

# فصل ۱

## دنباله‌ها

### ۱-۱- مقدمه

وقتی در یک برنامه تلویزیونی به حرکات و تکاپوی انبوهی از ماهی‌ها می‌نگریم، به این فکر وادار می‌شویم که رشد جمعیت ماهی‌ها از چه مدل و رابطه‌ای پیروی می‌کند. آیا می‌توانیم با توجه به شرایط زیست محیطی و تغییرات آن رشد و زوال گونه خاصی از ماهی‌ها را پیش‌بینی کنیم؟ فرض کنیم مدل جمعیتی نوع خاصی از ماهی‌ها از رابطه

$$P_{n+1} = \frac{bp_n}{a + p_n}$$

پیروی کند که در آن  $p_n$  جمعیت ماهی‌ها در سال  $n$ ام،  $P_{n+1}$  جمعیت ماهی‌ها در سال  $n+1$ ام و  $a$  و  $b$  دو عدد ثابت‌اند که به شرایط محیطی ماهی‌ها وابسته‌اند. با استفاده از این رابطه چنانچه جمعیت ماهی‌ها در سال اول، یعنی  $P_1$  معلوم باشد، جمعیت ماهی‌ها در سال دوم و سال‌های بعد به دست می‌آید. یعنی اعداد

$$P_1, P_2, P_3, \dots, P_n, \dots$$

حاصل می‌شوند که اصطلاحاً آن را دنباله می‌نامیم. مطالعه دنباله‌ها و خواص آنها موضوع این فصل می‌باشد.

### ❖ مسأله

(الف) به نظر شما براساس مدل داده شده فوق تحت چه شرایطی جمعیت ماهی‌ها افزایش می‌یابد؟  
(ب) تحت چه شرایطی جمعیت ماهی‌ها کاهش یافته و جمعیت فنا می‌شود؟  
در ادامه این فصل با مطالعه مبحث دنباله‌ها و بررسی خواص آنها به این پرسش‌ها پاسخ خواهیم

داد.

با استفاده از رابطه داده شده چنانچه جمعیت ماهی‌ها در سال اول، یعنی  $p_1$ ، معلوم باشد، جمعیت ماهی‌ها در سال دوم، یعنی  $p_2$  به دست می‌آید:

$$P_2 = \frac{bp_1}{a + p_1} \quad (n=1)$$

مشابه‌اً با داشتن  $p_2$ ، و قرارداد  $n=2$  در فرمول  $p_2$  به دست می‌آید. با ادامه این فرآیند، اعداد

$$P_1, P_2, P_3, \dots, P_n, \dots$$

حاصل می‌شوند که اصطلاحاً آن را یک دنباله می‌نامیم، مطالعه دنباله‌ها و خواص آنها موضوع این فصل می‌باشد.

## ۲-۱- دنباله‌های عددی

در سال‌های قبل با اعداد اعشاری و تبدیل کسره‌های گویا به اعداد اعشاری آشنا شده‌اید. برای مثال برای آن که کسر  $\frac{1}{3}$  را به کسر اعشاری تبدیل کنیم کافی است عدد ۱ در صورت کسر را به عدد ۳ مخرج تقسیم کنیم در ابتدا عدد  $\frac{0}{3}$  حاصل می‌شود. اگر تقسیم را ادامه دهیم اعداد  $\frac{0}{333}$ ،  $\frac{0}{3333}$  و نظایر این‌ها به دست می‌آیند. چون باقیمانده هرگز صفر نمی‌شود این اعشار همچنان ادامه دارند. آیا  $\frac{1}{3}$  با اعداد به دست آمده برابر است؟ هرگاه  $\frac{1}{3}$  را برابر  $\frac{0}{3}$  اختیار کنیم، مقداری تقریبی برای  $\frac{1}{3}$  به دست آورده‌ایم که خطای این تقریب کمتر از  $\frac{1}{8}$  است: زیرا

$$\frac{1}{3} - \frac{0}{3} = \frac{0}{333} \dots$$

و  $\frac{0}{333} < \frac{0}{8}$  هرگاه  $\frac{1}{3}$  را برابر  $\frac{0}{333}$  اختیار کنیم، خطای تقریب از  $\frac{0}{8}$  نیز کوچک‌تر است. به همین نحوه هرگاه  $\frac{1}{3}$  را برابر  $\frac{0}{3333}$  بگیریم، خطای تقریب از  $\frac{0}{8000}$  کوچک‌تر است. در عمل و محاسبات کاربردی خطای تقریب را از پیش معین کرده و متناسب با آن مقدار تقریب  $\frac{1}{3}$  را به صورت اعشاری، با اعشار خاتمه یافته، مشخص می‌کنند.



ممکن است چنین به نظر رسد که برای آن که خطای تقریب را به صفر برسانیم بهتر است بنویسیم

$$\frac{1}{3} = \frac{0}{33333} \dots$$

اما نوشتن کسر اعشاری با نمایش  $\frac{0}{33333000}$  که در آن رقم اعشاری ۳، برای همیشه ادامه دارد، چه معنا و مفهومی می‌تواند داشته باشد؟ برخی برای آنکه ۳ صدم و ۳ هزارم و ... را تکرار نکنند

می نویسند.

$$\frac{1}{3} = 0.\overline{3}$$

اگر منظورمان از نوشتن سه نقطه «...» به دنبال آخرین ۳ این است که این رقم تا ابد ادامه دارد چگونه می توانیم تساوی فوق را تفسیر کنیم؟  
در واقع دنباله‌ای از اعداد اعشاری به صورت

$$0.\overline{3}, 0.\overline{33}, 0.\overline{333}, \dots, 0.\overline{333\dots 3}, \dots$$

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

$$a_n = 0.\overline{333\dots 3} \text{ (n بار 3)}, \dots, a_3 = 0.\overline{333}, a_2 = 0.\overline{33}, a_1 = 0.\overline{3}$$

در دست داریم که در آن

$a_1$  را جمله اول این دنباله،  $a_2$  را جمله دوم و در حالت کلی،  $a_n$  را جمله  $n$ ام این دنباله یا جمله عمومی دنباله می نامیم.

اکنون شما احمد بفرمایید که یک دنباله را به زبان ریاضی چگونه تعریف می کنید؟

احمد: یک دنباله عددی مجموعه‌ای از اعداد است که این اعداد با اعداد طبیعی شماره گذاری شده‌اند.

دبیر: بسیار خوب. آیا می توانی به زبان دقیق تری دنباله را تعریف کنی؟

احمد: آری، هر دنباله عددی، یا به اختصار دنباله، تابعی است با دامنه مجموعه اعداد طبیعی  $N$  و هم دامنه مجموعه اعداد حقیقی  $R$ .

دبیر: بسیار خوب. شما تعریف دقیق دنباله را ارایه دادید. می توان با علامات ریاضی توضیح بیشتری بدهی؟

$$a: N \rightarrow R \quad (1)$$

احمد: فرض کنیم

یک تابع، یعنی یک دنباله باشد، در این صورت  $a(1)$ ،  $a(2)$ ،  $\dots$ ،  $a(n)$  مقادیر تابع  $a$  بوده که اعدادی حقیقی اند. در موقعیت کاری با دنباله‌ها، به جای  $a(1)$  می نویسیم  $a_1$ ، به جای  $a(2)$  می نویسیم  $a_2$  و به طور کلی به جای  $a(n)$  می نویسیم  $a_n$ . لذا نماد تابعی نمایش داده شده در (۱) به صورت ساده تر زیر نوشته می شود:

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

دبیر: اکنون شما حسین دو دنباله دیگر نام ببرید.

حسین: این پرسش ساده‌ای است؛ می‌توانم بنویسم:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots, \frac{1}{n}, \dots \quad (1)$$

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots \quad (2)$$

دبیر: اکنون این دنباله را در نظر بگیرید:

$$7, -8, 9, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \frac{8}{9}, \dots \quad (3)$$

آیا می‌توانی جمله عمومی این دنباله و یا شکل تابعی آن را بیان کنی؟

حسین: آری، ۷ اولین جمله این دنباله است، همین -۸ دومین و ۹ سومین و  $\frac{5}{6}$

چهارمین جمله آن است. اگر نام این دنباله را  $b$  بنامیم، داریم

$$b_1 = 7, b_2 = -8, b_3 = 9, b_4 = \frac{5}{6}, b_5 = \frac{6}{7}, \dots$$

اما از شماره ۴ به بعد جملات دنباله، که همان مقادیر تابع اند، منظم هستند، پس

می‌نویسیم

$$b_1 = 7, b_2 = -8, b_3 = 9, b_n = \frac{n}{n+1}, n \geq 4 \quad (4)$$

دبیر: فرق این دنباله یا دنباله نموده شده در (۲) چیست؟

حسین: دنباله‌های (۲) و (۳) فقط در سه جمله نخست با هم متفاوت‌اند. از

شماره ۴ به بعد دو دنباله متحدند.

دبیر: آیا می‌توانیم بگوییم این دو دنباله یکی‌اند؟

حسین: خیر؛ اما تفاوت در سه جمله تأثیری کلی در اعداد دو دنباله ندارد.

دبیر: از دنباله‌های آشنای دیگر خاطرتان هستند؟ تصاعد هندسی را به خاطر

دارید؟

احمد: آری، می‌توانم چند مثال بزنم، برای نمونه یک تصاعد هندسی می‌سازم:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots, \frac{1}{2^{n-1}}, \dots$$

دبیر: درست است. این دنباله یک دنباله تصاعد هندسی است که قدر نسبت آن

$q = \frac{1}{p}$  است. جملات آن مرتب کوچک و کوچکتر می‌شوند زیرا قدر نسبت آن کوچکتر از واحد است.

حسین: منظورتان از کوچکتر شدن چیست؟

دیپیر: منظورمان این است که جملات دنباله به عدد صفر گرایش دارند، اصطلاحاً گوییم حد دنباله برابر صفر است.

حسین: اما هر کسر به شکل  $\frac{1}{p^{n-1}}$  ولو  $n$  خیلی بزرگ باشد، هرگز برابر صفر نمی‌شود.

دیپیر: آری درست است. منظور از آن که حد دنباله برابر صفر است، این نیست که جملات دنباله برابر صفر می‌شوند، بلکه خطای آنها تا صفر به دلخواه کوچک می‌گردد. اجازه دهید به این مبحث بعداً بپردازیم. فعلاً به تعاریف و مقدمات دنباله ادامه می‌دهیم.

نماد دنباله: وقتی با یک دنباله مانند

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

سر و کار داریم، آن را با نماد آکولاد یعنی  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  و یا مختصراً  $\{a_n\}_{n=1}$  و یا حتی مختصرتر با  $\{a_n\}$  نشان می‌دهیم. برای مثال، دنباله‌هایی را که قبلاً حسین نام برد با  $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}$ ،  $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{n=1}$  نشان می‌دهیم، لذا جمله عمومی دنباله را در درون آکولاد قرا می‌دهیم و  $n=1$  نشانگر آن است که شماره جملات از عدد طبیعی ۱ شروع می‌شود.

البته هرگاه دنباله، فاقد ضابطه و قانون مشخص باشد. یعنی جمله عمومی آن را نتوانیم با فرمول ساده و معین مانند  $a_n = \frac{1}{n}$  بیان کنیم، چاره‌ای نداریم جز آنکه جملات دنباله را یکی یکی و به دنبال هم نام ببریم و از نماد دنباله نمی‌توانیم استفاده کنیم.

از این نوع دنباله‌ها، می‌توانیم به دنباله اعدادی که نمایشگر عدد  $\pi$  است اشاره کنیم (یعنی اعداد آن به عدد  $\pi$  گرایش دارند).

$$3, 3/14, 3/1428, \dots$$

برای این دنباله هیچ قاعده و یا قانونی که بر طبق آن بتوان جملات دنباله را تولید کرد وجود ندارد (چرا؟).

❖ **نکته:** ممکن است با یک توالی متناهی از اعداد سر و کار داشته باشیم. در این صورت این توالی را یک دنباله متناهی می‌نامیم، مانند

$$1, 2, 3, 4, \dots, 20$$

$$-5, 5, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \sqrt{2}, -\sqrt{3}$$

که اولی دنباله‌ای متناهی با ۲۰ جمله و دومی دنباله‌ای متناهی با ۶ جمله می‌باشد. اما وقتی از یک دنباله بدون قید نام برده می‌شود مرادمان یک دنباله نامتناهی است.

اکنون به ذکر مثال جالبی از دنباله‌ها می‌پردازیم که نظیر تابع ثابت می‌باشد.

❖ **مثال:** فرض کنیم  $C \in \mathbb{R}$  عدد ثابتی باشد. دنباله  $C, C, C, \dots, C, \dots$

که در آن هر جمله آن برابر  $C$ ، یعنی برای هر عدد طبیعی  $n$ ،  $C_n = C$ ، دنباله ثابت  $C$  نامیده می‌شود

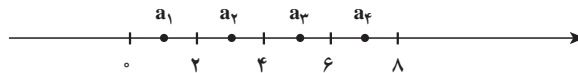
$$\sqrt{2}, \sqrt{2}, \dots, \sqrt{2}, \dots$$

برای نمونه دنباله

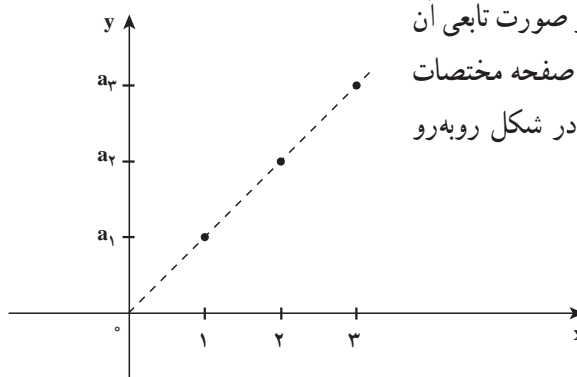
دنباله ثابت  $\sqrt{2}$  یعنی  $\{\sqrt{2}\}$  می‌باشد.

### ۳-۱- نمودار دنباله‌ها

یک دنباله را به دو صورت می‌توانیم نمایش دهیم. یک راه آن مشخص کردن جملات دنباله روی خط اعداد حقیقی است. برای نمونه دنباله اعداد زوج، یعنی  $\{2n\}_{n=1}$  به صورت نقاطی روی محور اعداد نمایش داده می‌شود (شکل زیر).



جملات دنباله  $a_{2n} = 2n$ ، یعنی اعداد طبیعی زوج با نقاط توپر روی محور اعداد حقیقی مشخص شده است.



راه دوم نمایش دنباله با استفاده از صورت تابعی آن است، همانند یک تابع نقاط دنباله را در صفحه مختصات نشان می‌دهیم. نمودار دنباله  $a_{2n} = 2n$  در شکل روبه‌رو نشان داده شده است.

وقتی با خط به معادله  $f(x) = 2x$  مقایسه می‌کنیم، ملاحظه می‌کنیم که نمودار دنباله با ضابطه  $a_n = 2n$  به صورت نقاط مجزا و توپر روی این خط قرار دارند.

## ۱-۴- انواع دنباله‌ها

در درس حسابان با انواع مهمی از توابع آشنا شده‌اید. مفاهیم تابع صعودی، تابع نزولی، تابع کراندار در حسابان از اهمیت اساسی برخوردارند. این مفاهیم را بار دیگر یادآوری می‌نماییم.

فرض کنیم  $A$  زیرمجموعه‌ای از مجموعه اعداد حقیقی باشد، تابع  $f$  را بر  $A$  صعودی می‌نامیم، در صورتی که همواره از  $x_1 < x_2$  نتیجه شود  $f(x_1) \leq f(x_2)$ ، همچنین تابع  $f$  را بر  $A$  از بالا کراندار نامیم در صورتی که عدد حقیقی  $U$  یافت شود به طوری که برای هر  $x \in A$ ،  $f(x) \leq U$

مفاهیم نزولی بودن و از پایین کراندار بودن مشابهاً تعریف می‌شوند تابع  $f$  را بر  $A$  کراندار می‌نامیم در صورتی که از بالا و از پایین کراندار باشد، یعنی عددی مثبت مانند  $U$  یافت شود به طوری که برای هر  $x \in A$ ،  $-U \leq f(x) \leq U$

چون هر دنباله ماهیتاً یک تابع است، همین مفاهیم را می‌توانید در مورد دنباله‌ها تکرار کنید. در این جا کار ساده‌تر است، زیرا دامنه هر دنباله مجموعه اعداد طبیعی است که به طور مرتب شده، از کوچک به بزرگ، در نظر گرفته می‌شود:

$$1 < 2 < 3 < 4 < \dots < n < n+1 \dots$$

$$\downarrow a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad \dots \quad a_n \quad a_{n+1}, \dots$$

پس هرگاه دنباله  $\{a_n\}$  بخواهد صعودی باشد، چون  $1 < 2$ ، باید  $a_1 < a_2$ . همچنین چون  $2 < 3$  باید داشته باشیم  $a_2 \leq a_3$  و به طور کلی چون  $n < n+1$ ، لازم است که  $a_n < a_{n+1}$ ، یعنی هرگاه از سمت چپ به جملات دنباله بنگریم، هر جمله باید از جمله بعدی کوچکتر یا مساوی باشد.

برای دنباله نزولی وضعیت برعکس است، دنباله‌ای نزولی است که وقتی از چپ بدان می‌نگریم هر جمله از جمله بعدی بزرگتر یا مساوی است به عبارت دیگر دنباله  $\{a_n\}$  صعودی است هرگاه برای

$$a_n \leq a_{n+1}, n$$

هر دنباله که یا صعودی و یا نزولی باشد یک دنباله یکنوا نامیده می‌شود.



به دنباله‌های زیر توجه کنید.

(الف)  $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \dots, n^2, \dots$

(ب)  $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \frac{1}{243}, \dots, \frac{1}{3^n}, \dots$

$$2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \frac{7}{6}, \dots, \frac{n+1}{n}, \dots \quad (\text{ج})$$

$$2, \left(\frac{3}{2}\right)^2, \left(\frac{4}{3}\right)^3, \left(\frac{5}{4}\right)^4, \left(\frac{6}{5}\right)^5, \dots, \left(\frac{n+1}{n}\right)^n, \dots \quad (\text{د})$$

اکنون مشخص کنید کدام دنباله صعودی و کدامیک نزولی است.

❖ **نکته:** در بحث دنباله، از ویژگی‌های حسابی دنباله چنان است که با افزایش شماره جمله دنباله، مقدار جملات افزایش می‌یابد، یا آن‌که وقتی دنباله‌ای از بالا کراندار است، جملات دنباله از یک عدد ثابتی بزرگتر نخواهند شد.

بررسی و مطالعه رفتار دنباله‌ها و همچنین توابع در واقع پیش‌بینی رفتار آنها است.

**دنباله نوسانی**

به دنباله‌های زیر توجه کنید.

$$1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots, (-1)^{n+1}, \dots \quad (\text{الف})$$

$$-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots, \left(-\frac{1}{2}\right)^n, \dots \quad (\text{ب})$$

$$2, -3, 4, -5, 6, -7, \dots \quad (\text{ج})$$

ویژگی این دنباله‌ها چنان است که جملات آن یک در میان مثبت و منفی هستند. جملات دنباله (الف) همگی حول دو نقطه ۱ و -۱ گرد آمده‌اند و در واقع برابر ۱ یا -۱ هستند. جملات دنباله (ب) نیز حول یک عدد معین گرد آمده‌اند، در حالی که جملات دنباله (ج) فاقد چنین ویژگی هستند. هیچ‌یک از این سه دنباله نه صعودی‌اند و نه نزولی، پس یکنوا نیستند.

## مسائل

۱- چهار دنباله زیر را در نظر بگیرید:

$$\left\{ \frac{n}{n+1} \right\}_{n=1}^{\infty} \quad (\text{الف}) \quad \left\{ (-1)^{n+1} \right\}_{n=1}^{\infty} \quad (\text{ب})$$

$$\left\{ \frac{n}{n+1} \right\}_{n=1}^{\infty} \quad (\text{ج}) \quad \left\{ 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right\}_{n=1}^{\infty} \quad (\text{د})$$

ابتدا تعدادی از جملات هر دنباله را بنویسید. این که چه تعداد از جمله‌های نخست را



انتخاب می کنید به خودتان بستگی دارد. سپس مشخص کنید که کدامیک صعودی و کدامیک نزولی اند. همچنین تجمع احتمالی جملات هر دنباله را حول یک عدد معین بررسی کنید.

۲- یک دنباله بسازید که کراندار باشد اما صعودی نباشد.

۳- یک دنباله بسازید که هم کراندار و هم نزولی باشد.

۴- نشان دهید که هیچ کدام از دو جمله از دنباله  $\left\{\frac{1}{n}\right\}$  برابر نیستند.

۵- ده عدد گویا معرفی کنید که بین دو عدد  $\frac{1}{10}$  و  $\frac{1}{11}$  واقع باشند.

۶- دنباله‌ای از اعداد گویا بسازید که بین دو عدد  $\frac{1}{10}$  و  $\frac{1}{11}$  واقع باشند.

۷- با بررسی جملات (اولیه) دنباله‌های زیر رفتار آنها را حدس زده و حدس خود را

توضیح دهید.

$$\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right\} \text{ (الف)} \quad \left\{\frac{n^2}{2n}\right\} \text{ (ب)} \quad \left\{1 + (-1)^n\right\} \text{ (ج)}$$

$$\left\{1 + \left(\frac{1}{n}\right)^n\right\} \text{ (د)} \quad \left\{\cos\left(\frac{n\pi}{2n}\right)\right\} \text{ (ه)} \quad \left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\} \text{ (ز)}$$

۸- دنباله  $a_n = \frac{n}{n+1}$  را در نظر می‌گیریم:  $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots$

اکنون ۵ جمله نخست آن را تعویض می‌کنیم و دنباله جدید را  $\{b_n\}$  می‌نامیم؛ بنابراین،

برای مثال،

$$b_1=1, b_2=5, b_3=10, b_4=10, b_5=-15$$

و برای  $n \geq 6$ ، قرار می‌دهیم  $b_n = a_n$ . رفتار دو دنباله  $\{a_n\}$ ،  $\{b_n\}$  را مقایسه کنید. چه

نتیجه کلی از این بررسی عایدتان می‌شود؟ آن را بیان کنید.

۹- دنباله  $c_n: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots$

را در نظر می‌گیریم. رابطه بین جملات متوالی این دنباله را پیدا کنید.

$\{c_n\}$  یک نمونه از دنباله‌هایی است که به دنباله‌های فیبوناچی<sup>۱</sup> معروف اند.

۱- لئوناردو فیبوناچی یک ریاضیدان ایتالیایی بود که در رابطه با مطالعه زاد و ولد خرگوش‌ها و افزایش جمعیت آنها این گونه

دنباله‌ها را شناسایی کرده است. در واقع مدل افزایش جمعیت خرگوش‌ها را صورت بندی کرده است.

۱۰- ثابت کنید هرگاه دنباله  $\{a_n\}$  کراندار باشد، عدد مثبتی مانند  $M$  هست به قسمی که برای هر  $n$ ،  $|a_n| \leq M$  و بالعکس.

۱۱- برای چندین جمله اولیه، فاصله جملات دنباله  $\left\{ \frac{2n}{n+1} \right\}$  را تا ۲ حساب کنید.  $n$  از

چه عددی باید بزرگتر باشد تا نابرابری  $\left| \frac{2n}{n+1} - 2 \right| < 0.0001$  برقرار باشد.

۱۲- یک دنباله نوسانی تعریف کنید که کراندار باشد، دو دنباله نوسانی تعریف کنید که کراندار نباشند.

## پرسش‌های مفهومی

۱- پرسش‌های زیر را بررسی کنید، اگر فکر می‌کنید درست‌اند، آنها را توضیح دهید و اگر فکر می‌کنید نادرست‌اند مثالی ارائه دهید.

الف) هرگاه  $n$  جمله نخست یک دنباله را تغییر دهیم در رفتار آن تغییری حاصل نمی‌شود.

ب) هرگاه  $\{a_n\}$  دنباله‌ای صعودی و  $C$  عدد ثابتی باشد دنباله  $\{ca_n\}$  نیز صعودی است.

ج) هرگاه  $\{a_n\}$  دنباله‌ای نزولی و  $C$  عدد ثابتی باشد دنباله  $\{ca_n\}$  نیز صعودی است.

د) هرگاه  $\{a_n\}$  دنباله‌ای یکنوا و  $C$  عدد ثابتی باشد دنباله  $\{ca_n\}$  نیز یکنوا است.

## ۵-۱- همگرایی دنباله‌ها

سرچشمه بسیاری از اندیشه‌های جدید ریاضی در اندیشه‌های کشف شده قبلی یا تجربه‌های گذشته نهفته است. با این حال، در بیشتر موارد چنین سرچشمه‌هایی در لایه‌های زیرین مفاهیم مربوطه پنهان بوده و به آسانی نمی‌توان آنها را ملاحظه کرد. در واقع، دیدن و یافتن آنها نگاهی تیزبین و شجاعت در تفکر می‌خواهد؛ در بعضی موارد نیز ظرافت‌هایی دیده می‌شود ولی در بدو امر به نظر نمی‌رسد که اندیشه جدید ریاضی در ورای آنها وجود داشته باشد؟

با چنین نگرشی به بحث‌ها و توصیف‌های مربوط به دنباله‌ها باز می‌گردیم و به کندوکاو سرچشمه‌ها، ظرافت‌ها یا اندیشه‌های نو می‌پردازیم.

برحسب هر ویژگی و یا مفهومی که تعریف کرده‌ایم دنباله‌ها را می‌توانیم به دو دسته تقسیم

کنیم:

دنباله‌های کراندار و دنباله‌های بیکران (کراندار نیستند).

دنباله‌های یکنوا و دنباله‌هایی که یکنوا نیستند.

یک ویژگی دیگر در مجموعه دنباله‌های بررسی شده وجود دارد که کمتر خودنمایی می‌کند. برخی از دنباله‌ها این ویژگی را دارند که جملات آن به یک عدد مشخص نزدیک و نزدیک‌تر می‌شوند و از روی نمودار نیز شهود می‌شود که به یک نقطه می‌گرایند. بنابراین معیار دسته‌بندی جدید را از این دنباله‌هایی که جملات دنباله، به یک عدد معین می‌گرایند. و دنباله‌هایی که جملات آنها، به یک عدد معین نمی‌گرایند. برای مثال از دنباله‌های دسته اول به دنباله‌های زیر توجه می‌کنیم:

$$\left\{ \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right\} \quad \text{دنباله} \quad \left\{ 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right\} \quad \text{دنباله} \quad \left\{ \frac{1}{n+1} \right\} \quad \text{دنباله} \quad \left\{ \frac{1}{n} \right\} \quad \text{دنباله}$$

و به عنوان نمونه از دنباله‌های دسته دوم، یعنی دنباله‌هایی که با افزایش شماره جمله دنباله، به یک عدد معین نمی‌گرایند، دنباله‌های زیر را نام می‌بریم:

$$\{2n\} \quad \text{دنباله اعداد زوج} \quad \{2n-1\} \quad \text{دنباله اعداد فرد} \quad \{(-1)^{n+1}\} \quad \text{دنباله}$$

ملاحظه می‌کنیم که دنباله  $\left\{\frac{1}{n}\right\}$  به صفر میل می‌کند به عبارت دیگر جملات این دنباله با افزایش شماره جمله‌ها، به طرز دلخواهی به عدد صفر نزدیک و نزدیکتر می‌شوند. همچنین با محاسبه جملات دنباله  $\left\{1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$  ملاحظه می‌کنیم که وقتی  $n$  بزرگ و بزرگتر می‌شود جملات این دنباله به عدد ۱ نزدیک و نزدیکتر می‌شوند. برای آنکه این مفهوم «تزدیکی جملات دنباله به عدد ۱» را به لحاظ ریاضی واضح و روشن کنیم به نمودار این دنباله بار دیگر دقت می‌کنیم. قبل از این، جدولی برای تعیین مقادیر این دنباله تنظیم می‌کنیم.

<b>n</b>	۱	۲	۴	۵	۶	۷	...
<b>a<sub>n</sub></b>	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{17}{16}$	$\frac{31}{32}$	$\frac{65}{64}$	$\frac{127}{128}$	...

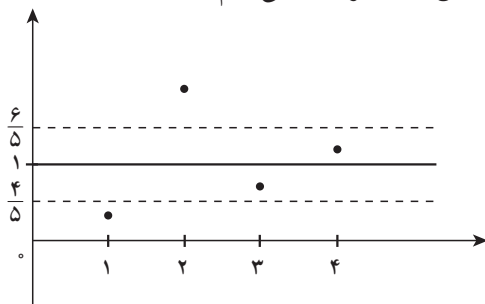
می‌دانیم میزان نزدیکی دو عدد با قدرمطلق تفاضل آن دو عدد سنجیده می‌شود. پس هرگاه بخواهیم  $|a_n - 1| < \frac{1}{5}$ ، کافی است به جای  $a_n$  عبارت  $1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n$  را قرار دهیم:

$$|a_n - 1| = \left| 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n - 1 \right| = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

حال برای آن که  $\left(\frac{1}{2}\right)^n < \frac{1}{5}$  کافی است  $2^n > 5$  (۱) پس هرگاه مثلاً  $2^3 = 8 > 5$  به طور قطع نامساوی (۱) نیز برقرار است؛ در این صورت باید  $n \geq 3$ .

در جدول نیز ملاحظه می‌کنیم که از شماره  $n = 3$  به بعد اختلاف جملات دنباله تا عدد ۱ از  $\frac{1}{5}$

کوچکتر است. به نمودار این دنباله نیز توجه می‌کنیم:



شکل بالا نقاط معرف جملات دنباله از جایی به بعد در درون نوار به مرکز  $y=1$  قرار دارند وقتی نواری به مرکز خط  $y=1$  و به شعاع  $\frac{1}{5}$  در نظر می‌گیریم مقادیر جملات دنباله از مرتبه ۳ به بعد در این

نوار قرار می‌گیریم؛ به زبان فنی تر هرگاه  $n > 3$ ، یعنی  $a_n \in (1 - \frac{1}{5}, 1 + \frac{1}{5})$ ، یعنی  $a_n \in (\frac{4}{5}, \frac{6}{5})$

$$n = 3, |a_n - 1| = \left| \frac{9}{8} - 1 \right| = \frac{1}{8} < \frac{1}{5}$$

$$n = 4, |a_n - 1| = \left| \frac{17}{16} - 1 \right| = \frac{1}{16} < \frac{1}{5}$$

$$n = 5, |a_n - 1| = \left| \frac{31}{32} - 1 \right| = \frac{1}{32} < \frac{1}{5}$$

$$n = 6, |a_n - 1| = \left| \frac{65}{64} - 1 \right| = \frac{1}{64} < \frac{1}{5}$$

بار دیگر به دنباله  $\left\{ \frac{1}{n} \right\}$  برمی‌گردیم. می‌دانیم که بزرگ و بزرگتر شدن  $n$  جملات

دنباله به عدد صفر می‌گرایند. اکنون از شما خواسته می‌شود که با محاسبات ریاضی این معنی را روشن‌تر سازید. برای نمونه به یک مورد توجه می‌کنیم:

هرگاه  $a_n = \frac{1}{n}$ ، از چه شماره و یا مرتبه‌ای به بعد اختلاف جملات دنباله تا صفر

از  $\frac{1}{10}$  کوچکتر است؟

در واقع می‌خواهیم جواب‌های نامساوی  $\frac{1}{n} < \frac{1}{100}$  را پیدا کنیم. این نامساوی معادل نامساوی  $n > 100$  می‌باشد، پس داریم.

برای مثال  $n > 100 \Rightarrow |a_n - 0| < \frac{1}{100}$

$$n = 101 \Rightarrow |a_n - 0| = \left| \frac{17}{16} - 1 \right| = \frac{1}{16} < \frac{1}{100}$$

$$n = 105 \Rightarrow |a_n - 0| = \left| \frac{31}{32} - 1 \right| = \frac{1}{32} < \frac{1}{100}$$

$$n = 1000 \Rightarrow |a_n - 0| = \left| \frac{65}{64} - 1 \right| = \frac{1}{64} < \frac{1}{100}$$

حال با اختیار کردن  $\frac{1}{1000}$  به جای  $\frac{1}{100}$ ، مرتبه مربوطه را پیدا کنید.

سپس با اختیار کردن  $\frac{1}{1,000,000}$  به جای  $\frac{1}{1000}$  مرتبه مربوطه را پیدا کنید.

همچنین با اختیار کردن  $\frac{1}{1,000,000,000}$  به جای  $\frac{1}{100}$  مرتبه مربوطه را پیدا

کنید.

سؤال: آیا این وضعیت برای همه اعداد کوچک نظیر یک صد میلیون، و یک میلیارد برقرار است؟

❖ نکته: برای پاسخگویی به پرسش اخیر به بررسی بیشتر دنباله  $\left\{ \frac{1}{n} \right\}$  می‌پردازیم. برخی از مقادیر این دنباله را برای  $n$  های بزرگ در جدول زیر درج کرده‌ایم.

$n$	10,	100,	1000,	$10^6$ ,	$10^8$ ,	$10^9$ ,	...
$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{10}$ ,	$\frac{1}{100}$ ,	$\frac{1}{1000}$ ,	$\frac{1}{10^6}$ ,	$\frac{1}{10^8}$ ,	$\frac{1}{10^9}$ ,	...

این جدول برخی مقادیر دنباله  $\frac{1}{n}$  را نشان می‌دهد.

با توجه به مقادیر دنباله مشاهده می‌کنیم که هر اندازه  $n$  بزرگتر اختیار شود مقدار  $\frac{1}{n}$  کوچکتر می‌شود و نقاط نمایش دهنده مقادیر این دنباله، روی محور اعداد، به نقطه صفر نزدیک و نزدیکتر می‌شوند.

از طرف دیگر می‌دانیم که همه مقادیر دنباله  $\left\{\frac{1}{n}\right\}$  مثبت هستند و لذا نقاط متناظر این مقادیر روی محور حقیقی سمت راست مبداء، یعنی صفر، قرار دارند. می‌توان چنین تصور کرد که چون مقادیر این دنباله از صفر کمتر نمی‌شوند، عدد صفر مانند یک نقطه که مانع عبور نقاط دنباله به سمت چپ خودش است، ایستادگی می‌کند و نقاط دنباله هرگز به صفر نمی‌رسند گرچه به دلخواه به آن نزدیک می‌شوند و گویی نقطه صفر حد نقاط این دنباله است. باید توجه کنیم که شهود بصری، در مواردی، با دقت ریاضی تفاوت دارد؛ در مورد دنباله  $\left\{\frac{1}{n}\right\}$  و نمودار هندسی نقاط آن روی محور اعداد به نظر می‌رسد که نقاط نمایش مقادیر  $\frac{1}{n}$  برای  $n$ های بزرگ در نزدیک‌های نقطه صفر به هم می‌چسبند و گویی طولی پیوسته می‌سازند؛ در صورتی که این شهود هندسی کاملاً نادرست است. زیرا هیچ دو نقطه‌ای از این دنباله بر هم منطبق نیستند تا آن‌که طولی پیوسته به وجود آید، مهم‌تر از این می‌دانیم که در واقع بین هر دو کسر گویای بی‌شمار عدد حقیقی گویای دیگر وجود دارد.

با توجه به این‌که فاصله دو نقطه روی محور با قدر مطلق تفاضل آن دو نقطه سنجش می‌شود، از منظر جبری و محاسباتی قدر مطلق تفاضل دو عدد، اختلاف و نزدیکی آن دو عدد را مشخص می‌کند. بنابراین به‌جاست که مفاهیم مربوط به رفتار دنباله را با استفاده از نماد و مفهوم قدر مطلق صورت‌بندی کنیم.

در حالت کلی هرگاه عددی را که تصور می‌شود جملات یک دنباله به آن می‌گرایند و یا حول آن تجمع می‌کنند («L») بنامیم، آنگاه به آسانی می‌توانیم عبارت‌هایمان را به زبان ریاضی برگردانیم:

اختلاف جمله  $n$ ام دنباله  $\{a_n\}$  با مقدار حدی  $L$  به زبان ریاضی می‌شود  $|a_n - L|$  و یا فاصله جمله  $n$ ام دنباله تا نقطه حدی دنباله می‌شود  $|a_n - L|$

در حالت خاص دنباله  $a_n = \frac{1}{n}$ ، عبارت قدر مطلق مربوطه به صورت زیر است:

$$|a_n - L| = \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n}$$

در انجام فعالیت قبلی ملاحظه کردیم که اگر بخواهیم  $\frac{1}{1,000,000} < \frac{1}{n}$  باشد، باید  $1,000,000 < n$ ؛ و هرگاه بخواهیم  $\frac{1}{10^9} < \frac{1}{n}$  کافی است مقادیر  $n$  در نامساوی  $10^9 > n$  صدق کنند.

احمد: آیا می‌توان گفت که اختلاف جملات این دنباله از عدد صفر از مقدار  $\frac{1}{1,000,000,000,000}$  (یک صد میلیارد) نیز کمتر می‌شود.

دبیر: آری، کافی است که  $n$  را از  $1,000,000,000,000$  بزرگتر بگیریم، مثلاً  $n = 10^{11} + 1$

در این صورت

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{10^{11} + 1} > \frac{1}{10^{11}}$$

احمد: آیا این وضعیت برای همه اعداد کوچک و کوچکتر از یکصد میلیارد نیز صادق است؟  
دبیر: آری هر عدد کوچک (مانند  $\varepsilon > 0$  اسیلین) که انتخاب کنیم از شماره‌ای به بعد اختلاف جملات مربوطه از صفر کمتر از  $\varepsilon$  است که در مثال بالا  $\varepsilon = \frac{1}{10^{11}}$  اختیار شد.  
اما چون نمی‌توانیم این وضعیت را برای همه اعداد کوچک نظیر یک میلیون، یک میلیارد و یا یکصد میلیارد امتحان کنیم به ناچار باید متوسل به  $\varepsilon$  شویم (بخوانید اسیلین)

$\varepsilon$  در واقع نماینده همه اعداد کوچک و مثبت است و چون در عمل دلخواه فرض می‌شود ما را از تجربه‌ها و محاسباتی که پایان ندارد بی‌نیاز می‌سازد.

احمد: این بسیار جالب است، اما شماره جمله‌ها چگونه عددی خواهد شد؟  
دبیر: طبیعی است شماره جملات مربوطه که باید برای آنها نامساوی  $\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$  برقرار باشد به  $\varepsilon$  بستگی خواهد داشت. برای نمونه وقتی  $\varepsilon = \frac{1}{10^0}$ ،  $M = 10^1$  به دست آمد، یعنی هرگاه  $n \geq 10^1$ ،  $M = \frac{1}{n} < \frac{1}{10^0}$  نماینده شماره مربوطه است.

وقتی  $\varepsilon = \frac{1}{10^0}$ ، شماره مربوطه یعنی  $M = 10^0$  به دست آمد.

وقتی  $\varepsilon = \frac{1}{10^{11}}$  شماره مربوطه یعنی  $M = 10^{11} + 1$  به دست آمد، زیرا دیدیم از این شماره به بعد، یعنی هرگاه  $n > 10^{11}$  مثلاً  $n = 10^{11} + 1$ ،  $n = 10^{11} + 2$ ،  $n = 10^{11} + 3$ ، ...

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{10^{11} + 1} < \frac{1}{10^{11}} = \varepsilon$$

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{10^{11} + 2} < \frac{1}{10^{11}} = \varepsilon$$

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{10^{11} + 3} < \frac{1}{10^{11}} = \varepsilon$$

و به‌طور کلی برای هر  $n$  که  $n \geq 10^{11} + 1$ ،  $\frac{1}{n} < \varepsilon$

اکنون می‌توانیم تجربه‌مان را در خصوص دنباله  $\left\{\frac{1}{n}\right\}$  ریاضی وارتر بیان کنیم، برای هر عدد مثبت (ولو بسیار کوچک)  $\varepsilon$  فاصله  $a_n$ ‌ها از صفر از شماره‌ای مانند  $M$  به بعد کمتر از  $\varepsilon$  می‌شود. به عبارت دقیق‌تر

برای هر عدد  $\varepsilon > 0$ ، عددی طبیعی مانند  $M$  هست که هرگاه برای  $n \geq M$ ،  $|a_n - 0| < \varepsilon$  و بالاخره به این مفهوم کلیت داده و آن را برای هر دنباله دلخواه  $\{a_n\}$  و عدد حقیقی مانند  $L$  که تصور می‌کنیم جملات دنباله به آن گرایش دارند، بیان می‌کنیم:

**تعریف:** گوئیم دنباله  $\{a_n\}$  دارای حد  $L$  است، هرگاه برای هر عدد  $\varepsilon > 0$ ، عددی طبیعی مانند  $M$  وجود داشته باشد به طوری که برای هر عدد طبیعی  $n$  که  $n \geq M$ ، نابرابری  $|a_n - L| < \varepsilon$  برقرار باشد.

این جمله را که «دنباله  $\{a_n\}$  دارای حدی برابر  $L$  است» با نماد ریاضی به شکل  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$  نوشته و آن را چنین می‌خوانیم.

«حد دنباله  $a_n$  وقتی  $n$  به  $\infty$  میل می‌کند برابر  $L$  است»

یا آن‌که می‌گوییم «دنباله  $\{a_n\}$  به  $L$  همگراست» و در این صورت دنباله  $\{a_n\}$  را یک دنباله همگرا می‌نامیم.

وقتی برای دنباله‌ای مانند  $\{a_n\}$  چنین عددی حقیقی مانند  $L$  که در تعریف فوق صدق می‌کند وجود نداشته باشد دنباله  $\{a_n\}$  را یک دنباله واگرا می‌نامیم.

❖ **مثال:** دنباله  $\left\{(-1)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$  را در نظر می‌گیریم، جملات این دنباله یک در میان اعداد  $-1$

و  $1$  را اختیار می‌کنند. در واقع جملات این دنباله به‌عنوان نقاط خط حقیقی روی دو نقطه  $-1$  و  $1$  قرار گرفته و لذا به این دو نقطه گرایش دارند. اما معلوم است که این دنباله همگرا نمی‌باشد، زیرا مقدار  $L$  می‌بایست یک عدد منحصر به فرد بوده و همه جملات به همین یک عدد گرایش کنند.

حال هرگاه  $L=1$  اختیار کنیم جملات این دنباله با  $n$ ‌های فرد هرگز به  $L$  (به مقدار دلخواه) نزدیک نمی‌شوند. همین وضعیت برای  $L=-1$  نیز صادق است، پس یک عدد مشخص  $L$  که در تعریف همگرایی صدق کند وجود ندارد.



۱- توضیح دهید که چرا دنباله  $a_n = 2n + 1$  همگرا نمی‌باشد.

۲- دنباله  $1, -\frac{1}{2}, 2, -\frac{2}{3}, 3, -\frac{3}{4}, 4, -\frac{4}{5}, 5, -\frac{5}{6}, \dots$  را در نظر بگیرید، ابتدا ضابطه

این دنباله را معلوم کنید، سپس از این دنباله دو دنباله استخراج کنید که یکی همگرا و دیگری واگرا باشد.

❖ نکته: مسأله‌های مربوط به تشخیص همگرایی و یا پیدا کردن حد دنباله‌ها را می‌توان چنین طبقه‌بندی کرد.

الف) مسأله‌هایی که در آنها از پیش همگرایی دنباله بررسی شده و از شما خواسته می‌شود تا مطابق تعریف تساوی حدی

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \quad (1)$$

را محقق سازید، برای اثبات (۱) طبق تعریف می‌بایست نشان دهیم که حکم منطقی زیر برقرار و درست است.

(۲) برای هر عدد  $\varepsilon > 0$ ، عددی طبیعی مانند  $M$  هست به قسمی که برای هر  $n \geq M$ ،

$$|a_n - L| < \varepsilon$$

در اثبات (۲)،  $\varepsilon > 0$  به عنوان یک عدد حقیقی مثبت معلوم مسأله است.

همچنین در اینجا  $M$  به عنوان یک عدد طبیعی (شماره جملات مورد نظر) مجهول مسأله است.

$M$  را باید چنان پیدا کنیم که در گزاره شرطی زیر صدق کند:

$$|a_n - L| < \varepsilon \quad \text{اگر } n \geq M \text{ آنگاه}$$

معنای این گزاره شرطی آن است که از شماره  $M$  به بعد جملات دنباله در نامساوی  $|a_n - L| < \varepsilon$

صدق کرده و لذا در اطراف  $L$  تجمع می‌کنند.

در مسائل مربوط به اجرای دستورالعمل فوق، چون می‌خواهیم نابرابری  $|a_n - L| < \varepsilon$  برقرار

باشد و  $\varepsilon$  بر ما معلوم است. با این نابرابری کار می‌کنیم تا بتوانیم به نحوی  $M$  را پیدا کنیم.


ب) دسته دوم مسأله‌های مربوط به حد مسأله‌هایی است که در آن  $L$  بر ما معلوم نیست. در

واقع در این نوع مسأله‌ها از شما خواسته می‌شود با بررسی جملات دنباله چنانچه فکر می‌کنید دنباله

مورد نظر همگراست ابتدا  $L$  را حدسیه‌سازی کنید و سپس در صورت واقعیت امر و درست بودن حدسیه‌تان، مطابق بند الف تساوی حدی،  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$  را ثابت کنید. ضمناً همیشه یادتان باشد که :

تسلط بر خواص نابرابری‌ها و درک درست حکم منطقی (۲)، که همان مفهوم حد است، از ملزومات اساسی حل مسأله‌های مربوط به همگرایی است.

❖ **مثال:** همگرایی دنباله  $\left\{ 3 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right\}_{n=1}$  را بررسی کنید.

 **حل:** باید معلوم کنیم که آیا این دنباله همگراست یا واگرا و اگر همگراست به چه عددی همگراست؟

با اندکی کنکاش در مقادیر این دنباله ملاحظه می‌کنیم که جملات دنباله، برای  $n$ های به قدر کافی بزرگ، به عدد ۳ گرایش دارند. دلیل این امر آن است که مقادیر  $\left(\frac{1}{2}\right)^n$  برای  $n$ های بزرگ کوچک و کوچکتر شده و مقدار آن به صفر نزدیک می‌شوند.

حدس:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 3 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right) = 3$ ، در این جا  $L=3$ .

❖ **برهان:** فرض کنیم  $\varepsilon > 0$  عدد دلخواهی باشد باید  $M$ ی پیدا کنیم که

$$\left| \left( 3 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right) - 3 \right| < \varepsilon, \quad n \geq M \quad (1)$$

$$\left| \left( 3 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right) - 3 \right| < \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{داریم}$$

در نتیجه باید معلوم کنیم که از چه شماره‌ای به بعد نابرابری  $\left(\frac{1}{2}\right)^n < \varepsilon$  برقرار می‌گردد و همین شماره مورد نظر مجهول  $M$  را به دست می‌دهد. این نابرابری معادل نابرابری  $\frac{1}{\varepsilon} > 2^n$  است. از طرفین

$$n > \log_2 \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{لگاریتم در پایه ۲ می‌گیریم}$$

چون معلوم نیست که  $\log_2 \frac{1}{\varepsilon}$  عددی طبیعی باشد،  $M$  را به صورت زیر معرفی می‌کنیم.

$$M = \left\lceil \log_2 \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1$$

و بدین ترتیب مجهول  $M$  به دست می آید.

احمد: از کجا معلوم است که این مقدار  $M$  در گزاره شرطی (۱) صدق می کند؟

دبیر: می توانیم  $M$  را آزمون نماییم، برای این کار فرض کنیم  $n$  عددی طبیعی و  $n \geq M$  باید

نشان دهیم

$$\left| \left( 3 - \left( \frac{1}{4} \right)^n \right) - 3 \right| < \varepsilon \quad (2)$$

در اینجا  $a_n = 3 - \left( \frac{1}{4} \right)^n$ ، چون:  $n \geq M = \left[ \log_2 \frac{1}{\varepsilon} \right] + 1$

و برای هر  $x$ ،  $x > [x] + 1$ ، پس  $n > \log_2 \frac{1}{\varepsilon}$

$$2^n > 2^{\log_2 \frac{1}{\varepsilon}} = \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{در نتیجه:}$$

با معکوس کردن جملات، جهت نابرابری تغییر می کند:

و یا

$$\left| \left( 3 - \left( \frac{1}{4} \right)^n \right) - 3 \right| = \left( \frac{1}{4} \right)^n < \varepsilon$$

اما

یعنی برای هر  $n$  که  $n \geq M$ ، نابرابری (۲) برقرار است.

محسن: نیازی به آزمایش  $M$  نیست زیرا برای یافتن  $M$ ، همه عملیات برگشت پذیرند.

دبیر: درست است، اگر به برگشت پذیری عملیات و کار با نابرابری ها توجه بکنید لزومی به

آزمایش  $M$  به دست آمده نمی باشد.

❖ **مثال:** آیا دنباله  $\{a_n\}$  با ضابطه  $a_n = \sin \frac{n\pi}{4}$  همگراست؟

🚩 **حل:** برخی مقادیر این دنباله را بررسی می کنیم.

$$n = 1, a_1 = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$n = 2, a_2 = \sin \frac{2\pi}{4} = 1$$

$$n = 3, a_3 = \sin \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

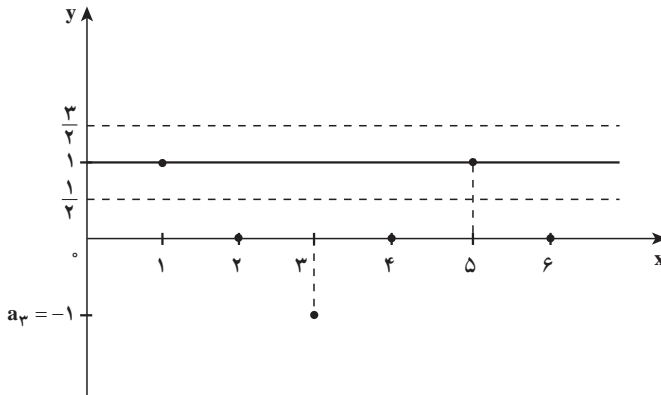
$$n = 4, a_4 = \sin \frac{4\pi}{4} = 0$$

$$n = 5, a_5 = \sin \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

با ادامه محاسبات ملاحظه می‌کنیم که مقدارهای این دنباله منحصر به اعداد  $1$  و  $0$  و  $-1$  هستند پس این دنباله نمی‌تواند همگرا بوده باشد.

احمد: بسیاری از جملات دنباله برابر  $1$  بوده و لذا در  $1$  مجتمع می‌شوند، آیا ممکن نیست که دنباله همگرا به عدد  $1$  باشد.

دبیر: خیر. در این مورد ساده‌ترین راه استفاده از نمودار دنباله است و کافی است بازه‌ای مانند  $(1 - \frac{1}{4}, 1 + \frac{1}{4})$  یعنی نواری به مرکز  $1$  و به شعاع  $\frac{1}{4}$  را حول خط  $y=1$  در نظر بگیریم (شکل زیر)



هرچقدر  $M$  را بزرگ اختیار کنیم،  $n \geq M$  را می‌توان به صورت  $n=2k$  در نظر گرفت و لذا  $a_{2k} = \sin_k = 0$  یعنی تعداد زیادی از جملات که با شماره زوج هستند خارج از بازه  $(1 - \frac{1}{4}, 1 + \frac{1}{4})$  قرار می‌گیرند.

احمد: اما تعداد زیادی از جملات دنباله که با شماره فرد هستند برابر  $1$  بوده و لذا در بازه  $(1 - \frac{1}{4}, 1 + \frac{1}{4})$  هستند.

دبیر: درست است. اما اگر بخواهد تساوی حدی  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{n\pi}{4} = 1$  اتاق بیفتد باید نظیر  $(1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$  که در اینجا  $\varepsilon = \frac{1}{4}$ ، طبق تعریف عدد طبیعی  $M$  یافت شود که برای هر  $n \geq M$   $a_n \in (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$  (و یا  $|a_n - 1| < \varepsilon$ )

توجه کنید که این یک حکم کلی است: برای هر  $n$  که  $n \geq M$  باید نابرابری برقرار باشد. درحالی که گفته شد هرچقدر  $M$  را اختیار کنیم  $n$ هایی هست، که  $n=2k$  که  $n \geq M$  اما  $|a_n - 1| \geq \varepsilon = \frac{1}{4}$  زیرا  $a_n \notin (1 - \frac{1}{4}, 1 + \frac{1}{4})$ ، و این با تعریف همگرایی در تناقض است.

۱- ابتدا حد دنباله  $\left\{\frac{n-1}{n}\right\}_{n=1}$  را حدس بزنید و سپس حدس خود را به روش  $\varepsilon$  اثبات کنید.

۲- فرض کنیم  $\{a_n\}_{n=1}$  یک دنباله همگرا باشد. همچنین فرض کنیم  $K$  عدد صحیح و ثابت است به قسمی که  $n+k \geq 1$ ، دنباله  $\{b_n\}_{n=1}$  را چنین تعریف می‌کنیم:  $b_n = a_{n+k}$  برای مثال هرگاه  $k=2$  و  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots$  باشد، دنباله  $\{b_n\}$  چنین است:

$$b_1 = a_3, b_2 = a_4, b_3 = a_5, \dots, b_n = a_{n+2}, \dots$$

$$a_3, a_4, a_5, \dots, a_{n+2}, \dots$$

یعنی

همان دنباله  $\{b_n\}_{n=1}$  است. ثابت کنید هرگاه  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$  و آنگاه  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$

۳- فرض کنیم  $\{P_n\}_{n=1}$  یک دنباله همگرا و  $P_{n+1} = \frac{bP_n}{a + P_n}$  که در آن  $a$  و  $b$  اعدادی ثابت‌اند.

با استفاده از مسأله ۷ حد دنباله  $\{P_n\}_{n=1}$  را به دست آورید.

۴- کدامیک از دنباله‌های زیر همگراست. آنهایی را که فکر می‌کنید همگرا نیستند، واگرایی

دنباله را توضیح دهید.

$$\left\{\log \frac{1}{n}\right\}_{n=1} \quad (\text{د}) \quad \{\log n\}_{n=1} \quad (\text{ج}) \quad \{3^n\}_{n=1} \quad (\text{ب}) \quad \left\{\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}_{n=1} \quad (\text{الف})$$

کسانی که مفهوم حد دنباله و حد توابع را به درستی درک کنند ریاضیات را بهتر درک می‌کنند. (استاد دکتر غلامحسین مصاحب (۱۳۵۸-۱۳۸۴)).

## ۱-۶- دنباله‌های واگرا به $\pm \infty$

دنباله‌های واگرا را به دو دسته می‌توان تقسیم بندی کرد:

دنباله‌هایی مانند  $\{(-1)^n\}_{n=1}$  که برای آنها هیچ عدد حقیقی، و  $\pm \infty$  یافت نمی‌شود به طوری که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

دنباله‌های واگرایی مانند  $\{2n\}_{n=1}^{\infty}$  گرچه جملات دنباله، برای  $n$ های بزرگ، حول یک عدد حقیقی تجمع ندارند، لیکن دنباله به نوعی خوشرفتار است!

ادعای ما از خوشرفتاری این دنباله چیست؟

وقتی برای  $n$ های بزرگ جملات دنباله را بررسی می‌کنیم (با مقداردهی به  $n$ ) ملاحظه می‌کنیم که مقادیر جملات از هر عدد حقیقی که بخواهیم بزرگتر می‌شوند و این یک نوع خوشرفتاریست!

مثلاً هرگاه بخواهیم  $2n > 10^6$  کافی است  $n > 500,000$

هرگاه بخواهیم  $2n > 10^8$  کافی است  $n > 50,000,000$

معنی این گزاره شرطی آن است که جملات دنباله از شماره  $50,000,000$  بعد از عدد (از پیش تعیین شده)  $100,000,000$  بزرگترند؟ زیرا از  $n > 50,000,000$  نتیجه می‌گیریم که  $2n > 100,000,000$ .

به طور کلی فرض کنیم  $k$  عدد حقیقی کاملاً دلخواهی باشد برای آنکه  $2n > k$  کافی است  $n > \frac{k}{2}$  و چون می‌خواهیم  $n$  طبیعی باشد (شماره جملات) کافی است که  $n \geq \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil + 1$  اختیار کنیم زیرا واضح است که  $\left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil + 1 > \frac{k}{2}$ . حال می‌توانیم تعریف خاصی از واگرایی ارایه دهیم.

**تعریف:** گوییم دنباله  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  واگرا به  $\infty$  (یا  $+\infty$ ) است هرگاه گزاره منطقی زیر برقرار باشد.

برای هر عدد حقیقی مثبت  $K$ ، عددی طبیعی مانند  $M$  یافت شود به قسمتی که هرگاه  $a_n > K, n \geq M$

در این صورت می‌نویسیم  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ .

به زبان ساده واگرایی به  $\infty$  دلالت بر آن دارد که جملات دنباله بزرگ و بزرگتر می‌شوند به نحوی که برای هر عدد حقیقی (بزرگ)  $K$ ، از شماره‌ای به بعد همه جملات از  $K$  بزرگترند.

نکته‌ای که فوراً از واگرایی به  $\infty$  حاصل می‌شود این است که هرگاه تساوی  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$  اتفاق بیفتد، جملات دنباله، از جایی به بعد الزاماً مثبت‌اند، نه تنها مثبت‌اند بلکه بزرگ و بزرگتر می‌شوند و به صورتی مجازی می‌توان گفت که در حول و حوش  $\infty$  گرد می‌آیند!

مشابه وضعیت فوق وقتی است، که جملات دنباله، از جایی به بعد منفی اند، لیکن از نظر قدر مطلق بزرگ و بزرگتر می شوند.

**تعریف:** گوئیم دنباله  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  واگرا به  $-\infty$  است و می نویسیم  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$  هرگاه گزاره زیر برقرار باشد.

برای هر عدد حقیقی منفی  $K$ ، عدد طبیعی مانند  $M$  وجود داشته باشد به طوری که هرگاه  $n \geq M$  آنگاه  $a_n < K$

پس هرگاه  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$  اتفاق افتد جملات دنباله می بایست از جایی به بعد منفی بوده و از نظر قدر مطلق بزرگ و بزرگتر شوند.

پرسش: آیا دنباله ای که جملات آن به صورت نوسانی مثبت و منفی می شوند می تواند واگرا به  $+\infty$  یا واگرا به  $-\infty$  باشد؟

### تمرین در کلاس

ابتدا با حدسیه سازی مشخص کنید که کدامیک از دنباله ها واگرا به  $+\infty$  یا واگرا به  $-\infty$  است و سپس حدس خود را ثابت کنید.

$$\left\{ \frac{1}{n^6} \right\}_{n=1}^{\infty} \quad (3) \quad \{1 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 - n^2\}_{n=1}^{\infty} \quad (2) \quad \{n^2\}_{n=1}^{\infty} \quad (1)$$

برای نمونه و راهنمایی به (۱) می پردازیم  
وقتی  $n$  مقادیر بزرگ اختیار می کند، قطعاً  $n^2$  نیز بزرگتر می شود، در نتیجه حدس ما این است که  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = +\infty$  (۱)

❖ **برهان (۱):** فرض کنیم  $K > 0$  عدد مثبت دلخواهی باشد. باید نشان دهیم از شماره ای به بعد  $n^2 > K$ ، پس شماره ای مانند  $M$  است که هرگاه  $n \geq M$ ،  $n^2 > K$  در اینجا  $K$  معلوم مسأله است.

اما نامساوی  $n^2 > k$  معادل  $n > \sqrt{k}$  می باشد. می توانیم شماره  $M$  مجهول را  $M = [\sqrt{k}] + 1$  اختیار کنیم. اکنون می توانیم حکم مسأله را آزمون نماییم: فرض کنیم  $n \geq [\sqrt{k}] + 1$  پس  $n > \sqrt{k}$

در نتیجه  $n^2 > K$

$$a_n = n^2 > K$$

و یا

یک بار دیگر حل مسأله را به اختصار مرور می‌کنیم.

ادعا داشتیم که  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = +\infty$ ، برای اثبات این ادعا، می‌بایست ثابت کنیم (\*) برای هر عدد  $K > 0$ ،  $M$  بی‌هیست که هرگاه  $n \geq M$ ،  $n^2 > k$  در اثبات (\*).  $k$  معلوم و  $M$  مجهول است.  $M$  باید

چنان پیدا شود که برای هر  $n \geq M$ ،  $n^2 > k$ ،

با استفاده از خواص نامساوی‌ها از نامساوی  $n^2 > K$ ، که مطلوب ماست، راه افتادیم و به

$$M = \lceil \sqrt{k} \rceil + 1$$

یادتان باشد، که در حل مسأله‌های مربوط به حد دنباله‌ها:

استفاده از خواص نابرابری‌ها و درک صحیح گزاره‌های شرطی اگر... آنگاه در

یادگیری حسابان نقش اساسی دارد.

## مسائل

۱- ثابت کنید الف)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 1}{n} = \infty$  ب)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{n^2 + 1}{n}$  موجود نیست.

۲- ثابت کنید هرگاه  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$  آنگاه  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0$

۳- فرض کنیم همواره  $a_n > 0$  و  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0$ . ثابت کنید  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ .

۴- فرض کنیم همواره  $a_n < 0$  و  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0$ . ثابت کنید  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ .

۵- فرض کنیم  $a_n = \frac{5n^2 - 3n + 11}{2n + 1}$ ،  $b_n = \frac{n^2 - 1}{6n^2 + 1}$ ،  $c_n = \frac{3n^2 + 1}{2n^2 + 7}$

دنباله‌هایی از اعداد باشند. ثابت کنید.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \frac{3}{2}$$



## ۱-۷- اصل موضوع تمامیت

مطالعه حد دنباله‌ها ارتباط تنگاتنگی با ویژگی‌های مجموعه اعداد حقیقی یعنی  $R$  دارد. پس از کشف نظریه حساب دیفرانسیل و انتگرال توسط دانشمندان آلمانی و انگلیسی در قرن هفدهم ناسامانی‌هایی در برخی موارد و نتایج آن بروز کرد. ریاضیدانان چندی در رفع این ناسامانی‌ها تلاش کردند و سرانجام پس از طی بیش از یک قرن و ایراستراس توانست به رفع آن نایل شود. و ایراستراس دریافت که صورت‌بندی دقیق و منطقی بحث حساب دیفرانسیل و انتگرال بر شناخت عمیق‌تر دستگاه اعداد حقیقی استوار است. اصل تمامیت یکی از مهم‌ترین ویژگی‌های  $R$  است که دستگاه اعداد گویا، یعنی  $Q$ ، فاقد آن است، گرچه  $Q$  همه خواص جبری و ترتیبی مربوط به  $R$  را داراست. در این بخش قصدمان این نیست تا نقص  $Q$  را بررسی کنیم، لیکن به دلیل نیاز به استفاده از اصل تمامیت، این اصل را بیان خواهیم کرد. اصل تمامیت، همانند بیشتر اصول دیگر، گرچه به لحاظ شهودی درکی ساده دارد، اما به لحاظ نظری اثبات آن ناممکن جلوه می‌کند.

ابتدا دو ویژگی در باب زیر مجموعه‌های  $R$  بیان می‌کنیم که منبعث از رابطه ترتیبی روی  $R$  می‌باشند. در اینجا فرض می‌کنیم  $A$  یک زیرمجموعه ناتهی  $R$  باشد.

تعریف ۱: عدد حقیقی  $U$  را یک کران بالای  $A$  نامیم هرگاه برای هر  $x \in A$ ،  $x \leq U$ .

$a \in R$  را کوچکترین کران بالای  $A$  می‌نامیم هرگاه  $a$  یک کران بالای  $A$  بوده و برای هر کران

بالای دیگر  $A$  مانند  $U$ ،  $a \leq U$ .

مشابه‌اً می‌توانیم از پایین به مجموعه  $A$  نگاه کنیم:

تعریف ۲: عدد حقیقی  $V$  را یک کران پایین  $A$  نامیم هرگاه برای هر  $x \in A$ ،  $V \leq x$ .

$a \in R$  را بزرگترین کران پایین  $A$  نامیم هرگاه  $b$  یک کران پایین  $A$  بوده و برای هر کران پایین

دیگر  $A$  مانند  $v$ ،  $v \leq b$ .

کوچکترین کران بالا را سوپریموم و بزرگترین کران پایین را اینفیموم می‌نامند.

دقت کنید که تعریف ۲ چگونه از روی تعریف ۱ ساخته شده است!

برای مثال، فرض کنیم  $A = [1, 2]$ : در این صورت ۳ یک کران بالای  $A$  است.

۳/۵ نیز یک کران بالای  $A$  است.

۲/۵ چطور؟  $A$  چند کران بالا دارد؟

کوچکترین کران بالای  $A$  کدام است؟ آری  $a=2$  کوچکترین کران بالای  $A$  است.

مشابه‌اً به آسانی معلوم است که  $b=1$  بزرگترین کران پایین  $A$  است. در این مثال هم  $a$  و هم  $b$

به  $A$  تعلق دارند، اما ممکن است کوچکترین کران بالا و یا بزرگترین کران پایین یک مجموعه به آن مجموعه تعلق نداشته باشند.

هرگاه  $B = (1, 2)$  (بازه باز) آنگاه کوچکترین کران بالای  $B$  برابر  $2$  و بزرگترین کران پایین  $B$  نیز برابر  $1$  است درحالی که هیچ یک به  $B$  تعلق ندارند. (چرا؟)

سؤال: آیا همهٔ زیرمجموعه‌های ناتهی  $R$  دارای کوچکترین کران بالا و بزرگترین کران پایین هستند؟ نظرتان را در مورد  $A = [1, +\infty)$  و  $B = (-\infty, 2)$  بیان کنید.

### تمرین در کلاس

- الف) در مورد احکام زیر فکر کنید، می‌توانید با مثال‌ها کار کنید. اگر فکر می‌کنید درست‌اند آنها را توضیح دهید. و اگر فکر می‌کنید نادرست‌اند، نیز توضیح دهید.
- هر مجموعه از بالا کراندار دارای کوچکترین کران بالا است.
  - هر مجموعه از پایین کراندار دارای بزرگترین کران پایین است.
  - هرگاه  $A$  یک مجموعه کراندار و ناتهی باشد هم کوچکترین کران بالا و هم بزرگترین کران پایین دارد.
  - هرگاه  $Q \neq A \subseteq B$  و  $U \in B$  یک کران بالای  $B$  باشد،  $U$  یک کران بالای  $A$  نیز می‌باشد.
- ۵- حکمی نظیر ۴ در باب کران‌های پایین بیان کنید.

---

اکنون اصل موضوع تمامیت را بیان می‌کنیم، باید توجه داشت «اصل موضوع» و یا اختصاراً «اصل» در ریاضیات به گزاره‌ای گفته می‌شود که بدون اثبات پذیرفته می‌شود اصل موضوع تمامیت در باب اعداد حقیقی.

یک مجموعه ناتهی از اعداد حقیقی که دارای کران بالا باشد، دارای کوچکترین کران بالا است.

این اصل معادل است با اصل زیر:

یک مجموعه ناتهی از اعداد حقیقی که دارای کران پایین باشد، دارای بزرگترین کران پایین است.

اکنون با استفاده از این اصل به اثبات مهمترین قضیه این فصل می‌پردازیم

❖ **قضیه ۱:** فرض کنیم  $\{a_n\}$  یک دنباله صعودی و از بالا کراندار باشد در این صورت  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  وجود دارد. به عبارت دیگر هر دنباله صعودی و از بالا کراندار همگراست.

❖ **برهان:** قرار می‌دهیم  $S = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ، یعنی  $S$  مجموعه مقادیر عددی جملات دنباله مورد بحث است پس  $S \neq \emptyset$  و دارای کران بالایی مانند  $K$  است. بنابر اصل موضوع تمامیت  $S$  دارای کوچکترین کران بالاست. این کوچکترین کران بالای  $S$  را  $L$  می‌نامیم. نشان می‌دهیم که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

برای هر  $n$ ،  $a_n \geq L$ ، حال فرض کنیم  $\varepsilon > 0$  عدد دلخواهی باشد. پس  $L - \varepsilon$  یک کران بالای  $S$  نیست، زیرا  $L - \varepsilon < L$  و  $L$  کوچکترین کران بالای  $S$  فرض شده است.

چون  $L - \varepsilon$  کران بالای  $S$  نیست، حداقل یک عضو  $S$  مانند  $a_N$  وجود دارد. به طوری که  $L - \varepsilon < a_N$ . حال برای هر  $n \geq N$

$$a_n \geq a_N > L - \varepsilon$$

از طرف دیگر  $a_n < L$  در نتیجه برای هر  $n \geq N$

$$L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$$

یعنی برای هر  $n \geq N$

$$|a_n - L| < \varepsilon$$

پس  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ ، همچنان که ادعا شده است.

قضیه فوق یک زوج دارد که از تبدیل مفاهیم موجود در قضیه به مفاهیم زوج آن به دست می‌آید! آن را بیان می‌کنیم.

❖ **قضیه ۲:** هر دنباله نزولی و کراندار از پایین همگراست.

❖ **مثال:** ثابت کنید دنباله  $\left\{ \sin \frac{\pi}{2n} \right\}_{n=1}$  همگراست.

❖ **مثال:** ثابت کنید دنباله  $\left\{ \sin \frac{\pi}{2n} \right\}_{n=1}$  همگراست.

**حل:** با توجه به شناختی از رفتار تابع  $y = \sin \frac{\pi}{2n}$  به ویژه در بازه  $(0, \frac{\pi}{2})$  داریم، معلوم است

که این دنباله یک دنباله نزولی است. به علاوه برای هر  $n$ ،  $0 < \sin \frac{\pi}{2n}$

پس عدد  $\epsilon$  یک کران پایین این دنباله است. بنابراین بر طبق قضیه ۲، این دنباله همگراست.



۱- ابتدا نشان دهید که دنباله‌های زیر همگرا هستند

$$\left\{1 + \frac{1}{n^2 + 1}\right\} \quad \text{الف)} \quad \left\{1 - \frac{1}{n}\right\} \quad \text{ب)}$$

سپس حد آنها را حساب کنید.

۲- دنباله  $\{a_n\}$  چنین تعریف شده است:

$$a_1 = 1, a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

الف) ثابت کنید که این دنباله همگراست.

ب) حد این دنباله را به دست آورید.

این بخش را با یک قضیه مهم به پایان می‌رسانیم که در حسابان و آنالیز نقشی کلیدی دارد.

❖ **قضیه:** هر عدد حقیقی حد دنباله‌ای از اعداد گویا است.

❖ **اثبات:** فرض کنیم  $u$  عدد حقیقی دلخواهی باشد. دو حالت وجود دارد.

حالت اول:  $u$  عددی گویا است. قرار می‌دهیم  $u_n = u$  (برای هر  $n \in \mathbb{N}$ )

پس  $\{u_n\}$  دنباله‌ای ثابت و متشکل از اعداد گویای  $U$  بوده و معلوم است که  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u$ .

حالت دوم:  $u$  عددی گنگ است، بسط اعشاری  $u$  را در نظر می‌گیریم.

$$u = u_0 . u_1 u_2 u_3 \dots u_n \dots$$

که در آن  $u_0$  جزء صحیح  $u$  بوده و عددی صحیح است. چون  $u$  گنگ است بسط اعشاری  $u$

نامتناهی و البته نامنظم می‌باشد. قرار می‌دهیم.

$$r_1 = U_0 / U_1$$

$$r_2 = U_0 / U_1 U_2$$

⋮

$$r_n = U_0 / U_1 U_2 \dots U_n$$

⋮

لذا هر  $r_n$  عددی گویا است زیرا بسط اعشاری مختوم دارد: به علاوه

$$0 < u - r_n = \underbrace{0.0\dots0}_n U_{n+1} U_{n+2} \dots$$