بخش چهارم

راهنمای آموزش بخش سوم کتاب دانش‌آموز

شامل:

ـ راهنمای آموزش بخش سوم کتاب دانش‌آموز طبق جدول زیر

فصل	عنوان	صفحات
اول	مشتق	۱۳۰ تا ۱۴۴
دوم	کاربردهای مشتق (۱)	۱۴۵ تا ۱۶۱
سوم	کاربردهای مشتق (۲)	۱۶۲ تا ۱۷۰
چهارم	کاربردهای مشتق (۳)	۱۷۱ تا ۱۸۰

ـ حل تمرین‌های تکمیلی بخش سوم کتاب دانش‌آموز

ـ ارائه‌ی دو دسته سؤال امتحانی از کل کتاب

بخش چهارم

راهنمای آموزش فصل اول از بخش سوم کتاب دانش‌آموز

شامل:

- آموزش صفحات ۱۳۰ تا ۱۴۴
- حل مسائل بیش‌تر

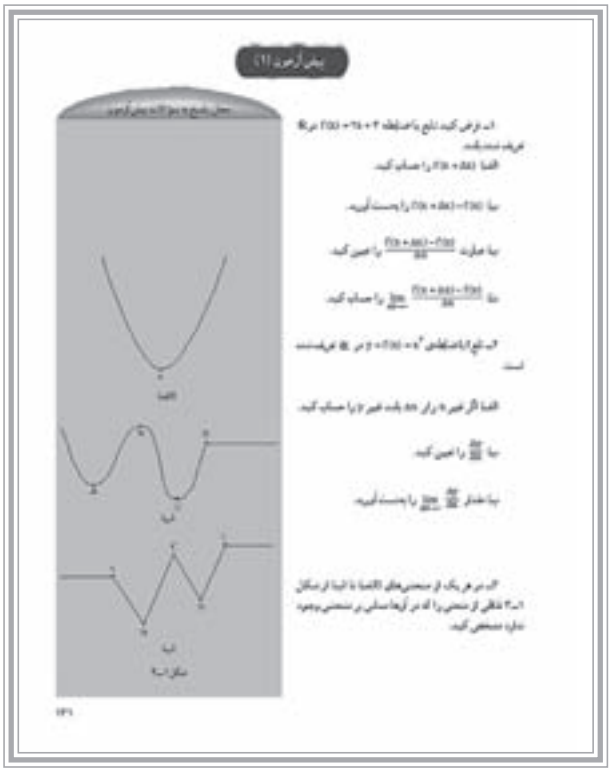
آموزش صفحه‌ی ۱۳۱

این پیش‌آزمون برای اطلاع از پیش‌نیازهای مشتق است.

در این فصل با محاسبه‌ی $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ و تعیین حد آن وقتی $\Delta x \to 0$ مواجه هستیم.

پاسخ به سؤال‌های ۱ و ۲ پیش‌آزمون (۱) ساده است. در مورد سؤال ۳ باید متذکر شد که به‌طور کلی در نقاطی از یک نمودار، که محل برخورد دو قسمت از آن است، اگر حداقل یکی از این دو قسمت خط راست باشد در آن نقطه مماس وجود ندارد. لذا، در مورد شکل (الف) در نقطه‌ی A مماس وجود ندارد و در بقیه نقاط آن مماس وجود دارد. در مورد شکل (ب) فقط در نقطه‌ی D مماس وجود ندارد و برای شکل (پ) در نقاط A ، B ، C ، D و E مشتق وجود ندارد. فعلاً لازم نیست در این مورد آموزش بدهید. در طول فصل آموزش لازم داده خواهد شد.

این آزمون در حدود ۳۰ دقیقه است و در کلاس اجرا خواهد شد.



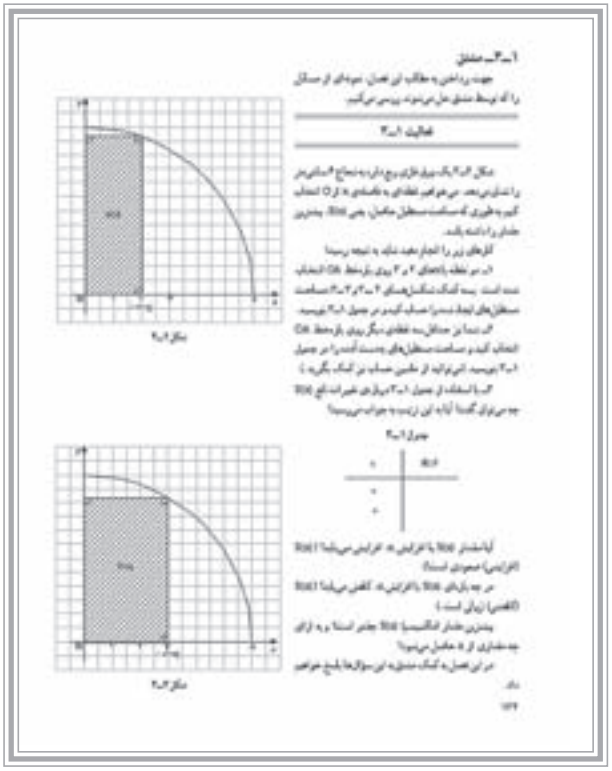
آموزش صفحه‌ی ۱۳۲

در این صفحه می‌خواهیم دانش آموزان را باچالش (مشکل) مواجه کنیم تا انگیزه‌ای برای پذیرش مفهوم مشتق پیدا کنند.

البته در ریاضیات ۱ و ۲ در مورد پیدا کردن ماکسیمم (یا مینیمم) یک تابع با استفاده از نمودار آن مطالبی گفته شده است و در حالت کلی با رسم یک تابع، به کمک ماشین حساب‌های مخصوص یا کامپیوتر، می‌توان محل ماکسیمم و مینیمم را یافت.

در این فصل می‌خواهیم این کارها را با استفاده از مشتق اجرا کنیم، که ابزاری تواناست و به سرعت ما را به نتیجه می‌رساند.

در فعالیت ۱ـ۳ دانش‌آموزان را آزاد بگذارید تا خودشان مشکل را حل کنند. برخی از دانش‌آموزان با استفاده از شمردن مربع‌های مستطیل‌ها، اگر اشتباه نکنند، مساحت آن را به دست می‌آورند که در این صورت برای مربع‌های غیر کامل مجبورند از



تقریب استفاده کنند. مثلاً، این دانش‌آموزان عدد تقریبی ۱۱/۵ سانتی‌متر مربع را برای $S(۲)$ ارائه خواهند نمود (زیرا هر واحد مربع از ۴ مربع آبی رنگ تشکیل می‌شود و قسمت بالای مستطیل را هم حدوداً دو مربع درنظر گرفته‌ایم).

بعضی از دانش‌آموزان ضلع دیگر مستطیل را، با استفاده از شعاع دایره که ۶ سانتی‌متر است، به دست می‌آورند. مثلاً، برای $x = ۲$ داریم:

$$\text{طول مستطیل} = \sqrt{۶^۲ - x^۲} = \sqrt{۳۶ - x^۲}$$
$$= \sqrt{۳۶ - ۴} = \sqrt{۳۲} = ۴\sqrt{۲}$$

لذا، مساحت مستطیل را چنین به‌دست می‌آورند:

$$S(۲) = ۲ \times ۴\sqrt{۲} = ۸\sqrt{۲} \cong ۸ \times ۱/۴۱ \cong ۱۱/۳ \text{ سانتی‌متر مربع}$$

به همین ترتیب برای x های دیگر مساحت مستطیل متناظر را حساب خواهند کرد و جدول ۱ــ۳ را کامل می‌کنند.

البته دانش‌آموزان با هوش به سادگی می‌توانند به برخی از سؤال‌های بعد از جدول ۱ــ۳ پاسخ دهند.

این که $S(x)$، وقتی x از ۰ تا ۶ تغییر می‌کند، نه افزایشی است و نه کاهشی، بلکه در نقطه‌ای دارای ماکسیمم است. ضمناً، نمی‌توانند به‌طور دقیق بازه‌ای که $S(x)$ در آن نزولی است را مشخص کنند. پیدا کردن این ماکسیمم برای دانش‌آموزان بسیار مشکل است، مگر آن که منحنی $y = x\sqrt{۳۶ - x^۲}$ را در $(۰,۶)$ رسم کنند و ماکسیمم آن را به‌طور تقریبی ارائه نمایند. اگر امکان داشته باشد این منحنی را با کامپیوتر رسم و نتیجه را ملاحظه کنید، که معمولاً چنین وسیله‌ای هم در اختیار ندارند (البته به کمک کامپیوتر و برخی نرم‌افزارها نیز می‌توانند این کار را عملی سازند).

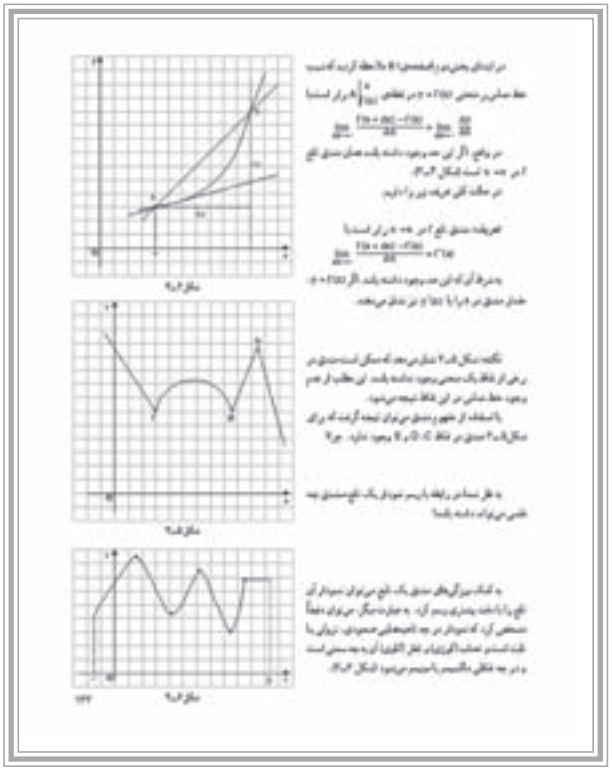
آموزش صفحه‌ی ۱۳۳

در این صفحه بیش‌تر سعی شده است که بستگی مشتق با ضریب زاویه‌ی خط مماس بر نمودار یک تابع نشان داده شود.

از دانش‌آموزان بخواهید با مطالعه‌ی این صفحه ملاحظه کنند که پیدا کردن مشتق در یک نقطه مستلزم تعیین حد یک کسر است و در واقع صورت و مخرج آن به‌طور جداگانه به صفر میل می‌کنند! ولی حدکسر در اکثر اوقات وجود دارد. البته وجود حدبستگی کامل با امکان رسم مماس دارد. در واقع شکل ۵ــ۳ مواردی را، که خط مماس یا حد مذکور در تعریف مشتق وجود ندارد، نشان می‌دهد.

وظیفه‌ی مهمی که در تدریس این صفحه به عهده‌ی دبیران محترم است طرح سؤال داخل مستطیل قرمز رنگ و گرفتن پاسخ‌های لازم از زبان دانش‌آموزان است. البته در قسمت آخر این صفحه موارد استفاده از مشتق بیان شده است.

مطالب این قسمت نیز در دانش‌آموزان، انگیزه بیش‌تری برای دانستن مشتق یک تابع ایجاد می‌کند.



آموزش صفحه‌ی ۱۳۴

در این صفحه چند فرمول برای محاسبه‌ی مشتق ارائه شده است. فرمول (۱) چندین بار مطرح شده است. این فرمول را مبنا قرار دهید و دو فرمول دیگر را با راهنمایی، توسط دانش‌آموزان به‌دست آورید.

سپس از دانش‌آموزان بخواهید که مثال‌های نمونه را مطالعه کنند و با فرمول‌ها مطابقت دهند.

با استفاده از فرمول (۲) مشتق تابع ثابت و تابع درجه‌ی اول را به دست آورید و چند مثال از آن‌ها را ارائه کنید. مثلاً

$y = ۳\sqrt{۲} \quad , \quad y' = ۰$

$y = ۳x + ۴ \quad , \quad y' = ۳$

$y = \sqrt{۲} - ۵x \quad , \quad y' = -۵$

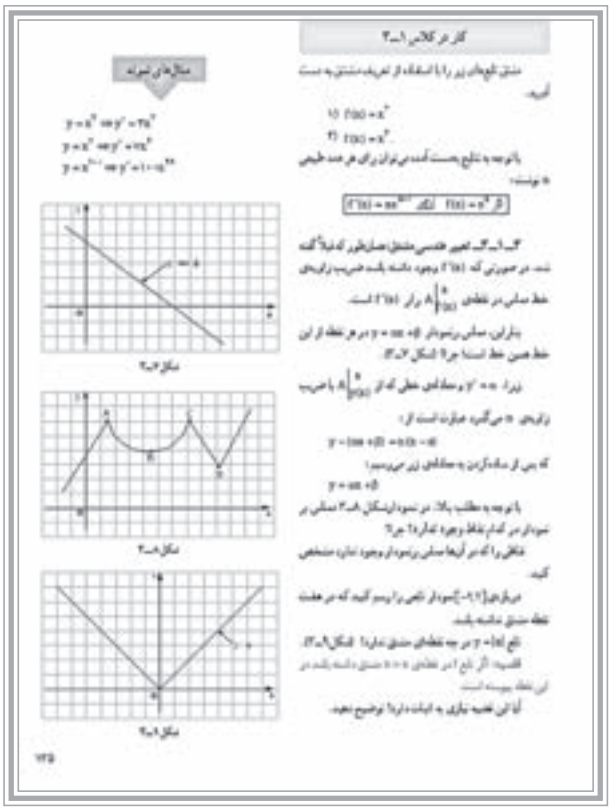
آموزش صفحه‌ی ۱۳۵

کار در کلاس ۱ــ۲ توسط دانش‌آموزان اجرا خواهد شد (در حداکثر ۱۵ دقیقه). دانش‌آموزان را آزاد بگذارید تا فرمول موردنظر خود را، از بین فرمول‌های (۱) تا (۳)، انتخاب کنند. پیش‌بینی این است که اکثر دانش‌آموزان فرمول (۲) را انتخاب خواهند کرد (به دلیل سادگی آن). البته بعداً ملاحظه خواهند کرد که برای هر عدد حقیقی n، اگر $y = x^n$ آن‌گاه $y' = nx^{n-۱}$ (صفحه‌ی ۱۳۹).

امّا مطلب مهمی که در این صفحه آموزش داده می‌شود تعبیر هندسی مشتق، به عنوان ضریب زاویه‌ی خط مماس است. باید توجه داشت که می‌گوییم تابع f در $x = a$ حد دارد به شرط آن که حد زیر، به عنوان یک عدد حقیقی، وجود داشته باشد :

$$\lim_{h \to ۰} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \in \mathbb{R}$$

ولی در مورد مماس بر منحنی در $x = a$ ، اگر این حد $+\infty$ یا $-\infty$ هم باشد خط مماس، خطی موازی با محور oy ، وجود دارد. به عنوان مثال نمودار تابع f باضابطه‌ی



$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & , \ x\geq 0\\ -\sqrt{-x} & , \ x<0\end{cases}$ به‌صورت روبرو است :

و به سادگی معلوم می‌شود که $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=+\infty$

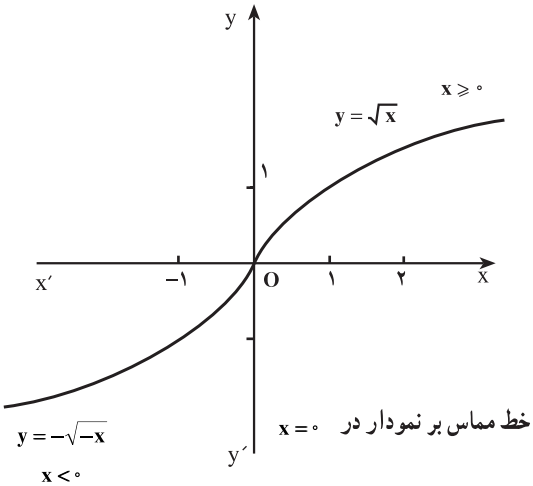
البته توجه داشته باشید که تابع زیر در $x=0$ مشتق ندارد (شکل آن را خودتان رسم کنید)

$$f(x)=\sqrt{|x|}$$

زیرا

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\sqrt{h}}{h}=+\infty$$

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(h)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{\sqrt{-h}}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{1}{-\sqrt{-h}}=-\infty$$

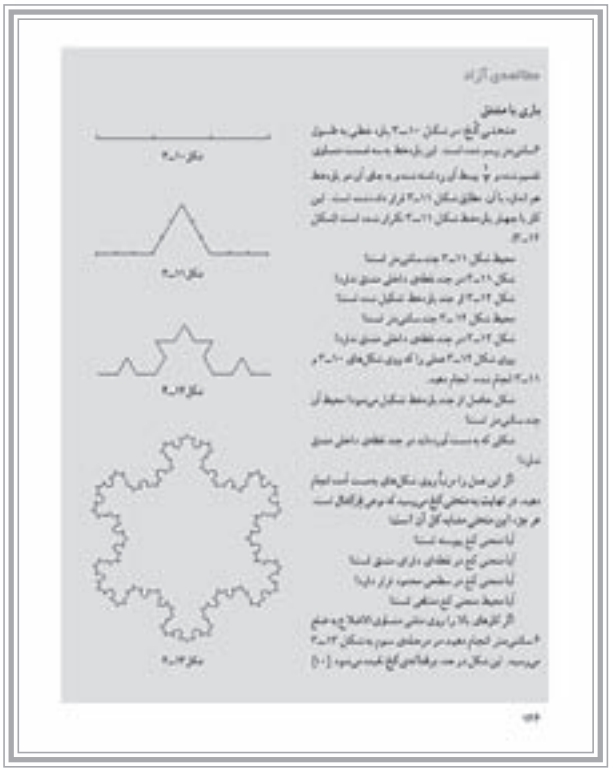


آموزش صفحه‌ی ۱۳۶

مطالعه‌ی این صفحه اختیاری است. موضوع آن ساخت دنباله‌ای از شکل‌هاست. همان‌طور که دنباله‌ای از اعداد، مثلاً اعداد $2+\frac{1}{2}, 2+\frac{1}{3}, 2+\frac{1}{4}, \cdots, 2+\frac{1}{n}, \cdots, n\in\mathbb{N}$ و ۳ به عدد ۲ میل می‌کند می‌توان دنباله‌ای از شکل‌ها داشت و از حد آن دنباله صحبت کرد (معمولاً رسم حد یک دنباله از اشکال ممکن است آسان نباشد و فقط بتوان آن را تصور کرد!).

همان‌طور که از شکل‌های ۱۱ـ۳ و ۱۲ـ۳ نتیجه می‌شود، مرتباً تعداد نقاطی که مماس در آن‌ها وجود ندارد زیاد می‌شود. اگر فرایند ذکر شده را ادامه دهید در حد شکلی به دست می‌آید که پیوسته است، در سطحی محدود قرار دارد، محیط آن بی‌نهایت است! و در هیچ نقطه‌ای مماس (مشتق) ندارد!

دانش‌آموزان را آزاد بگذارید تا این صفحه را (در منزل) مطالعه کنند (در صورت تمایل). مع‌هذا، اگر سؤال داشتند یا منابع بیش‌تری خواستند آن‌ها را راهنمایی کنید. مقاله مربوط به فرکتال‌ها در مجله رشد آموزش ریاضی به چاپ رسیده است که می‌توانید، در صورتی که وقت اجازه دهد، از مثال‌های آن نیز استفاده کنید و به حال و هوای کلاس خود تنوع ببخشید حتی می‌توانید دانش‌آموز علاقه‌مندی را مأمور کنید که مطالبی را در این خصوص تهیه و به صورت سمینار ارائه نماید، که این خود شروعی برای پژوهش دانش‌آموزی است،



آموزش صفحه‌های ۱۳۷ و ۱۳۸

همان‌طور که در کتاب هم تأکید شده، اثبات قضیه‌ها موردنظر نیست بلکه کاربرد آن‌ها مهم است. از دانش‌آموزان بخواهید این صفحه را مطالعه کنند و مثال‌های آن را با دقت دنبال نمایند و با مثال‌های بیش‌تر قضیه‌ها را توضیح دهید.

بدیهی است که نتایج مندرج در صفحه‌ی ۱۳۸ مهم‌اند و باید با مثال‌های بیش‌تری همراه شوند.

کار در کلاس ۲ـ۳ نیز باید توسط تک‌تک دانش‌آموزان اجرا شود. انتظار نمی‌رود که دانش‌آموزان فرمول‌های مشتق را در این مرحله در حافظه داشته باشند. لذا، مراجعه‌ی آن‌ها به جدول صفحه‌ی ۱۳۹ بلامانع است.

درباره‌ی صفحه‌ی ۱۳۹

برای درج متنی که تحت شماره‌ی ۵ـ۱ـ۳ ملاحظه می‌کنید، ساعت‌ها و در جلسات متعددی بحث شده است. متأسفانه دبیران محترم، و حتی باسابقه و آگاه به جریانات روز، ولی اسیر سنت‌ها و جوّ مسموم محیط‌های آموزشی در این‌خصوص(استفاده از فن‌آوری‌های روز) مخالف ارائه‌ی جدول مشتق‌ها به دانش‌آموزان بودند. این طرز فکر انسان را به یاد روش استعمارگران انگلیسی می‌اندازد که هندیان را مجبور به حفظ جدول لگاریتم می‌کردند تا **فکر کردن** را از آن‌ها بگیرند. هدف اصلی از ارائه‌ی درس مشتق استفاده از آن برای امور مهم دیگر است که در فصل بعد کتاب آمده است. بنابراین، قویاً توصیه می‌شود که در آزمون‌های مربوط به مشتق، این جدول در اختیار دانش‌آموزان قرار گیرد ؛ البته با مقیاس بزرگ‌تر. شایان ذکر است که اکثر نرم‌افزارها، MAPLE و DERIVE و ... به‌طور نمادین مشتق توابع را ارائه می‌کنند.

آموزش صفحه‌ی ۱۴۰

سؤال‌های این تمرین در زیر پاسخ داده شده است.

۱ــ همان‌طور که خواسته شده دانش‌آموزان می‌توانند از جدول مشتق صفحه‌ی ۱۳۹ کمک بگیرند (بهتر است که جدول صفحه‌ی ۱۳۹ روی برگه‌ای مناسب و با مقیاسی بزرگ‌تر تهیه و در اختیار دانش‌آموزان قرار گیرد. ضمناً تهیه‌ی آن به صورت لوحی بزرگ و نصب آن در محل مناسب نیز مفید است).

الف) $y' = ۱۵x^۲ - ۶x$

ب) $y' = ۱۵x^۴ + ۲x$

پ) $y' = ۳(\cos^۲ x - \sin^۲ x)$

ت) $\dfrac{۳}{۲\sqrt{۳x-۱}}$

ث) $\dfrac{۳}{۵}\dfrac{۲x+۱}{\sqrt[۵]{(x^۲+x)^۲}}$

ج) $y' = \dfrac{-۲(۱+۲\sin x)}{(\sin x+۲)^۲}$

چ) $y' = ۳(۱+\tan^۲ ۳x) + \dfrac{۱}{۲\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}$

ح) $y' = ۷(۳x^۲-۲)(x^۳-۲x+۱)^۶$

۲ــ داریم : $f'(x) = \dfrac{۲}{(x+۱)^۲}$

بنابراین، $f'(۰) = ۲$.

۳ــ داریم : $y'_x = ۱۵(۲x)(x^۲-۱)^۲ = ۳۰x(x^۲-۱)^۲$

۴ــ داریم :

$$y'_x = (۴u+۵)u' = (۴\sqrt{x^۲+۴}+۵).\frac{x}{\sqrt{x^۲+۴}}$$

۵ــ از دانش‌آموزان بخواهید که به جدول نگاه نکنند (حتی‌المقدور) ولی به آن‌ها اجازه دهید که از تمرین ۱ کمک بگیرند. جواب‌ها به قرار زیرند :

الف) $y' = ۳$

ب) $y' = x^۲ - x - ۱$

پ) $y' = ۱۲x^۲ + ۸$

ت) $y' = \dfrac{۱۴x+۶}{۹}$

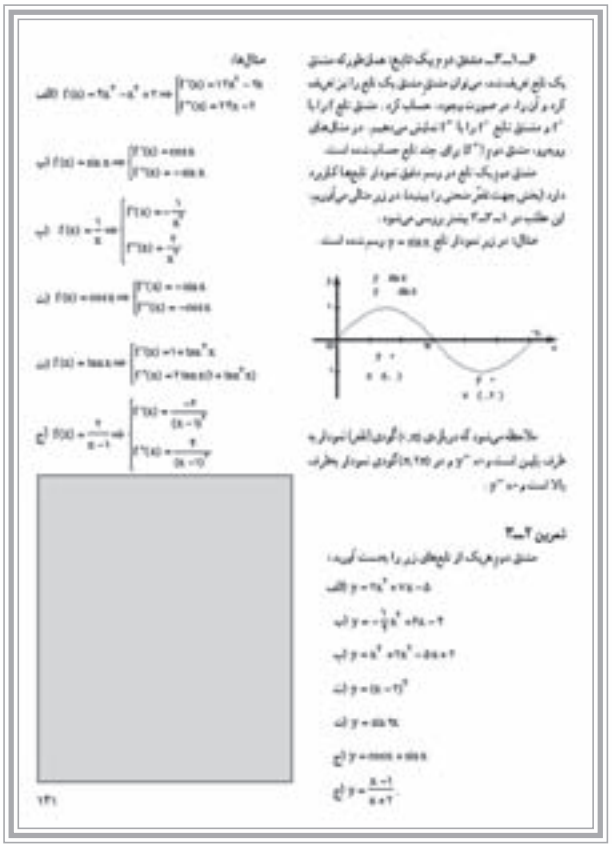
ث) $y' = \dfrac{۲+۳(\sin x+\cos x)}{(۲\cos x+۳)^۲}$

ج) $y' = ۳\sin x\cos x(\sin x - \cos x)$

چ) $y' = \dfrac{۵}{۲}(۱+\tan^۲\dfrac{x}{۲})\tan^۴\dfrac{x}{۲}$

ح) $y' = \dfrac{-۱}{۲x\sqrt{x}}$

خ) $y' = \dfrac{-۴\sin x\cos^۳ x}{۳\sqrt[۳]{(۱+\cos ۴x)^۲}}$



آموزش صفحه‌ی ۱۴۱

چون یکی از کاربردهای مشتق رسم دقیق نمودارهاست و این مهم نیاز به مشتق دوم تابع دارد، در این صفحه نحوه‌ی به دست آوردن مشتق دوم بیان شده است. البته مطلب جدیدی نیست f' یا y' خود یک تابع است و در صورت امکان (وجود) مشتق آن را به‌دست می‌آوریم.

در این صفحه، فقط برای انتزاعی نبودن موضوع، مثالی ساده آورده‌ایم و در آن تقعّر یا گودی منحنی نمایش $y = \sin x$ با علامت مشتق مقایسه شده است. بعداً ملاحظه خواهد شد که در هر بازه‌ای که $y'' > 0$ گودی منحنی به طرف بالا (yهای مثبت) و در هر بازه‌ای که $y'' < 0$ گودی منحنی به طرف پایین (yهای منفی) است.

تمرین **۲ــ۳** در کلاس حل شود. جواب‌ها را در ادامه ملاحظه می‌کنید.

الف) $y'' = 4$

ب) $y'' = \frac{-1}{2}$

پ) $y'' = 6x + 4$

ت) $y'' = 6(x - 2)$

ث) $y'' = -4\sin 2x$

ج) $y'' = -(\cos x + \sin x)$

چ) $y'' = \frac{-6}{(x+2)^3}$

لازم به توضیح است که تمرین‌های این قسمت خود به‌خود شامل محاسبه‌ی مشتق اول هم هستند.

تمرین زیر در شاخه‌های مهندسی بسیار کاربرد دارد :

الف) اگر $y = \sin \alpha x$ نشان دهید $y'' = -\alpha^2 y$.

ب) اگر $y = \cos \alpha x$ نشان دهید $y'' = -\alpha^2 y$.

ج) اگر $y = \sin \alpha x + \cos \alpha x$ آن‌گاه $y'' = -\alpha^2 y$.

آموزش صفحه‌ی ۱۴۲

سؤال‌های آزمون پایانی (۱)، به جز سؤال ۴، به سادگی قابل پاسخ‌گویی‌اند. در زیر جواب‌ها را ملاحظه می‌کنید.

۱ــ داریم : $f'(x)=2x$ پس، $f'(1)=2$.

۲ــ داریم :

$$y'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{y(1+h)-y(1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2(1+h)+3-5}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2h}{h}=2$$

۳ــ به‌طور کلی تابع $y=|x-a|$ در جایی که $x-a=0$ دارای مشتق نیست. بنابراین، نمودار $y=|x+2|$ در جایی که $x+2=0$ ، یعنی $x=-2$ ، دارای خط مماس نیست.

۴ــ واضح است که برای $f(x)=|x|$ داریم :

$$\lim_{h\to 0}\frac{|h|-|-h|}{2h}=0$$

ولی تابع f در $x=0$ مشتق ندارد. این سؤال مثال نقض مهمی است. به‌طور کلی فرض کنید تابع f در $x=a$ مشتق داشته باشد در این صورت

$$\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$$

$$=\frac{[f(a+h)-f(a)]}{2h}+\frac{[f(a)-f(a-h)]}{2h}$$

$$=\frac{f'(a)}{2}+\frac{f'(a)}{2}=f'(a)$$

بنابراین، اگر $f'(a)$ وجود داشته باشد آن‌گاه

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}=f'(a)$$

حال سؤال این است که اگر

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$$

وجود داشته باشد آیا $f'(a)$ وجود دارد؟ تابع موضوع سؤال ۴ مثال نقضی است که نشان می‌دهد پاسخ سؤال بالا منفی است. برای توابعی که فقط مقدار آن‌ها در بعضی نقاط در دست است و می‌دانیم در هر نقطه مشتق دارند کسر زیر تقریب خوبی برای

$f'(a)$ به‌دست می‌دهد :

$$\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$$

۵ــ مشتق‌های خواسته شده را در زیر ملاحظه می‌کنید :

الف) $y'=-\sin x-\cos x$

ب) $y'=\frac{3}{2}\sqrt{x}$

پ) $y'=\frac{-\sin x}{2(2+\cos x)\sqrt{2+\cos x}}$

ت) $y'=\frac{6x}{5\sqrt[5]{(x^2+1)^2}}$

ث) $y'=0$

در حل (ث) می‌توان از این که $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ نیز استفاده کرد.

۶ــ y'' در زیر ملاحظه می‌شود :

الف) $y''=-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$

ب) $y''=-\sin x$

پ) $y''=-\frac{2}{9}x^{-\frac{4}{3}}$

ت) $y''=-\cos x$

ث) $y''=2\tan x(1+\tan^2 x)$

آموزش صفحه‌های ۱۴۳ و ۱۴۴

تاریخ ریاضیات موضوعی جذّاب و انگیزه‌بخش است. به‌ویژه این که سهم دانشمندان را در پیشبرد ریاضیات جهان نشان می‌دهد.

غیاث‌الدین جمشید کاشانی عدد π را با دقتی تا شانزده رقم اعشار، در قرن پانزدهم میلادی (نهم هجری قمری)، حساب کرد. او این کار را با استفاده از محاسبه‌ی $\sin 1^\circ$ تا ده رقم صحیح در مبنای ۶۰ ارائه داد.

جمع‌آوری کارهای ریاضی که توسط غیاث‌الدین جمشید کاشانی ارائه شده است، می‌تواند پروژه‌ی مناسبی برای دانش‌آموزان علاقه‌مند باشد. البته با راهنمایی دبیران محترمی که پیشاپیش در این مورد مطالعه‌ی کافی داشته‌اند.

با ریاضیدانان نامی آشنا شوید

غیاث الدین جمشیدبن مسعودبن محمودطبیب کاشانی، (غیاث‌الدین جمشید مسعود کاشانی) اگر چه فیزیکدان بود، ولی علاقه‌ی اصلیش متوجه ریاضیات و اخترشناسی بود. این ریاضیدان و ستاره‌شناس مشهور ایرانی در حدود ۷۹۰ هجری قمری در کاشان به دنیا آمد. وی از نوابغ ریاضی قرن نهم محسوب می‌شود. در کتاب‌ها آمده است که این مرد بزرگ و با اراده در روزگاری می‌زیست که ایران، میدان تاخت و تاز و یورش‌های مستبدانی همچون چنگیز، هلاکوخان و تیمور بود. غیاث الدین جمشید کاشانی در زمان تیموریان زندگی می‌کرد. زمانی که او در سن جوانی به کار تهیه جدول‌های محاسباتی نجوم مشغول بود، ایران در معرض ویرانی قرار داشت هنگامی که در اوج خلاقیت ذهنی، برای راحتی کار با سایر منجمان، محاسبات دقیق نجومی را انجام می‌داد و ابزار اختراع می‌کرد، تیمور و پسرش شاهرخ با تجاوز خود به ایران، شهرها را یکی پس از دیگری به ویرانه تبدیل می‌ساختند. در آن موقعیت سخت امکان فعالیت‌ها و تحقیقات جدی برای او وجود نداشت. پسر شاهرخ یعنی الغ‌بیگ، که حاکم سمرقند بود. او را به رصدخانه دعوت کرد و وی از فرصت خوبی که پیش آمده بود، استقبال کرد. کاشی (کاشانی) برجسته‌ترین مقام را در میان کارکنان علمی «مدرسه» یعنی آموزشگاه الهیات و علم، که درسال ۷۹۹ به همت الغ‌بیگ بنیاد نهاده شده بود، داشت. تا هنگامی که الغ‌بیگ در سال ۸۲۸ به قتل رسید، سمرقند مهم‌ترین مرکز علمی در خاور زمین بود. کاشی به سازماندهی رصدخانه کمک کرد و در زیج الغ‌بیگ همکاری نزدیک داشت. مشهورترین اثرش مفتاح‌الحساب (۸۰۶) می‌باشد که دایرةالمعارف حساب مقدماتی است که صدها سال به عنوان کتاب راهنما به‌کار رفت. غیاث الدین نمونه عالم مسلمان بود. مسلمانی که نه تنها فهم دینی داشت، بلکه در اخلاق عملی و رفتار هم نمونه بود. در کارهای علمی ملاحظه‌ی هیچ کس را نداشت و انصاف، خصلت بزرگی بود که او در زندگی اجتماعی و علمی داشت. در مدرسه بزرگ سمرقند، نزدیک به پانصد طلبه علم از نقاط مختلف دور هم جمع شده بودند الغ‌بیگ بیشتر وقت‌ها در کلاس‌های درس و مباحثه شرکت می‌کرد برخی از روی ترس و حفظ منافع، گفتار غلطش را تأیید می‌کردند ولی غیاث‌الدین در این موارد هیچ ملاحظه‌ای از خودش نشان نمی‌داد و مصلحت‌اندیشی نمی‌کرد. در مقدمه کتاب «مفتاح‌الحساب» نوشته است «ستایش خداوندی را سزاست که در آفرینش آحاد یگانه است و در به هم پیوستن اعداد گوناگون بی‌همتاست و درود به بهترین آفریده‌ی او محمد (ص) که والاترین شفاعت‌کننده‌ی روز رستاخیز است و بر خاندان او و فرزندانش که راه‌های رهایی و رستگاری را رهنمودند. اما بعد نیازمندترین بندگان خدای تعالی به آموزش و بخشش او، جمشید پسر مسعود، پسر محمود پزشک کاشی، ملقب به غیاث‌الدین که خدا روزگارش را نیکو گرداند ...

در این کتاب روش ریشه‌گیری از اعداد صحیح را شرح می‌دهد و نخستین روش منظم برای پرداختن به کسرهای دهدهی را به‌دست می‌دهد احتمالاً در اشاعه‌ی کسرهای دهدهی در اروپا تأثیر داشته است. بزرگ‌ترین آثار ریاضی وی عبارت‌اند از رساله المحیطیه (۸۰۳) و رساله الوتر و الجیب.

در رساله محیطیه مقدار سینوس را تا هفده رقم اعشاری تعیین می‌کند و در اثر دوم مقدار سینوس ۱ درجه را تا ده رقم صحیح شصتگانی حساب می‌کند. در ابتدای کتاب رساله محیطیه این‌طور نوشته است «ستایش خداوندی را سزا که از نسبت قطر به محیط دایره آگاه است و اندازه هر مرکب و بسیط را می‌شناسد و آفریننده‌ی زمین و آسمان‌ها و قرار دهنده‌ی نور در تاریکی است و درود و سلام بر محمد مصطفی که مرکز دایره‌ی رسالت و محیط اقطار راهنمایی و دادگری است و بر خاندان و یاران پاک او باد»

جمشید کاشانی انسانی سختکوش، با هدف و منضبط و پرتلاش بود. عمر نسبتاً کوتاه و تعداد زیاد کتاب و تحقیقات او دلیل این ادعا است. جمشید کاشانی کتاب‌های زیادی در زمینه‌ی ریاضی کاربردی نوشته است که عموماً ارتباط نزدیکی با زندگی مردم و رفع مشکلات آنان داشته است. و همچنین تعداد زیادی ابزار نجومی برای محاسبات دقیق حرکت و وضعیت ستارگان ساخت که در روزگارش نظیر نداشت. روش او در حل عددی معادله‌ی تثلیث یکی از مهم‌ترین روش‌های جبر قرون وسطی است. از کارهای مهم کاشانی در نجوم تدوین زیج *خاقانی* است که در تکمیل نواقص زیج ایلخانی آن را تهیه کرد. وی در سال ۸۱۸ هـ.ق وسیله جدیدی برای رصد ستاره‌ها به نام *طبق المناطق* اختراع کرد و درباره‌ی چگونگی استفاده از آن و وسیله‌ی دیگری که پیش از آن ساخته (به نام لوح اتصالات) رساله جامع و مفیدی موسوم به *نزهة الحدائق* نوشت و از آثار دیگر او می‌توان به *زیج تسهیلات* و *سلم السماء* نیز اشاره کرد. این ریاضیدان بزرگ در سال ۸۳۲ هـ.ق در شهر سمرقند وفات یافت.

حل مسائل بیش‌تر

۱ــ مشتق تابع با ضابطه‌ی $f(x)=5-2x$ را با استفاده از تعریف به‌دست آورید.

حل:

$$f(x+h)=5-2(x+h)=5-2x-2h$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{5-2x-2h-(5-2x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}-2=-2$$

۲ــ مشتق تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^2+3$ را با استفاده از تعریف مشتق به‌دست آورید.

حل:

$$f(x+h)=(x+h)^2+3$$

$$=x^2+2hx+h^2+3$$

$$f(x+h)-f(x)=2hx+h^2$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}(2x+h)=2x$$

۳ــ مشتق تابع با ضابطه‌ی $f(x)=4x^3+3$ را با استفاده از تعریف مشتق به‌دست آورید.

حل:

$$f(x+h)=4(x+h)^3+3$$

$$=4x^3+12x^2h+12xh^2+4h^3+3$$

$$f(x+h)-f(x)=12x^2h+12xh^2+4h^3$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{12x^2h+12xh^2+4h^3}{h}$$

$$=12x^2$$

بخش چهارم

راهنمای آموزش فصل دوم از بخش سوم کتاب دانش‌آموز

شامل:

- آموزش صفحات ۱۴۵ تا ۱۶۰
- حل مسائل بیش‌تر

آموزش صفحه‌ی ۱۴۶

با توجه به موضوع این فصل، در پیش‌آزمون (۲) مقدمات لازم آزمایش می‌شود. جواب‌ها را در زیر ملاحظه می‌کنید.

۱ــ الف) $y_A = ۱-۱+۱ = ۱$

ب) داریم : $f'(x) = ۲x-۱$ و $f'(۱) = ۱$

پ) $y-۱ = ۱(x-۱)$

معادله‌ی خط (D) : $y = x$

ت) نمودار $y = f(x)$ و خط (D) در مقابل رسم شده است.

ث) خط (D) بر نمودار $y = f(x)$ مماس است.

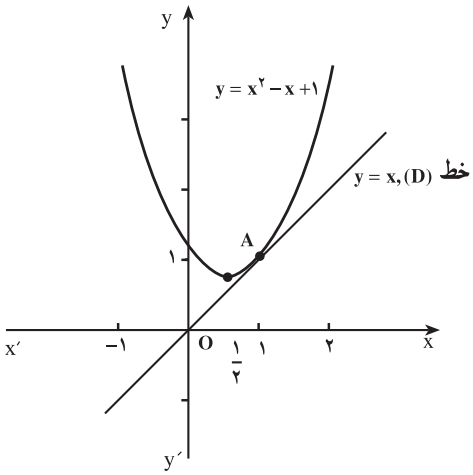
۲ــ الف) نمودار $y = x^۳$ در مقابل رسم شده است.

ب) از شکل پیداست که اگر $x_A < x_B$ آن‌گاه $y_A < y_B$.

بدون استفاده از شکل داریم :

$$y_B - y_A = (x_B^۳ - x_A^۳) = (x_B - x_A)(x_B^۲ + x_B x_A + x_A^۲)$$

با توجه به این که $(x_B^۲ + x_B x_A + x_A^۲)$ همیشه مثبت است از $x_A < x_B$ داریم : $x_B - x_A > ۰$ پس $y_B - y_A > ۰$ و یا $y_A < y_B$.

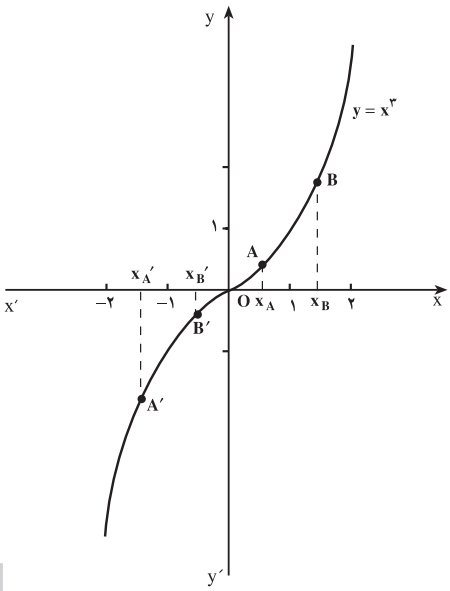


$$y = x^۲ - x + ۱ = (x - \frac{۱}{۲})^۲ + \frac{۳}{۴}$$

۳ــ داریم $f'(x) = ۳x^۲ - ۱$

$$f'(x) = ۰ \Rightarrow x = \pm\frac{۱}{\sqrt{۳}}$$

x	$-\infty$		$-\frac{۱}{\sqrt{۳}}$		$\frac{۱}{\sqrt{۳}}$		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	+	۰	−	۰	+	$+\infty$



۴ــ داریم :

$$f(x) = x^۲ - ۲x + ۳ = (x-۱)^۲ + ۲$$

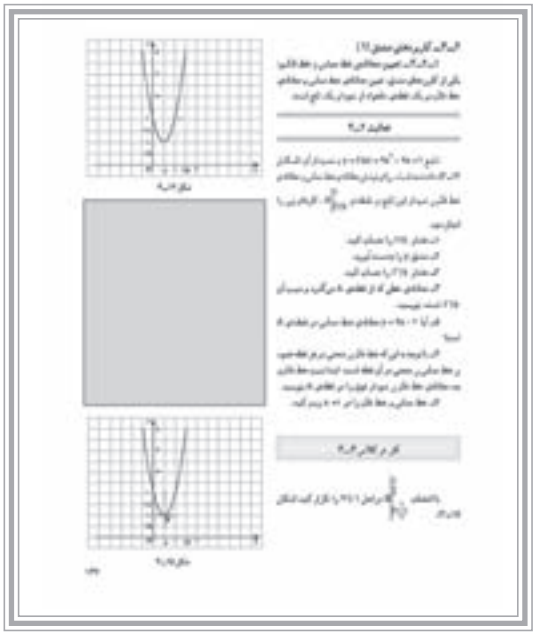
بنابراین، کم‌ترین مقدار $f(x)$ در $x = ۱$ اتفاق می‌افتد و $f(۱) = ۲$ پس مینیمم مقدار $f(x)$ مساوی ۲ است. ضمناً، $f'(x) = ۲x-۲$ و $f'(۱) = ۰$ یعنی f' در x نقطه‌ی مینیمم، صفر است.

این پیش‌آزمون را در کلاس اجرا کنید. زمان لازم برای اجرای آن حدود ۴۵ دقیقه است.

آموزش صفحه‌ی ۱۴۷

پرداختن به فعالیت ۲ـ۳، در صورتی که پیش‌آزمون (۲) به دقت اجرا شده باشد، ساده است. تنها نکته‌ی این فعالیت آن است که وقتی خط مماس موازی محور ox نباشد باید از حاصل‌ضرب شیب‌ها مساوی ۱-استفاده کرد و شیب خط قائم را حساب کرد.

امّا، کار درکلاس ۳ـ۳، که با توجه به شکل بسیار آسان است، دارای این نکته است که هرگاه مماس در نقطه‌ای از منحنی موازی محور ox است، مثلاً مماس در نقطه‌ی B از شکل ۱۵ـ۳، خط قائم موازی محور oy خواهد بود.



آموزش صفحه‌ی ۱۴۸

در این صفحه با دو مثال نحوه‌ی تعیین خط مماس یا قائم بر یک منحنی در نقطه‌ای از آن نشان داده شده است.

از دانش‌آموزان بخواهید این قسمت را مطالعه کنند و به سؤالات آن‌ها پاسخ دهید. ساده کردن معادله الزامی نیست مگر قید شده باشد که معادله را به صورت $y = ax + b$ یا به صورت $ax + by + c = 0$ بنویسند.

جواب سؤال‌های تمرین ۳ـ۳ را در ادامه ملاحظه می‌کنید.

۱ـ الف) معادله‌ی خط مماس $y = 7x - 7$

معادله‌ی خط قائم $y = -\frac{1}{7}x + \frac{51}{7}$

ب) معادله‌ی خط مماس $y = 1$

معادله‌ی خط قائم $x = -1$

پ) معادله‌ی خط مماس $y = 0$

معادله‌ی خط قائم $x = \pi$

ت) معادله‌ی خط مماس $y = 2x + 7$

معادله‌ی خط قائم $y = -\frac{1}{2}x + 2$

ث) معادله‌ی خط مماس $y = x$

معادله‌ی خط قائم $y = -x$

ج) معادله‌ی خط مماس $y = x + 1$

معادله‌ی خط قائم $y=-x+۳$

تمرین ۱ بسیاری از مفاهیم را دربر دارد، محاسبه‌ی مقدار تابع، محاسبه‌ی مشتق، محاسبه‌ی مشتق در یک نقطه و بالأخره نوشتن معادله‌ی یک خط با داشتن یک نقطه و شیب آن و نوشتن خط قائم با ظرافت‌های خاص آن. لذا، حل این تمرین را جدی بگیرید.

۲ــ رسم تابع‌های این تمرین را در این‌جا نمی‌آوریم زیرا بارها آن‌ها را رسم کرده‌ایم. فقط معادله‌ی مماس و قائم را در نقاط خواسته شده می‌نویسیم.

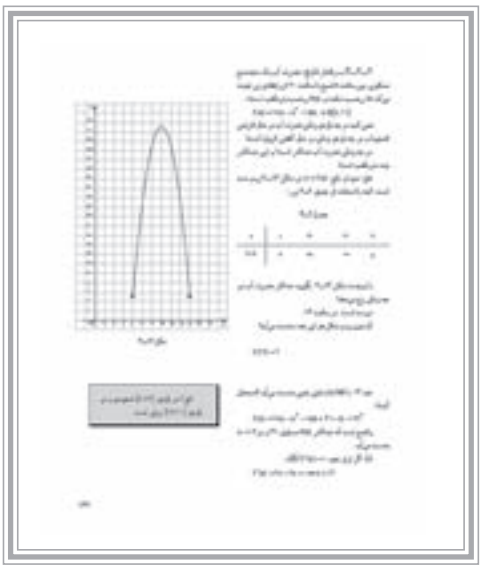
الف) داریم : $y'=\cos x$ و $y'(۰)=۱$ و $y(۰)=۰$

پس : $y-۰=۱(x-۰)$ و خط مماس $y=x$ می‌باشد.

واضح است که خط قائم $y=-x$ است.

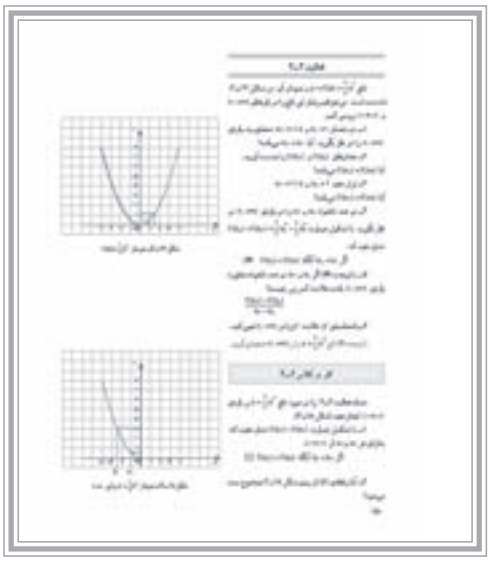
ب) داریم : $y'=-\sin x$ $y'(۰)=۰$ و $y(۰)=۱$

پس، $y=۱$ خط مماس و $x=۰$ خط قائم است.



آموزش صفحه‌ی ۱۴۹

منظور از رفتار تابع، تعیین بازه‌هایی است که در آن‌ها تابع صعودی یا نزولی است، در این صفحه مقدمات این هدف، با توجه به آن‌چه در زندگی روزمره تجربه می‌کنیم، دنبال می‌شود. افزایش و کاهش، به بیان عادی آن‌ها، با مثالی ملموس مورد پرسش قرار می‌گیرد و نمودار تابع به خوبی راهنمای دانش‌آموزان است. در پایان صفحه، انتظار می‌رود، دانش‌آموزان ارتباط بین مشتق و x نقطه‌ی ماکسیمم را دریابند.



آموزش صفحه‌ی ۱۵۰

در این صفحه مقدمات تعریف تابع صعودی و نزولی را فراهم می‌کنیم (طبق رویکرد برنامه، این مقدمات توسط یادگیرنده مهیا می‌شود).

فعالیت ۳ــ۳ توسط دانش‌آموزان، فردی یا گروهی، اجرا می‌شود. با انتخاب **چند جفت نقطه** و استفاده از نمودار، دانش‌آموزان ملاحظه می‌کنند که برای نمودار $y=\frac{۱}{۲}x^۲$ ، در $(۰,+\infty)$ داریم :

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

بدون شکل باید چنین عمل کنند :

$$(*)\ f(x_1) - f(x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)$$

در $(0,+\infty)$ داریم $x_1 + x_2 > 0$. لذا، اگر $x_1 < x_2$ آن‌گاه $(x_1 - x_2) < 0$ و با توجه به $(*)$، $f(x_1) - f(x_2) < 0$ یعنی $f(x_1) < f(x_2)$. ضمناً، داریم (از $(*)$) :

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{x_1 + x_2}{2} > 0 \quad (x_1, x_2 > 0)$$

لذا، اگر x_1 را ثابت و x_2 را به x_1 میل دهیم حتماً $f'(x_1)$ مثبت خواهد بود. این مطلب با محاسبه‌ی مشتق هم تأکید می‌شود :

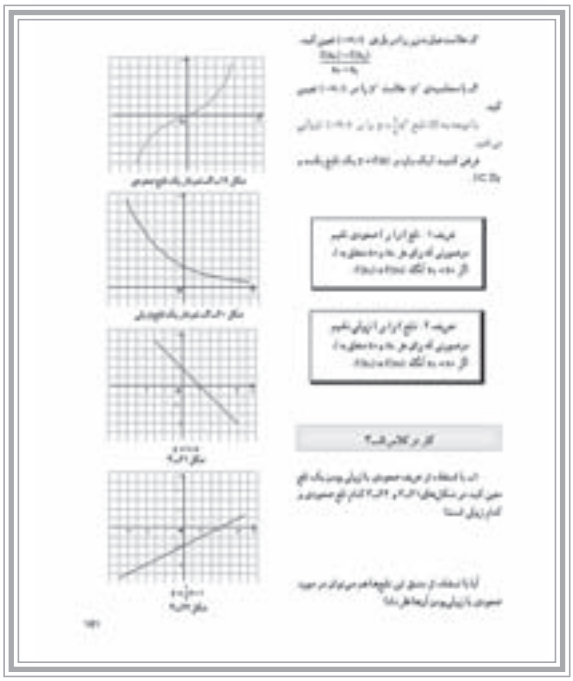
$$y' = x > 0 \quad (x \in (0,+\infty))$$

کار در کلاس **۴ــ۳** نیز به همین ترتیب انجام می‌شود.

آموزش صفحه‌ی ۱۵۱

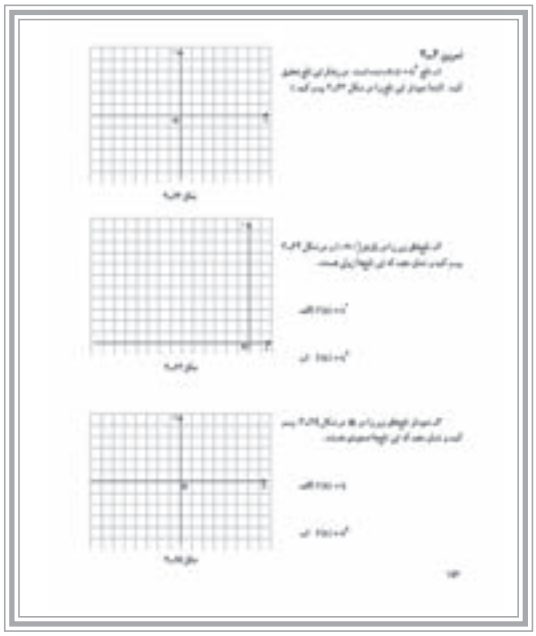
در این صفحه رسماً به تعریف تابع صعودی و تابع نزولی پرداخته شده است. برای دوری از طرح واژه‌های متعدد از عبارات **اکیداً صعودی** یا **اکیداً نزولی** استفاده نکرده‌ایم. گرچه ممکن است برای دبیران محترم مشکلاتی را دربر داشته باشد. دانش‌آموزان اطلاعی از توابع اکیداً صعودی یا نزولی ندارند بلکه معلم نظر آن‌ها را به این واژه‌ها جلب می‌کند.

در هر صورت با دو تعریف ارائه شده در این صفحه باید دقت کنید که هر تابع ثابت هم صعودی و هم نزولی است. دانش‌آموزان باید تا حدودی متوجه شده باشند که هر خط راست با شیب مثبت (یا صفر) یک تابع صعودی را مشخص می‌کند و هر خط راست با شیب منفی (یا صفر) یک تابع نزولی را معرفی می‌کند (شکل‌های **۲۱ــ۳** و **۲۲ــ۳**).



آموزش صفحه ی ۱۵۲

در این صفحه رفتار تابع‌های $y = x^n$ ، که $n = ۲, ۳, ۴, ۵$ ، مورد بررسی قرار می‌گیرد. دانش‌آموزان در پایان اجرای تمرین ۴ـ۳ باید دریافته باشند که رفتار تابع $y = x^{۲k}$ که k یک عدد طبیعی است، با رفتار تابع $y = x^۲$ یکسان است (حتی نمودار آن‌ها نیز مشابه است). ضمناً، رفتار تابع $y = x^{۲k+۱}$ ، که k یک عدد طبیعی است، با رفتار تابع $y = x^۳$ یکسان است (حتی نمودار آن‌ها نیز شبیه به هم است). لذا، تابع $y = x^{۲k+۱}$ برای هر k ی طبیعی صعودی است. تابع $y = x^{۲k}$ برای هر kای طبیعی در $(-\infty, ۰]$ نزولی و در $[۰, +\infty)$ صعودی است. این نتایج را مشتق نیز تأیید می‌کند.

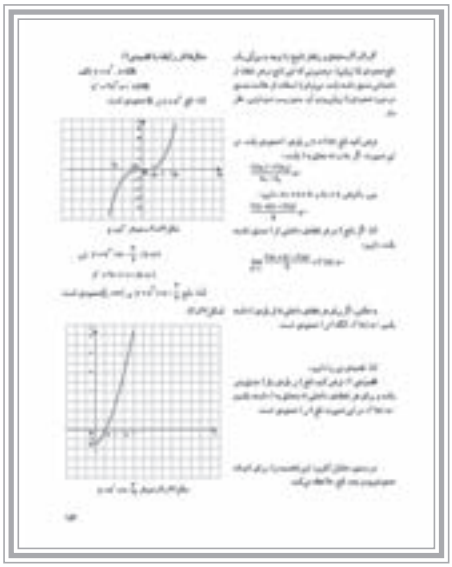


آموزش صفحه‌های ۱۵۳ و ۱۵۴

در این صفحه، با توجه به صفحات قبل، رسماً ارتباط علامت مشتق و رفتار تابع مورد بررسی قرار می‌گیرد. از دانش‌آموزان بخواهید که این صفحه را مطالعه کنند.

هدف آموزش این صفحه بیان این مطلب است که در هر بازه که تابع f صعودی باشد f' مثبت یا صفر است و به عکس اگر بر بازه I تابع f' نامنفی باشد تابع f بر I صعودی است. هدف اصلی‌تر این که می‌خواهیم از این حکم در حل مسائل و رسم نمودار توابع استفاده شود. مثال‌های این صفحه نیز در همین راستا هستند و دانش‌آموزان را با کاربرد این قضیه آشنا می‌کنند.

در صفحه‌ی ۱۵۴ قضیه‌ی مشابهی برای توابع نزولی مطرح می‌شود.



اجرای کار در کلاس ۶ـ۳ توسط دانش‌آموزان ساده است و در مدت حدود ۲۰ دقیقه صورت می‌گیرد.

پاسخ این کار در کلاس را در زیر ملاحظه می‌کنید.

۱ـ صعودی

۲ـ نزولی

۳ـ نزولی

۴ـ نزولی

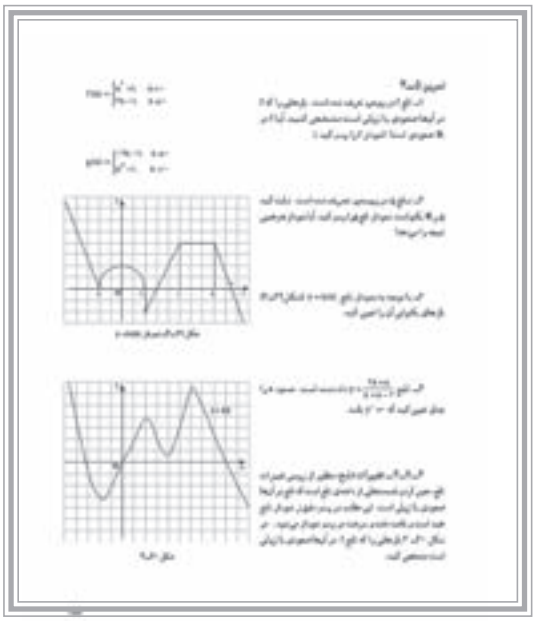
۵ـ صعودی

۶ــ نزولی

۷ــ نزولی

۸ــ صعودی

توجه داشته باشید که تابع $y = \sin x$ (یا $y = \cos x$) در $(0, 2\pi)$ یک‌نوا نیست (نه صعودی هستند و نه نزولی)، زیرا در قسمتی از این بازه صعودی و در قسمتی دیگر نزولی است.



آموزش صفحه‌ی ۱۵۵

این صفحه مروری بر آموخته‌های قبلی است، البته با تمرین‌های ساده! جواب‌ها را در این‌جا ملاحظه می‌کنید.

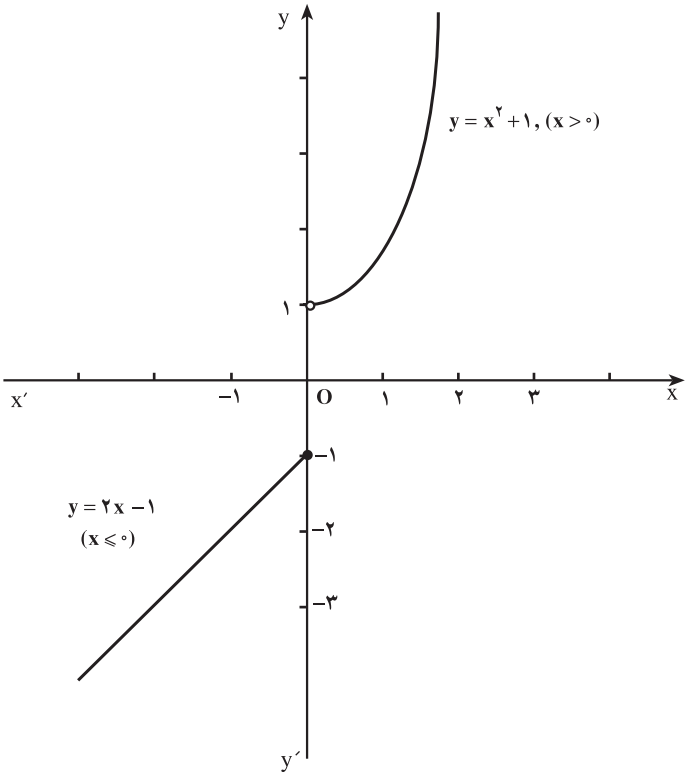
۱ــ داریم :

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & , \ x > 0 \\ 2 & , \ x < 0 \end{cases}$$

توجه کنید که تابع در $x = 0$ پیوسته نیست و لذامشتق هم ندارد. با توجه به مشتق تابع گوییم :

f در $(0, +\infty)$ صعودی و در $(-\infty, 0)$ نیز صعودی است، اما چون $f(0) = -1$ و $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1 > f(0)$

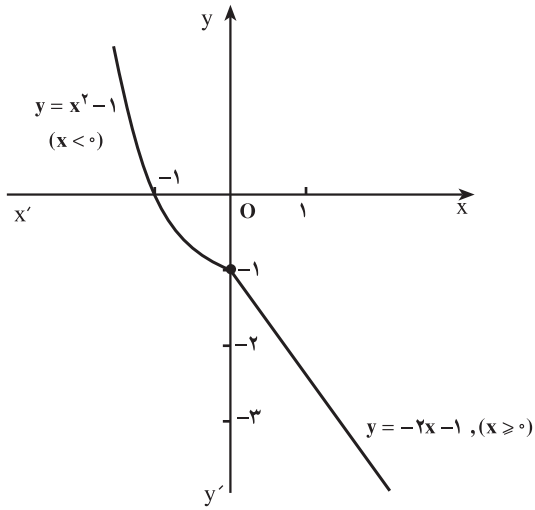
تابع f در $\mathbb{R}$ صعودی است. شکل روبه‌رو نیز این مطلب را تأیید می‌کند.



۲ــ به سادگی معلوم می‌شود که

$$g'(x)=\begin{cases}-۲ & x>۰\\ ۲x & x<۰\end{cases}$$

ملاحظه می‌کنیم که f بر $\mathbb{R}$ پیوسته و نزولی است. شکل روبه‌رو مؤید نتیجه‌ی بالاست.



۳ــ بازه‌های یک‌نوایی به صورت زیرند :

تابع h در $(-\infty,a]$ نزولی است.

تابع h در $[a,۰]$ صعودی است.

تابع h در $[۰,b]$ نزولی است.

تابع h در $(b,d]$ صعودی است.

تابع h در $[c,+\infty)$ نزولی است.

۴ــ مشتق y را حساب می‌کنیم :

$$y'=\frac{a-۴}{(x+a-۲)^۲}\ ,\ \ y'=۰\Rightarrow a=۴$$

a	$-\infty$		۴		$+\infty$
y'		−	۰	+	

جواب : $a\in(۴,+\infty)$.

آموزش صفحه‌ی ۱۵۶

از دانش‌آموزان بخواهید که مثال بالای این صفحه را مطالعه کنند. در این مثال روش رسم نمودار یک تابع، با توجه به علامت y' و یکی دو نقطه از تابع، نشان داده شده است.

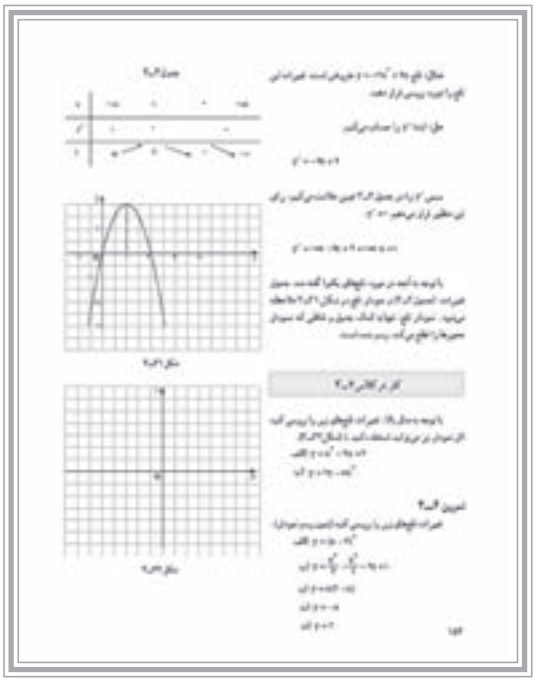
کار در کلاس ۷ــ۳ در راستای تمرین‌ها و مثال‌هایی است که قبلاً کار شده است و دانش‌آموزان نباید مشکلی در حل آن‌ها داشته باشند. پاسخ تمرین ۶ــ۳ را در زیر ملاحظه می‌کنید.

الف) $y'=۲(x-۳)$

تابع در $[۳,+\infty)$ صعودی و در $(-\infty,۳]$ نزولی است.

ب) $y'=x^۲-x-۲=۰\Rightarrow x=-۱$ یا ۲

لذا تابع در $[-۱,۲]$ نزولی و در $(-\infty,-۱]$ و $[۲,+\infty)$ صعودی است.



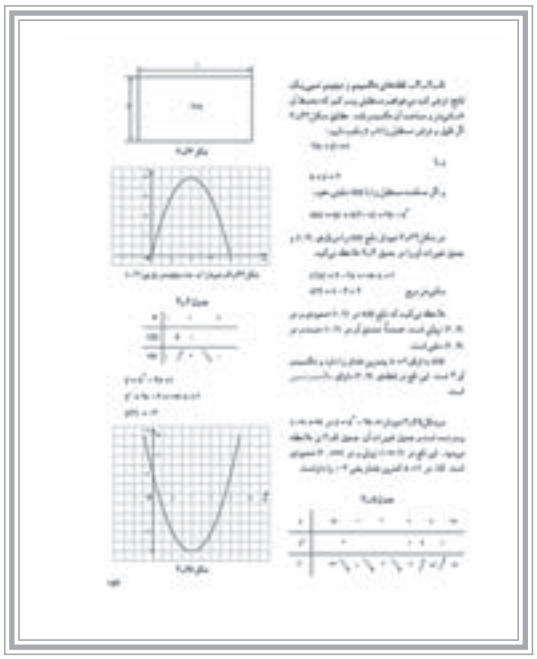
پ) $y' = ۲ - ۲x = ۰ \Rightarrow x = ۱$

لذا، تابع در $(-\infty,۱]$ صعودی و در $[۱,+\infty)$ نزولی است.

ت) $y' = -۱$ تابع نزولی است.

ث) $y' = ۰$ تابع یک‌نواست (هم صعودی و هم نزولی)

آموزش صفحه‌ی ۱۵۷

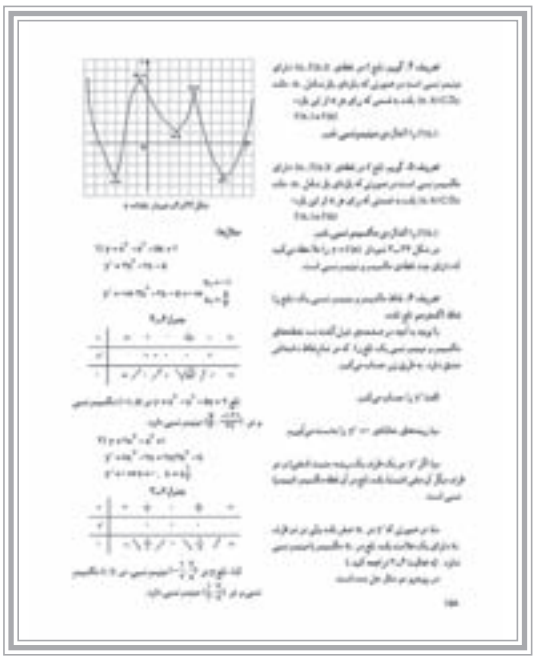


این صفحه با یک مسئله‌ی کاربردی شروع می‌شود. از دانش‌آموزان بخواهید که این صفحه را مطالعه کنند و روش کار را یاد بگیرند. از آن‌ها سؤال کنید «چه ویژگی‌ای در حل این مسئله به چشم می‌خورد؟» انتظار می‌رود که برخی چنین جواب دهند :

سعی می‌کنیم $s(x)$ را برحسب x (یک متغیر) بنویسیم. در این صورت مسئله برمی‌گردد به تعیین ماکسیمم یک تابع که قبلاً راه حل آن را می‌دانیم.

مثال پایین صفحه مجرد است و همین کار را تمرین می‌کند. مشابه مسئله‌ی کاربردی ابتدای صفحه، می‌توان مسائل دیگری مطرح کرد. برخی از این مسائل در فصل چهارم از بخش سوم کتاب دانش‌آموز آمده است. اگر مسئله‌ی ساده‌ای غیر از آن‌ها سراغ دارید حتماً در کلاس مطرح کنید و بعد آموزش صفحه‌ی ۱۵۷ را شروع کنید.

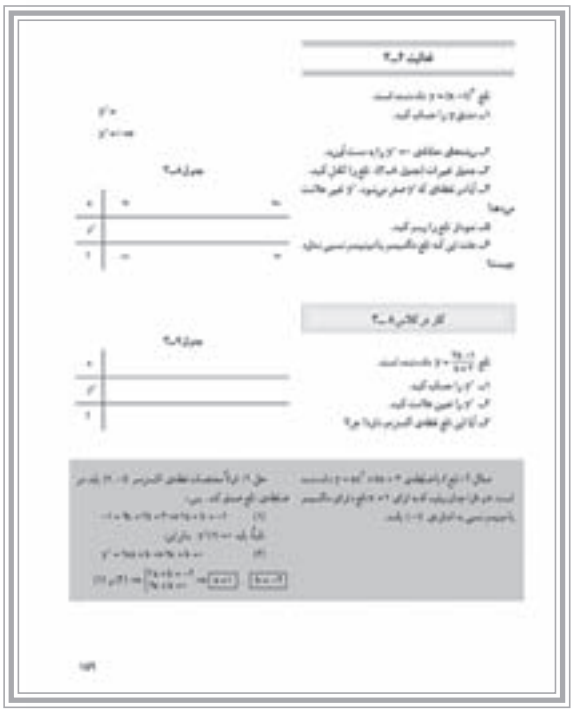
آموزش صفحه‌ی ۱۵۸



در این صفحه ماکسیمم و مینیمم نسبی رسماً تعریف می‌شوند و در صورتی که تابع در تمام نقاط دامنه‌ی تعریفش مشتق داشته باشد الگوریتمی جهت تعیین نقاط اکسترمم ارائه شده است. از دانش‌آموزان بخواهید که این صفحه را مطالعه کنند و در صورت لزوم جدول مربوط به مثال‌های ۱ و ۲ را روی تابلو بنویسید و توضیحات لازم را ارائه کنید.

ضمناً، توجه دانش‌آموزان را به این نکته جلب کنید که یک تابع در دامنه‌ی تعریفش ممکن است چندین ماکسیمم نسبی و چندین مینیمم نسبی داشته باشد. این نکته در تعیین ماکسیمم کلی و مینیمم کلی یک تابع حائز اهمیت است.

آموزش صفحه‌ی ۱۵۹



این صفحه با این مطلب شروع می‌شود که $y' = ۰$ الزاماً ماکسیمم یا مینیمم نسبی را تعیین نمی‌کند مگر این که در نقطه‌ای که $y' = ۰$ تغییر علامت هم رخ دهد.

مثال ساده‌تر از مثال کتاب $y = x^۳$ است که برای آن $y' = ۳x^۲$ و y' در $x = ۰$ تغییر علامت نمی‌دهد. به عبارت دیگر $y' \geq ۰$ و تابع y صعودی است و در $\mathbb{R}$ ماکسیمم یا مینیمم نسبی ندارد.

فعالیت ۴ـ۳ توسط دانش‌آموزان، فردی یا گروهی به سادگی اجرا می‌شود و بنابر توضیحات بالا به راحتی پاسخ پرسش ۶ را خواهند داد.

در حالت کلی برای تابع به صورت $y = \pm x^{۲k+۱}$, $k \in \mathbb{N}$ در $x = ۰$ داریم $y' = ۰$ ولی این تابع در $\mathbb{R}$ نه ماکسیمم نسبی دارد و نه مینیمم نسبی.

در مورد کار در کلاس ۸ـ۳ نیز دانش‌آموزان مشکلی نخواهند داشت:

$$y' = \frac{۵}{(x+۲)^۲} > ۰$$

تابع همواره صعودی است و لذا نقطه‌ی اکسترمم ندارد.

جدول ۹ـ۳ در زیر آمده است:

x	$+\infty$		-۲		$-\infty$
y'		+	|	+	
y	۲	↗	$+\infty$ | $-\infty$ نامعین	↗	۲

جدول نیز رفتار تابع را در مجاورت $x = -۲$ نشان می‌دهد.

از دانش‌آموزان بخواهید مثال ۱ را مطالعه کنند. از این نوع مثال باز هم برای آن‌ها حل کنید یا برای حل به آن‌ها ارائه نمایید.

آموزش صفحه‌ی ۱۶۰

در این صفحه مثال دیگری از تعیین چند مجهول به کمک نقاط اکسترمم آورده شده است.

از دانش‌آموزان بخواهید که با پوشاندن حل مثال ۲ (با هر وسیله‌ی ممکن!) سعی کنند مجهولات را به دست آورند. درنهایت راه حل و جواب خود را با حل آن مقایسه کنند.

در صورتی که دانش‌آموزان را در حل این مثال ضعیف تشخیص دادید. با مثال‌های ساده‌تر آن‌ها را تقویت کنید، به‌گونه‌ای که قادر باشند سؤال ۳ از تمرین ۷ـ۳ صفحه‌ی ۱۶۰ را به راحتی حل کنند.

جواب سؤال‌های تمرین ۷ـ۳ در زیر آمده است.

۱ـ الف) تابع $y = \sin x$ ، در بازه‌ی $[0,\pi]$، در $x = \frac{\pi}{2}$ دارای ماکسیمم نسبی ۱ است.

ب) تابع $y = \cos x$، در بازه‌ی $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$، در $x = 0$ دارای ماکسیمم ۱ است.

پ) این تابع در $(\frac{1}{4},+\frac{1}{8})$ دارای ماکسیمم نسبی است.

۲ـ داریم : $f'(x) = 3ax^2 + 2(a-1)x + 4$

$f'(-2) = 12a - 4(a-1) + 4 = 8a + 8 = 0$

پس $\boxed{a = -1}$

۳ـ داریم :

$y' = 3ax^2 + 2bx + c$

$y'(-1) = 3a - 2b + c = 0$ (۱)

$y(1) = a + b + c + d = 0$ (۲)

$y(0) = d = 5$ (۳)

$y(-1) = -a + b - c + d = 8$ (۴)

با توجه به (۳) معادلات (۱) و (۲) و (۴) به صورت زیرند :

$$\begin{cases} 3a - 2b + c = 0 \\ a + b + c = -5 \\ -a + b - c = 3 \end{cases} \Rightarrow a = 1 \quad b = -1 \quad c = -5$$

حل مسائل بیش‌تر

۱ــ معادله‌ی خط قائم بر منحنی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{2x+1}$ را در نقطه‌ی $x=0$ واقع بر منحنی بنویسید.

حل:

$f(0)=1$

شیب خط مماس $f'(x)=\dfrac{2}{2\sqrt{2x+1}}\ ,\ f'(0)=1=m$

شیب خط قائم $m'=-\dfrac{1}{m}=-1$

$y-1=-1(x-0)\Rightarrow y=-x+1$

۲ــ تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\dfrac{2x+a}{x+a-2}$ داده شده است. حدود a را چنان بیابید که $y'\geq 0$ باشد.

حل:

$y'=\dfrac{2(x+a-2)-1(2x+a)}{(x+a-2)^2}$

$=\dfrac{a-4}{(x+a-2)^2}\ ,\ y'\geq 0$

$\Rightarrow a-4\geq 0\Rightarrow a\geq 4$

۳ــ تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=2ax^2+bx+1$ داده شده است a و b را چنان بیابید که به ازای $x=+1$ تابع دارای ماکسیمم یا مینیممی مساوی -1 باشد.

حل:

$f'(x)=4ax+b$

$f'(1)=0\Rightarrow 4a+b=0\quad (1)$

$-1=f(1)\Rightarrow -1=2a+b+1$

$\Rightarrow 2a+b=-2\quad (2)$

$(1)\ ,\ (2)\Rightarrow a=1\ ,\ b=-4$

۴ــ معادله‌ی خط مماس بر نمودار تابع باضابطه‌ی $y=\tan x$ را در نقطه‌ی $x=0$ بنویسید.

حل:

$x=0\Rightarrow y=0$

$y'=1+\tan^2 x\ ,\ m=y'(0)=1+0=1$

$y-0=1(x-0)\Rightarrow y=x$

۵ــ معادله‌ی خط مماس بر منحنی تابع باضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{x^2+3}$ را در نقطه‌ی $x=-1$ بنویسید.

حل:

$f(-1)=2$

$f'(x)=\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+3}}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}$

$f'(-1)=\dfrac{-1}{2}=m$

$y-2=-\dfrac{1}{2}(x+1)$

$y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}$

۶ــ تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=mx^{۳}+۲mx^{۲}+۲x$ داده شده است. مقدار m را چنان تعیین کنید که تابع در $x=-۱$ دارای ماکسیمم یا مینیمم باشد.

حل:

$f'(x)=۳mx^{۲}+۴mx+۲$

$f'(-۱)=۰$

$۳m-۴m+۲=۰$

$m=۲$

۷ــ معادله‌ی خط مماس بر نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sin^{۲}۲x$ را در نقطه‌ی $x=\frac{\pi}{۸}$ واقع بر منحنی به دست آورید.

حل:

$f'(x)=۲\times۲\sin۲x\cos۲x$

$f'(\frac{\pi}{۸})=۲=m$

$f(\frac{\pi}{۸})=\sin^{۲}(\frac{\pi}{۴})=\frac{۱}{۲}$

$y-\frac{۱}{۲}=۲(x-\frac{\pi}{۸})$

$y=۲x-\frac{\pi}{۴}+\frac{۱}{۲}$

۸ــ هرگاه تابع باضابطه‌ی $y=\frac{۲x+b}{۳x-۵}$ در بازه‌ی $(-\infty,\frac{۵}{۳})$ همواره نزولی باشد حدود b را بیابید.

حل:

$y'=\frac{۲(۳x-۵)-۳(۲x+b)}{(۳x-۵)^{۲}}$

$=\frac{-۱۰-۳b}{(۳x-۵)^{۲}}$

باید داشته باشیم $y'<۰$ و یا $-۱۰-۳b<۰$ یا $b>-\frac{۱۰}{۳}$