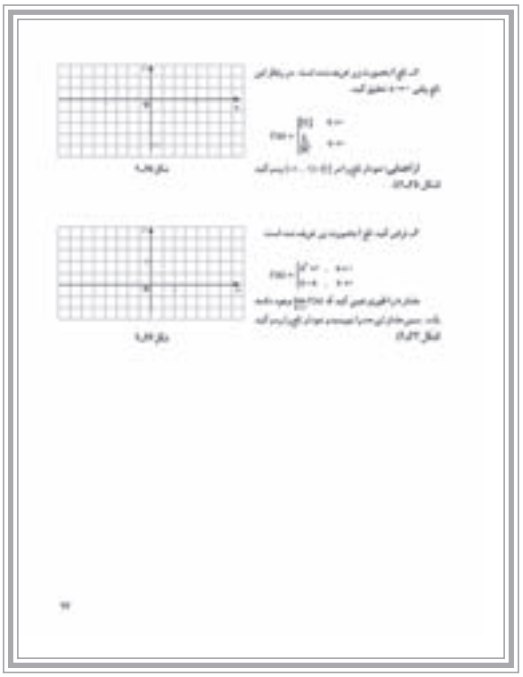
۶ـ تابع در نقاط مجموعه زیر حد ندارد :

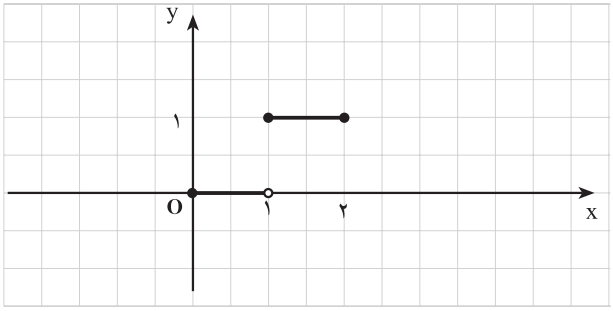
$\{x\in\mathbb{Z} : x\le 1\}$

یعنی در نقاط ۱، ۰، ۱−، ۲−، ... .



سؤال‌های تمرین ۳ــ۲ در زیر پاسخ داده شده است.

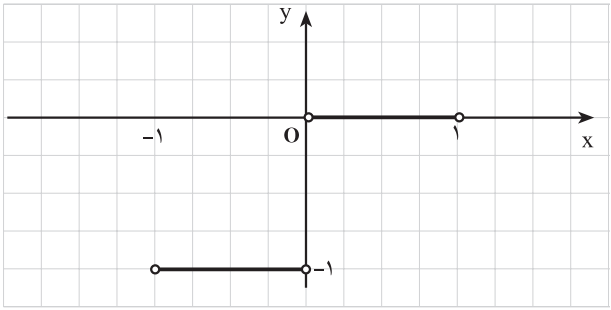




۱ــ الف) نمودار تابع در مقابل رسم شده است.

ب) با توجه به شکل : $\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)=۱$ و $\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)=۰$

پ) تابع f، وقتی $x\to ۱$ ، حد ندارد.

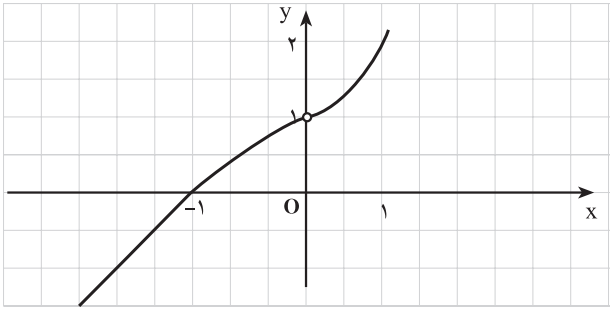


۲ــ در این تمرین داریم :

$$f(x)=\frac{x}{-x}=-۱,\ x<۰$$

نمودار $y=f(x)$ در مقابل رسم شده است.

با توجه به نمودار تابع در $(-۱,۱)-\{۰\}$ تابع، وقتی $x\to ۰$ ، حد ندارد.



۳ــ واضح است که $\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)=۱$ و $\lim\limits_{x\to ۰^-} f(x)=-a$

برای وجود حد $f(x)$، وقتی $x\to ۰$ ، باید داشته باشیم $-a=۱$ یا $a=-۱$. لذا، $\lim\limits_{x\to ۰} f(x)=۱$ نمودار تابع در مقابل رسم شده است.

آموزش صفحه‌ی ۹۸

با توجه به تمرین‌ها، کار در کلاس‌ها و فعالیت‌های اجرا شده در این فصل، آزمون پایانی (۱) نباید مشکل باشد و دانش‌آموزان با تأمل و دقت کافی می‌توانند به سؤالات آن پاسخ دهند. مع‌هذا، جواب پرسش‌های این آزمون را در زیر ملاحظه می‌کنید.

این آزمون در کلاس و در حدود ۳۰ دقیقه اجرا می‌شود.

۱ــ الف) مساحت مربع $A'B'C'D'$ نصف مساحت مربع ABCD است. لذا،

$$\text{مساحت مربع } A'B'C'D' = \frac{۴\times ۴}{۲} = ۸ \text{ سانتی مترمربع}$$

ب) با توجه به خط چین‌هایی که وسط ضلع‌های مقابل مربع را به هم وصل کرده‌اند، مساحت مثلث $A'BB'$ $\frac{۱}{۸}$ مساحت مربع ABCD و مساوی ۲ سانتی‌متر مربع است.

۲ــ مساحت مثلث، با سایه آبی رنگ، $\frac{۱}{۸}\times ۸ = ۱$ سانتی‌متر مربع است. مجموع زیر، مساحت قسمت‌های سایه‌زده شده در شکل ۳۷ــ۲ را به دست می‌دهد :

$$۲+۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۸}+\cdots = ۲+۲ = ۴ \text{ سانتی‌متر مربع}$$

۳ــ با توجه به این‌که :

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x) = a-۱ \ , \ \lim_{x\to ۱^-} f(x) = ۱$$

باید داشته باشیم :

$$a-۱ = ۱ \Rightarrow \boxed{a = ۲}$$

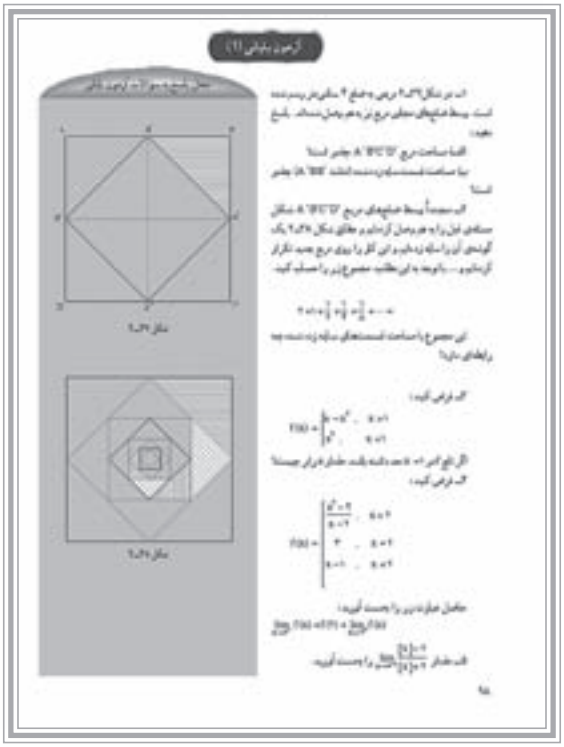
۴ــ داریم :

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x) = ۱$$

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x) = \lim_{x\to ۲^+} \frac{\cancel{(x-۲)}(x+۲)}{\cancel{(x-۲)}} = ۴$$

و در نتیجه :

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x) + f(۲) + \lim_{x\to ۲^+} f(x) = ۱+۳+۴ = ۸$$



۵ــ با توجه به این‌که $x\in[۲,۳)$ ، $[x]=۲$ و داریم :

$$\lim_{x\to ۲^+} \frac{[x]-۲}{[x]+۲} = \frac{۲-۲}{۲+۲} = ۰$$

توجه به تعریف تابع جزء صحیح در این مسئله حایز اهمیت است.

حل مسائل بیش‌تر

۱ــ با توجه به شکل زیر حاصل حدهای زیر را بیابید.

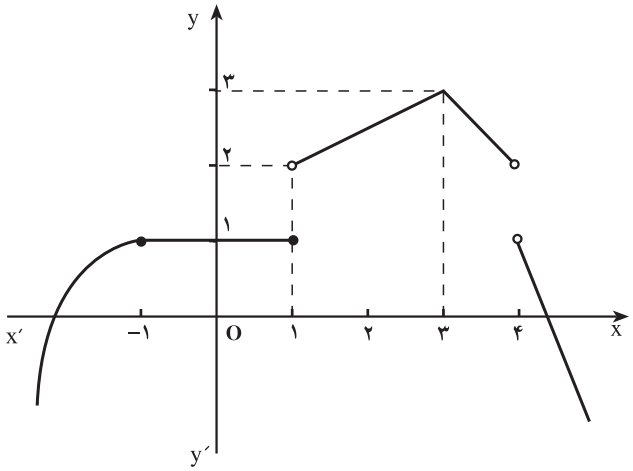
الف) $\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)$

ب) $\lim\limits_{x\to -۱^-} f(x)$

ج) $\lim\limits_{x\to ۴^+} f(x)$

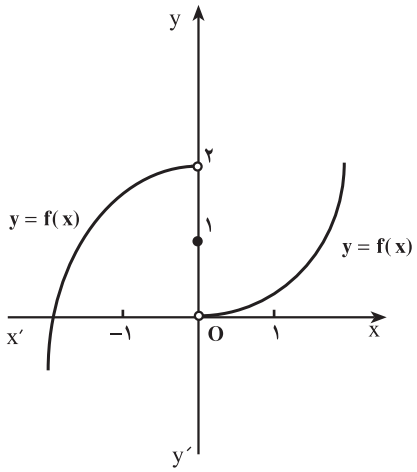
د) $\lim\limits_{x\to ۴^-} f(x)$

هـ) $\dfrac{\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x) + \lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)}{f(۰)}$



۲ــ با توجه به شکل زیر، مقدار a را از رابطه‌ی زیر به دست آورید.

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x) + \lim_{x\to ۰^-} f(x) = ۳af(۰)$$



حل

حل: الف) ۲

ب) ۱

ج) ۱

د) ۲

هـ) $\dfrac{۱+۱}{۱} = ۲$

حل:

$$\lim_{x\to ۰^-} f(x) = ۲$$

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x) = ۰ \ , \ f(۰) = ۱$$

$$۰ + ۲ = ۳a \times ۱$$

$$a = \frac{۲}{۳}$$

۳ــ حدود زیر را بیابید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۰^-} \frac{[x]}{x+۱}$

ب) $\lim\limits_{x\to ۲^+} ۲+|۳x-۳|$

ج) $\lim\limits_{x\to -۲} \frac{x+\sqrt{۲x+۸}}{x+۲}$

د) $\lim\limits_{x\to ۱^-} (۱-x+[x]-[۲x])$

هـ) $\lim\limits_{x\to ۱^+} \frac{[x^۲]-[x]^۲}{x^۲-۱}$

حل:

الف) $\lim\limits_{x\to ۰^-} \frac{[x]}{x+۱} = -۱$

ب) $۲+|۳\times ۲-۳| = ۵$

ج) $\lim\limits_{x\to -۲} \frac{(x+\sqrt{۲x+۸})(x-\sqrt{۲x+۸})}{(x+۲)(x-\sqrt{۲x+۸})}$

$= \lim\limits_{x\to -۲} \frac{x^۲-۲x-۸}{(x+۲)(x-\sqrt{۲x+۸})}$

$= \lim\limits_{x\to -۲} \frac{(x+۲)(x-۴)}{(x+۲)(x-\sqrt{۲x+۸})}$

$= \lim\limits_{x\to -۲} \frac{x-۴}{x-\sqrt{۲x+۸}} = \frac{-۶}{-۴} = \frac{۳}{۲}$

د) $\lim\limits_{x\to ۱^-} (۱-x+[x]-[۲x])$

$=۱-۱+۰-۱=-۱$

هـ) $x\to ۱^+ \Rightarrow [x]=۱$

$\lim\limits_{x\to ۱^+} \frac{[x^۲]-[x]^۲}{x^۲-۱} = \frac{۰}{x^۲-۱} = ۰$

۴ــ مقدار a چه قدر باشد تا تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} \sin|x| & x>-\frac{\pi}{۲} \\ [x]+a & x<-\frac{\pi}{۲} \end{cases}$ در نقطه‌ی $x=-\frac{\pi}{۲}$ دارای حد باشد؟

حل:

$\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{۲}^+} \sin|x| = \lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{۲}^+} -\sin x$

$= -\sin(-\frac{\pi}{۲}) = ۱$

$\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{۲}^-} [x]+a = -۲+a$

$\Rightarrow ۱=-۲+a \Rightarrow a=۳$

۵ــ مقدار a را چنان پیدا کنید که تابع با ضابطه‌ی

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{a-x}{a+x} & x\geq ۱\\ x+۱ & x<۱\end{cases}$$

در $x=۱$ حد داشته باشد.

حل:

$$\lim_{x\to ۱^+} g(x)=\frac{a-۱}{a+۱}$$

$$\lim_{x\to ۱^-} g(x)=۲$$

باید $۲=\dfrac{a-۱}{a+۱}$ پس $a=-۳$

۶ــ حد زیر را بیابید.

$$\lim_{x\to ۲^+}\frac{x+۴}{[-x]-۳}$$

حل:

$x\to ۲^+$

$x>۲\Rightarrow -x<-۲$

$-۳<-x<-۲\Rightarrow [-x]=-۳$

$$\lim_{x\to ۲^+}\frac{x+۴}{[-x]-۳}=\frac{۶}{-۶}=-۱$$

بخش سوم

راهنمای آموزش فصل دوم از بخش دوم کتاب دانش‌آموز

شامل:

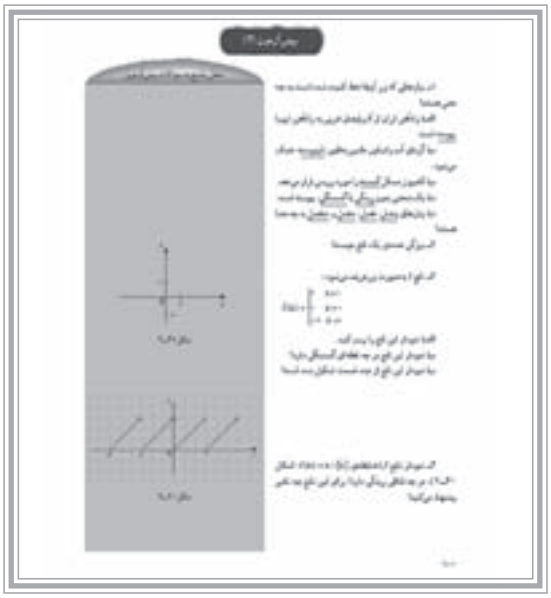
- آموزش صفحات ۹۹ تا ۱۰۸
- حل مسائل بیش‌تر

آموزش صفحه‌ی ۱۰۰

هدف این صفحه آماده‌سازی برای آموزش پیوستگی است. بدیهی است که بهترین روش، استفاده از اطلاعات دانش‌آموزان است. دو واژه‌ی مهم و تأثیرگذار «وصل» و «فصل»، که در این بیت مولوی نیز آمده است :

ما برای وصل‌کردن آمدیم نی برای فصل کردن آمدیم

به ترتیب، مترادف با پیوستن و گسستن‌اند. ضمناً، واژه‌های گسسته و منفصل نیز به معنی ناپیوسته هستند. اجرای این پیش آزمون در کلاس حدود ۳۰ دقیقه طول می‌کشد.



آموزش صفحه‌های ۱۰۱ و ۱۰۲

شروع آموزش پیوستگی شهودی است و از معنای عادی واژه‌های پیوسته و گسسته (ناپیوسته) استفاده می‌شود. هرچند پیوستگی ارتباط بسیار نزدیکی با حد تابع، در هر نقطه از دامنه تعریفش، دارد. پیوستگی تابع f در نقطه‌ی a، که $a \in D_f$ ، با تساوی زیر بیان می‌شود :

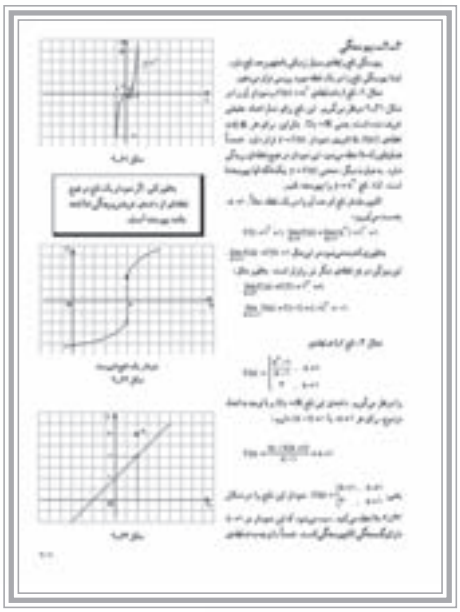
$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

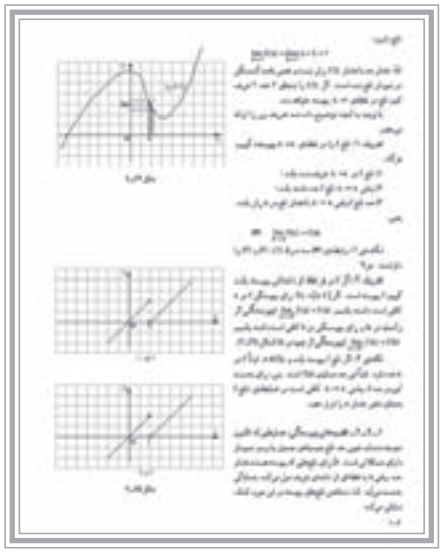
این رابطه سه مطلب مهم را بیان می‌کند :

اولاً، تابع f در a تعریف شده است و مقدار آن در این نقطه f(a) است.

ثانیاً، تابع f، وقتی $x \to a$ ، حد دارد. و ثالثاً این حد با مقدار تابع در a برابر است.

در صورتی که f در a تعریف نشده باشد یا f در a حد نداشته باشد یا حد f وقتی $x \to a$ ، با f(a) برابر نباشد، f در a پیوسته نیست (یا f در a ناپیوسته است). این نکات در اثبات ناپیوستگی f در a به کار می‌روند.





آموزش صفحه‌های ۱۰۳ و ۱۰۴

همان‌طور که در ابتدای این فصل ذکر شد، منظور از آموزش کتاب ریاضی ۳ (پودمانی) ارائه‌ی ابزارهای لازم ریاضی به دانش‌آموزان است. همان‌طور که حدود ۹۰ درصد مردم از ماشین استفاده می‌کنند و با آن رانندگی می‌کنند، بدون آن‌که اطلاعی از چگونگی کار موتور، کاربراتور، دینام و ... داشته باشند.

لذا، فقط منظور استفاده از قضیه‌های حد و پیوستگی است نه اطلاع از چگونگی اثبات یا برقراری این قضیه‌ها، با توجه به ارتباط نزدیک حد و پیوستگی، فقط قضیه‌های پیوستگی را، که برای حد نیز برقرارند، عنوان کرده‌ایم تا، ضمن صرفه‌جویی در بیان مطالب، از تکرار قضیه‌های مشابه (و بدون اثبات) نیز پرهیز شده باشد.

نکته‌ی مهم در پیوستگی آن است که :

اگر $a \in D_f$ و f در a پیوسته باشد آن گاه

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

یعنی برای تعیین مقدار سمت چپ کافی است مقدار تابع f را در a حساب کنید یا در ضابطه‌ی تعریف f به جای متغیر مقدار a را قرار دهید.

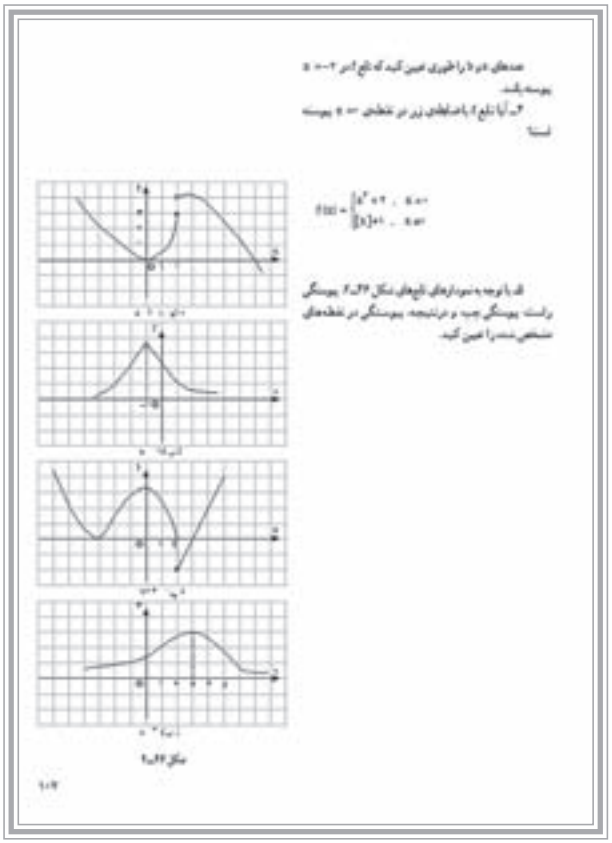
از دانش‌آموزان بخواهید که صفحات ۱۰۳ و ۱۰۴ را مطالعه کنند و آن‌ها نیز مثال‌هایی مرتبط با هر قضیه، ارائه کنند. شما نیز می‌توانید مثال‌هایی برای هر قضیه عنوان کنید تا کاربرد قضیه‌ها برای دانش‌آموزان بیش‌تر روشن شود.

هدف عمده این است که وقتی دانش‌آموز تشخیص داد یک تابع پیوسته است برای تعیین حد آن در یک نقطه، x نقطه را در ضابطه‌ی تابع قرار دهد تا حد موردنظرش به دست آید.

آموزش صفحه‌ی ۱۰۵

از دانش‌آموزان بخواهید که قسمت ۲ــ۲ــ۲ را مطالعه کنند و حل مثال‌های عنوان شده را به دقت بخوانند، زیرا عمده مسائلی که راجع به پیوستگی عنوان می‌شود از همین نمونه‌ها هستند. توجه دانش‌آموزان را به این نکته جلب کنید که دیگر از نمودار استفاده نمی‌شود و فقط از ویژگی‌های حد و پیوستگی برای پاسخ‌دادن به سؤالات کمک گرفته می‌شود.

در صورتی که متوجه شدید دانش آموزان هنوز به طور کامل در فهم حل این دسته از مسائل مشکل دارند با مثال‌های دیگری که طرح می‌کنید به فهم بیش‌تر مطلب کمک کنید.



آموزش صفحه‌های ۱۰۶ و ۱۰۷

در صورتی که دانش‌آموزان مطالب قسمت ۲ــ۲ــ۲ را خوب یاد گرفته باشند در پاسخ‌گویی به سؤالات تمرین ۳ــ۲ مشکلی ندارند. جواب سؤالات این تمرین را به‌طور خلاصه ملاحظه می‌کنید.

۱ــ فقط تابع قسمت (ت) در نقطه‌ی مشخص شده پیوسته نیست.

۲ــ $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = a-2 \ , \ \lim\limits_{x\to 1^-} f(1) = 3$

باید

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1)$$

پس باید $a-2 = 3 = f(1)$

یعنی $f(1) = 3 \ , \ a = 5$

۳ــ داریم : $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = 4+2a$

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = -6-2b$$

باید داشته باشیم

$$\left.\begin{array}{l} 4+2a = 4 \\ -6-2b = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a = 0 \\ b = -5 \end{array}$$

۴ــ خیر، چون $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 2 \neq f(0) = 1$

۵ــ برای تابع با نمودار (الف) در $x = 2$ پیوستگی چپ وجود دارد ولی پیوستگی راست وجود ندارد. لذا، تابع در $x = 2$ پیوسته نیست.

برای نمودار (ب)، تابع در $x = -1$ تعریف نشده است. لذا، تابع در $x = -1$ پیوسته نیست. البته تابع حد چپ و راست برابر دارد!

برای نمودار (پ) پیوستگی راست در $x = 2$ وجود دارد ولی پیوستگی چپ در این نقطه وجود ندارد. تابع در $x = 2$ پیوسته نیست.

در نمودار (ت) تابع در تمام نقاط پیوسته است و لذا، پیوستگی چپ و راست در هر نقطه دارد.

آموزش صفحه‌ی ۱۰۸

این آزمون را در کلاس اجرا کنید. زمان لازم برای پاسخ‌گویی به سؤالات این آزمون حدود ۲۵ دقیقه است. پاسخ سؤالات را در زیر ملاحظه می‌کنید.

۱ــ $\mathbb{R}$

۲ــ در نقاط $x = -۲$ و $x = ۱$

۳ــ در نقاط صحیح

۴ــ الف) ریال $p(۴/۷) = ۵۲۰۰۰$

ب) در نقاط $x = ۳$ و $x = ۵$

۵ــ اگر $f(۲) = -۱$ آن‌گاه تابع f از چپ در $x = ۲$ پیوسته است.

حل مسائل بیش‌تر

۱ــ نشان دهید تابع زیر روی بازه‌ی بسته‌ی $[-1,1]$ پیوسته است.

$$f(t)=\begin{cases}\sqrt[3]{t+1} & t\le -1\\ \sqrt{1-t^2} & -1<t<1\\ \sqrt[3]{t-1} & t\ge 1\end{cases}$$

۲ــ به ازای چه مقداری از k و c تابع f با ضابطه‌ی $f(x)$ روی دامنه‌ی آن پیوسته است؟

$$f(x)=\begin{cases}x+2c & x<-2\\ 3cx+k & -2\le x\le 1\\ 3x-2k & 1<x\end{cases}$$

۳ــ تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\dfrac{4x+3}{1-x^2}$ در چه مجموعه‌ای پیوسته است؟

۴ــ بازه‌ی پیوستگی $f(x)=\sqrt{x|x+1|}$ کدام است؟

حل

حل: واضح است که f روی بازه‌ی باز $(-1,1)$ پیوسته است. چون

$$\lim_{t\to -1^+} f(t)=\lim_{t\to -1^+}\sqrt{1-t^2}=0=f(-1)$$

$$\lim_{t\to 1^-} f(t)=\lim_{t\to 1^-}\sqrt{1-t^2}=0=f(1)$$

بنابراین f روی بازه‌ی بسته $[-1,1]$ پیوسته است.

حل: به ازای تمام مقادیر c و k تابع f ، به جز احتمالاً در $x=-2$ و $x=1$ پیوسته است. اگر f در $x=-2$ پیوسته باشد آن گاه

$$\lim_{x\to -2^-} f(x)=\lim_{x\to -2^+} f(x)$$

$$\lim_{x\to -2^-}(x+2c)=\lim_{x\to -2^+}(3cx+k)$$

$$-2+2c=-6c+k \qquad (1)$$

اگر f در $x=1$ پیوسته باشد آن‌گاه

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)$$

$$\lim_{x\to 1^-}(3cx+k)=\lim_{x\to 1^+}(3x-2k)$$

$$\Rightarrow 3c+k=3-2k \qquad (2)$$

با حل دستگاه دو معادله دو مجهولی زیر داریم :

$$\begin{cases}-8c+k=-2\\ 3c+3k=3\end{cases}$$

$$c=\frac{1}{3} \quad , \quad k=\frac{2}{3}$$

حل: صفرهای مخرج کسر را حساب می‌کنیم.

$1-x^2=0\Rightarrow x=\pm 1$ م.ج $=\mathbb{R}-\{1,-1\}$

حل:

$x|x+1|\ge 0$

$\Rightarrow x\ge 0$

م.ج $=[0,+\infty)$

۵ــ تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=5\sin\left(\frac{1}{x-2}\right)$ در چه مجموعه‌ای پیوسته است؟

حل: می‌دانیم $D_f=\mathbb{R}-\{2\}$ و تابع سینوس یک تابع پیوسته است. پس جواب مجموعه‌ی $\mathbb{R}-\{2\}$ است.

۶ــ تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt[3]{\frac{x^2}{4-x^2}}$ در چه مجموعه‌ای پیوسته است؟

حل: باید $4-x^2\neq 0$ یا $x\neq \pm 2$ بنابراین تابع f در $\mathbb{R}-\{2,-2\}$ پیوسته است.

۷ــ اگر تابع f با ضابطه‌ی

$$f(x)=\begin{cases}[x]+a+1 & x<0\\ 4 & x=0\\ |x-1|+b+1 & x>0\end{cases}$$

پیوسته باشد مقدار $a+b$ کدام است؟

حل: تنها نقطه‌ای که پیوستگی تابع f در آن نقطه بایستی بررسی شود نقطه‌ی $x=0$ است.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}[x]+a+1$$
$$=-1+a+1$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}|x-1|+b+1$$
$$=\lim_{x\to 0^+}-(x-1)+b+1$$
$$=b+2$$
$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$$
$$a=b+2=4$$
$$a=4\ ,\ b=2\Rightarrow a+b=6$$

۸ــ تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{\sqrt{x-2}}{x-3}$ در کدام بازه پیوسته است؟

حل: توابع گویا روی دامنه‌ی خود پیوسته هستند.

$$x-3=0\Rightarrow x=3$$
$$x-2\geq 0\Rightarrow x\geq 2$$

$$D_f=[2,+\infty)-\{3\}=[2,3)\cup(3,+\infty)$$

بخش سوم

راهنمای آموزش فصل سوم از بخش دوم کتاب دانش‌آموز

شامل :

- آموزش صفحات ۱۱۰ تا ۱۲۸
- حل تمرین‌های تکمیلی بخش دوم کتاب دانش‌آموز
- حل مسائل بیش‌تر

آموزش صفحه‌ی ۱۱۰

با توجه به این‌که در این فصل حد در بی‌نهایت و حد بی‌نهایت موردنظر است، پیش‌آزمون (۳) برای آموزش مفاهیم مربوط مورد نیاز است و مطالبی را مورد سؤال قرار می‌دهد که دانش‌آموزان می‌توانند جواب بدهند و آموزش مطالب بعدی را آسان می‌کند.

۱ــ هم‌چنان‌که n بزرگ می‌شود اعداد $۲+\frac{۱}{n}$ از راست به عدد ۲ نزدیک می‌شوند و $f(۲+\frac{۱}{n}) = n$ بزرگ می‌شود.

۲ــ هم‌چنان‌که n بزرگ می‌شود اعداد $۲-\frac{۱}{n}$ از چپ به ۲ نزدیک می‌شوند ولی $f(۲-\frac{۱}{n}) = -n$ مرتباً منفی‌تر، منفی ولی بزرگ (از نظر قدرمطلق) می‌شوند. فعلاً انتظار نداریم که دانش‌آموزان نتیجه‌گیری کنند ولی شکل نشان می‌دهد که وقتی $x \to ۲$ تابع حد ندارد.

۳ــ برای این سؤال وقتی n بزرگ می‌شود $۲+\frac{۱}{n}$ از راست و $۲-\frac{۱}{n}$ از چپ به ۲ نزدیک می‌شوند ولی در هر دو حالت $f(۲\pm\frac{۱}{n}) = n^۲$ که با افزایش n، به سرعت بزرگ می‌شوند. شکل هم نشان می‌دهد که مقدار تابع هر چه بخواهیم بزرگ می‌شود.

۴ــ در مورد تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \sqrt{x}$ داریم:

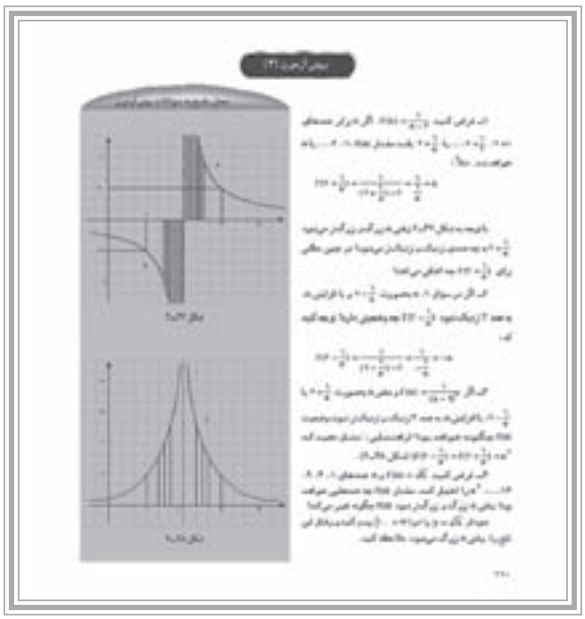
$$f(n^۲) = \sqrt{n^۲} = n$$

که n عددی طبیعی است، واضح است که با بزرگ‌شدن x، هم x و هم f(x) بزرگ و بزرگ‌تر می شوند. از دانش‌آموزان بخواهید که در دفتر خودشان شکل این تابع را نیز رسم کنند و نتیجه را ملاحظه نمایند.

آموزش صفحه‌ی ۱۱۱

در این صفحه تابعی را بررسی می‌کنیم که وقتی $x \to ۰$ دارای حد $+\infty$ است.

از دانش‌آموزان، به طور فردی یا گروهی، بخواهید که فعالیت ۷ ــ۲ را اجرا کنند. بهتر است ابتدا مثال ستون دوم را



برای آن‌ها شرح دهید. در واقع

$$h(r) = \frac{۳۶}{r^۲}$$

و از شکل ۴۹ـ۲ ملاحظه می شود که وقتی r بزرگ می‌شود h کوچک می‌شود. به عکس هر چه r را کوچک کنیم h بزرگ می‌شود. مثلاً، اگر $r = \frac{۱}{۲}$ آن‌گاه $h = ۱۴۴$ و اگر $r = \frac{۱}{۱۰}$ آن‌گاه $h = ۳۶۰۰$.

لذا، زمینه‌ای برای بررسی تابع $f(x) = \frac{۱}{x^۲}$ وقتی $x \to ۰$ ایجاد می‌شود.

انتظار می‌رود که با طرح مثال‌هایی مشابه دانش‌آموزان به این نتیجه برسند که

$$\lim_{x \to a} \frac{۱}{(x-a)^۲} = +\infty$$

توجه دانش‌آموزان را به این مطلب جلب کنید که $x^۲ \to ۰$ $x \to ۰$ معادل $(x-a)^۲ \to ۰$ است. $x \to a$

آموزش صفحه‌ی ۱۱۲

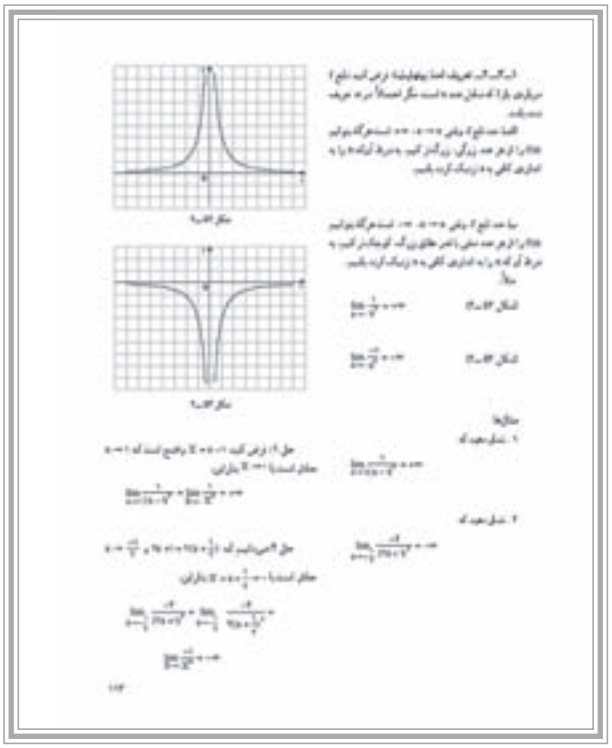
در این صفحه هدف آن است که نشان دهیم تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{۱}{x}$، وقتی $x \to ۰$، حد ندارد.

از دانش‌آموزان بخواهید که فعالیت ۸ـ۲ را، به طور فردی یا گروهی، اجرا کنند، اعداد جدول به گونه‌ای انتخاب شده‌اند که دانش‌آموزان مشکلی در کامل کردن آن ندارند.

با انجام فعالیتی مشابه می‌توان نتیجه گرفت که تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{۱}{x-a}$ نیز، وقتی $x \to a$، حد ندارد، این را با یک تغییر متغیر ساده، $y = x - a$، می‌توان اجرا کرد، همان‌طور که در صفحه ۱۱۳ صورت گرفته است.

آموزش صفحه‌ی ۱۱۳

در این صفحه تعریف رسمی حد $+\infty$ و حد $-\infty$، وقتی x به یک عدد حقیقی میل می‌کند، آمده است. البته تشریح این تعریف، با مثال‌هایی که در صفحات ۱۱۱ و ۱۱۲ بررسی شد، امکان‌پذیر است.



در این صفحه برای اولین بار از تغییر متغیر استفاده شده است. در حقیقت، $x \to a$ معادل است با $(x-a) \to 0$. لذا، اگر قرار دهیم $X = x - a$ در این صورت بررسی $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ معادل است با بررسی $\lim\limits_{X \to 0} f(X)$، که دومی معمولاً ساده‌تر است.

با این ترفند، به سادگی و به کمک دانش‌آموزان، می‌توان حدهای زیر را حساب کرد:

$$\lim_{x \to \frac{2}{3}} \frac{3}{(3x-2)^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\frac{3}{2}} \frac{-2}{(2x+3)^2} = -\infty$$

البته برای این‌که ثابت کنید حد تابع f وقتی $x \to a$، $+\infty$ (یا $-\infty$) نیست کافی است ثابت کنید حد چپ و حد راست آن برابر نیستند. لذا، با تغییر متغیر مناسب می‌توان ثابت کرد:

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{x-a} = \lim_{X \to 0} \frac{1}{X} \text{ (وجود ندارد)}$$

به طور کلی روابط زیر نیز به سادگی قابل بررسی است:

$$\lim_{X \to 0} \frac{1}{X^4} = +\infty$$

و به جای ۴ می‌توان هر عدد طبیعی زوج را قرار داد.

$$\lim_{X \to 0^+} \frac{1}{X^3} = +\infty$$

$$\lim_{X \to 0^-} \frac{1}{X^3} = -\infty$$

و در نتیجه $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^3}$ وجود ندارد. و به جای ۳ می‌توان هر عدد طبیعی فرد را قرار داد.

آموزش صفحه‌های ۱۱۴ و ۱۱۵

در این صفحات، پس از ارائه‌ی چند تمرین ساده، که حل آن‌ها با توجه به مطالب آموزش داده شده آسان است، حد یک تابع وقتی $x \to +\infty$ یا $x \to -\infty$ بررسی شده است.

فعالیت ۹ـ۲ به صورت یک نفره یا گروهی قابل اجراست و جدول ۱۹ـ۲ به سادگی کامل می‌شود و دانش‌آموزان خودشان به نتیجه‌ی زیر می‌رسند :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

در صورتی که وقت اجازه دهد می‌توانید نتایج زیر را هم توسط دانش آموزان به دست آورید :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^3} = 0 \ , \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \ (n \in \mathbb{N})$$

حل کار در کلاس ۴ـ۲ نیز ساده است. نکته‌ی قابل ذکر این است که چه $x \to +\infty$ و چه $x \to -\infty$ حد $\frac{1}{x}$ مساوی صفر است. شکل ۵۴ـ۲ و نموداری که دانش‌آموزان در شکل ۵۵ ـ۲ رسم می‌کنند نیز مؤید این نتیجه است.

البته با طرح مسائلی مشابه می‌توان نتیجه گرفت که اگر a عدد دل‌خواهی باشد آن‌گاه

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{a}{x} = 0$$

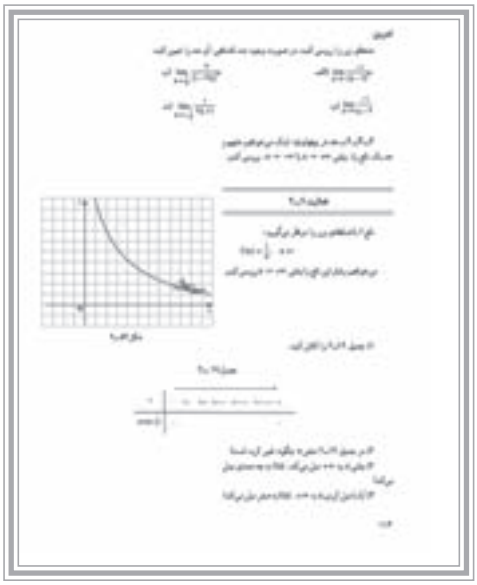
این نتیجه کلید حل بسیاری از مسائل حد در بی‌نهایت است که در صفحه‌های ۱۱۶ و ۱۱۹ به آن‌ها خواهیم پرداخت.

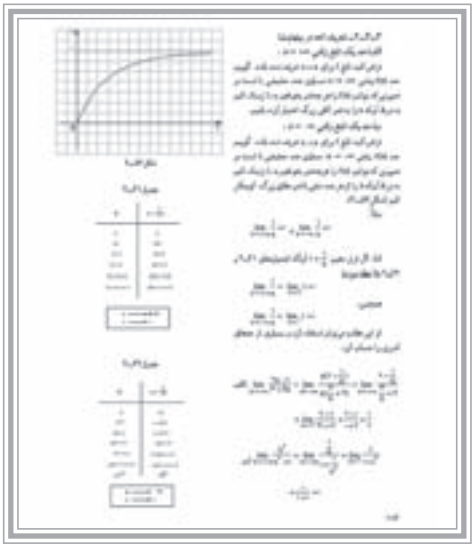
آموزش صفحه‌ی ۱۱۶

در این صفحه تعریف حد در بی‌نهایت آمده است. تعاریف در دو حالت $x \to +\infty$ و $x \to -\infty$ بیان شده‌اند و سعی شده است چند مسئله در حالت خاص حل شود.

یکی از ابزارهای مهم برای تعیین حد برخی توابع، وقتی $x \to \pm\infty$ ، استفاده از روابط زیر است :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{t \to 0^+} t = 0$$





$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=\lim_{t\to 0^-}t=0$$

برای این‌که دانش‌آموزان کارآیی این ابزار را دریابند و بتوانند از آن استفاده کنند لازم است به حل تمرین‌های زیادی مبادرت کنید. مثلاً،

$$1)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{1-5x}{3x+4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(\frac{1}{x}-5)}{x(3+\frac{4}{x})}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}-5}{3+\frac{4}{x}}=\frac{0-5}{3+0}=-\frac{5}{3}$$

$$2)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{1-2x}{3-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{x}-2}{\frac{3}{x}-1}$$

$$=\frac{0-2}{0-1}=2$$

آموزش صفحه‌های ۱۱۷ و ۱۱۸

در این صفحه چهار حالت باقی‌مانده بررسی می شود :

الف) $x\to+\infty\ ,\ f(x)\to+\infty$

ب) $x\to+\infty\ ,\ f(x)\to-\infty$

پ) $x\to-\infty\ ,\ f(x)\to+\infty$

ت) $x\to-\infty\ ,\ f(x)\to-\infty$

هدف از فعالیت ۱۰ـ۲ به دست آوردن نتایج مهم زیر است :

$(a\neq 0)$

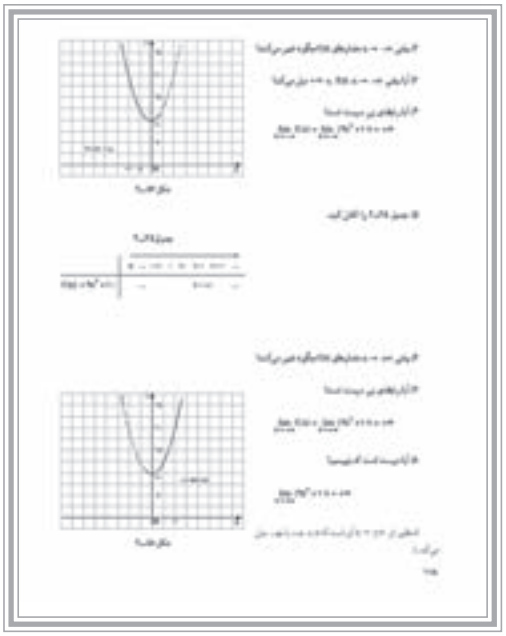
$$\lim_{x\to+\infty}(ax+b)=(a\text{ علامت})\times+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}(ax+b)=(a\text{ علامت})\times(-\infty)$$

هدف از فعالیت ۱۱ـ۲ نیز آن است که

$$\lim_{x\to\pm\infty}(ax^2+b)=+\infty\qquad(a>0)$$

بهتر است پس از پایان این صفحه، نمونه‌هایی نظیر مسائل زیر را مطرح کنید. اگر دانش‌آموزان فوراً جواب دادند بیانگر آن



است که فعالیت‌های ۱۰ــ۲ و ۱۱ــ۲ را به خوبی درک کرده‌اند والّا باید باز هم روی این مسائل، به صورت فعالیت، کار شود.

$$\lim_{x\to\pm\infty} -2x^2 \quad (=-\infty)$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{x^3} \quad (=0)$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} ax^2 \quad (=\text{علامت } a)\times(+\infty) \quad (a\neq 0)$$

آموزش صفحه‌ی ۱۱۹

در این صفحه نتایج کلی، فرمول‌وار، درج شده‌اند، لازم است دانش‌آموزان خودشان با تمرین و ممارست به این نتایج دست یابند. در صفحات قبل تلاش‌هایی در این جهت صورت گرفته است ولی کفایت داشتن یا نداشتن آن‌ها به سطح دانش و پذیرش دانش‌آموزان بستگی دارد و هیچ کس جز معلم نمی‌تواند از عهده‌ی این مهم برآید.

این وظیفه‌ی معلم است که با اطلاع از توانایی‌های دانش‌آموزان خود تمرین، فعالیت یا کار در کلاس را اضافه کند تا آن ها بتوانند مسائل حل شده‌ی صفحه‌ی ۱۱۹ را بفهمند و مسائل تمرین ۴ــ۲ را حل کنند.

فهم مثال‌های صفحه‌ی ۱۱۹، و حل آن‌ها در صورتی که توضیحات قبل از آن، خوب درک شده باشد، آسان است.

آموزش صفحه‌ی ۱۲۰

به دلیل اهمیت تمرین ۴ــ۲ سؤالات آن را پاسخ می‌دهیم. یادآور می‌شویم برای کلاس‌هایی که دانش‌آموزان ضعیف دارند، قبلاً لازم است مشابه سؤالات ۲ تا ۶ این تمرین با آن‌ها کار شده باشد.

۱ــ مشابه مثال‌های حل شده در صفحه‌ی ۱۱۹ عمل می‌کنیم.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+5x+1}{x^2+2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{2}{x^2}} = 2$$

ب) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-3x-2}{5x^2+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{-3}{x}-\frac{2}{x^2}}{5+\frac{2}{x}}=\frac{0}{5}=0$

پ) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2+x-3}{3x^2+7x-1}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}}{3+\frac{7}{x}-\frac{1}{x^2}}=\frac{2}{3}$

ت) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2x+5}{-\frac{1}{2}x+6}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2+\frac{5}{x}}{-\frac{1}{2}+\frac{6}{x}}=\frac{2}{-\frac{1}{2}}=-4$

ث) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^3+1}{x-2x^3}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1+\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x^2}-2}=\frac{1}{-2}=-\frac{1}{2}$

ج) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(x-x^2+1)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[-x^2(-\frac{1}{x}+1-\frac{1}{x^2})\right]$

$=-\infty$

انتظار می‌رود که دانش‌آموزان به تدریج دریافته باشند که می‌توانند با نگاه به بزرگ‌ترین توان x و ضریب آن در صورت و مخرج کسر حد آن کسر را وقتی $x\to\pm\infty$ به دست آورند. مثلاً،

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-3x^3+2x^2+1}{2x^4-x^3+7}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-3x^3}{2x^4}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-x+7x^3}{x-2x^3+5}=\lim_{x\to-\infty}\frac{7x^3}{-2x^3}=-\frac{7}{2}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x-x^3+1}{2x^2+x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^3}{2x^2}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}-\frac{1}{2}x=+\infty$$

۲ــ پس از تقسیم صورت و مخرج کسر بر x^2 داریم :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^m+x^2+1}{x^2+3x-1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^{m-2}+1+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}x^{m-2}+1$$

برای این‌که این حد مساوی ۲ باشد باید

$$\lim_{x\to\pm\infty}x^{m-2}=1$$

یعنی باید $m-2=0$ یا $m=2$.

۳ــ برای تعیین a باید داشته باشیم :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{ax^2+3x^2-1}{x^2-2x+4}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a+3-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}$$

$$=a+3=-4$$

بنابراین، $a=-7$.

۴ــ می‌نویسیم :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-3x+7}{x^m+x^2-3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{3}{x}+\frac{7}{x^2}}{x^{m-2}+1-\frac{3}{x^2}}$$

$$=\frac{1}{1+\lim\limits_{x\to+\infty}x^{m-2}}=0$$

برای برقراری تساوی بالا باید، با توجه به $x\to+\infty$ ،

$$\lim_{x\to+\infty}x^{m-2}=+\infty$$

بنابراین، باید $m-2>0$ یا $m>2$. یعنی،

$m\in(2,+\infty)$

۵ــ راه‌ساده این است که بگوییم باید $n>3$. امّا اگر بخواهیم، طبق آن‌چه تدریس شده است، عمل کنیم، صورت و مخرج را بر x^3 تقسیم می‌کنیم تا به دست آوریم :

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{n-3}-2x^{n-4}+\frac{5}{x^3}}{1-\frac{2}{x}+\frac{7}{x^2}+\frac{1}{x^3}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x^{n-3}(1-\frac{2}{x})=\lim_{x\to+\infty}x^{n-3}=+\infty$$

برای برقراری رابطه بالا باید $n-3>0$ و یا

$n\in(3,+\infty)$

۶ــ پاسخ قسمت‌های مختلف را در زیر ملاحظه می‌کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{۳x^{m-۲}+\dfrac{۱}{x^{۲}}}{۱+\dfrac{۱}{x}+\dfrac{۱}{x^{۲}}}$

$= ۳\lim\limits_{x\to+\infty} x^{m-۲} = ۳$

بنابراین، باید $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{m-۲} = ۱$ یعنی $m = ۲$.

ب) باید داشته باشیم :

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^{m-۲} = ۰$

لذا، باید $m-۲<۰$ یعنی $m\in(-\infty,۲)$.

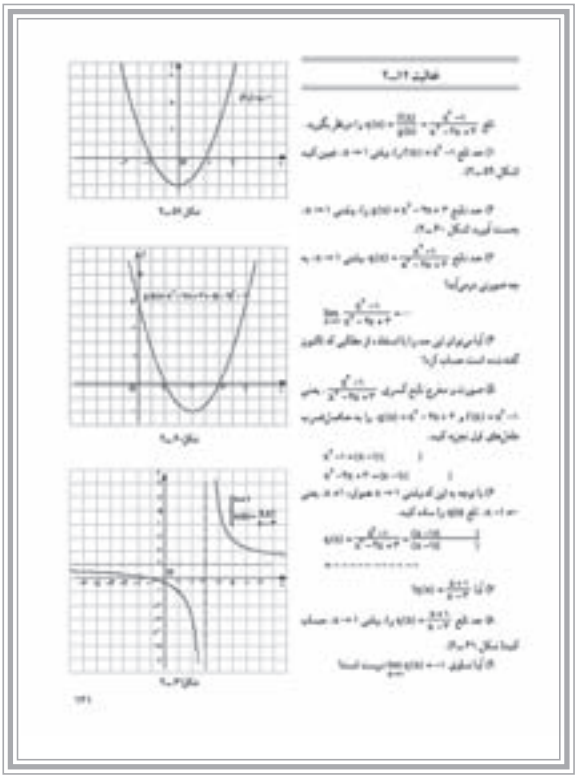
پ) باید داشته باشیم.

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^{m-۲} = +\infty$

لذا، باید داشته باشیم $m-۲>۰$ یا

$m\in(۲,+\infty)$

آموزش صفحه‌ی ۱۲۱



هدف از آموزش این صفحه پیدا کردن حد کسرهایی است که وقتی $x\to a$ صورت مخرج آن‌ها صفر می شود. در قضیه‌های حد، که در این کتاب فقط از آن‌ها استفاده کرده‌ایم، داریم :

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$$

به شرط آن‌که $\lim\limits_{x\to a} g(x)\neq ۰$ و حدهای صورت و مخرج وجود داشته باشند. لذا، اگر

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = ۰$$

نمی‌توان از قضیه بالا استفاده کرد. در چنین حالتی باید عامل $(x-a)$ ، که در صورت مخرج کسر وجود دارد، به گونه‌ای حذف شود. ما در کتاب دانش‌آموز بیش‌تر حالتی را در نظر گرفته‌ایم که $f(x)$ و $g(x)$ چند جمله‌ای هستند و به سادگی می‌توان عامل $(x-a)$ را شناسایی کرد و با توجه به این‌که وقتی $x\to a$ ، $(x-a)\neq ۰$ ، آن را از صورت و مخرج کسر حذف نمود.

فعالیت ۱۲ــ۲، چه توسط هر یک از دانش‌آموزان و چه به صورت گروهی، به سادگی اجرا می‌شود. مرحله‌ی ۷ این فعالیت از اشتباه دانش‌آموزان جلوگیری می‌کند و در آخر، حد مورد نظر حساب می‌شود، که آن هم در مرحله‌ی ۹ کاملاً به کمک دانش‌آموزان می‌آید.

توجه: شکل ۶۱ــ۲ هیچ کمکی در تعیین حد موردنظر نمی‌کند حتی ممکن است گمراه کننده هم باشد ولی شاخه‌ی سمت چپ (پایین) آن به خوبی نشان می‌دهد که وقتی $x \to 1$ تابع به عدد ۱− میل می‌کند. از این به بعد هم تابع $y = q(x)$ را رسم نخواهیم کرد زیرا نقشی در تعیین حد موردنظر ندارد.

آموزش صفحه‌ی ۱۲۲

اگر $f(x)$ یک چند جمله‌ای باشد و $f(a) = 0$ طبق قضیه تقسیم داریم :

$$f(x) = (x-a)q(x) + r(x)$$

که درجه‌ی $r(x)$ از درجه‌ی $(x-a)$، یعنی مقسوم‌علیه، کم‌تر است. لذا، $r(x)$ یک عدد مانند b است. یعنی،

$$f(x) = (x-a)q(x) + b \quad (*)$$

اگر به جای x در رابطه (*) عدد a را قرار دهیم داریم :

$$f(a) = (a-a)q(b) + b$$

و یا $\quad 0 = 0 + b$

پس، $\quad f(x) = (x-a)q(x)$ و $b = 0$

یعنی، $f(x)$ بر $(x-a)$ بخش‌پذیر است. خارج قسمت تقسیم را می‌توان به روشی که در ریاضیات سال‌های قبل آموزش داده شده است به دست آورد.

فعالیت ۱۳ــ۲ توسط دانش‌آموزان، فردی یا گروهی، به سادگی اجرا می‌شود. ممکن است پرداختن به تقسیم نیاز به راهنمایی داشته باشد. در این صورت، با اجرای یک تقسیم، توضیحات لازم را به آن‌ها خواهید داد.

حل تمرین ۵ــ۲ را نیز در زیر ملاحظه می‌کنید.

۱ــ فقط الف) را که طولانی‌تر است حل می‌کنیم.

الف)

$$
\begin{array}{l|l}
-2x^3+5x^2+8x-20 & x+2 \\ \cline{2-2}
-2x^3-4x^2 & -2x^2+9x-10 \\
+\quad\quad + & \\ \cline{1-1}
9x^2+8x & \\
9x^2+18x & \\
-\quad\quad - & \\ \cline{1-1}
-10x-20 & \\
-10x-20 & \\
+\quad\quad + & \\ \cline{1-1}
\quad 0 &
\end{array}
$$

لذا، خارج قسمت $-2x^2+9x-10$ است.

۲ــ باید داشته باشیم $p(3)=0$ و یا

$$p(3)=27a+(a+1)9-18=0$$

$$\Rightarrow 36a=9 \Rightarrow a=\frac{1}{4}$$

آموزش صفحه‌ی ۱۲۳

در این صفحه روش هورنر آموزش داده می‌شود، که در حقیقت روشی ماشینی برای تعیین خارج قسمت و باقی‌مانده‌ی تقسیم یک چند جمله‌ای بر $(x-a)$ است. البته، با کمی تغییر، می‌توان این روش را برای تعیین خارج قسمت تقسیم یک چند جمله‌ای بر $(ax-b)$ نیز به کار برد.

مثلاً، برای تعیین خارج قسمت تقسیم عبارت $4x^3-8x^2+x+4$ بر $(2x+3)$ چنین عمل می‌کنیم :

$$2x+3=0 \Rightarrow x=-\frac{3}{2}$$

توجه کنید که $\quad 2x+3=2(x-(-\frac{3}{2}))$

حالا روش هورنر را برای تقسیم عبارت فوق بر $(x-(-\frac{3}{2}))=(x+\frac{3}{2})$ اجرا می‌کنیم :

	۴	−۸	۱	۴
$-\frac{3}{2}$	+۰	−۶	۲۱	−۳۳
	۴	−۱۴	۲۲	−۲۹

بنابراین،

$$۴x^۳ - ۸x^۲ + x + ۴ = (x + \frac{۳}{۲})(۴x^۲ - ۱۴x + ۲۲) - ۲۹$$

$$= (۲x + ۳)(۲x^۲ - ۷x + ۱۱) - ۲۹$$

لذا، برای تعیین خارج قسمت تقسیم $p(x)$ بر $(ax - b)$ کافی است خارج قسمت تقسیم $p(x)$ بر $(x - \frac{b}{a})$ را تعیین و بعد بر a تقسیم کنیم زیرا داریم :

$$p(x) = (x - \frac{b}{a})q(x) + r$$

بنابراین،

$$p(x) = (ax - b).\frac{q(x)}{a} + r$$

در تقسیم قبلی نیز ملاحظه می‌کنید که

$$۲x^۲ - ۷x + ۱۱ = \frac{۴x^۲ - ۱۴x + ۲۲}{۲}$$

از دانش‌آموزان بخواهید که این صفحه را مطالعه کنند و با اجرای دستورالعمل آن روی چند تقسیم، باقی‌مانده و خارج قسمت را تعیین کنند. اگر باقی‌مانده صفر باشد چند جمله‌ای بر $(x - a)$ یا $(ax - b)$، بخش‌پذیر است. روش هورنر بیش‌تر برای تقسیم چند جمله‌ای‌های با درجه‌ی بالا بر $(x - a)$ به کار می‌رود. الگوریتم این روش در [۱۳] آمده است.

آموزش صفحه‌های ۱۲۴و ۱۲۵

در ابتدای صفحه‌ی ۱۲۴، فعالیت ۱۴ـ۲ باید اجرا شود. مرحله‌ی ۳ نیاز به تقسیم دو عبارت بر $(x + ۲)$ دارد که انتظار می‌رود دانش‌آموزان آن را با یکی از روش‌هایی که یاد گرفته‌اند به دست آورند (آن‌ها درخواهند یافت که روش هورنر ساده‌تر است).

مرحله‌ی ۴ برای راهنمایی دانش آموزان گذاشته شده است، که اگر اشتباه کرده‌اند برگردند و اشتباه خود را تصحیح نمایند.

قضیه‌ی فشردگی فقط برای استفاده ذکر شده است، هر چند که اثبات آن ساده است :

$$g(x) - L \le f(x) - L \le h(x) - L$$

که از آن نتیجه می‌شود :

$$|f(x) - L| \le \max\{|h(x) - L|, |g(x) - L|\}$$

با توجه به این‌که حد $h(x)$ و $g(x)$ وقتی $x \to a$، عدد L است پس وقتی $x \to a$، حد $(h(x) - L)$ و حد $(g(x) - L)$ صفر است، که نتیجه می‌دهد حد $f(x) - L$، وقتی $x \to a$ برابر صفر است یعنی $\lim_{x \to a} f(x) = L$ البته این قضیه برای حالتی که $x \to \pm\infty$ نیز برقرار است.

با استفاده از این قضیه می‌توان حدهای زیادی را به دست آورد. مثلا، برای تعیین،

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sin x}{x}$$

داریم :

$$-۱ \le \sin x \le ۱$$

با فرض $x < ۰$ و تقسیم طرفین نامساوی‌های بالا بر x

$$\frac{۱}{x} \le \frac{\sin x}{x} \le -\frac{۱}{x}$$

اما، می‌دانیم که

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{۱}{x} = \lim_{x \to -\infty} (-\frac{۱}{x}) = ۰$$

بنابراین، طبق قضیه‌ی فشردگی

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sin x}{x}=0$$

مشابه مثال ۱ صفحه‌ی ۱۲۴ و مثال بالا می‌توان ثابت کرد :

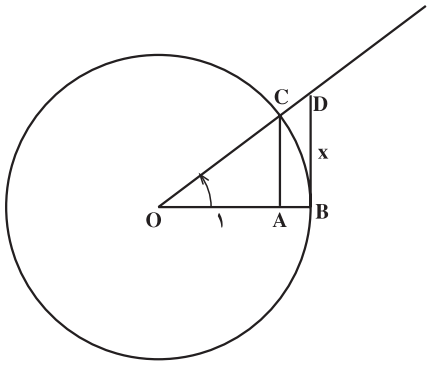
$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\cos x}{x}=0$$

از دانش‌آموزان بخواهید که این تساوی را به دست آورند.

کاربرد اصلی قضیه‌ی فشردگی در تعیین حد زیر است :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$$

روش زیر، بدون استفاده از جدول و به کمک قضیه‌ی فشردگی است. در بازه‌ی $(0,\frac{\pi}{2})$ مطابق شکل داریم :



$$AC<\overset{\frown}{BC}<BD$$

اما، طبق آن‌چه می‌دانیم، در دایره به شعاع واحد، $BD=\tan x$ و $\overset{\frown}{BC}=x$ و $AC=\sin x$ پس،

$$\sin x<x<\tan x$$

و یا

$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1$$

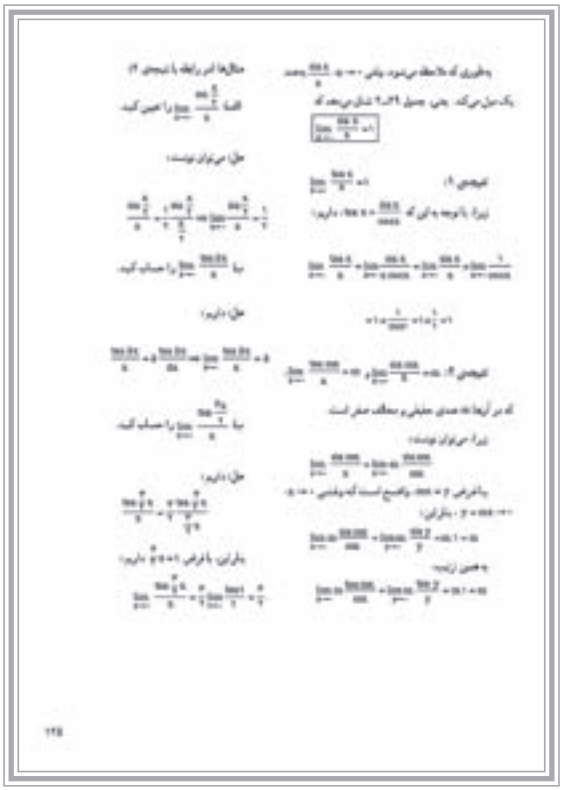
ضمناً می‌دانیم که

$$\lim_{x\to 0^+}\cos x=1$$

پس، بنابر قضیه‌ی فشردگی

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1$$

حال اگر $x\in(-\frac{\pi}{2},0)$ و قرار دهیم $y=-x$ در نتیجه $x\to 0^-$ معادل است با $y\to 0^+$ و



$$\frac{\sin x}{x}=\frac{-\sin(-x)}{x}=\frac{\sin(-x)}{(-x)}$$
$$=\frac{\sin y}{y}$$

و

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{x}=\lim_{y\to 0^+}\frac{\sin y}{y}=1$$

پس،

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

البته بیان این مطالب برای **دانش‌آموزان فنی حرفه‌ای لازم نیست** ولی دانستن آن برای مدرسان این درس ضروری است.

در مثال ۲، صفحه‌ی ۱۲۴، اعداد جدول با استفاده از ماشین حساب و در وضعیت رادیان، به دست آمده‌اند.

از دانش‌آموزان بخواهید که صفحه‌ی ۱۲۵ را مطالعه کنند و از این به بعد نتایج ۱ و ۲ را به کار برند (بدون طی مراحل حل مثال‌های (الف) تا (پ)). مثلاً،

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\sqrt{2}x}{x}=\sqrt{2}\ \text{و}\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{x}=7$$

آموزش صفحه‌ی ۱۲۶

حل تمرین‌های صفحه‌ی ۱۲۶ را در زیر ملاحظه می‌کنید.

۱ــ جواب‌ها عبارت‌اند از :

الف) ۵

ب) $\frac{۳}{۲}$

پ) ۱

ت) π

ث) $\frac{\sqrt{۲}}{۳}$

ج) ۱

۲ــ این تمرین حالت کلی تمرین (ب) بالاست.

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sin mx}{nx}=\lim_{x\to ۰}\frac{m}{n}.\frac{\sin mx}{mx}$$

با فرض $y=mx$ اگر $x\to ۰$ آن‌گاه $y\to ۰$ و

$$\lim_{x\to ۰}\frac{m}{n}.\frac{\sin mx}{mx}=\lim_{y\to ۰}\frac{m}{n}.\frac{\sin y}{y}=\frac{m}{n}$$

۳ــ این تمرین حالت کلی قسمت (ث) از تمرین ۱ است.

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\tan mx}{nx}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sin mx}{nx\cos mx}$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{۱}{\cos mx}.\frac{\sin mx}{nx}=۱\times\frac{m}{n}=\frac{m}{n}$$

۴ــ با استفاده از تمرین‌های ۲ و ۳ مقدار حدها نوشته شده است.

الف) $\frac{۲}{\sqrt{۳}}=\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$

ب) $\frac{\sqrt{۵}}{۳}$

پ) برای این تمرین داریم :

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\tan ۲x\sin ۳x}{۶x^{۲}}=\lim_{x\to ۰}\frac{\tan ۲x}{۲x}.\frac{\sin ۳x}{۳x}$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{\tan ۲x}{۲x}\times\lim_{x\to ۰}\frac{\sin ۳x}{۳x}=۱\times۱=۱$$

ت) برای این تمرین از رابطه‌ی $\cos x=\sin(\frac{\pi}{۲}-x)$

استفاده می‌کنیم :

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{۲}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{\sin(\frac{\pi}{۲}-x)}{x-\frac{\pi}{۲}}$$

قرار می‌دهیم $y=\frac{\pi}{۲}-x$. اگر $x\to\frac{\pi}{۲}$ آن‌گاه $y\to ۰$

و داریم.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{\sin(\frac{\pi}{۲}-x)}{x-\frac{\pi}{۲}}=\lim_{y\to ۰}\frac{\sin y}{-y}=-۱$$

آموزش صفحه‌ی ۱۲۷

از دانش‌آموزان بخواهید که آزمون پایانی (۳) را در کلاس اجرا کنند (در حدود ۴۰ دقیقه).

برخی از نمونه سؤال‌هایی که در این آزمون آمده، قبلاً حل نشده است، ولی مطالبی که تدریس شده برای پاسخ‌گویی به این سؤالات کفایت می‌کند. به دلیل اهمیت این آزمون حل سؤالات آن را در این صفحه ملاحظه می‌کنید.

۱ــ با توجه به این‌که صورت و مخرج کسر مساوی $f(x)$ به ازای $x = ۳$ صفر می‌شود، کافی است حساب کنیم.

$$\lim_{x\to ۳} f(x) = \lim_{x\to ۳} \frac{(x-۳)(x+۱)}{(x-۳)(x+۳)}$$

$$= \lim_{x\to ۳} \frac{x+۱}{x+۳} = \frac{۴}{۶} = \frac{۲}{۳}$$

بنابراین، برای پیوستگی تابع f در $x = ۳$ باید $f(۳) = \frac{۲}{۳}$.

۲ــ داریم :

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x^m + x + ۱}{x^۲ + ۲} = \lim_{x\to -\infty} (x^{m-۲})$$

باید $m - ۲ > ۰$ و زوج باشد (چرا؟) پس کم‌ترین مقدار m مساوی ۴ است.

۳ــ داریم :

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{۲x^n - ۳x + ۱۴}{x^۳ + ۶} = \lim_{x\to +\infty} ۲x^{n-۳}$$

پس باید $n - ۳ < ۰$ یعنی $n < ۳$، بیش‌ترین مقدار طبیعی n که در این نامساوی صدق می‌کند ۲ است.

۴ــ داریم :

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{۴x^n + ۲x^۲ + ۱}{ax^۳ + ۲} = \lim_{x\to +\infty} \frac{۴}{a} x^{n-۳} = ۲$$

بنابراین، باید $n - ۳ = ۰$ و $\frac{۴}{a} = ۲$ یعنی، $n = ۳$ و $a = ۲$.

۵ــ داریم :

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{۴x^۲ + ۳x + ۱}{۸x^۲ + ۱} = \frac{۴}{۸} = \frac{۱}{۲}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x+۳}{۲x-۱} = \frac{۱}{۲}$$

لذا، بنابر قضیه‌ی فشردگی،

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \frac{۱}{۲}$$

۶ــ اولاً باید $f(-۲) = -۱۶a - ۲ - a + ۲۰ = ۰$

$$\Rightarrow a = \frac{۱۸}{۱۷} \Rightarrow f(۰) = -a + ۲۰ = ۲۰ - \frac{۱۸}{۱۷} = \frac{۳۲۲}{۱۷}$$

۷ــ واضح است که $f(f(x)) = \frac{x}{۲x+۱}$ و

$$\frac{f(f(x))}{۲x+۱} = \frac{x}{(۲x+۱)^۲} \xrightarrow[x\to +\infty]{} ۰$$

آموزش صفحه‌ی ۱۲۸

حل سؤالات تکمیلی (صفحه‌ی ۱۲۸)

حل سؤالات تمرین‌های تکمیلی بخش دوم را به اختصار در این صفحه ملاحظه می‌کنید.

۱ــ چون توابع $۳+۲x$ و $x+۴$ پیوسته هستند :

الف) $\lim\limits_{x\to ۱^-} x+۴=۱+۴=۵$ و

$$\lim_{x\to ۱^+} ۳+۲x=۳+۲\times ۱=۵$$

ب) بنابراین $\lim\limits_{x\to ۱} f(x)=۱$ از جدول نیز همین نتیجه حاصل می‌شود.

۲ــ داریم :

$$\lim_{x\to \frac{۳}{۲}} \frac{۴x^۲-۹}{۲x-۳}=\lim_{x\to \frac{۳}{۲}} \frac{(۲x-۳)(۲x+۳)}{۲x-۳}=۶$$

و چون $۲x+۴$ پیوسته است :

$$\lim_{x\to \frac{۳}{۲}} ۲x+۴=۷\neq ۶$$

پس، $\lim\limits_{x\to \frac{۳}{۲}} f(x)$ وجود ندارد.

۳ــ مشابه تمرین ۱، داریم :

$$\lim_{x\to \frac{۱}{۲}} (x^۲+\frac{۱}{x})=\frac{۱}{۴}+۲=\frac{۹}{۴}$$

$$\lim_{x\to \frac{۱}{۲}} (۲-x-x^۲)=۲-\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۴}=\frac{۵}{۴}\neq \frac{۹}{۴}$$

پس تابع f در $x=\frac{۱}{۲}$ پیوسته نیست.

۴ــ برای پیوستگی در $x=-۲$ باید داشته باشیم :

$$\lim_{x\to -۲^-} (ax+۴)=-۲a+۴=۶$$

$$=\lim_{x\to -۲^+} (\frac{۲}{x}+b)=-۱+b$$

پس باید

$$\begin{cases} -۲a+۴=۶ \\ -۱+b=۶ \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} a=-۱ \\ b=۷ \end{matrix}}$$

۵ــ فقط جواب‌ها ذکر شده است :

الف) $-\infty$

ب) $-\frac{۳}{۲}$

پ) ۱

ت) $\frac{۳}{۴}$

ت) $(\frac{۱}{۲}+\frac{\sqrt{۳}}{۲}+۱)$

ج) $\frac{۳}{۲}$

چ) $\frac{۱۲}{۵}$

ح) این تمرین را به‌طور کامل حل می‌کنیم :

$$\lim_{x\to \pi} \frac{\cos\frac{x}{۲}}{\pi-x}=\lim_{x\to \pi} \frac{\sin(\frac{\pi}{۲}-\frac{x}{۲})}{\pi-x}$$

$$=\lim_{y\to ۰} \frac{\sin\left[\frac{۱}{۲}(\pi-x)\right]}{(\pi-x)}$$

با فرض $y=\pi-x$ داریم :

$$=\lim_{y\to ۰} \frac{\sin\frac{۱}{۲}y}{y}=\frac{۱}{۲}$$

حل مسائل بیش‌تر

۱ــ حدهای زیر را بیابید.

۱) $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\tan\sqrt{۲}}{۵x}$

۲) $\lim\limits_{x\to ۲}(\frac{۱}{۴x-۸}-\frac{۱}{x^۲-۴})$

۳) $\lim\limits_{x\to ۰^-}\frac{[x]}{x}$

۴) $\lim\limits_{x\to ۳^-}\frac{[x]^۲-۹}{x-۳}$

۵) $\lim\limits_{x\to ۰^-}\frac{\tan ۳x}{\sin ۲x}$

۶) $\lim\limits_{x\to ۲^+}\frac{۲x+۱}{[x]-x}$

۷) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{۲x+[x]}{۳x-[x]}$

۸) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{۳x^۲-۵x+۷}{(۲-۳x)(x-۲)}$

حل

حل: ۱ــ $\frac{\sqrt{۲}}{۵}$

۲ــ $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{x+۲-۴}{۴(x-۲)(x+۲)}=\frac{۱}{۱۶}$

۳ــ $+\infty$

۴ــ $x\to ۳^-\Rightarrow[x]=۲$

وقتی $x\to ۳^-$ ، $x-۳$ با مقادیر منفی به صفر نزدیک می‌شود پس $\lim\limits_{x\to ۳^-}\frac{[x]^۲-۹}{x-۳}=+\infty$

۵ــ $\frac{۳}{۲}$

۶ــ $x\to ۲^+\Rightarrow[x]=۲$

در نزدیکی ۲، اگر $x>۲$ ، $[x]-x<۰$ یعنی با مقادیر منفی به صفر میل می‌کند.

$$\lim\limits_{x\to ۲^+}\frac{۲x+۱}{[x]-x}=-\infty$$

۷ــ وقتی $x\to +\infty$ ، $[x]\cong x$

$$\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{۲x+[x]}{۳x-[x]}=\frac{۳}{۲}$$

۸ــ $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{۳x^۲-۵x+۷}{(۲-۳x)(x-۲)}=$

$$\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{۳x^۲-۵x+۷}{۸x-۳x^۲-۴}$$

$$=-۱$$

۹) $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{\sqrt[۳]{x^۲}-۲\sqrt[۳]{x}+۱}{(x-۱)^۲}$

۹ـ $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{(\sqrt[۳]{x}-۱)^۲}{(x-۱)^۲}$

$\sqrt[۳]{x}=t\Rightarrow x=t^۳$

$\lim\limits_{t\to ۱}\dfrac{(t-۱)^۲}{(t^۳-۱)^۲}=$

$\lim\limits_{t\to ۱}\dfrac{(t-۱)^۲}{(t-۱)^۲(t^۲+t+۱)^۲}$

$=\dfrac{۱}{۹}$

۱۰) $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{۱-\sqrt{\cos x}}{۱-\cos\sqrt{x}}$

۱۰ـ $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{۱-\sqrt{\cos x}}{۱-\cos\sqrt{x}}\times\dfrac{۱+\sqrt{\cos x}}{۱+\sqrt{\cos x}}=$

$\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{۱-\cos x}{۱-\cos\sqrt{x}}\times\dfrac{۱}{۱+\sqrt{\cos x}}=$

$\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{۲\sin^۲\frac{x}{۲}}{۲\sin^۲\frac{\sqrt{x}}{۲}}\times\dfrac{۱}{۱+\sqrt{\cos x}}=$

$\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{۲(\frac{x}{۲})^۲}{۲(\frac{\sqrt{x}}{۲})^۲}\times\dfrac{۱}{۱+\sqrt{\cos x}}=۰$

۱۱) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{۲x+۵}{۶-\frac{۱}{۲}x}$

۱۱ـ $\dfrac{۲}{-\frac{۱}{۲}}=-۴$

۱۲) $\lim\limits_{x\to(\frac{۱}{۲})^+}\dfrac{۴x+۳}{۲x-۱}$

۱۲ـ وقتی $x\to(\frac{۱}{۲})^+$ ، مقدار $۲x-۱$ همواره مثبت است

پس $\lim\dfrac{۴x+۳}{۲x-۱}=+\infty$

۱۳) $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{\sqrt{۱+x}-۱}{x}$

۱۳ـ $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{(\sqrt{۱+x}-۱)(\sqrt{۱+x}+۱)}{x(\sqrt{۱+x}+۱)}=$

$\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{۱+x-۱}{x(\sqrt{۱+x}+۱)}=\dfrac{۱}{۲}$

۱۴) $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{x}{\sqrt{۱-\cos x}}$

۱۴ـ $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{x}{\sqrt{۲\sin^{۲}\frac{x}{۲}}}$

$$\lim_{x\to ۰}\frac{x}{\sqrt{۲}\left|\sin\frac{x}{۲}\right|}=$$

$$\lim_{x\to ۰^{+}}\frac{x}{\sqrt{۲}\,\frac{x}{۲}}=\frac{۲}{\sqrt{۲}}=\sqrt{۲}$$

$$\lim_{x\to ۰^{-}}\frac{x}{-\sqrt{۲}\,\frac{x}{۲}}=-\sqrt{۲}$$

لذا، حد وجود ندارد.

۱۵) $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{\sin(\sin x)}{x}$

۱۵ـ ۱

۱۶) $\lim\limits_{x\to ۴^{+}}[x]-\left[\dfrac{x}{۴}\right]$

۱۶ـ $x\to ۴^{+}\Rightarrow[x]=۴$

$$\Rightarrow\left[\frac{x}{۴}\right]=۱$$

$$\lim_{x\to ۴^{+}}[x]-\left[\frac{x}{۴}\right]=۴-۱=۳$$

۱۷) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{(۲x+۱)^{۳}(x+۱)}{(x-۴)(x^{۳}-۷x+۱)}$

۱۷ـ $(۲x+۱)^{۳}(x+۱)=۸x^{۴}+\ldots$

$$(x-۴)(x^{۳}-۷x+۱)=x^{۴}+\ldots$$

بنابراین $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{(۲x+۱)^{۳}(x+۱)}{(x-۴)(x^{۳}-۷x+۱)}=۸$

۱۸) $\lim\limits_{x\to ۵^{+}}\dfrac{\sqrt{۲x-۱}}{۲-\sqrt{x-۱}}$

۱۸ـ $\lim\limits_{x\to ۵^{+}}\sqrt{۲x-۱}=۳$

$$\lim_{x\to ۵^{+}}۲-\sqrt{x-۱}=۰$$

ضمناً، $۲-\sqrt{x-۱}$ با مقادیر منفی به صفر میل می‌کند

بنابراین $\lim\limits_{x\to ۵^{+}}\dfrac{\sqrt{۲x-۱}}{۲-\sqrt{x-۱}}=-\infty$

۱۹) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^۲}{x+۱}-\frac{x^۲+x}{x-۱}\right)$

۱۹ـ

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^۲(x-۱)-(x^۲+x)(x+۱)}{x^۲-۱}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-۳x^۲-x}{x^۲-۱}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-۳x^۲}{x^۲}=$$

$$=-۳$$

۲۰) $\lim\limits_{x\to۰} x\sin\frac{۱}{x}$

۲۰ـ چون $-۱\le\sin\frac{۱}{x}\le۱$

$$-x\le x\sin\frac{۱}{x}\le x$$

چون $\lim\limits_{x\to۰}-x=\lim\limits_{x\to۰}x=۰$

پس $\lim\limits_{x\to۰}x\sin\frac{۱}{x}=۰$

۲۱) $\lim\limits_{x\to-۳^+}\frac{x+۳}{\sqrt{x+۳}}$

۲۱ـ ۰

۲۲) $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^۲+۲}-\sqrt{x^۲-۴})$

۲۲ـ

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x(\sqrt{x^۲+۲}-\sqrt{x^۲-۴})(\sqrt{x^۲+۲}+\sqrt{x^۲-۴})}{\sqrt{x^۲+۲}+\sqrt{x^۲-۴}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(x^۲+۲-x^۲+۴)}{\sqrt{x^۲+۲}+\sqrt{x^۲-۴}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{۶x}{|x|+|x|}=۳$$

۲۳) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}^+}\tan x$

۲۳ـ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}^+}\frac{\sin x}{\cos x}$

چون $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}^+}\sin x=۱$ وقتی $x\to\frac{\pi}{۲}^+$ ، $\cos x$ با مقادیر منفی به صفر نزدیک می‌شود پس

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^+}\tan x=-\infty$$

۲۴) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}^-} \tan x$

۲۴ـ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}^-} \frac{\sin x}{\cos x}$

چون $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}^-} \sin x = ۱$ ، وقتی $x \to \frac{\pi}{۲}^-$ ، $\cos x$ با مقادیر مثبت به صفر نزدیک می‌شود پس $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}^-} \tan x = +\infty$

۲۵) $\lim\limits_{x\to ۰^-} \frac{۱}{\sin x}$

۲۵ـ وقتی $x \to ۰^-$ ، $\sin x$ با مقادیر منفی به صفر نزدیک می‌شود پس $\lim\limits_{x\to ۰^-} \frac{۱}{\sin x} = -\infty$

۲۶) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^۲+۱} - x$

۲۶ـ وقتی $x \to +\infty$ ، $\sqrt{x^۲+۱} \approx |x|$ پس

$$\lim_{x\to+\infty} |x| - x = \lim_{x\to+\infty} x - x = ۰$$

۲۷) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+۱}}$

۲۷ـ $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x+۱}} =$

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{۱+\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x}}{۱+\frac{۱}{x}}} = ۱$$

۲۸) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^۲+۴}}{x+۴}$

۲۸ـ وقتی $x \to -\infty$ داریم

$$\sqrt{x^۲+۴} \approx |x|$$

پس

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{|x|}{x+۴} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x}{x+۴}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-x}{x}$$

$$= -۱$$