

بخش چهارم

راهنمای آموزش بخش سوم کتاب دانش آموز

شامل:

— راهنمای آموزش بخش سوم کتاب دانش آموز طبق جدول زیر

صفحات	عنوان	فصل
۱۳۰ تا ۱۴۴	مشتق	اول
۱۴۵ تا ۱۶۱	کاربردهای مشتق (۱)	دوم
۱۶۲ تا ۱۷۰	کاربردهای مشتق (۲)	سوم
۱۷۱ تا ۱۸۰	کاربردهای مشتق (۳)	چهارم

— حل تمرین های تکمیلی بخش سوم کتاب دانش آموز
— ارائه ی دو دسته سؤال امتحانی از کل کتاب

بخش چهارم

راهنمای آموزش فصل اول از بخش سوم کتاب دانش آموز

شامل:
- آموزش صفحات ۱۳۰ تا ۱۴۴
- حل مسائل بیش تر

آموزش صفحه‌ی ۱۳۱

این پیش‌آزمون برای اطلاع از پیش‌نیازهای مشتق است.

در این فصل با محاسبه‌ی $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ و تعیین حد آن وقتی $\Delta x \rightarrow 0$ مواجه هستیم.

پاسخ به سؤال‌های ۱ و ۲ پیش‌آزمون (۱) ساده است. در مورد سؤال ۳ باید متذکر شد که به‌طور کلی در نقاطی از یک نمودار، که محل برخورد دو قسمت از آن است، اگر حداقل یکی از این دو قسمت خط راست باشد در آن نقطه مماس وجود ندارد. لذا، در مورد شکل (الف) در نقطه‌ی A مماس وجود ندارد و در بقیه نقاط آن مماس وجود دارد. در مورد شکل (ب) فقط در نقطه‌ی D مماس وجود ندارد و برای شکل (پ) در نقاط A، B، C، D و E مشتق وجود ندارد. فعلاً لازم نیست در این مورد آموزش بدهید. در طول فصل آموزش لازم داده خواهد شد.

این آزمون در حدود ۳۰ دقیقه است و در کلاس اجرا

خواهد شد.

آموزش صفحه‌ی ۱۳۲

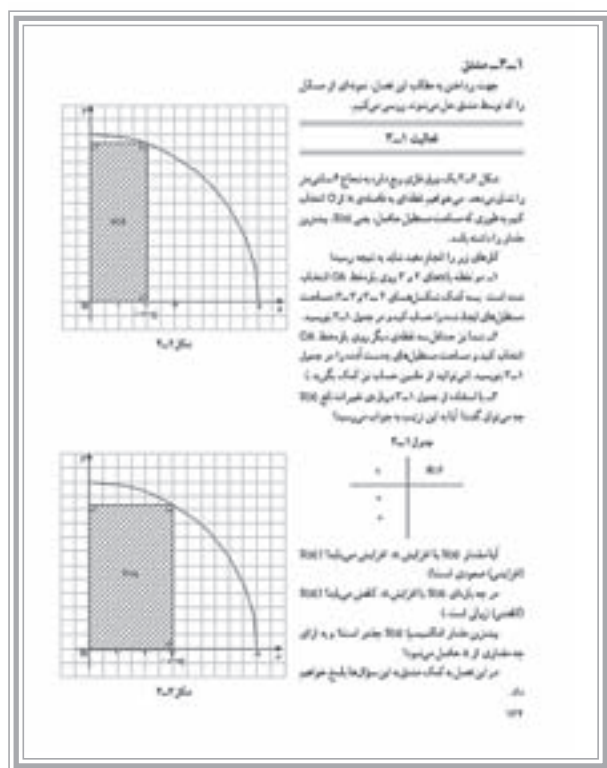
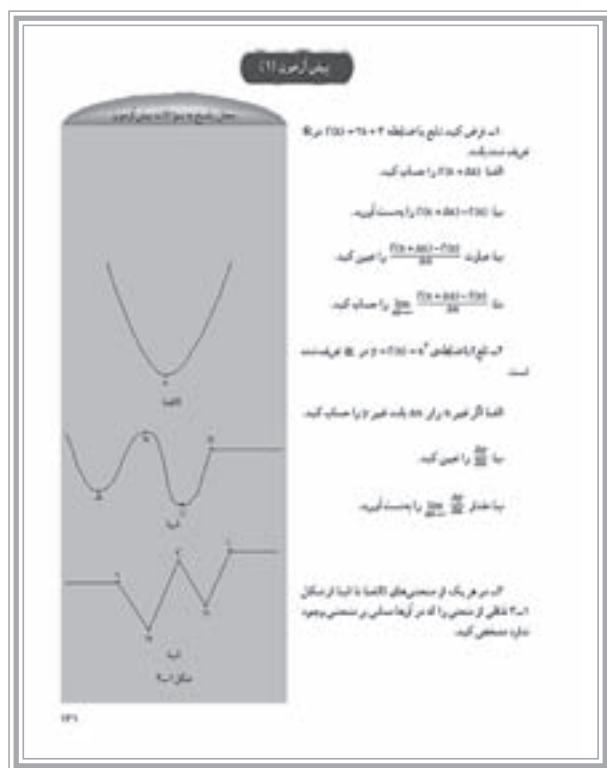
در این صفحه می‌خواهیم دانش آموزان را با چالش

(مشکل) مواجه کنیم تا انگیزه‌ای برای پذیرش مفهوم مشتق پیدا کنند.

البته در ریاضیات ۱ و ۲ در مورد پیدا کردن ماکسیمم (یا مینیمم) یک تابع با استفاده از نمودار آن مطالبی گفته شده است و در حالت کلی با رسم یک تابع، به کمک ماشین حساب‌های مخصوص یا کامپیوتر، می‌توان محل ماکسیمم و مینیمم را یافت.

در این فصل می‌خواهیم این کارها را با استفاده از مشتق اجرا کنیم، که ابزاری تواناست و به سرعت ما را به نتیجه می‌رساند.

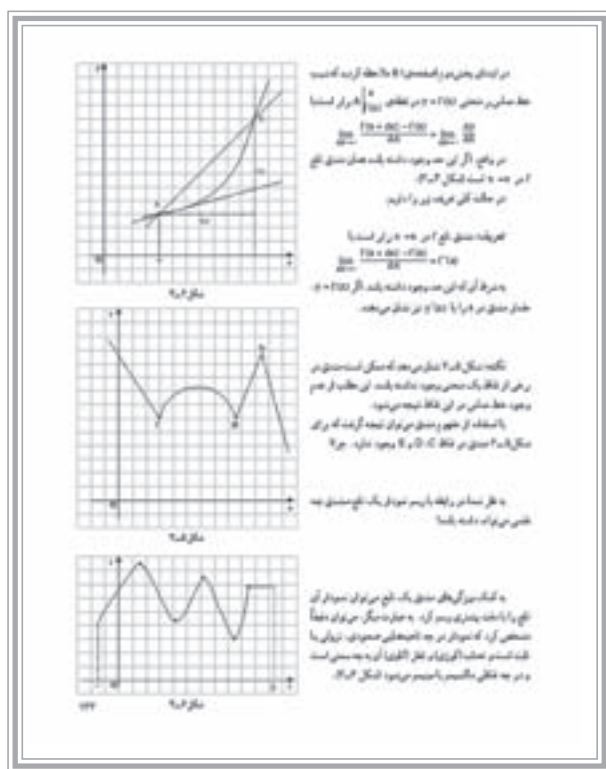
در فعالیت ۳-۱ دانش‌آموزان را آزاد بگذارید تا خودشان مشکل را حل کنند. برخی از دانش‌آموزان با استفاده از شمردن مربع‌های مستطیل‌ها، اگر اشتباه نکنند، مساحت آن را به دست می‌آورند که در این صورت برای مربع‌های غیر کامل مجبورند از



میل می کنند! ولی حدکسر در اکثر اوقات وجود دارد. البته وجود حدبستگی کامل با امکان رسم مماس دارد. در واقع شکل ۳-۵ مواردی را، که خط مماس یا حد مذکور در تعریف مشتق وجود ندارد، نشان می دهد.

وظیفه‌ی مهمی که در تدریس این صفحه به عهده‌ی دبیران محترم است طرح سؤال داخل مستطیل قرمز رنگ و گرفتن پاسخ‌های لازم از زبان دانش‌آموزان است. البته در قسمت آخر این صفحه موارد استفاده از مشتق بیان شده است.

مطالب این قسمت نیز در دانش‌آموزان، انگیزه بیش‌تری برای دانستن مشتق یک تابع ایجاد می کند.



تقریب استفاده کنند. مثلاً، این دانش‌آموزان عدد تقریبی ۱۱/۵ سانتی‌متر مربع را برای $S(2)$ ارائه خواهند نمود (زیرا هر واحد مربع از ۴ مربع آبی رنگ تشکیل می‌شود و قسمت بالای مستطیل را هم حدوداً دو مربع در نظر گرفته ایم).

بعضی از دانش‌آموزان ضلع دیگر مستطیل را، با استفاده از شعاع دایره که ۶ سانتی‌متر است، به دست می‌آورند. مثلاً، برای $x = 2$ داریم:

$$\begin{aligned} \text{طول مستطیل} &= \sqrt{6^2 - x^2} = \sqrt{36 - x^2} \\ &= \sqrt{36 - 4} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

لذا، مساحت مستطیل را چنین به دست می‌آورند:

سانتی‌متر مربع $S(2) = 2 \times 4\sqrt{2} = 8\sqrt{2} \approx 8 \times 1.41 \approx 11.3$ به همین ترتیب برای x های دیگر مساحت مستطیل متناظر را حساب خواهند کرد و جدول ۳-۱ را کامل می کنند.

البته دانش‌آموزان با هوش به سادگی می‌توانند به برخی از سؤال‌های بعد از جدول ۳-۱ پاسخ دهند.

این که $S(x)$ ، وقتی x از ۰ تا ۶ تغییر می‌کند، نه افزایشی است و نه کاهشی، بلکه در نقطه‌ای دارای ماکسیمم است. ضمناً، نمی‌توانند به‌طور دقیق بازه‌ای که $S(x)$ در آن نزولی است را مشخص کنند. پیدا کردن این ماکسیمم برای دانش‌آموزان بسیار مشکل است، مگر آن که منحنی $y = x\sqrt{36 - x^2}$ را در (۰،۶) رسم کنند و ماکسیمم آن را به‌طور تقریبی ارائه نمایند. اگر امکان داشته باشد این منحنی را با کامپیوتر رسم و نتیجه را ملاحظه کنید، که معمولاً چنین وسیله‌ای هم در اختیار ندارند (البته به کمک کامپیوتر و برخی نرم‌افزارها نیز می‌توانند این کار را عملی سازند).

آموزش صفحه‌ی ۱۳۳

در این صفحه بیش‌تر سعی شده است که بستگی مشتق با ضریب زاویه‌ی خط مماس بر نمودار یک تابع نشان داده شود. از دانش‌آموزان بخواهید با مطالعه‌ی این صفحه ملاحظه کنند که پیدا کردن مشتق در یک نقطه مستلزم تعیین حد یک کسر است و در واقع صورت و مخرج آن به‌طور جداگانه به صفر

آموزش صفحه‌ی ۱۳۴

در این صفحه چند فرمول برای محاسبه‌ی مشتق ارائه شده است. فرمول (۱) چندین بار مطرح شده است. این فرمول را مبنا قرار دهید و دو فرمول دیگر را با راهنمایی، توسط دانش‌آموزان به دست آورید.

سپس از دانش‌آموزان بخواهید که مثال‌های نمونه را مطالعه کنند و با فرمول‌ها مطابقت دهند.

با استفاده از فرمول (۲) مشتق تابع ثابت و تابع درجه‌ی اول را به دست آورید و چند مثال از آن‌ها را ارائه کنید. مثلاً

$$y = 3\sqrt{2}, \quad y' = 0$$

$$y = 3x + 4, \quad y' = 3$$

$$y = \sqrt{2} - 5x, \quad y' = -5$$

آموزش صفحه‌ی ۱۳۵

کار در کلاس ۲-۱ توسط دانش‌آموزان اجرا خواهد شد (در حداکثر ۱۵ دقیقه). دانش‌آموزان را آزاد بگذارید تا فرمول موردنظر خود را، از بین فرمول‌های (۱) تا (۳)، انتخاب کنند. پیش‌بینی این است که اکثر دانش‌آموزان فرمول (۲) را انتخاب خواهند کرد (به دلیل سادگی آن). البته بعداً ملاحظه خواهند کرد که برای هر عدد حقیقی n ، اگر $y = x^n$ آن‌گاه $y' = nx^{n-1}$ (صفحه‌ی ۱۳۹).

اما مطلب مهمی که در این صفحه آموزش داده می‌شود تعبیر هندسی مشتق، به عنوان ضریب زاویه‌ی خط مماس است. باید توجه داشت که می‌گوییم تابع f در $x = a$ حد دارد به شرط آن که حد زیر، به عنوان یک عدد حقیقی، وجود داشته باشد:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \in \mathbb{R}$$

ولی در مورد مماس بر منحنی در $x = a$ ، اگر این حد $+\infty$ یا $-\infty$ هم باشد خط مماس، خطی موازی با محور OY ، وجود دارد. به عنوان مثال نمودار تابع f باضابطه‌ی

مثال‌های تمرین

۱-۳-۱. معادله‌ی مستقیم مماس به دایره $x^2 + y^2 = 1$ در نقطه $(1, 0)$ را بیابید.

۱-۳-۲. معادله‌ی مستقیم مماس به دایره $x^2 + y^2 = 1$ در نقطه $(0, 1)$ را بیابید.

۱-۳-۳. معادله‌ی مستقیم مماس به دایره $x^2 + y^2 = 1$ در نقطه $(-1, 0)$ را بیابید.

۱-۳-۴. معادله‌ی مستقیم مماس به دایره $x^2 + y^2 = 1$ در نقطه $(0, -1)$ را بیابید.

۱-۳-۵. معادله‌ی مستقیم مماس به دایره $x^2 + y^2 = 1$ در نقطه $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ را بیابید.

۱-۳-۶. معادله‌ی مستقیم مماس به دایره $x^2 + y^2 = 1$ در نقطه $(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ را بیابید.

۱-۳-۷. معادله‌ی مستقیم مماس به دایره $x^2 + y^2 = 1$ در نقطه $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ را بیابید.

۱-۳-۸. معادله‌ی مستقیم مماس به دایره $x^2 + y^2 = 1$ در نقطه $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ را بیابید.

۱-۳-۹. معادله‌ی مستقیم مماس به دایره $x^2 + y^2 = 1$ در نقطه $(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$ را بیابید.

۱-۳-۱۰. معادله‌ی مستقیم مماس به دایره $x^2 + y^2 = 1$ در نقطه $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$ را بیابید.

۱-۳-۱۱. معادله‌ی مستقیم مماس به دایره $x^2 + y^2 = 1$ در نقطه $(1, 0)$ را بیابید.

۱-۳-۱۲. معادله‌ی مستقیم مماس به دایره $x^2 + y^2 = 1$ در نقطه $(0, 1)$ را بیابید.

۱-۳-۱۳. معادله‌ی مستقیم مماس به دایره $x^2 + y^2 = 1$ در نقطه $(-1, 0)$ را بیابید.

۱-۳-۱۴. معادله‌ی مستقیم مماس به دایره $x^2 + y^2 = 1$ در نقطه $(0, -1)$ را بیابید.

۱-۳-۱۵. معادله‌ی مستقیم مماس به دایره $x^2 + y^2 = 1$ در نقطه $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ را بیابید.

۱-۳-۱۶. معادله‌ی مستقیم مماس به دایره $x^2 + y^2 = 1$ در نقطه $(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ را بیابید.

۱-۳-۱۷. معادله‌ی مستقیم مماس به دایره $x^2 + y^2 = 1$ در نقطه $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ را بیابید.

۱-۳-۱۸. معادله‌ی مستقیم مماس به دایره $x^2 + y^2 = 1$ در نقطه $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ را بیابید.

۱-۳-۱۹. معادله‌ی مستقیم مماس به دایره $x^2 + y^2 = 1$ در نقطه $(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$ را بیابید.

۱-۳-۲۰. معادله‌ی مستقیم مماس به دایره $x^2 + y^2 = 1$ در نقطه $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$ را بیابید.

کار در کلاس ۳-۱

مشتق تابع $f(x) = x^2$ را با استفاده از تعریف مشتق به دست آورید.

۱) $f(x) = x^2$

۲) $f(x) = x^3$

۳) $f(x) = x^4$

۴) $f(x) = x^5$

۵) $f(x) = x^6$

۶) $f(x) = x^7$

۷) $f(x) = x^8$

۸) $f(x) = x^9$

۹) $f(x) = x^{10}$

۱۰) $f(x) = x^{11}$

۱۱) $f(x) = x^{12}$

۱۲) $f(x) = x^{13}$

۱۳) $f(x) = x^{14}$

۱۴) $f(x) = x^{15}$

۱۵) $f(x) = x^{16}$

۱۶) $f(x) = x^{17}$

۱۷) $f(x) = x^{18}$

۱۸) $f(x) = x^{19}$

۱۹) $f(x) = x^{20}$

۲۰) $f(x) = x^{21}$

۲۱) $f(x) = x^{22}$

۲۲) $f(x) = x^{23}$

۲۳) $f(x) = x^{24}$

۲۴) $f(x) = x^{25}$

۲۵) $f(x) = x^{26}$

۲۶) $f(x) = x^{27}$

۲۷) $f(x) = x^{28}$

۲۸) $f(x) = x^{29}$

۲۹) $f(x) = x^{30}$

۳۰) $f(x) = x^{31}$

۳۱) $f(x) = x^{32}$

۳۲) $f(x) = x^{33}$

۳۳) $f(x) = x^{34}$

۳۴) $f(x) = x^{35}$

۳۵) $f(x) = x^{36}$

۳۶) $f(x) = x^{37}$

۳۷) $f(x) = x^{38}$

۳۸) $f(x) = x^{39}$

۳۹) $f(x) = x^{40}$

۴۰) $f(x) = x^{41}$

۴۱) $f(x) = x^{42}$

۴۲) $f(x) = x^{43}$

۴۳) $f(x) = x^{44}$

۴۴) $f(x) = x^{45}$

۴۵) $f(x) = x^{46}$

۴۶) $f(x) = x^{47}$

۴۷) $f(x) = x^{48}$

۴۸) $f(x) = x^{49}$

۴۹) $f(x) = x^{50}$

۵۰) $f(x) = x^{51}$

۵۱) $f(x) = x^{52}$

۵۲) $f(x) = x^{53}$

۵۳) $f(x) = x^{54}$

۵۴) $f(x) = x^{55}$

۵۵) $f(x) = x^{56}$

۵۶) $f(x) = x^{57}$

۵۷) $f(x) = x^{58}$

۵۸) $f(x) = x^{59}$

۵۹) $f(x) = x^{60}$

۶۰) $f(x) = x^{61}$

۶۱) $f(x) = x^{62}$

۶۲) $f(x) = x^{63}$

۶۳) $f(x) = x^{64}$

۶۴) $f(x) = x^{65}$

۶۵) $f(x) = x^{66}$

۶۶) $f(x) = x^{67}$

۶۷) $f(x) = x^{68}$

۶۸) $f(x) = x^{69}$

۶۹) $f(x) = x^{70}$

۷۰) $f(x) = x^{71}$

۷۱) $f(x) = x^{72}$

۷۲) $f(x) = x^{73}$

۷۳) $f(x) = x^{74}$

۷۴) $f(x) = x^{75}$

۷۵) $f(x) = x^{76}$

۷۶) $f(x) = x^{77}$

۷۷) $f(x) = x^{78}$

۷۸) $f(x) = x^{79}$

۷۹) $f(x) = x^{80}$

۸۰) $f(x) = x^{81}$

۸۱) $f(x) = x^{82}$

۸۲) $f(x) = x^{83}$

۸۳) $f(x) = x^{84}$

۸۴) $f(x) = x^{85}$

۸۵) $f(x) = x^{86}$

۸۶) $f(x) = x^{87}$

۸۷) $f(x) = x^{88}$

۸۸) $f(x) = x^{89}$

۸۹) $f(x) = x^{90}$

۹۰) $f(x) = x^{91}$

۹۱) $f(x) = x^{92}$

۹۲) $f(x) = x^{93}$

۹۳) $f(x) = x^{94}$

۹۴) $f(x) = x^{95}$

۹۵) $f(x) = x^{96}$

۹۶) $f(x) = x^{97}$

۹۷) $f(x) = x^{98}$

۹۸) $f(x) = x^{99}$

۹۹) $f(x) = x^{100}$

۱۰۰) $f(x) = x^{101}$

۱۰۱) $f(x) = x^{102}$

۱۰۲) $f(x) = x^{103}$

۱۰۳) $f(x) = x^{104}$

۱۰۴) $f(x) = x^{105}$

۱۰۵) $f(x) = x^{106}$

۱۰۶) $f(x) = x^{107}$

۱۰۷) $f(x) = x^{108}$

۱۰۸) $f(x) = x^{109}$

۱۰۹) $f(x) = x^{110}$

۱۱۰) $f(x) = x^{111}$

۱۱۱) $f(x) = x^{112}$

۱۱۲) $f(x) = x^{113}$

۱۱۳) $f(x) = x^{114}$

۱۱۴) $f(x) = x^{115}$

۱۱۵) $f(x) = x^{116}$

۱۱۶) $f(x) = x^{117}$

۱۱۷) $f(x) = x^{118}$

۱۱۸) $f(x) = x^{119}$

۱۱۹) $f(x) = x^{120}$

۱۲۰) $f(x) = x^{121}$

۱۲۱) $f(x) = x^{122}$

۱۲۲) $f(x) = x^{123}$

۱۲۳) $f(x) = x^{124}$

۱۲۴) $f(x) = x^{125}$

۱۲۵) $f(x) = x^{126}$

۱۲۶) $f(x) = x^{127}$

۱۲۷) $f(x) = x^{128}$

۱۲۸) $f(x) = x^{129}$

۱۲۹) $f(x) = x^{130}$

۱۳۰) $f(x) = x^{131}$

۱۳۱) $f(x) = x^{132}$

۱۳۲) $f(x) = x^{133}$

۱۳۳) $f(x) = x^{134}$

۱۳۴) $f(x) = x^{135}$

۱۳۵) $f(x) = x^{136}$

۱۳۶) $f(x) = x^{137}$

۱۳۷) $f(x) = x^{138}$

۱۳۸) $f(x) = x^{139}$

۱۳۹) $f(x) = x^{140}$

۱۴۰) $f(x) = x^{141}$

۱۴۱) $f(x) = x^{142}$

۱۴۲) $f(x) = x^{143}$

۱۴۳) $f(x) = x^{144}$

۱۴۴) $f(x) = x^{145}$

۱۴۵) $f(x) = x^{146}$

۱۴۶) $f(x) = x^{147}$

۱۴۷) $f(x) = x^{148}$

۱۴۸) $f(x) = x^{149}$

۱۴۹) $f(x) = x^{150}$

۱۵۰) $f(x) = x^{151}$

۱۵۱) $f(x) = x^{152}$

۱۵۲) $f(x) = x^{153}$

۱۵۳) $f(x) = x^{154}$

۱۵۴) $f(x) = x^{155}$

۱۵۵) $f(x) = x^{156}$

۱۵۶) $f(x) = x^{157}$

۱۵۷) $f(x) = x^{158}$

۱۵۸) $f(x) = x^{159}$

۱۵۹) $f(x) = x^{160}$

۱۶۰) $f(x) = x^{161}$

۱۶۱) $f(x) = x^{162}$

۱۶۲) $f(x) = x^{163}$

۱۶۳) $f(x) = x^{164}$

۱۶۴) $f(x) = x^{165}$

۱۶۵) $f(x) = x^{166}$

۱۶۶) $f(x) = x^{167}$

۱۶۷) $f(x) = x^{168}$

۱۶۸) $f(x) = x^{169}$

۱۶۹) $f(x) = x^{170}$

۱۷۰) $f(x) = x^{171}$

۱۷۱) $f(x) = x^{172}$

۱۷۲) $f(x) = x^{173}$

۱۷۳) $f(x) = x^{174}$

۱۷۴) $f(x) = x^{175}$

۱۷۵) $f(x) = x^{176}$

۱۷۶) $f(x) = x^{177}$

۱۷۷) $f(x) = x^{178}$

۱۷۸) $f(x) = x^{179}$

۱۷۹) $f(x) = x^{180}$

۱۸۰) $f(x) = x^{181}$

۱۸۱) $f(x) = x^{182}$

۱۸۲) $f(x) = x^{183}$

۱۸۳) $f(x) = x^{184}$

۱۸۴) $f(x) = x^{185}$

۱۸۵) $f(x) = x^{186}$

۱۸۶) $f(x) = x^{187}$

۱۸۷) $f(x) = x^{188}$

۱۸۸) $f(x) = x^{189}$

۱۸۹) $f(x) = x^{190}$

۱۹۰) $f(x) = x^{191}$

۱۹۱) $f(x) = x^{192}$

۱۹۲) $f(x) = x^{193}$

۱۹۳) $f(x) = x^{194}$

۱۹۴) $f(x) = x^{195}$

۱۹۵) $f(x) = x^{196}$

۱۹۶) $f(x) = x^{197}$

۱۹۷) $f(x) = x^{198}$

۱۹۸) $f(x) = x^{199}$

۱۹۹) $f(x) = x^{200}$

۲۰۰) $f(x) = x^{201}$

۲۰۱) $f(x) = x^{202}$

۲۰۲) $f(x) = x^{203}$

۲۰۳) $f(x) = x^{204}$

۲۰۴) $f(x) = x^{205}$

۲۰۵) $f(x) = x^{206}$

۲۰۶) $f(x) = x^{207}$

۲۰۷) $f(x) = x^{208}$

۲۰۸) $f(x) = x^{209}$

۲۰۹) $f(x) = x^{210}$

۲۱۰) $f(x) = x^{211}$

۲۱۱) $f(x) = x^{212}$

۲۱۲) $f(x) = x^{213}$

۲۱۳) $f(x) = x^{214}$

۲۱۴) $f(x) = x^{215}$

۲۱۵) $f(x) = x^{216}$

۲۱۶) $f(x) = x^{217}$

۲۱۷) $f(x) = x^{218}$

۲۱۸) $f(x) = x^{219}$

۲۱۹) $f(x) = x^{220}$

۲۲۰) $f(x) = x^{221}$

۲۲۱) $f(x) = x^{222}$

۲۲۲) $f(x) = x^{223}$

۲۲۳) $f(x) = x^{224}$

۲۲۴) $f(x) = x^{225}$

۲۲۵) $f(x) = x^{226}$

۲۲۶) $f(x) = x^{227}$

۲۲۷) $f(x) = x^{228}$

۲۲۸) $f(x) = x^{229}$

۲۲۹) $f(x) = x^{230}$

۲۳۰) $f(x) = x^{231}$

۲۳۱) $f(x) = x^{232}$

۲۳۲) $f(x) = x^{233}$

۲۳۳) $f(x) = x^{234}$

۲۳۴) $f(x) = x^{235}$

۲۳۵) $f(x) = x^{236}$

۲۳۶) $f(x) = x^{237}$

۲۳۷) $f(x) = x^{238}$

۲۳۸) $f(x) = x^{239}$

۲۳۹) $f(x) = x^{240}$

۲۴۰) $f(x) = x^{241}$

۲۴۱) $f(x) = x^{242}$

۲۴۲) $f(x) = x^{243}$

۲۴۳) $f(x) = x^{244}$

۲۴۴) $f(x) = x^{245}$

۲۴۵) $f(x) = x^{246}$

۲۴۶) $f(x) = x^{247}$

۲۴۷) $f(x) = x^{248}$

۲۴۸) $f(x) = x^{249}$

۲۴۹) $f(x) = x^{250}$

۲۵۰) $f(x) = x^{251}$

۲۵۱) $f(x) = x^{252}$

۲۵۲) $f(x) = x^{253}$

۲۵۳) $f(x) = x^{254}$

۲۵۴) $f(x) = x^{255}$

۲۵۵) $f(x) = x^{256}$

۲۵۶) $f(x) = x^{257}$

۲۵۷) $f(x) = x^{258}$

۲۵۸) $f(x) = x^{259}$

۲۵۹) $f(x) = x^{260}$

۲۶۰) $f(x) = x^{261}$

۲۶۱) $f(x) = x^{262}$

۲۶۲) $f(x) = x^{263}$

۲۶۳) $f(x) = x^{264}$

۲۶۴) $f(x) = x^{265}$

۲۶۵) $f(x) = x^{266}$

۲۶۶) $f(x) = x^{267}$

۲۶۷) $f(x) = x^{268}$

۲۶۸) $f(x) = x^{269}$

۲۶۹) $f(x) = x^{270}$

۲۷۰) $f(x) = x^{271}$

۲۷۱) $f(x) = x^{272}$

۲۷۲) $f(x) = x^{273}$

۲۷۳) $f(x) = x^{274}$

۲۷۴) $f(x) = x^{275}$

۲۷۵) $f(x) = x^{276}$

۲۷۶) $f(x) = x^{277}$

۲۷۷) $f(x) = x^{278}$

۲۷۸) $f(x) = x^{279}$

۲۷۹) $f(x) = x^{280}$

۲۸۰) $f(x) = x^{281}$

۲۸۱) $f(x) = x^{282}$

۲۸۲) $f(x) = x^{283}$

۲۸۳) $f(x) = x^{284}$

۲۸۴) $f(x) = x^{285}$

۲۸۵) $f(x) = x^{286}$

۲۸۶) $f(x) = x^{287}$

۲۸۷) $f(x) = x^{288}$

۲۸۸) $f(x) = x^{289}$

۲۸۹) $f(x) = x^{290}$

۲۹۰) $f(x) = x^{291}$

۲۹۱) $f(x) = x^{292}$

۲۹۲) $f(x) = x^{293}$

۲۹۳) $f(x) = x^{294}$

۲۹۴) $f(x) = x^{295}$

۲۹۵) $f(x) = x^{296}$

۲۹۶) $f(x) = x^{297}$

۲۹۷) $f(x) = x^{298}$

۲۹۸) $f(x) = x^{299}$

۲۹۹) $f(x) = x^{300}$

۳۰۰) $f(x) = x^{301}$

۳۰۱) $f(x) = x^{302}$

۳۰۲) $f(x) = x^{303}$

۳۰۳) $f(x) = x^{304}$

۳۰۴) $f(x) = x^{305}$

۳۰۵) $f(x) = x^{306}$

۳۰۶) $f(x) = x^{307}$

۳۰۷) $f(x) = x^{308}$

۳۰۸) $f(x) = x^{309}$

۳۰۹) $f(x) = x^{310}$

۳۱۰) $f(x) = x^{311}$

۳۱۱) $f(x) = x^{312}$

۳۱۲) $f(x) = x^{313}$

۳۱۳) $f(x) = x^{314}$

۳۱۴) $f(x) = x^{315}$

۳۱۵) $f(x) = x^{316}$

۳۱۶) $f(x) = x^{317}$

۳۱۷) $f(x) = x^{318}$

۳۱۸) $f(x) = x^{319}$

۳۱۹) $f(x) = x^{320}$

۳۲۰) $f(x) = x^{321}$

۳۲۱) $f(x) = x^{322}$

۳۲۲) $f(x) = x^{323}$

۳۲۳) $f(x) = x^{324}$

۳۲۴) $f(x) = x^{325}$

۳۲۵) $f(x) = x^{326}$

۳۲۶) $f(x) = x^{327}$

۳۲۷) $f(x) = x^{328}$

۳۲۸) $f(x) = x^{329}$

۳۲۹) $f(x) = x^{330}$

۳۳۰) $f(x) = x^{331}$

۳۳۱) $f(x) = x^{332}$

۳۳۲) $f(x) = x^{333}$

۳۳۳) $f(x) = x^{334}$

۳۳۴) $f(x) = x^{335}$

۳۳۵) $f(x) = x^{336}$

۳۳۶) $f(x) = x^{337}$

۳۳۷) $f(x) = x^{338}$

۳۳۸) $f(x) = x^{339}$

۳۳۹) $f(x) = x^{340}$

۳۴۰) $f(x) = x^{341}$

۳۴۱) $f(x) = x^{342}$

۳۴۲) $f(x) = x^{343}$

۳۴۳) $f(x) = x^{344}$

۳۴۴) $f(x) = x^{345}$

۳۴۵) $f(x) = x^{346}$

۳۴۶) $f(x) = x^{347}$

۳۴۷) $f(x) = x^{348}$

۳۴۸) $f(x) = x^{349}$

۳۴۹) $f(x) = x^{350}$

۳۵۰) $f(x) = x^{351}$

۳۵۱) $f(x) = x^{352}$

۳۵۲) $f(x) = x^{353}$

۳۵۳) $f(x) = x^{354}$

۳۵۴) $f(x) = x^{355}$

۳۵۵) $f(x) = x^{356}$

۳۵۶) $f(x) = x^{357}$

۳۵۷) $f(x) = x^{358}$

۳۵۸) $f(x) = x^{359}$

۳۵۹) $f(x) = x^{360}$

۳۶۰) $f(x) = x^{361}$

۳۶۱) $f(x) = x^{362}$

۳۶۲) $f(x) = x^{363}$

۳۶۳) $f(x) = x^{364}$

۳۶۴) $f(x) = x^{365}$

۳۶۵) $f(x) = x^{366}$

۳۶۶) $f(x) = x^{367}$

۳۶۷) $f(x) = x^{368}$

۳۶۸) $f(x) = x^{369}$

۳۶۹) $f(x) = x^{370}$

۳۷۰) $f(x) = x^{371}$

۳۷۱) $f(x) = x^{372}$

۳۷۲) $f(x) = x^{373}$

۳۷۳) $f(x) = x^{374}$

۳۷۴) $f(x) = x^{375}$

۳۷۵) $f(x) = x^{376}$

۳۷۶) $f(x) = x^{377}$

۳۷۷) $f(x) = x^{378}$

۳۷۸) $f(x) = x^{379}$

۳۷۹) $f(x) = x^{380}$

۳۸۰) $f(x) = x^{381}$

۳۸۱) $f(x) = x^{382}$

۳۸۲) $f(x) = x^{383}$

۳۸۳) $f(x) = x^{384}$

۳۸۴) $f(x) = x^{385}$

۳۸۵) $f(x) = x^{386}$

۳۸۶) $f(x) = x^{387}$

۳۸۷) $f(x) = x^{388}$

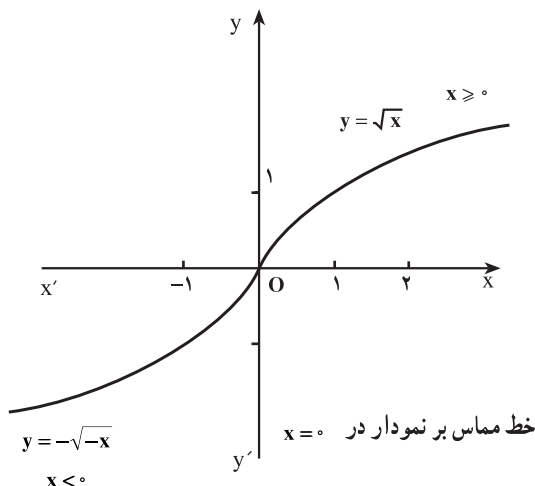
۳۸۸) $f(x) = x^{389}$

۳۸۹) $f(x) = x^{390}$

۳۹۰) $f(x) = x^{391}$

۳۹۱) $f(x) = x^{392}</$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ -\sqrt{-x}, & x < 0 \end{cases} \text{ به صورت روبرو است:}$$



و به سادگی معلوم می شود که $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = +\infty$

البته توجه داشته باشید که تابع زیر در $x=0$ مشتق ندارد (شکل آن را خودتان رسم کنید)

$$f(x) = \sqrt{|x|}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{h}}{h} = +\infty \quad \text{زیرا}$$

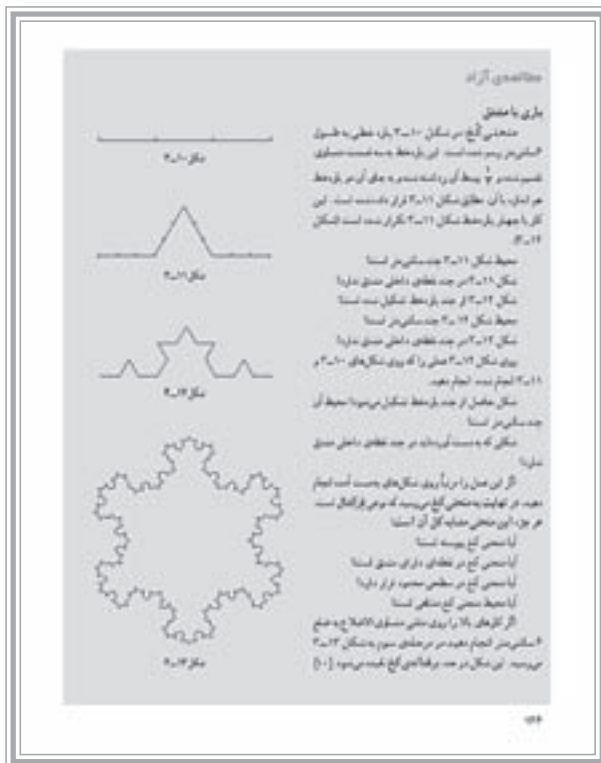
$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{-h}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{1}{-\sqrt{-h}} = -\infty$$

آموزش صفحه‌ی ۱۳۶

مطالعه‌ی این صفحه اختیاری است. موضوع آن ساخت دنباله‌ای از شکل هاست. همان طور که دنباله‌ای از اعداد، مثلاً اعداد $1, 2, 3, \dots, n \in \mathbb{N}$ به $1, 2, 3, \dots, n$ و $1, 2, 3, \dots, n$ به عدد ۲ میل می کند می توان دنباله‌ای از شکل ها داشت و از حد آن دنباله صحبت کرد (معمولاً رسم حد یک دنباله از اشکال ممکن است آسان نباشد و فقط بتوان آن را تصور کرد!).

همان طور که از شکل های ۱۱-۳ و ۱۲-۳ نتیجه می شود، مرتباً تعداد نقاطی که مماس در آن ها وجود ندارد زیاد می شود. اگر فرایند ذکر شده را ادامه دهید در حد شکلی به دست می آید که پیوسته است، در سطحی محدود قرار دارد، محیط آن بی نهایت است! و در هیچ نقطه‌ای مماس (مشتق) ندارد!

دانش آموزان را آزاد بگذارید تا این صفحه را (در منزل) مطالعه کنند (در صورت تمایل). مع هذا، اگر سؤال داشتند یا منابع بیش تری خواستند آن ها را راهنمایی کنید. مقاله مربوط به فرکتال ها در مجله رشد آموزش ریاضی به چاپ رسیده است که می توانید، در صورتی که وقت اجازه دهد، از مثال های آن نیز استفاده کنید و به حال و هوای کلاس خود تنوع ببخشید حتی می توانید دانش آموز علاقه مندی را مأمور کنید که مطالبی را در این خصوص تهیه و به صورت سمینار ارائه نماید، که این خود شروعی برای پژوهش دانش آموزی است،



آموزش صفحه‌های ۱۳۷ و ۱۳۸

همان‌طور که در کتاب هم تأکید شده، اثبات قضیه‌ها موردنظر نیست بلکه کاربرد آن‌ها مهم است. از دانش‌آموزان بخواهید این صفحه را مطالعه کنند و مثال‌های آن را با دقت دنبال نمایند و با مثال‌های بیش‌تر قضیه‌ها را توضیح دهید.

بدیهی است که نتایج مندرج در صفحه‌ی ۱۳۸ مهم‌اند و باید با مثال‌های بیش‌تری همراه شوند.

کار در کلاس ۲-۳ نیز باید توسط تک‌تک دانش‌آموزان اجرا شود. انتظار نمی‌رود که دانش‌آموزان فرمول‌های مشتق را در این مرحله در حافظه داشته باشند. لذا، مراجعه‌ی آن‌ها به جدول صفحه‌ی ۱۳۹ بلامانع است.



درباره‌ی صفحه‌ی ۱۳۹

برای درج متنی که تحت شماره‌ی ۱-۵-۳ ملاحظه می‌کنید، ساعت‌ها و در جلسات متعددی بحث شده است. متأسفانه دبیران محترم، و حتی باسابقه و آگاه به جریانات روز، ولی اسیر سنت‌ها و جوّ مسموم محیط‌های آموزشی در این خصوص (استفاده از فن‌آوری‌های روز) مخالف ارائه‌ی جدول مشتق‌ها به دانش‌آموزان بودند. این طرز فکر انسان را به یاد روش استعمارگران انگلیسی می‌اندازد که هندیان را مجبور به حفظ جدول لگاریتم می‌کردند تا فکر کردن را از آن‌ها بگیرند. هدف اصلی از ارائه‌ی درس مشتق استفاده از آن برای امور مهم دیگر است که در فصل بعد کتاب آمده است. بنابراین، قویاً توصیه می‌شود که در آزمون‌های مربوط به مشتق، این جدول در اختیار دانش‌آموزان قرار گیرد؛ البته با مقیاس بزرگ‌تر. شایان ذکر است که اکثر نرم‌افزارها، MAPLE و DERIVE و ... به‌طور نمادین مشتق توابع را ارائه می‌کنند.



آموزش صفحه‌ی ۱۴۰

سؤال‌های این تمرین در زیر پاسخ داده شده است.

۱- همان‌طور که خواسته شده دانش‌آموزان می‌توانند از جدول مشتق صفحه‌ی ۱۳۹ کمک بگیرند (بهتر است که جدول صفحه‌ی ۱۳۹ روی برگه‌ای مناسب و با مقیاسی بزرگ‌تر تهیه و در اختیار دانش‌آموزان قرار گیرد. ضمناً تهیه‌ی آن به صورت لوحی بزرگ و نصب آن در محل مناسب نیز مفید است).

الف) $y' = 15x^2 - 6x$

ب) $y' = 15x^4 + 2x$

پ) $y' = 3(\cos^2 x - \sin^2 x)$

ت) $\frac{3}{2\sqrt{3x-1}}$

ث) $\frac{3}{5} \frac{2x+1}{\sqrt{(x^2+x)^2}}$

ج) $y' = \frac{-2(1+2\sin x)}{(\sin x + 2)^2}$

چ) $y' = 3(1 + \tan^2 3x) + \frac{1}{2\sqrt{x}} \cos \sqrt{x}$

ح) $y' = 7(3x^2 - 2)(x^3 - 2x + 1)^6$

۲- داریم: $f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$

بنابراین، $f'(0) = 2$.

۳- داریم: $y'_x = 15(2x)(x^2 - 1)^2 = 30x(x^2 - 1)^2$

۴- داریم:

$y'_x = (4u + 5)u' = (4\sqrt{x^2 + 4} + 5) \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}$

۵- از دانش‌آموزان بخواهید که به جدول نگاه نکنند

(حتی المقدور) ولی به آن‌ها اجازه دهید که از تمرین ۱ کمک بگیرند. جواب‌ها به قرار زیرند:

الف) $y' = 3$

ب) $y' = x^2 - x - 1$

پ) $y' = 12x^2 + 8$



ت) $y' = \frac{14x+6}{9}$

ث) $y' = \frac{2+3(\sin x + \cos x)}{(2\cos x + 3)^2}$

ج) $y' = 3 \sin x \cos x (\sin x - \cos x)$

چ) $y' = \frac{5}{4} (1 + \tan^2 \frac{x}{4}) \tan^4 \frac{x}{4}$

ح) $y' = \frac{-1}{2x\sqrt{x}}$

خ) $y' = \frac{-4 \sin x \cos^3 x}{3\sqrt{(1 + \cos 4x)^2}}$

آموزش صفحه‌ی ۱۴۱

چون یکی از کاربردهای مشتق رسم دقیق نمودارهاست و این مهم نیاز به مشتق دوم تابع دارد، در این صفحه نحوه‌ی به دست آوردن مشتق دوم بیان شده است. البته مطلب جدیدی نیست f' یا y' خود یک تابع است و در صورت امکان (وجود) مشتق آن را به دست می‌آوریم.

در این صفحه، فقط برای انتزاعی نبودن موضوع، مثالی ساده آورده‌ایم و در آن تقریباً گودی منحنی نمایش $y = \sin x$ با علامت مشتق مقایسه شده است. بعداً ملاحظه خواهد شد که در هر بازه‌ای که $y'' > 0$ گودی منحنی به طرف بالا (y های مثبت) و در هر بازه‌ای که $y'' < 0$ گودی منحنی به طرف پایین (y های منفی) است.

تمرین ۲-۳ در کلاس حل شود. جواب‌ها را در ادامه ملاحظه می‌کنید.

الف) $y'' = 4$

$$\text{ب) } y'' = \frac{-1}{2}$$

ج) $y'' = 6x + 4$

ت) $y'' = 6(x - 2)$

ث) $y'' = -4 \sin 2x$

7.) $y'' = -(\cos x + \sin x)$

$$c) y'' = \frac{-6}{(x+2)^3}$$

لازم به توضیح است که تمرین‌های این قسمت خود به خود شامل محاسبه‌ی مشتق اول هم هستند.

تمرین زیر در شاخه‌های مهندسی بسیار کاربرد دارد :

(الف) اگر $y = \sin \alpha x$ نشان دهید $y'' = -\alpha^2 y$.

(ب) اگر $y = \cos \alpha x$ نشان دهید $y'' = -\alpha^2 y$.

(ج) اگر $y = \sin \alpha x + \cos \alpha x$ آن گاه $y'' = -\alpha^2 y$.

مثال ۱۰

یک تابع تعریف شده می توان مشتق مشتق یک تابع را از آن گرفته کرد و آن را در صورت لزوم حساب کرد. مشتق تابع $f(x)$ را $f'(x)$ و مشتق تابع $f'(x)$ را $f''(x)$ نشان می دهیم. در مثال های زیر، مشتق دوم $f''(x)$ را برای چند تابع حساب شده است.

مشتق دوم یک تابع در رسم دقیق نمودار تابع آن گرفته و در (۱) یعنی نقطه صفر، ابتدا $f'(x)$ را پیدا می کنیم. این مطلب در آیه ۲۰ بخش بررسی می شود.

مثال ۱۱: در زیر نمودار تابع $f(x) = \sin x$ در رسم شده است.

۱

۲

۳

۴

۵

۶

۷

۸

۹

۱۰

۱۱

۱۲

۱۳

۱۴

۱۵

۱۶

۱۷

۱۸

۱۹

۲۰

۲۱

۲۲

۲۳

۲۴

۲۵

۲۶

۲۷

۲۸

۲۹

۳۰

۳۱

۳۲

۳۳

۳۴

۳۵

۳۶

۳۷

۳۸

۳۹

۴۰

۴۱

۴۲

۴۳

۴۴

۴۵

۴۶

۴۷

۴۸

۴۹

۵۰

۵۱

۵۲

۵۳

۵۴

۵۵

۵۶

۵۷

۵۸

۵۹

۶۰

۶۱

۶۲

۶۳

۶۴

۶۵

۶۶

۶۷

۶۸

۶۹

۷۰

۷۱

۷۲

۷۳

۷۴

۷۵

۷۶

۷۷

۷۸

۷۹

۸۰

۸۱

۸۲

۸۳

۸۴

۸۵

۸۶

۸۷

۸۸

۸۹

۹۰

۹۱

۹۲

۹۳

۹۴

۹۵

۹۶

۹۷

۹۸

۹۹

۱۰۰

۱۰۱

۱۰۲

۱۰۳

۱۰۴

۱۰۵

۱۰۶

۱۰۷

۱۰۸

۱۰۹

۱۱۰

۱۱۱

۱۱۲

۱۱۳

۱۱۴

۱۱۵

۱۱۶

۱۱۷

۱۱۸

۱۱۹

۱۲۰

۱۲۱

۱۲۲

۱۲۳

۱۲۴

۱۲۵

۱۲۶

۱۲۷

۱۲۸

۱۲۹

۱۳۰

۱۳۱

۱۳۲

۱۳۳

۱۳۴

۱۳۵

۱۳۶

۱۳۷

۱۳۸

۱۳۹

۱۴۰

۱۴۱

۱۴۲

۱۴۳

۱۴۴

۱۴۵

۱۴۶

۱۴۷

۱۴۸

۱۴۹

۱۵۰

۱۵۱

۱۵۲

۱۵۳

۱۵۴

۱۵۵

۱۵۶

۱۵۷

۱۵۸

۱۵۹

۱۶۰

۱۶۱

۱۶۲

۱۶۳

۱۶۴

۱۶۵

۱۶۶

۱۶۷

۱۶۸

۱۶۹

۱۷۰

۱۷۱

۱۷۲

۱۷۳

۱۷۴

۱۷۵

۱۷۶

۱۷۷

۱۷۸

۱۷۹

۱۸۰

۱۸۱

۱۸۲

۱۸۳

۱۸۴

۱۸۵

۱۸۶

۱۸۷

۱۸۸

۱۸۹

۱۹۰

۱۹۱

۱۹۲

۱۹۳

۱۹۴

۱۹۵

۱۹۶

۱۹۷

۱۹۸

۱۹۹

۲۰۰

۲۰۱

۲۰۲

۲۰۳

۲۰۴

۲۰۵

۲۰۶

۲۰۷

۲۰۸

۲۰۹

۲۱۰

۲۱۱

۲۱۲

۲۱۳

۲۱۴

۲۱۵

۲۱۶

۲۱۷

۲۱۸

۲۱۹

۲۲۰

۲۲۱

۲۲۲

۲۲۳

۲۲۴

۲۲۵

۲۲۶

۲۲۷

۲۲۸

۲۲۹

۲۳۰

۲۳۱

۲۳۲

۲۳۳

۲۳۴

۲۳۵

۲۳۶

۲۳۷

۲۳۸

۲۳۹

۲۴۰

۲۴۱

۲۴۲

۲۴۳

۲۴۴

۲۴۵

۲۴۶

۲۴۷

۲۴۸

۲۴۹

۲۵۰

۲۵۱

۲۵۲

۲۵۳

۲۵۴

۲۵۵

۲۵۶

۲۵۷

۲۵۸

۲۵۹

۲۶۰

۲۶۱

۲۶۲

۲۶۳

۲۶۴

۲۶۵

۲۶۶

۲۶۷

۲۶۸

۲۶۹

۲۷۰

۲۷۱

۲۷۲

۲۷۳

۲۷۴

۲۷۵

۲۷۶

۲۷۷

۲۷۸

۲۷۹

۲۸۰

۲۸۱

۲۸۲

۲۸۳

۲۸۴

۲۸۵

۲۸۶

۲۸۷

۲۸۸

۲۸۹

۲۹۰

۲۹۱

۲۹۲

۲۹۳

۲۹۴

۲۹۵

۲۹۶

۲۹۷

۲۹۸

۲۹۹

۳۰۰

۳۰۱

۳۰۲

۳۰۳

۳۰۴

۳۰۵

۳۰۶

۳۰۷

۳۰۸

۳۰۹

۳۱۰

۳۱۱

۳۱۲

۳۱۳

۳۱۴

۳۱۵

۳۱۶

۳۱۷

۳۱۸

۳۱۹

۳۲۰

۳۲۱

۳۲۲

۳۲۳

۳۲۴

۳۲۵

۳۲۶

۳۲۷

۳۲۸

۳۲۹

۳۳۰

۳۳۱

۳۳۲

۳۳۳

۳۳۴

۳۳۵

۳۳۶

۳۳۷

۳۳۸

۳۳۹

آموزش صفحه‌ی ۱۴۲

سؤال‌های آزمون پایانی (۱)، به جز سؤال ۴، به سادگی قابل پاسخ‌گویی‌اند. در زیر جواب‌ها را ملاحظه می‌کنید.

۱- داریم: $f'(x) = 2x$ ، پس $f'(1) = 2$.

۲- داریم:

$$y'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(1+h) - y(1)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(1+h) + 3 - 5}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h}{h} = 2$$

۳- به‌طور کلی تابع $y = |x - a|$ در جایی که $x - a = 0$

دارای مشتق نیست. بنابراین، نمودار $y = |x + 2|$ در جایی که $x + 2 = 0$ ، یعنی $x = -2$ ، دارای خط مماس نیست.

۴- واضح است که برای $f(x) = |x|$ داریم:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h| - |-h|}{2h} = 0$$

ولی تابع f در $x = 0$ مشتق ندارد. این سؤال مثال نقض

مهمی است. به‌طور کلی فرض کنید تابع f در $x = a$ مشتق داشته باشد در این صورت

$$\begin{aligned} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} &= \frac{[f(a+h) - f(a)]}{2h} + \frac{[f(a) - f(a-h)]}{2h} \\ &= \frac{f'(a)}{2} + \frac{f'(a)}{2} = f'(a) \end{aligned}$$

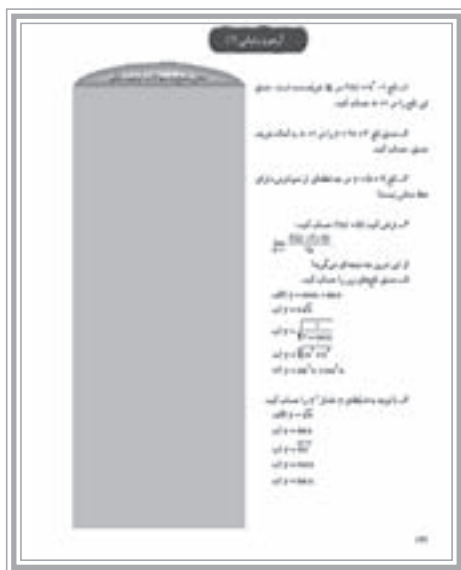
بنابراین، اگر $f'(a)$ وجود داشته باشد آن‌گاه

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = f'(a)$$

حال سؤال این است که اگر

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$$

وجود داشته باشد آیا $f'(a)$ وجود دارد؟ تابع موضوع سؤال ۴ مثال نقضی است که نشان می‌دهد پاسخ سؤال بالا منفی است. برای توابعی که فقط مقدار آن‌ها در بعضی نقاط در دست است و می‌دانیم در هر نقطه مشتق دارند کسر زیر تقریب خوبی برای



$f'(a)$ به‌دست می‌دهد:

$$\frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$$

۵- مشتق‌های خواسته شده را در زیر ملاحظه می‌کنید:

الف) $y' = -\sin x - \cos x$

ب) $y' = \frac{3}{2} \sqrt{x}$

پ) $y' = \frac{-\sin x}{2(2 + \cos x)\sqrt{2 + \cos x}}$

ت) $y' = \frac{6x}{5\sqrt[5]{(x^2 + 1)^2}}$

ث) $y' = 0$

در حل (ث) می‌توان از این که $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ استفاده کرد.

۶- y'' در زیر ملاحظه می‌شود:

الف) $y'' = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$

ب) $y'' = -\sin x$

پ) $y'' = -\frac{2}{9}x^{-\frac{4}{3}}$

ت) $y'' = -\cos x$

ث) $y'' = 2 \tan x (1 + \tan^2 x)$

آموزش صفحه‌های ۱۴۳ و ۱۴۴

تاریخ ریاضیات موضوعی جذاب و انگیزه‌بخش است. به‌ویژه این که سهم دانشمندان را در پیشبرد ریاضیات جهان نشان می‌دهد.

غیاث‌الدین جمشید کاشانی عدد π را با دقتی تا شانزده رقم اعشار، در قرن پانزدهم میلادی (نهم هجری قمری)، حساب کرد. او این کار را با استفاده از محاسبه‌ی $\sin 1^\circ$ تا ده رقم صحیح در مبنای 60° ارائه داد.

جمع‌آوری کارهای ریاضی که توسط غیاث‌الدین جمشید کاشانی ارائه شده است، می‌تواند پروژه‌ی مناسبی برای دانش‌آموزان علاقه‌مند باشد. البته با راهنمایی دبیران محترمی که پیشاپیش در این مورد مطالعه‌ی کافی داشته‌اند.

با ریاضیدانان نامی آشنا شوید

غیاث الدین جمشیدبن مسعود بن محمود طیب کاشانی، (غیاث الدین جمشید مسعود کاشانی) اگر چه فیزیکدان بود، ولی علاقه‌ی اصلیش متوجه ریاضیات و اخترشناسی بود. این ریاضیدان و ستاره‌شناس مشهور ایرانی در حدود ۷۹۰ هجری قمری در کاشان به دنیا آمد. وی از نوابغ ریاضی قرن نهم محسوب می‌شود. در کتاب‌ها آمده است که این مرد بزرگ و با اراده در روزگاری می‌زیست که ایران، میدان تاخت و تاز و یورش‌های مستبدانی همچون چنگیز، هلاکوخان و تیمور بود. غیاث الدین جمشید کاشانی در زمان تیموریان زندگی می‌کرد. زمانی که او در سن جوانی به کار تهیه جدول‌های محاسباتی نجوم مشغول بود، ایران در معرض ویرانی قرار داشت هنگامی که در اوج خلافت ذهنی، برای راحتی کار با سایر منجمان، محاسبات دقیق نجومی را انجام می‌داد و ابزار اختراع می‌کرد، تیمور و پسرش شاهرخ با تجاوز خود به ایران، شهرها را یکی پس از دیگری به ویرانه تبدیل می‌ساختند. در آن موقعیت سخت امکان فعالیت‌ها و تحقیقات جدی برای او وجود نداشت. پسر شاهرخ یعنی الغ بیگ، که حاکم سمرقند بود. او را به رصدخانه دعوت کرد و وی از فرصت خوبی که پیش آمده بود، استقبال کرد. کاشی (کاشانی) برجسته‌ترین مقام را در میان کارکنان علمی «مدرسه» یعنی آموزشگاه الهیات و علم، که در سال ۷۹۹ به همت الغ بیگ بنیاد نهاده شده بود، داشت. تا هنگامی که الغ بیگ در سال ۸۲۸ به قتل رسید، سمرقند مهم‌ترین مرکز علمی در خاور زمین بود. کاشی به سازماندهی رصدخانه کمک کرد و در زیج الغ بیگ همکاری نزدیک داشت. مشهورترین اثرش «مفتاح الحساب» (۸۰۶) می‌باشد که دایرةالمعارف حساب مقدماتی است که صدها سال به عنوان کتاب راهنما به کار رفت. غیاث الدین نمونه عالم مسلمان بود. مسلمانی که نه تنها فهم دینی داشت، بلکه در اخلاق عملی و رفتار هم نمونه بود. در کارهای علمی ملاحظه‌ی هیچ کس را نداشت و انصاف، خصلت بزرگی بود که او در زندگی اجتماعی و علمی داشت. در مدرسه بزرگ سمرقند، نزدیک به پانصد طلبه علم از نقاط مختلف دور هم جمع شده بودند الغ بیگ بیشتر وقت‌ها در کلاس‌های درس و مباحثه شرکت می‌کرد برخی از روی ترس و حفظ منافع، گفتار غلطش را تأیید می‌کردند ولی غیاث‌الدین در این موارد هیچ ملاحظه‌ای از خودش نشان نمی‌داد و مصلحت‌اندیشی نمی‌کرد. در مقدمه کتاب «مفتاح الحساب» نوشته است «ستایش خداوندی را سزااست که در آفرینش آحاد یگانه است و در به هم پیوستن اعداد گوناگون بی‌همتاست و درود به بهترین آفریده‌ی او محمد (ص) که والاترین شفاعت‌کننده‌ی روز رستاخیز است و بر خاندان او و فرزندان او که راه‌های رهایی و رستگاری را رهنمودند. اما بعد نیازمندترین بندگان خدای تعالی به آموزش و بخشش او، جمشید پسر مسعود، پسر محمود پزشک کاشی، ملقب به غیاث‌الدین که خدا روزگارش را نیکو گرداند ...

در این کتاب روش ریشه‌گیری از اعداد صحیح را شرح می‌دهد و نخستین روش منظم برای پرداختن به کسرهای دهدهی را به دست می‌دهد احتمالاً در اشاعه‌ی کسرهای دهدهی در اروپا تأثیر داشته است. بزرگ‌ترین آثار ریاضی وی عبارت‌اند از رساله محیطیه (۸۰۳) و رساله الوتر و الجیب.

در رساله محیطیه مقدار سینوس را تا هفده رقم اعشاری تعیین می‌کند و در اثر دوم مقدار سینوس ۱ درجه را تا ده رقم صحیح شصتگانی حساب می‌کند. در ابتدای کتاب رساله محیطیه این‌طور نوشته است «ستایش خداوندی را سزا که از نسبت قطر به محیط دایره آگاه است و اندازه هر مرکب و بسیط را می‌شناسد و آفریننده‌ی زمین و آسمان‌ها و قرار دهنده‌ی نور در تاریکی است و درود و سلام بر محمد مصطفی که مرکز دایره‌ی رسالت و محیط اقطار راهنمایی و دادگری است و بر خاندان و یاران پاک او باد»

جمشید کاشانی انسانی سختکوش، با هدف و منضبط و پرتلاش بود. عمر نسبتاً کوتاه و تعداد زیاد کتاب و تحقیقات او دلیل این ادعا است. جمشید کاشانی کتاب‌های زیادی در زمینه‌ی ریاضی کاربردی نوشته است که عموماً ارتباط نزدیکی با زندگی مردم و رفع مشکلات آنان داشته است. و همچنین تعداد زیادی ابزار نجومی برای محاسبات دقیق حرکت و وضعیت ستارگان ساخت که در روزگارش نظیر نداشت. روش او در حل عددی معادله‌ی تثلیث یکی از مهم‌ترین روش‌های جبر قرون وسطی است. از کارهای مهم کاشانی در نجوم تدوین زیج خاقانی است که در تکمیل نواقص زیج ایلخانی آن را تهیه کرد. وی در سال ۸۱۸ هـ.ق وسیله جدیدی برای رصد ستاره‌ها به نام طبق المناطق اختراع کرد و دربارهی چگونگی استفاده از آن و وسیله‌ی دیگری که پیش از آن ساخته (به نام لوح اتصالات) رساله جامع و مفیدی موسوم به نزهة الحدائق نوشت و از آثار دیگر او می‌توان به زیج تسهیلات و سلم السماء نیز اشاره کرد. این ریاضیدان بزرگ در سال ۸۳۲ هـ.ق در شهر سمرقند وفات یافت.

حل

حل: $f(x+h) = 5 - 2(x+h) = 5 - 2x - 2h$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5 - 2x - 2h - (5 - 2x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} -2 = -2$$

حل: $f(x+h) = (x+h)^2 + 3$

$$= x^2 + 2hx + h^2 + 3$$

$$f(x+h) - f(x) = 2hx + h^2$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x$$

حل:

$$f(x+h) = 4(x+h)^3 + 3$$

$$= 4x^3 + 12x^2h + 12xh^2 + 4h^3 + 3$$

$$f(x+h) - f(x) = 12x^2h + 12xh^2 + 4h^3$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{12x^2h + 12xh^2 + 4h^3}{h}$$

$$= 12x^2$$

حل مسائل پیش‌تر

۱- مشتق تابع با ضابطه‌ی $f(x) = 5 - 2x$ را با استفاده از تعریف به‌دست آورید.

۲- مشتق تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x^2 + 3$ را با استفاده از تعریف مشتق به‌دست آورید.

۳- مشتق تابع با ضابطه‌ی $f(x) = 4x^3 + 3$ را با استفاده از تعریف مشتق به‌دست آورید.

بخش چهارم

راهنمای آموزش فصل دوم از بخش سوم کتاب دانش آموز

شامل:

- آموزش صفحات ۱۴۵ تا ۱۶۰**
- حل مسائل بیش تر**

آموزش صفحه‌ی ۱۴۶

با توجه به موضوع این فصل، در پیش‌آزمون (۲) مقدمات لازم آزمایش می‌شود. جواب‌ها را در زیر ملاحظه می‌کنید.

۱- الف) $y_A = 1 - 1 + 1 = 1$

ب) داریم: $f'(1) = 1$ و $f'(x) = 2x - 1$

پ) $y - 1 = 1(x - 1)$

معادله‌ی خط (D): $y = x$

ت) نمودار $y = f(x)$ و خط (D) در مقابل رسم شده

است.

ث) خط (D) بر نمودار $y = f(x)$ مماس است.

۲- الف) نمودار $y = x^3$ در مقابل رسم شده است.

ب) از شکل پیداست که اگر $x_A < x_B$ آن‌گاه $y_A < y_B$.

بدون استفاده از شکل داریم:

$$y_B - y_A = (x_B^3 - x_A^3) = (x_B - x_A)(x_B^2 + x_B x_A + x_A^2)$$

با توجه به این که $(x_B^2 + x_B x_A + x_A^2)$ همیشه مثبت

است از $x_A < x_B$ داریم: $x_B - x_A > 0$ پس $y_B - y_A > 0$

یا $y_A < y_B$.

۳- داریم $f'(x) = 3x^2 - 1$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	$+$	$-$	$+\infty$

۴- داریم:

$$f(x) = x^3 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2$$

بنابراین، کم‌ترین مقدار $f(x)$ در $x = 1$ اتفاق می‌افتد و

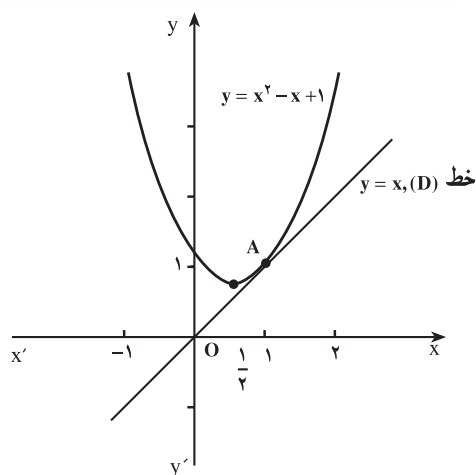
$f(1) = 2$ پس مینیمم مقدار $f(x)$ مساوی ۲ است. ضمناً،

$f'(x) = 2x - 2$ و $f'(1) = 0$ یعنی f' در x نقطه‌ی مینیمم،

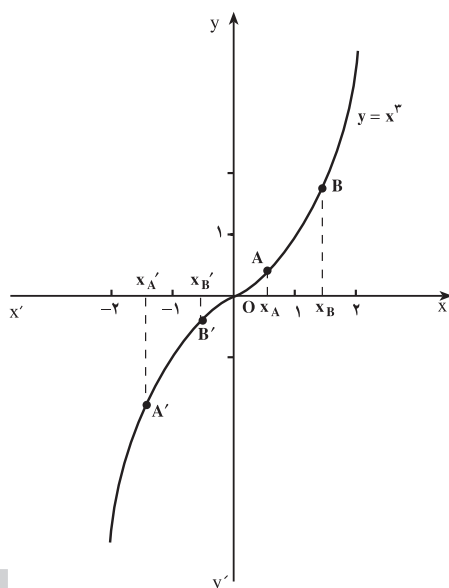
صفر است.

این پیش‌آزمون را در کلاس اجرا کنید. زمان لازم برای

اجرای آن حدود ۴۵ دقیقه است.



$$y = x^3 - x + 1 = (x - \frac{1}{\sqrt{3}})^2 + \frac{3}{4}$$



آموزش صفحه‌ی ۱۴۷

پرداختن به فعالیت ۲-۳، در صورتی که پیش‌آزمون (۲) به دقت اجرا شده باشد، ساده است. تنها نکته‌ی این فعالیت آن است که وقتی خط مماس موازی محور ox نباشد باید از حاصل ضرب شیب‌ها مساوی ۱- استفاده کرد و شیب خط قائم را حساب کرد.

اما، کار در کلاس ۳-۳، که با توجه به شکل بسیار آسان است، دارای این نکته است که هرگاه مماس در نقطه‌ای از منحنی موازی محور ox است، مثلاً مماس در نقطه‌ی B از شکل ۱۵-۳، خط قائم موازی محور oy خواهد بود.

آموزش صفحه‌ی ۱۴۸

در این صفحه با دو مثال نحوه‌ی تعیین خط مماس یا قائم بر یک منحنی در نقطه‌ای از آن نشان داده شده است. از دانش‌آموزان بخواهید این قسمت را مطالعه کنند و به سؤالات آن‌ها پاسخ دهید. ساده کردن معادله الزامی نیست مگر قید شده باشد که معادله را به صورت $y = ax + b$ یا به صورت $ax + by + c = 0$ بنویسند.

جواب سؤالات تمرین ۳-۳ را در ادامه ملاحظه می‌کنید.

۱- الف) معادله‌ی خط مماس $y = 7x - 7$

معادله‌ی خط قائم $y = -\frac{1}{7}x + \frac{51}{7}$

ب) معادله‌ی خط مماس $y = 1$

معادله‌ی خط قائم $x = -1$

پ) معادله‌ی خط مماس $y = 0$

معادله‌ی خط قائم $x = \pi$

ت) معادله‌ی خط مماس $y = 2x + 7$

معادله‌ی خط قائم $y = -\frac{1}{2}x + 2$

ث) معادله‌ی خط مماس $y = x$

معادله‌ی خط قائم $y = -x$

ج) معادله‌ی خط مماس $y = x + 1$

معادله‌ی خط قائم $y = -x + 3$

تمرین ۱ بسیاری از مفاهیم را دربر دارد، محاسبه‌ی مقدار تابع، محاسبه‌ی مشتق، محاسبه‌ی مشتق در یک نقطه و بالاخره نوشتن معادله‌ی یک خط با داشتن یک نقطه و شیب آن و نوشتن خط قائم با ظرافت‌های خاص آن. لذا، حل این تمرین را جدی بگیرید.

۲- رسم تابع‌های این تمرین را در این جا نمی‌آوریم زیرا بارها آن‌ها را رسم کرده‌ایم. فقط معادله‌ی مماس و قائم را در نقاط خواسته شده می‌نویسیم.

الف) داریم: $y' = \cos x$ و $y'(0) = 1$ و $y(0) = 0$

پس: $y - 0 = 1(x - 0)$ و خط مماس $y = x$ می‌باشد.

واضح است که خط قائم $y = -x$ است.

ب) داریم: $y' = -\sin x$ و $y'(0) = 0$ و $y(0) = 1$

پس، $y = 1$ خط مماس و $x = 0$ خط قائم است.

آموزش صفحه‌ی ۱۴۹

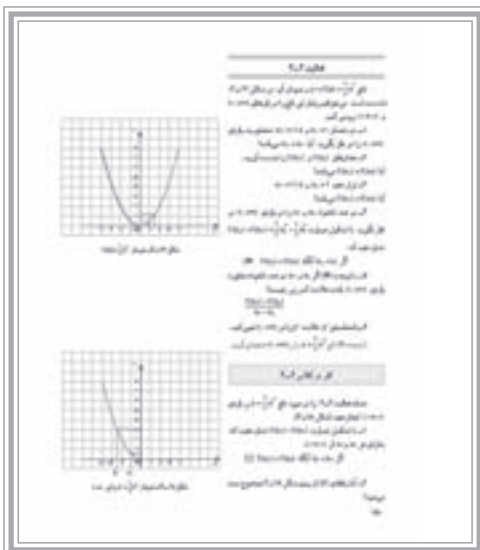
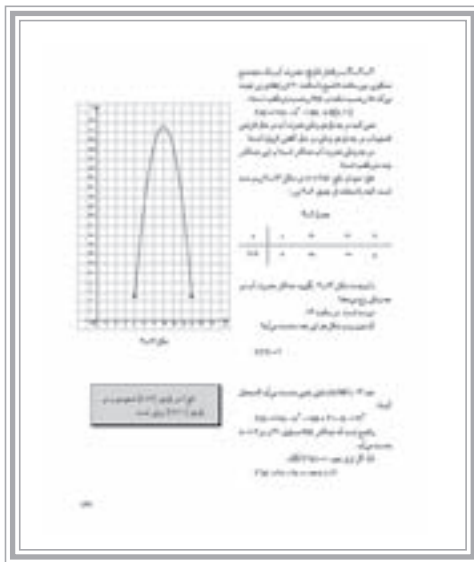
منظور از رفتار تابع، تعیین بازه‌هایی است که در آن‌ها تابع صعودی یا نزولی است، در این صفحه مقدمات این هدف، با توجه به آن‌چه در زندگی روزمره تجربه می‌کنیم، دنبال می‌شود. افزایش و کاهش، به بیان عادی آن‌ها، با مثالی ملموس مورد پرسش قرار می‌گیرد و نمودار تابع به خوبی راهنمای دانش‌آموزان است. در پایان صفحه، انتظار می‌رود، دانش‌آموزان ارتباط بین مشتق و x نقطه‌ی ماکسیم را دریابند.

آموزش صفحه‌ی ۱۵۰

در این صفحه مقدمات تعریف تابع صعودی و نزولی را فراهم می‌کنیم (طبق رویکرد برنامه، این مقدمات توسط یادگیرنده مهیا می‌شود).

فعالیت ۳-۳ توسط دانش‌آموزان، فردی یا گروهی، اجرا می‌شود. با انتخاب چند جفت نقطه و استفاده از نمودار، دانش‌آموزان ملاحظه می‌کنند که برای نمودار $y = \frac{1}{4}x^2$ ، در

$(0, +\infty)$ داریم:



$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

بدون شکل باید چنین عمل کنند :

$$(*) f(x_1) - f(x_2) = \frac{1}{4} x_1^2 - \frac{1}{4} x_2^2 = \frac{1}{4} (x_1 - x_2)(x_1 + x_2)$$

در $(0, +\infty)$ داریم $x_1 + x_2 > 0$. لذا، اگر $x_1 < x_2$ آن گاه $(x_1 - x_2) < 0$ و با توجه به $(*)$ ، $f(x_1) - f(x_2) < 0$ یعنی $f(x_1) < f(x_2)$. ضمناً، داریم از $(*)$:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{x_1 + x_2}{2} > 0 \quad (x_1, x_2 > 0)$$

لذا، اگر x_1 را ثابت و x_2 را به x_1 میل دهیم حتماً $f'(x_1)$ مثبت خواهد بود. این مطلب با محاسبه‌ی مشتق هم تأکید می‌شود :

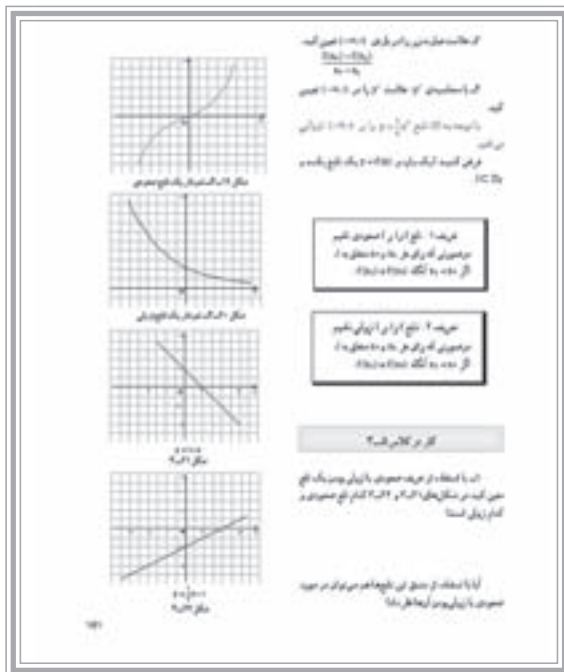
$$y' = x > 0 \quad (x \in (0, +\infty))$$

کار در کلاس ۳-۴ نیز به همین ترتیب انجام می‌شود.

آموزش صفحه‌ی ۱۵۱

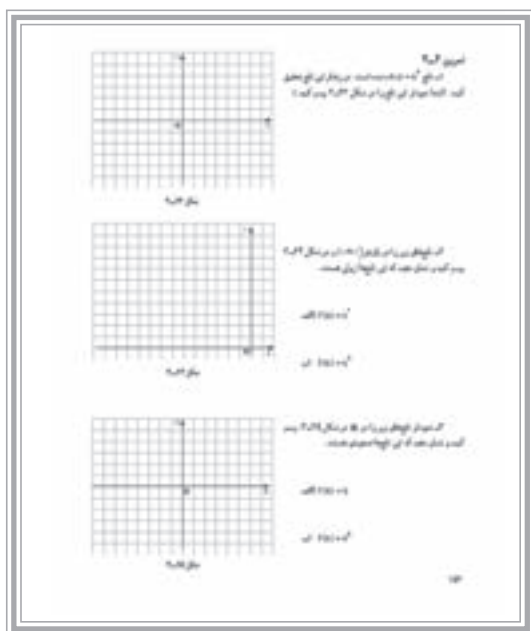
در این صفحه رسماً به تعریف تابع صعودی و تابع نزولی پرداخته شده است. برای دوری از طرح واژه‌های متعدد از عبارات اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی استفاده نکرده‌ایم. گرچه ممکن است برای دیران محترم مشکلاتی را دربر داشته باشد. دانش‌آموزان اطلاعی از توابع اکیداً صعودی یا نزولی ندارند بلکه معلم نظر آن‌ها را به این واژه‌ها جلب می‌کند.

در هر صورت با دو تعریف ارائه شده در این صفحه باید دقت کنید که هر تابع ثابت هم صعودی و هم نزولی است. دانش‌آموزان باید تا حدودی متوجه شده باشند که هر خط راست با شیب مثبت (یا صفر) یک تابع صعودی را مشخص می‌کند و هر خط راست با شیب منفی (یا صفر) یک تابع نزولی را معرفی می‌کند (شکل‌های ۳-۲۱ و ۳-۲۲).



آموزش صفحه ی ۱۵۲

در این صفحه رفتار تابع های $y = x^n$ ، که $n = 2, 3, 4, 5$ ، مورد بررسی قرار می گیرد. دانش آموزان در پایان اجرای تمرین ۳-۴ باید دریافته باشند که رفتار تابع $y = x^{2k}$ که k یک عدد طبیعی است، با رفتار تابع $y = x^2$ یکسان است (حتی نمودار آن ها نیز مشابه است). ضمناً، رفتار تابع $y = x^{2k+1}$ ، که k یک عدد طبیعی است، با رفتار تابع $y = x^3$ یکسان است (حتی نمودار آن ها نیز شبیه به هم است). لذا، تابع $y = x^{2k+1}$ برای هر k ی طبیعی صعودی است. تابع $y = x^{2k}$ برای هر k ی طبیعی در $[-\infty, 0]$ نزولی و در $[0, +\infty)$ صعودی است. این نتایج را مشتق نیز تأیید می کند.



آموزش صفحه های ۱۵۳ و ۱۵۴

در این صفحه، با توجه به صفحات قبل، رسماً ارتباط علامت مشتق و رفتار تابع مورد بررسی قرار می گیرد. از دانش آموزان بخواهید که این صفحه را مطالعه کنند. هدف آموزش این صفحه بیان این مطلب است که در هر بازه که تابع f صعودی باشد f' مثبت یا صفر است و به عکس اگر بر بازه I تابع f' نامنفی باشد تابع f بر I صعودی است. هدف اصلی تر این که می خواهیم از این حکم در حل مسائل و رسم نمودار توابع استفاده شود. مثال های این صفحه نیز در همین راستا هستند و دانش آموزان را با کاربرد این قضیه آشنا می کنند. در صفحه ی ۱۵۴ قضیه ی مشابهی برای توابع نزولی مطرح می شود.



اجرای کار در کلاس ۳-۶ توسط دانش آموزان ساده است و در مدت حدود ۲۰ دقیقه صورت می گیرد. پاسخ این کار در کلاس را در زیر ملاحظه می کنید.

۱- صعودی

۲- نزولی

۳- نزولی

۴- نزولی

۵- صعودی



۶- نزولی

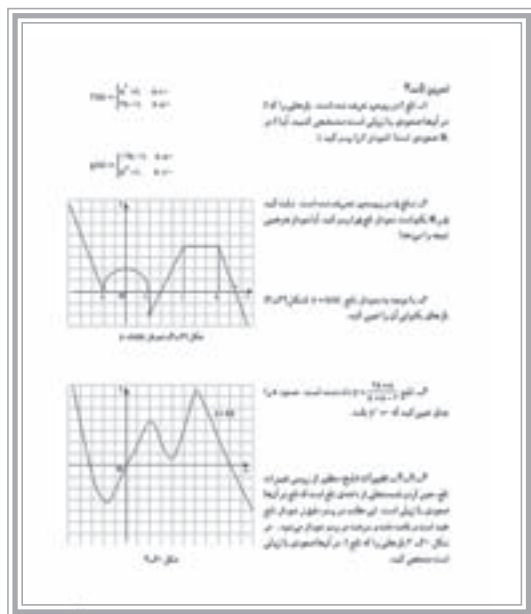
۷- نزولی

۸- صعودی

توجه داشته باشید که تابع $y = \sin x$ (یا $y = \cos x$) در $(\pi, 2\pi)$ یک‌نوا نیست (نه صعودی هستند و نه نزولی)، زیرا در قسمتی از این بازه صعودی و در قسمتی دیگر نزولی است.

آموزش صفحه‌ی ۱۵۵

این صفحه مروری بر آموخته‌های قبلی است، البته با تمرین‌های ساده! جواب‌ها را در این جا ملاحظه می‌کنید.



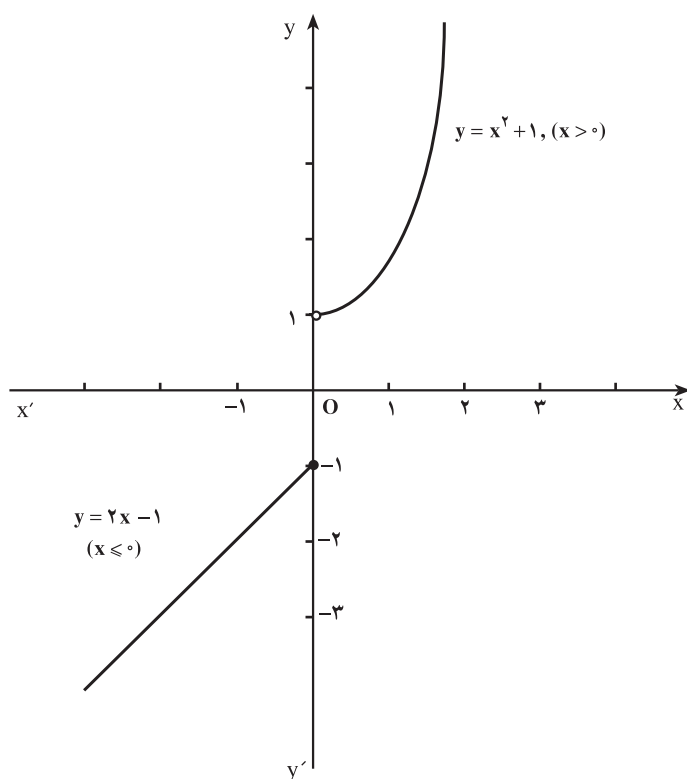
$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & x > 0 \\ 2, & x < 0 \end{cases} \quad \text{۱- داریم:}$$

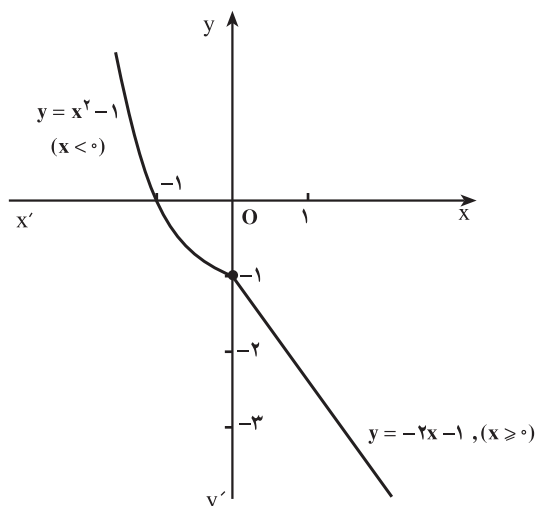
توجه کنید که تابع در $x = 0$ پیوسته نیست و لذا مشتق هم ندارد. با توجه به مشتق تابع گوئیم:

f در $(0, +\infty)$ صعودی و در $(-\infty, 0)$ نیز صعودی است،

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 > f(0) \text{ و } f(0) = -1$$

تابع f در \mathbb{R} صعودی است. شکل روبه‌رو نیز این مطلب را تأیید می‌کند.





۲- به سادگی معلوم می شود که

$$g'(x) = \begin{cases} -2 & x > 0 \\ 2x & x < 0 \end{cases}$$

ملاحظه می کنیم که f بر \mathbb{R} پیوسته و نزولی است. شکل روبه رو مؤید نتیجه ی بالاست.

۳- بازه های یک نوایی به صورت زیرند :

تابع h در $(-\infty, a]$ نزولی است.

تابع h در $[a, 0]$ صعودی است.

تابع h در $[0, b]$ نزولی است.

تابع h در $(b, d]$ صعودی است.

تابع h در $[c, +\infty)$ نزولی است.

۴- مشتق y را حساب می کنیم :

$$y' = \frac{a-4}{(x+a-2)^2}, \quad y' = 0 \Rightarrow a = 4$$

a	$-\infty$	4	$+\infty$
y'		$- \quad 0 \quad +$	

جواب : $a \in (4, +\infty)$

آموزش صفحه ی ۱۵۶

از دانش آموزان بخواهید که مثال بالای این صفحه را مطالعه کنند. در این مثال روش رسم نمودار یک تابع، با توجه به علامت y' و یکی دو نقطه از تابع، نشان داده شده است.

کار در کلاس ۷-۳ در راستای تمرین ها و مثال هایی است که قبلاً کار شده است و دانش آموزان نباید مشکلی در حل آن ها داشته باشند. پاسخ تمرین ۶-۳ را در زیر ملاحظه می کنید.

الف) $y' = 2(x-3)$

تابع در $[3, +\infty)$ صعودی و در $(-\infty, 3]$ نزولی است.

ب) $y' = x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = -1$ یا $x = 2$

لذا تابع در $[-1, 2]$ نزولی و در $(-\infty, -1)$ و $(2, +\infty)$

صعودی است.

پ) $y' = 2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 1$

لذا، تابع در $[-\infty, 1]$ صعودی و در $[1, +\infty)$ نزولی است.

تابع نزولی است. $y' = -1$ (ت)

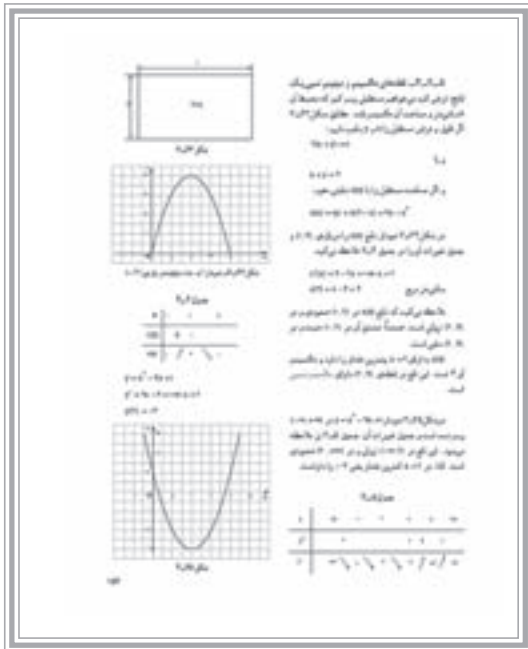
تابع یک نواست (هم صعودی و هم نزولی) $y' = 0$ (ث)

آموزش صفحه ۱۵۷

این صفحه با یک مسئله کاربردی شروع می شود. از دانش آموزان بخواهید که این صفحه را مطالعه کنند و روش کار را یاد بگیرند. از آن ها سؤال کنید «چه ویژگی ای در حل این مسئله به چشم می خورد؟» انتظار می رود که برخی چنین جواب دهند:

سعی می کنیم $S(x)$ را بر حسب x (یک متغیر) بنویسیم. در این صورت مسئله برمی گردد به تعیین ماکسیمم یک تابع که قبلاً راه حل آن را می دانیم.

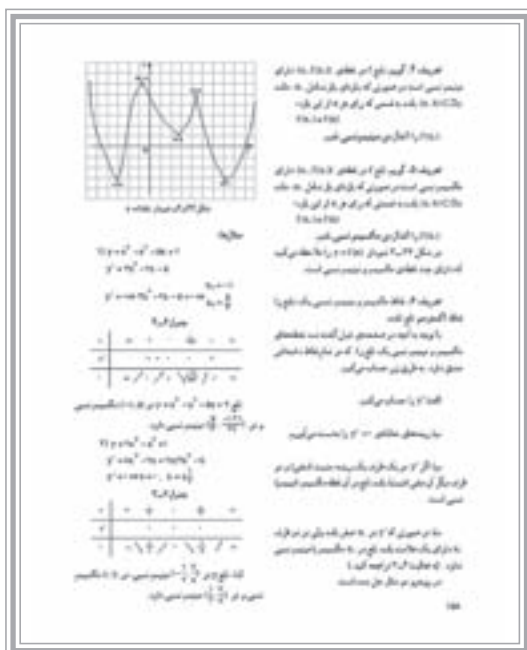
مثال پایین صفحه مجرد است و همین کار را تمرین می کند. مشابه مسئله کاربردی ابتدای صفحه، می توان مسائل دیگری مطرح کرد. برخی از این مسائل در فصل چهارم از بخش سوم کتاب دانش آموز آمده است. اگر مسئله ساده ای غیر از آن ها سراغ دارید حتماً در کلاس مطرح کنید و بعد آموزش صفحه ۱۵۷ را شروع کنید.



آموزش صفحه ۱۵۸

در این صفحه ماکسیمم و مینیمم نسبی رسماً تعریف می شوند و در صورتی که تابع در تمام نقاط دامنه ی تعریفش مشتق داشته باشد الگوریتمی جهت تعیین نقاط اکسترمم ارائه شده است. از دانش آموزان بخواهید که این صفحه را مطالعه کنند و در صورت لزوم جدول مربوط به مثال های ۱ و ۲ را روی تابلو بنویسید و توضیحات لازم را ارائه کنید.

ضمناً، توجه دانش آموزان را به این نکته جلب کنید که یک تابع در دامنه ی تعریفش ممکن است چندین ماکسیمم نسبی و چندین مینیمم نسبی داشته باشد. این نکته در تعیین ماکسیمم کلی و مینیمم کلی یک تابع حائز اهمیت است.



آموزش صفحه‌ی ۱۵۹

مثال ۳-۲

تابع $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ را در نظر بگیرید. این تابع را در $x = 0$ و $x = 2$ به هم وصل کنید. این دو نقطه را به هم وصل کنید. این دو نقطه را به هم وصل کنید.

این دو نقطه را به هم وصل کنید. این دو نقطه را به هم وصل کنید. این دو نقطه را به هم وصل کنید.

نکته ۳-۲

این دو نقطه را به هم وصل کنید. این دو نقطه را به هم وصل کنید. این دو نقطه را به هم وصل کنید.

مثال ۳-۳

تابع $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ را در نظر بگیرید. این تابع را در $x = 0$ و $x = 2$ به هم وصل کنید. این دو نقطه را به هم وصل کنید. این دو نقطه را به هم وصل کنید.

نکته ۳-۳

این دو نقطه را به هم وصل کنید. این دو نقطه را به هم وصل کنید. این دو نقطه را به هم وصل کنید.

این صفحه با این مطلب شروع می‌شود که $y' = 0$ الزاماً ماکسیمم یا مینیمم نسبی را تعیین نمی‌کند مگر این که در نقطه‌ای که $y' = 0$ تغییر علامت هم رخ دهد.

مثال ساده‌تر از مثال کتاب $y = x^3$ است که برای آن $y' = 3x^2$ و $y' = 0$ در $x = 0$ تغییر علامت نمی‌دهد. به عبارت دیگر $y' \geq 0$ و تابع y صعودی است و در \mathbb{R} ماکسیمم یا مینیمم نسبی ندارد.

فعالیت ۳-۴ توسط دانش‌آموزان، فردی یا گروهی به سادگی اجرا می‌شود و بنابر توضیحات بالا به راحتی پاسخ پرسش ۶ را خواهند داد.

در حالت کلی برای تابع به صورت $y = \pm x^{2k+1}$ ، $k \in \mathbb{N}$ در $x = 0$ داریم $y' = 0$ ولی این تابع در \mathbb{R} نه ماکسیمم نسبی دارد و نه مینیمم نسبی.

در مورد کار در کلاس ۳-۸ نیز دانش‌آموزان مشکلی نخواهند داشت:

$$y' = \frac{5}{(x+2)^2} > 0$$

تابع همواره صعودی است و لذا نقطه‌ی اکسترمم ندارد. جدول ۳-۹ در زیر آمده است:

x	$+\infty$	-۲	$-\infty$
y'		+	+
y	۲	$+\infty$	۲

نامعین

جدول نیز رفتار تابع را در مجاورت $x = -2$ نشان می‌دهد.

از دانش‌آموزان بخواهید مثال ۱ را مطالعه کنند. از این نوع مثال باز هم برای آن‌ها حل کنید یا برای حل به آن‌ها ارائه نمایید.

آموزش صفحه‌ی ۱۶۰

در این صفحه مثال دیگری از تعیین چند مجهول به کمک نقاط اکسترمم آورده شده است.

از دانش‌آموزان بخواهید که با پوشاندن حل مثال ۲ (با هر وسیله‌ی ممکن!) سعی کنند مجهولات را به دست آورند. در نهایت راه حل و جواب خود را با حل آن مقایسه کنند.

در صورتی که دانش‌آموزان را در حل این مثال ضعیف تشخیص دادید، با مثال‌های ساده‌تر آن‌ها را تقویت کنید، به گونه‌ای که قادر باشند سؤال ۳ از تمرین ۷-۳ صفحه‌ی ۱۶۰ را به راحتی حل کنند.

جواب سؤال‌های تمرین ۷-۳ در زیر آمده است.

۱- الف) تابع $y = \sin x$ ، در بازه‌ی $[0, \pi]$ ، در $x = \frac{\pi}{2}$

دارای ماکسیمم نسبی ۱ است.

ب) تابع $y = \cos x$ ، در بازه‌ی $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ، در $x = 0$

دارای ماکسیمم ۱ است.

پ) این تابع در $(\frac{1}{8}, \frac{1}{4})$ دارای ماکسیمم نسبی است.

۲- داریم: $f'(x) = 3ax^2 + 2(a-1)x + 4$

$$f'(-2) = 12a - 4(a-1) + 4 = 8a + 8 = 0$$

$$\boxed{a = -1} \text{ پس}$$

۳- داریم:

$$y' = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$y'(-1) = 3a - 2b + c = 0 \quad (1)$$

$$y(1) = a + b + c + d = 0 \quad (2)$$

$$y(0) = d = 5 \quad (3)$$

$$y(-1) = -a + b - c + d = 8 \quad (4)$$

با توجه به (۳) معادلات (۱) و (۲) به صورت زیرند:

$$\begin{cases} 3a - 2b + c = 0 \\ a + b + c = -5 \\ -a + b - c = 3 \end{cases} \Rightarrow a = 1 \quad b = -1 \quad c = -5$$

حل مسائل پیش‌تر

۱- معادله‌ی خط قائم بر منحنی تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \sqrt{2x+1}$ را در نقطه‌ی $x=0$ واقع بر منحنی بنویسید.

حل:

$$f(0) = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}, \quad f'(0) = 1 = m \text{ شیب خط مماس}$$

$$m' = -\frac{1}{m} = -1 \text{ شیب خط قائم}$$

$$y - 1 = -1(x - 0) \Rightarrow y = -x + 1$$

حل:

$$y' = \frac{2(x+a-2) - 1(2x+a)}{(x+a-2)^2}$$

$$= \frac{a-4}{(x+a-2)^2}, \quad y' \geq 0$$

$$\Rightarrow a - 4 \geq 0 \Rightarrow a \geq 4$$

حل:

$$f'(x) = 4ax + b$$

$$f'(1) = 0 \Rightarrow 4a + b = 0 \quad (1)$$

$$-1 = f(1) \Rightarrow -1 = 2a + b + 1$$

$$\Rightarrow 2a + b = -2 \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow a = 1, \quad b = -4$$

حل:

$$x = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$y' = 1 + \tan^2 x, \quad m = y'(0) = 1 + 0 = 1$$

$$y - 0 = 1(x - 0) \Rightarrow y = x$$

حل:

$$f(-1) = 2$$

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+3}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$$

$$f'(-1) = \frac{-1}{2} = m$$

$$y - 2 = -\frac{1}{2}(x + 1)$$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

۲- تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{2x+a}{x+a-2}$ داده شده است. حدود a را چنان بیابید که $y' \geq 0$ باشد.

۳- تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = 2ax^2 + bx + 1$ داده شده است a و b را چنان بیابید که به ازای $x = 1$ تابع دارای ماکسیم یا مینیمم مساوی -1 باشد.

۴- معادله‌ی خط مماس بر نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = \tan x$ را در نقطه‌ی $x = 0$ بنویسید.

۵- معادله‌ی خط مماس بر منحنی تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \sqrt{x^2+3}$ را در نقطه‌ی $x = -1$ بنویسید.

$$f'(x) = 3mx^2 + 4mx + 2 \quad \text{حل:}$$

$$f'(-1) = 0$$

$$3m - 4m + 2 = 0$$

$$m = 2$$

$$f'(x) = 2 \times 2 \sin 2x \cos 2x \quad \text{حل:}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{8}\right) = 2 = m$$

$$f\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

$$y - \frac{1}{2} = 2\left(x - \frac{\pi}{8}\right)$$

$$y = 2x - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$$

$$y' = \frac{2(3x - 5) - 3(2x + b)}{(3x - 5)^2} \quad \text{حل:}$$

$$= \frac{-10 - 3b}{(3x - 5)^2}$$

$$b > -\frac{10}{3} \quad \text{یا} \quad -10 - 3b < 0 \quad \text{و یا} \quad y' < 0 \quad \text{باید داشته باشیم}$$

۶- تابع f با ضابطه $f(x) = mx^3 + 2mx^2 + 2x$ داده

شده است. مقدار m را چنان تعیین کنید که تابع در $x = -1$ دارای ماکسیمم یا مینیمم باشد.

۷- معادله‌ی خط مماس بر نمودار تابع با ضابطه‌ی

$f(x) = \sin^2 2x$ را در نقطه‌ی $x = \frac{\pi}{8}$ واقع بر منحنی به دست آورید.

۸- هرگاه تابع با ضابطه‌ی $y = \frac{2x + b}{3x - 5}$ در بازه‌ی

$(-\infty, \frac{5}{3})$ همواره نزولی باشد حدود b را بیابید.