ابوریحان بیرونی


ابوریحان بیرونی

ابوریحان محمدبن احمد بیرونی
در سال ۳۶۲ قمری/ ۳۵۲ شمسی/ ۹۷۳میلادی در بیرون خوارزم متولد شد.
در سال ۴۴۲ قمری / ۴۲۹ شمسی /۱۰۵۰ میلادی در خوارزم درگذشت.
ریاضیدان، منجم و دانشمند و یکی از مفاخر بی‌نظیر دنیای علم بود.

کارهای ریاضی او عبارتند از :

۱. تعریف مفاهیم اولیه ریاضی برای دانش‌آموزان نجوم در کتاب التفهیم
۲. بررسی عمیق روی مسأله‌ی تثلیث زاویه
۳. محاسبه‌ی تقریبی وتر یک درجه و طول قوس بدون استفاده از قاعده‌ی انتگرال گیری
۴. محاسبه‌ی مجموع سری $\sum_{۰} ۲^k$
۵. دستور محاسبه‌ی طول قوس
۶. محاسبه‌ی تقریبی ضلع نه‌ضلعی منتظم به‌وسیله‌ی معادله‌ی درجه‌ی سه $۱+۳x=x^۳$

منابع

۱. بیرونی‌نامه، ابوالقاسم قربانی
۲. اطلس ریاضی صفحه‌ی ۵۷۹
۳. دائرةالمعارف فارسی جلد ۱ صفحه‌ی ۳۰
۴. دانشنامه‌ی جهان اسلام جلد ۵ صفحه‌ی ۱۶۳
۵. زندگی‌نامه‌ی ریاضیدانان دوره‌ی اسلامی ابوالقاسم قربانی صفحه‌ی ۱۷۶
۶. زندگی‌نامه‌ی علمی دانشوران بنیاد دانشنامه‌ی بزرگ فارسی جلد ۱ صفحه‌ی ۲۷۹
۷. لغت‌نامه‌ی دهخدا تحت نام ابوریحان بیرونی

۲

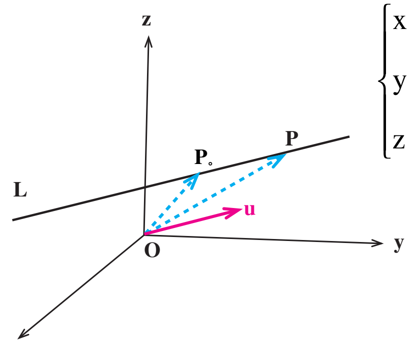
معادلات خط و صفحه

۱.۲ خط در فضا

یک خط مانند L با نقطهٔ معلومی چون $P_{\circ}=(x_{\circ},y_{\circ},z_{\circ})$ روی L و بردار ناصفر $u=(p,q,r)$ موازی با L به‌طور منحصر به‌فرد مشخص می‌شود. اکنون می‌خواهیم معادلهٔ خط L را پیدا کنیم. برای این منظور فرض کنیم $P=(x,y,z)$ نقطهٔ دلخواهی باشد. در این‌صورت P روی خط L است اگر و فقط اگر بردارهای u و $\overrightarrow{P_{\circ}P}$ با هم موازی باشند (به شکل ۱ نگاه کنید) و این معادل است با این‌که عدد حقیقی t موجود باشد با این ویژگی که $\overrightarrow{P_{\circ}P}=tu$. امّا $\overrightarrow{P_{\circ}P}=(x-x_{\circ},y-y_{\circ},z-z_{\circ})$ و درنتیجه $\overrightarrow{P_{\circ}P}=tu$ معادل است با این‌که $(x-x_{\circ},y-y_{\circ},z-z_{\circ})=t(p,q,r)$.

بنابراین نقطهٔ $P=(x,y,z)$ روی خط L است اگر و فقط اگر عدد حقیقی t موجود باشد که $x=x_{\circ}+pt$ ، $y=y_{\circ}+qt$ و $z=z_{\circ}+rt$. درنتیجه معادلهٔ خط L که از نقطهٔ معلومی چون $P_{\circ}=(x_{\circ},y_{\circ},z_{\circ})$ می‌گذرد و با بردار $u=(p,q,r)$ موازی است عبارت است از :

$$\begin{cases} x=x_{\circ}+pt \\ y=y_{\circ}+qt \\ z=z_{\circ}+rt \end{cases},t\in\mathbb{R}. \qquad (۱)$$



شکل ۱

این شکل از معادلات خط به **معادلات پارامتری خط** موسوم‌اند، و در آن t **پارامتر** نامیده می‌شود. درواقع به‌ازای هر t، یک نقطه از خط L به‌دست می‌آید و برعکس هر نقطه از خط L، به‌ازای tای در معادلات (۱) صدق می‌کند و لذا وقتی t در $\mathbb{R}$ تغییر می‌کند تمام نقاط خط L به‌وجود می‌آید.

مثال ۱. معادلات پارامتری خطی که از نقطهٔ $P_۰ = (۲,-۴,۱)$ می‌گذرد و موازی با بردار $u = (۳,\frac{۱}{۲},-۱)$ است با توجه به آنچه در بالا ذکر کردیم به‌صورت زیر است

$$\begin{cases} x = ۲ + ۳t \\ y = -۴ + \frac{۱}{۲}t \qquad ,t \in \mathbb{R}. \\ z = ۱ - t \end{cases}$$

اکنون می‌خواهیم شکل دیگری از معادلهٔ خط را پیدا کنیم. با توجه به معادلات پارامتری خط L که از نقطهٔ $P_۰ = (x_۰, y_۰, z_۰)$ می‌گذرد و موازی با بردار $u = (p,q,r)$ است و در (۱) به آن اشاره شد و با فرض این‌که p، q و r هر سه مخالف صفر باشند به‌دست می‌آوریم $\frac{x-x_۰}{p} = t$ ، $\frac{y-y_۰}{q} = t$ و $\frac{z-z_۰}{r} = t$. لذا از حذف پارامتر t به معادلات زیر می‌رسیم

$$\frac{x-x_۰}{p} = \frac{y-y_۰}{q} = \frac{z-z_۰}{r}. \qquad (۲)$$

این معادلات را **معادلات متقارن** خط L می‌نامیم.

مثال ۲. معادلات متقارن خط L را که از دو نقطهٔ $P_۱ = (۴,-۶,۵)$ و $P_۲ = (۲,-۳,۰)$ می‌گذرد پیدا می‌کنیم. برای این منظور توجه می‌کنیم که این خط موازی با بردار $\overrightarrow{P_۱P_۲} = (-۲,۳,-۵)$ می‌باشد و لذا می‌توانیم فرض کنیم $u = (-۲,۳,-۵)$. اکنون با توجه به این‌که $P_۱ = (۴,-۶,۵)$ نقطه‌ای از این خط است، معادلات متقارن خط L به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

$$\frac{x-۴}{-۲} = \frac{y+۶}{۳} = \frac{z-۵}{-۵}.$$

تذکر. توجه می‌کنیم که در محاسبهٔ معادلات متقارن یک خط فرض کردیم که p، q و r هر سه مخالف صفر هستند. اکنون اگر یکی از p، q یا r صفر باشد، مثلاً $p=0$ ، معادلات پارامتری خط به‌صورت

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 + qt \\ z = z_0 + rt \end{cases} ,t \in \mathbb{R},$$

تبدیل خواهد شد و لذا معادلات متقارن خط در این حالت به‌صورت زیر است

$$x = x_0 \ , \ \frac{y-y_0}{q} = \frac{z-z_0}{r} .$$

در حالات دیگر نیز در مورد صفر شدن یکی یا دو تا از p، q یا r از روی معادلات پارامتری می‌توان معادلات متقارن را به‌دست آورد.

مثال ۳. می‌خواهیم معادلات متقارن خطی را که از نقطهٔ $P_1 = (-2,-2,1)$ می‌گذرد و موازی با بردار $u = (0,2,-3)$ است به‌دست آوریم. با توجه به آنچه در بالا اشاره کردیم این معادلات به‌صورت زیر است

$$x = -2 \ , \ \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{-3} .$$

مثال ۴. می‌خواهیم معادلات متقارن خطی را که از دو نقطهٔ $P_1 = (2,3,-1)$ و $P_2 = (2,3,4)$ می‌گذرد به‌دست آوریم. برای این منظور توجه می‌کنیم که این خط موازی با بردار $u = \overrightarrow{P_1P_2} = (0,0,5)$ می‌باشد و چون از نقطهٔ P_1 نیز می‌گذرد، لذا معادلات متقارن آن به‌صورت زیر خواهد بود

$$x = 2 \ , \ y = 3 .$$

فاصلهٔ یک نقطه از یک خط

می‌خواهیم فاصلهٔ نقطهٔ مفروض P را که خارج خط L قرار دارد از آن پیدا کنیم. قضیهٔ زیر برای این منظور کارساز است.

قضیهٔ ۱. فرض کنیم L خطی باشد که با بردار غیر صفر u موازی است و P را نقطه‌ای

می‌گیریم که خارج (یا روی) L قرار دارد. در این‌صورت فاصلهٔ P از L، یعنی D، برابر است با

$$D = \frac{|u \times \overrightarrow{P_\circ P}|}{|u|},$$

که در آن $P_\circ$ نقطهٔ دلخواهی روی L است.

اثبات. فرض کنیم θ زاویهٔ بین بردارهای u و $\overrightarrow{P_\circ P}$ باشد، پس $\circ \le \theta \le \pi$.

اگر $\circ < \theta < \frac{\pi}{2}$، آنگاه با توجه به شکل ۲ داریم $\sin\theta = \frac{D}{|\overrightarrow{P_\circ P}|}$ و لذا $D = |\overrightarrow{P_\circ P}|\sin\theta$.

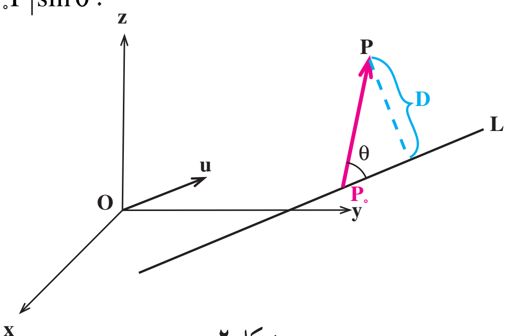
توجه می‌کنیم که اگر $\theta = \circ$ یا $\theta = \frac{\pi}{2}$، مجدداً تساوی اخیر برقرار است.

اکنون فرض می‌کنیم $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ و با توجه به شکل ۳ به‌دست می‌آوریم $\sin(\pi - \theta) = \frac{D}{|\overrightarrow{P_\circ P}|}$

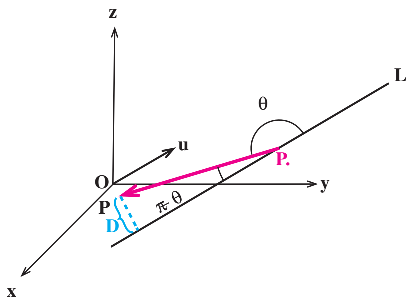
و درنتیجه $D = |\overrightarrow{P_\circ P}|\sin(\pi - \theta)$. چون $\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$، لذا در این حالت نیز به‌دست می‌آوریم $D = |\overrightarrow{P_\circ P}|\sin\theta$. اگر $\theta = \pi$، نیز تساوی اخیر برقرار است.

پس در هر حال داریم

$$D = |\overrightarrow{P_\circ P}|\sin\theta.$$



شکل ۲



شکل ۳

امّا با توجه به این‌که $|u \times \overrightarrow{P_\circ P}| = |u||\overrightarrow{P_\circ P}|\sin\theta$، به‌دست می‌آوریم $|u \times \overrightarrow{P_\circ P}| = |u|D$ و لذا

$$D = \frac{|u \times \overrightarrow{P_\circ P}|}{|u|}. \blacksquare$$

مثال ۵. می‌خواهیم فاصلهٔ نقطهٔ $P=(۵,-۶,۲)$ را از خط L که با معادلات پارامتری زیر داده شده است پیدا کنیم

$$\begin{cases} x=۱ \\ y=-۱+۴t \\ z=۲-۳t \end{cases} \quad , \; t\in\mathbb{R} \, .$$

برای این منظور نقطهٔ $P_\circ=(۱,-۱,۲)$ را روی L درنظر می‌گیریم. بردار $u=(\circ,۴,-۳)$ موازی خط L است و درنتیجه

$$D=\frac{|u\times\overrightarrow{P_\circ P}|}{|u|}=\frac{|(\circ,۴,-۳)\times(۴,-۵,\circ)|}{|(\circ,۴,-۳)|}=\frac{|(-۱۵,-۱۲,-۱۶)|}{|(\circ,۴,-۳)|}$$

$$=\frac{\sqrt{(-۱۵)^۲+(-۱۲)^۲+(-۱۶)^۲}}{\sqrt{\circ^۲+۴^۲+(-۳)^۲}}=\frac{\sqrt{۶۲۵}}{\sqrt{۲۵}}=\frac{۲۵}{۵}=۵ \, .$$

وضعیت نسبی دو خط در فضا

به‌طور کلی دو خط متمایز در فضا یکی از سه وضعیت نسبی **موازی**، **متقاطع** یا **متنافر** را دارند. گیریم $L_۱$ و $L_۲$ دو خط متمایز باشند که به‌ترتیب با بردارهای $u_۱=(p_۱,q_۱,r_۱)$ و $u_۲=(p_۲,q_۲,r_۲)$ موازی‌اند.

حالت اولّ: $L_۱$ و $L_۲$ موازی هستند.

$L_۱$ و $L_۲$ موازی‌اند اگر و فقط اگر $u_۱$ و $u_۲$ موازی باشند. یعنی معادلاً $\lambda\in\mathbb{R}$ موجود باشد که $u_۲=\lambda u_۱$، یا $(p_۲,q_۲,r_۲)=\lambda(p_۱,q_۱,r_۱)$. پس $L_۱$ و $L_۲$ موازی‌اند اگر و فقط اگر $p_۲=\lambda p_۱$، $q_۲=\lambda q_۱$ و $r_۲=\lambda r_۱$.

مثال ۶. می‌خواهیم وضعیت نسبی دو خط $L_۱$ و $L_۲$ را که با معادلات $L_۱:\frac{x-۱}{-۲}=\frac{y+۱}{۱}=\frac{z-۱}{۲}$ و $L_۲:\frac{x}{۱}=\frac{y}{-\frac{۱}{۲}}=\frac{z}{-۱}$ داده شده‌اند بررسی کنیم. چون $L_۱$ و $L_۲$ به‌ترتیب با $u_۱=(-۲,۱,۲)$ و $u_۲=(۱,-\frac{۱}{۲},-۱)$ موازی‌اند و داریم $-۲=۲(۱)$، $۱=۲(-\frac{۱}{۲})$ و $۲=۲(-۱)$، پس $L_۱$ و $L_۲$ موازی خواهند بود.

حالت دوم: $L_۱$ و $L_۲$ متقاطع هستند.

$L_۱$ و $L_۲$ متقاطع‌اند اگر یک نقطهٔ مشترک داشته باشند که در این‌صورت این نقطهٔ مشترک منحصر به فرد است (چرا؟).

مثال ۷. نشان می‌دهیم دو خط $L_۱$ و $L_۲$ به معادلات $L_۱: \frac{x-۲}{۲} = \frac{y+۲}{۱} = \frac{z-۲}{-۱}$ و $L_۲: \frac{x-۱}{۱} = \frac{y}{-۲} = \frac{z}{۲}$ (که موازی نمی‌باشند (چرا؟)) متقاطع‌اند و نقطهٔ تقاطع آنها را پیدا می‌کنیم. برای این منظور نقطه‌ای پیدا می‌کنیم که مختصات آن در معادلات هر دو خط صدق کند. معادلات پارامتری خط $L_۱$ به‌صورت زیر است

$$L_۱: \begin{cases} x = ۲ + ۲t \\ y = -۲ + t \\ z = ۲ - t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

اکنون می‌خواهیم ببینیم به‌ازای چه tای نقطه‌ای از این خط روی خط $L_۲$ قرار دارد. اگر یکی از نقاط خط $L_۱$ روی خط $L_۲$ قرار بگیرد، باید مختصات آن نقطه از $L_۱$ در معادلات $L_۲$ صدق کند. پس باید معادلات $\frac{(۲+۲t)-۱}{۱} = \frac{-۲+t}{-۲} = \frac{۲-t}{۲}$ را حل کنیم. از این معادلات جواب $t = ۰$ به‌دست می‌آید (چرا؟). پس $L_۱$ و $L_۲$ متقاطع هستند و به‌ازای $t = ۰$ نقطهٔ تقاطع $L_۱$ و $L_۲$ یعنی $P = (۲, -۲, ۲)$ به‌دست می‌آید.

حالت سوم: $L_۱$ و $L_۲$ متنافر هستند.

اگر $L_۱$ و $L_۲$ نه موازی باشند و نه متقاطع، آنگاه $L_۱$ و $L_۲$ را متنافر می‌نامیم.

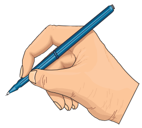
مثال ۸. وضعیت نسبی دو خط $L_۱$ و $L_۲$ به معادلات $L_۱: \frac{x+۱}{۲} = \frac{y}{-۱} = \frac{z+۲}{۱}$ و $L_۲: \frac{x}{۱} = \frac{y}{۲} = \frac{z}{۳}$ را بررسی می‌کنیم. $L_۱$ موازی بردار $u_۱ = (۲, -۱, ۱)$ و $L_۲$ موازی بردار $u_۲ = (۱, ۲, ۳)$ است. چون $u_۱$ و $u_۲$ موازی نمی‌باشند، پس $L_۱$ و $L_۲$ نیز موازی نمی‌باشند. وجود نقطهٔ مشترک را روی $L_۱$ و $L_۲$ تحقیق می‌کنیم. معادلات پارامتری $L_۲$ به‌صورت زیر است

$$L_۲: \begin{cases} x = t \\ y = ۲t \\ z = ۳t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

این مقادیر را در معادلات L_1 جایگزین می‌کنیم

$$\frac{t+1}{2}=\frac{2t}{-1}=\frac{3t+2}{1}.$$

این معادلات جواب ندارند زیرا $\frac{t+1}{2}=\frac{2t}{-1}$ به‌ازای $t=\frac{-1}{5}$ برقرار است و $\frac{2t}{-1}=\frac{3t+2}{1}$ به‌ازای $t=\frac{-2}{5}$. پس L_1 و L_2 متقاطع نیز نمی‌باشند، یعنی L_1 و L_2 متنافرند.



تمرین

۱. در هر یک از حالات زیر معادلات پارامتری و متقارن خطوطی را که یک نقطه از آنها داده شده است و امتداد آنها نیز موازی بردار مفروض u است پیدا کنید.

الف) $(-2,1,0)$ ، $u=(3,-1,5)$ ،

ب) $(-10,13,20)$ ، $u=(11,-13,-15)$ ،

ج) $(7,-1,2)$ ، $u=(-1,1,0)$ ،

د) $(-3,6,2)$ ، $u=(1,-1,0)$.

۲. معادلات پارامتری خط گذرا از نقطهٔ $(3,-1,2)$ و موازی خط زیر را پیدا کنید.

$$\frac{x-1}{4}=\frac{y+3}{2}=z.$$

۳. معادلات پارامتری خط گذرا از نقاط $(-2,5,7)$ و $(-1,1,0)$ را پیدا کنید.

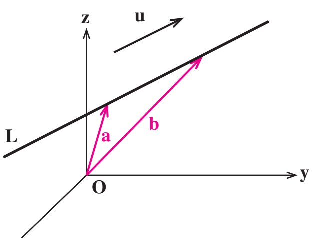
۴. نشان دهید خط گذرا از نقاط $(0,0,5)$ و $(1,-1,4)$ عمود بر خط زیر است.

$$\frac{x}{7}=\frac{y-3}{4}=\frac{z+9}{3}.$$

۵. a و b را طوری تعیین کنید تا نقطهٔ $(a,b,1)$ روی خط گذرا از نقطهٔ $(2,5,7)$ و $(0,3,2)$ قرار گیرد.

۶. u را برداری می‌گیریم که موازی خط مفروض L است. نشان دهید اگر a و b بردارهایی باشند که از مبدأ مختصات شروع شوند و انتهای آنها روی L قرار گیرد، آنگاه

$$u\times a=u\times b.$$



شکل ۴

۷. فاصلهٔ مبدأ مختصات را از خط گذرا از نقطهٔ $(-۳,-۳,۳)$ و موازی بردار $(۴,-۲,-۴)$ پیدا کنید.

۸. فاصلهٔ دو خط موازی زیر را پیدا کنید.

$$\frac{x-۱}{۲}=\frac{y+۱}{-۱}=\frac{z-۲}{-۲} \quad \text{و} \quad \frac{x}{۲}=\frac{y-۲}{-۱}=\frac{z-۳}{-۲}.$$

۹. فاصلهٔ نقطهٔ $(۵,۰,-۴)$ را از خط زیر پیدا کنید.

$$x-۱=\frac{y+۲}{-۲}=\frac{z+۱}{۲}.$$

۱۰. فاصلهٔ نقطهٔ $(۲,۱,۰)$ را از خط زیر پیدا کنید.

$$x=-۲ \;,\; y+۱=z.$$

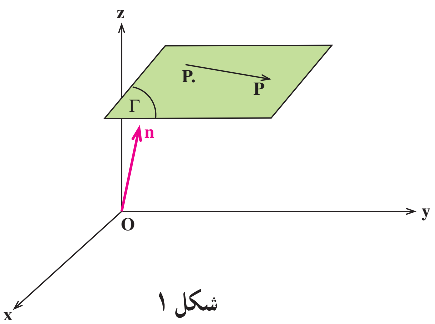
۱۱. وضعیت نسبی خطوط ذکر شده در تمرین ۱ را به‌ترتیب زیر تعیین کنید.

(الف و ب)، (ب و ج)، (ج و د)

۲.۲ صفحه در فضا

یک صفحه مانند Γ با نقطهٔ معلومی چون $P_۰=(x_۰,y_۰,z_۰)$ در Γ و بردار ناصفر $n=(a,b,c)$ عمود بر Γ به‌طور منحصر به فرد مشخص می‌شود. اکنون می‌خواهیم معادلهٔ صفحهٔ Γ را پیدا کنیم. برای این منظور فرض می‌کنیم $P=(x,y,z)$ نقطه‌ای دلخواه باشد. در این صورت P روی صفحهٔ Γ است اگر و فقط اگر بردارهای n و $\overrightarrow{P_۰P}$ بر هم عمود باشند (به شکل ۱ نگاه کنید) و این معادل است با این‌که ضرب داخلی $n.\overrightarrow{P_۰P}$ برابر صفر باشد. امّا $\overrightarrow{P_۰P}=(x-x_۰,y-y_۰,z-z_۰)$ و درنتیجه $n.\overrightarrow{P_۰P}=a(x-x_۰)+b(y-y_۰)+c(z-z_۰)$، بنابراین نقطهٔ $P=(x,y,z)$ روی صفحهٔ Γ است اگر و فقط اگر $a(x-x_۰)+b(y-y_۰)+c(z-z_۰)=۰$. درنتیجه معادلهٔ صفحهٔ Γ که از نقطهٔ معلومی چون $P_۰=(x_۰,y_۰,z_۰)$ می‌گذرد و بر بردار ناصفر $n=(a,b,c)$ عمود است عبارت است از

$$a(x-x_۰)+b(y-y_۰)+c(z-z_۰)=۰.$$



شکل ۱

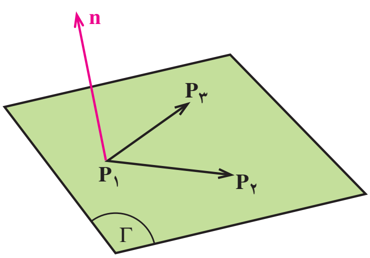
اگر معادلهٔ بالا را بسط دهیم و به‌جای $ax_0+by_0+cz_0$ که عددی ثابت است، d قرار دهیم می‌توانیم معادلهٔ صفحهٔ Γ را به‌صورت زیر نیز بنویسیم

$$ax+by+cz=d\,.$$

مثال ۱. معادلهٔ صفحهٔ گذرا از نقطهٔ $P_0=(-2,4,5)$ و عمود بر بردار $n=(7,0,-6)$ با توجه به آنچه در بالا گفتیم عبارت است از $7(x+2)+0(y-4)+(-6)(z-5)=0$ ، یا $7x-6z=-44$.

مثال ۲. معادلهٔ صفحهٔ گذرا از نقطهٔ $P_0=(\frac{1}{2},0,3)$ و عمود بر خط L با معادلات $\frac{x+1}{4}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z}{5}$ را پیدا می‌کنیم. توجه می‌کنیم که خط L با بردار $(4,-1,5)$ موازی است و لذا صفحهٔ مطلوب بر بردار $n=(4,-1,5)$ عمود خواهد بود. درنتیجه معادلهٔ آن عبارت است از $4(x-\frac{1}{2})+(-1)(y-0)+5(z-3)=0$ ، یا $4x-y+5z=17$.

مثال ۳. معادلهٔ صفحهٔ گذرا از سه نقطهٔ $P_1=(1,0,2)$ ، $P_2=(-1,3,4)$ و $P_3=(3,5,7)$ را پیدا می‌کنیم. توجه می‌کنیم که این صفحه شامل دو بردار $\overrightarrow{P_1P_2}$ و $\overrightarrow{P_1P_3}$ است (به شکل ۲ نگاه کنید). لذا برداری که بر این دو بردار عمود باشد بر این صفحه نیز عمود است و می‌تواند نقش n را بازی کند. امّا برداری که بر این دو بردار عمود است را می‌توانیم ضرب خارجی این دو بردار درنظر بگیریم: $n=\overrightarrow{P_1P_2}\times\overrightarrow{P_1P_3}$. چون $\overrightarrow{P_1P_2}=(-2,3,2)$ و $\overrightarrow{P_1P_3}=(2,5,5)$ درنتیجه $n=(5,14,-16)$. یعنی این‌که معادلهٔ صفحهٔ مطلوب عبارت است از $5(x-1)+14(y-0)-16(z-2)=0$ یا $5x+14y-16z=-27$.



شکل ۲

فاصلهٔ یک نقطه از یک صفحه

می‌خواهیم فاصلهٔ نقطهٔ مفروض P را که خارج صفحهٔ Γ قرار دارد از آن پیدا کنیم.

قضیهٔ زیر برای این منظور کارساز است.

قضیهٔ ۱. فرض کنیم Γ صفحه‌ای باشد که بر بردار n عمود است و P را نقطه‌ای می‌گیریم که خارج (یا روی) Γ قرار دارد. در این صورت فاصلهٔ P از Γ، یعنی D، برابر است با

$$D=\frac{|n.\overrightarrow{P_\circ P}|}{|n|},$$

که در آن $P_\circ$ نقطهٔ دلخواهی روی Γ است.

اثبات. فرض کنیم θ زاویهٔ بین بردار n و بردار $\overrightarrow{P_\circ P}$ باشد، پس $\circ\le\theta\le\pi$.

اگر $\circ\le\theta<\frac{\pi}{۲}$، آنگاه با توجه به شکل ۳ داریم $\cos\theta=\frac{D}{|\overrightarrow{P_\circ P}|}$ و لذا $D=|\overrightarrow{P_\circ P}|\cos\theta$.

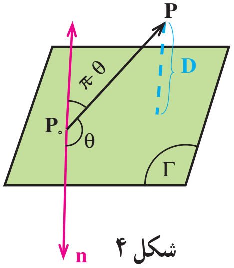
توجه می‌کنیم که اگر $\theta=\circ$ یا $\theta=\frac{\pi}{۲}$، مجدداً تساوی اخیر برقرار است.

اکنون فرض می‌کنیم $\frac{\pi}{۲}<\theta<\pi$ و با توجه به شکل ۴ به‌دست می‌آوریم $\cos(\pi-\theta)=\frac{D}{|\overrightarrow{P_\circ P}|}$

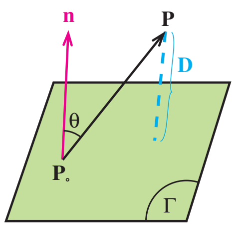
و درنتیجه $D=|\overrightarrow{P_\circ P}|\cos(\pi-\theta)$. چون $\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$، لذا در این حالت به‌دست می‌آوریم $D=|\overrightarrow{P_\circ P}|(-\cos\theta)$. اگر $\theta=\pi$، نیز تساوی اخیر برقرار است.

پس برای $\circ\le\theta\le\frac{\pi}{۲}$ داریم $D=|\overrightarrow{P_\circ P}|\cos\theta$ و برای $\frac{\pi}{۲}<\theta\le\pi$ داریم $D=|\overrightarrow{P_\circ P}|(-\cos\theta)$، پس در هر حال

$$D=|\overrightarrow{P_\circ P}||\cos\theta|\cdot$$



شکل ۴



شکل ۳

امّا با توجه به این‌که $|n.\overrightarrow{P_\circ P}| = |n||\overrightarrow{P_\circ P}||\cos\theta|$ به‌دست می‌آوریم $|n.\overrightarrow{P_\circ P}| = |n|D$ و لذا

$$D = \frac{|n.\overrightarrow{P_\circ P}|}{|n|}. \blacksquare$$

مثال ۴. می‌خواهیم فاصلهٔ نقطهٔ $P = (\circ,۲,۱)$ را از صفحهٔ Γ به معادلهٔ $x + y + \sqrt{۲}z + ۲ - \sqrt{۲} = \circ$ به‌دست آوریم. برای این منظور نقطهٔ $P_\circ = (\sqrt{۲}, -۲, \circ)$ را روی Γ درنظر می‌گیریم. بردار $n = (۱,۱,\sqrt{۲})$ بر صفحهٔ Γ عمود است و درنتیجه

$$D = \frac{|n.\overrightarrow{P_\circ P}|}{|n|} = \frac{|(۱,۱,\sqrt{۲}).(-\sqrt{۲},۴,۱)|}{|(۱,۱,\sqrt{۲})|} = \frac{۴}{۲} = ۲.$$

وضعیت نسبی دو صفحه در فضا

دو صفحهٔ متمایز $\Gamma_۱$ به معادلهٔ $a_۱x + b_۱y + c_۱z = d_۱$ و $\Gamma_۲$ به معادلهٔ $a_۲x + b_۲y + c_۲z = d_۲$ را درنظر می‌گیریم. توجه می‌کنیم که $\Gamma_۱$ بر بردار $n_۱ = (a_۱, b_۱, c_۱)$ و $\Gamma_۲$ بر بردار $n_۲ = (a_۲, b_۲, c_۲)$ عمود است. $\Gamma_۱$ و $\Gamma_۲$ یا با هم **موازی** هستند و یا موازی نیستند که در این حالت $\Gamma_۱$ و $\Gamma_۲$ را **متقاطع** می‌نامیم.

حالت اوّل: $\Gamma_۱$ و $\Gamma_۲$ موازی هستند.

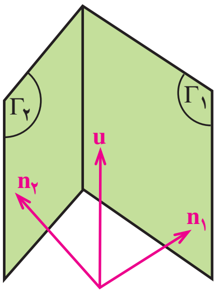
دو صفحهٔ $\Gamma_۱$ و $\Gamma_۲$ موازی‌اند اگر و فقط اگر $n_۱$ و $n_۲$ موازی باشند. یعنی معادلاً $r \in \mathbb{R}$ موجود باشد که $n_۱ = rn_۲$، یا $(a_۱, b_۱, c_۱) = r(a_۲, b_۲, c_۲)$. پس $\Gamma_۱$ و $\Gamma_۲$ موازی‌اند اگر و فقط اگر $a_۱ = ra_۲$، $b_۱ = rb_۲$ و $c_۱ = rc_۲$.

مثال ۵. دو صفحه به معادلات $۲x + ۴y + ۳z = ۸$ و $۴x + ۸y + ۶z = ۱$ موازی‌اند.

حالت دوم: $\Gamma_۱$ و $\Gamma_۲$ متقاطع هستند.

اگر $\Gamma_۱$ و $\Gamma_۲$ در یک نقطه متقاطع باشند، در این صورت فصل مشترک $\Gamma_۱$ و $\Gamma_۲$ یک خط خواهد بود. واضح است که این خط با برداری که بر $n_۱$ و $n_۲$ عمود است موازی می‌باشد و لذا می‌توانیم فرض کنیم با ضرب خارجی $u = n_۱ \times n_۲$ موازی است. حال با داشتن یک نقطه که روی

این خط باشد، معادلهٔ آن به‌راحتی قابل محاسبه است (به شکل ۵ نگاه کنید).



شکل ۵

مثال ۶. فصل مشترک دو صفحهٔ $\Gamma_۱$ به معادلهٔ $۳x-۲y+z=۱$ و $\Gamma_۲$ به معادلهٔ $۵x+۴y-۶z=۲$ را به‌دست می‌آوریم. این فصل مشترک خطی است که با بردار $u=n_۱\times n_۲$ موازی است که در آن $n_۱=(۳,-۲,۱)$ و $n_۲=(۵,۴,-۶)$ و درنتیجه $u=(۸,۲۳,۲۲)$. حال کافی است نقطه‌ای روی این خط پیدا کنیم. چون نقطهٔ $(۰,-۱,-۱)$ روی هر دو صفحه قرار دارد، پس روی خط فصل مشترک است و لذا معادلات خط فصل مشترک دو صفحه به‌صورت $\frac{x}{۸}=\frac{y+۱}{۲۳}=\frac{z+۱}{۲۲}$ می‌باشد.

وضعیت نسبی یک خط و یک صفحه در فضا

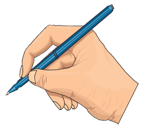
خط L به معادلات $t\in\mathbb{R}$ ، $\begin{cases}x=x_۰+pt\\y=y_۰+qt\\z=z_۰+rt\end{cases}$ و صفحهٔ Γ به معادلهٔ $ax+by+cz=d$ را درنظر می‌گیریم. توجه می‌کنیم که L با بردار (p,q,r) موازی است و Γ بر بردار (a,b,c) عمود. L و Γ یا با هم **موازی** هستند که معادلاً در این حالت بردار عمود بر صفحه بر خط L نیز باید عمود باشد و این معادل است با این‌که $(a,b,c).(p,q,r)=۰$ یا $ap+bq+cr=۰$ ؛ و یا با هم موازی نیستند که دراین‌صورت **متقاطع**‌اند.

مثال ۷. وضعیت نسبی خط L به معادلات $\frac{x-۱}{۱}=\frac{y}{۲}=\frac{z}{-۱}$ و صفحهٔ Γ به معادلهٔ $۲x+y-z=۲$ را تعیین می‌کنیم. خط L با بردار $(۱,۲,-۱)$ موازی است و صفحهٔ Γ بر بردار $(۲,۱,-۱)$ عمود. چون $(۱,۲,-۱).(۲,۱,-۱)=۵\neq ۰$ ، لذا، L و Γ موازی نمی‌باشند. اکنون نقطهٔ

تقاطع L و Γ را پیدا می‌کنیم. معادلات پارامتری خط L به‌صورت زیر است

$$\begin{cases} x = ۱ + t \\ y = ۲t \\ z = -t \end{cases} \quad , \ t \in \mathbb{R} .$$

اکنون می‌خواهیم ببینیم به‌ازای چه tای نقطه‌ای از این خط روی صفحهٔ Γ قرار می‌گیرد. برای این منظور باید معادلهٔ $۲(۱+t)+۲t+t=۲$ را حل کنیم. امّا این معادله به‌صورت $۵t=۰$ ساده می‌شود که تنها جواب آن $t=۰$ است. یعنی به‌ازای $t=۰$، نقطهٔ $(۱,۰,۰)$ از صفحهٔ Γ روی خط L واقع می‌شود و این یعنی L و Γ متقاطع‌اند.



تمرین

۱. در هر یک از حالات زیر معادلهٔ صفحهٔ گذرا از نقطهٔ $P_۰$ و عمود بر بردار n را پیدا کنید.

الف) $P_۰ = (-۱,۲,۴)$ ، $n = (-۴,۱۵,\frac{-۱}{۲})$ ،

ب) $P_۰ = (۲,۰,-۲)$ ، $n = (۲,۳,-۴)$ ،

ج) $P_۰ = (۹,۱۷,-۱۷)$ ، $n = (۲,۰,-۳)$ ،

د) $P_۰ = (۲,۳,-۵)$ ، $n = (۰,۱,۰)$.

۲. معادلهٔ صفحهٔ گذرا از سه نقطهٔ $(۲,-۱,۴)$ ، $(۵,۳,۵)$ و $(۲,۴,۳)$ را پیدا کنید.

۳. معادلهٔ صفحهٔ گذرا از نقطهٔ $(۱,-۱,۲)$ و خط $x+۲=y+۱=\frac{z+۵}{۲}$ را پیدا کنید.

۴. معادلهٔ صفحهٔ گذرا از دو خط زیر را پیدا کنید.

$$\frac{x-۱}{۳}=\frac{y+۱}{۲}=\frac{z-۵}{۴}, \quad \frac{x+۳}{۳}=\frac{y-۴}{۲}=\frac{z}{۴}.$$

۵. معادلهٔ فصل مشترک صفحه‌های $x-z=۱$ و $۲x-۳y+۴z=۲$ را پیدا کنید.

۶. معادلهٔ صفحهٔ گذرا از نقطهٔ $(-۹,۱۲,۱۴)$ و عمود بر دو صفحهٔ تمرین ۵ را پیدا کنید.

۷. فاصلهٔ نقطهٔ $(۳,-۱,۴)$ را از صفحهٔ $۲x-y+۲z=۵$ پیدا کنید.

۸. فاصلهٔ مبدأ مختصات را از صفحهٔ $ax+by+cz=d$ پیدا کنید.

۹. آیا چهار نقطهٔ $(۲,۳,۲)$ ، $(۱,-۱,-۳)$ ، $(۱,۰,-۱)$ و $(۵,۹,۵)$ همگی روی یک صفحه

قرار دارند؟

۱۰. خط $L:\frac{x-۱}{۲}=\frac{y+۱}{۳}=\frac{z+۵}{۷}$ و صفحهٔ $\Gamma:۲(x-۱)+۲(y+۳)-z=۰$ مفروض است. دو نقطه روی L به فاصلهٔ ۳ از Γ پیدا کنید.

۱۱. کدامیک از صفحه‌های زیر بر هم منطبق‌اند، یا با هم موازی‌اند، یا بر هم عمودند.

الف) $x+۲y-۳z=۲$ ،

ب) $۱۵x-۹y-z=۲$ ،

ج) $-۲x-۴y+۶z+۴=۰$ ،

د) $۵x-۳y-\frac{۱}{۳}z-۱=۰$.

۱۲. در هر یک از موارد زیر وضعیت نسبی خط و صفحهٔ داده شده را بررسی کنید.

الف) $\frac{x-۳}{۸}=\frac{y-۴}{۵}=\frac{z+۳}{-۱}$ ، $x-۳y+۵z=۱۲$ ،

ب) $\frac{x}{۸}=\frac{y+۱}{۲۳}=\frac{z+۱}{۲۲}$ ، $۵x+۴y-۶z=۲$ ،

ج) $\frac{x-۱}{-۴}=\frac{y+۱}{۵}=\frac{z}{۷}$ ، $x-۲y+۲z=۵$.

۱۳. معادلهٔ صفحهٔ گذرا از نقطهٔ $(-۱,۲,۳)$ را در هر یک از حالات زیر پیدا کنید.

الف) با صفحهٔ xy موازی باشد،

ب) بر محور xها عمود باشد،

ج) بر محور yها عمود باشد.

۱۴. معادلهٔ صفحهٔ گذرا از نقطهٔ $(۲,\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۳})$ و عمود بر خط زیر را پیدا کنید.

$$\begin{cases} x=۲t+۳ \\ y=۶t+۶ \\ z=۹t \end{cases} \quad , \quad t\in\mathbb{R} .$$

۱۵. معادلهٔ خط گذرا از نقطهٔ $(۲,-۱,۰)$ و عمود بر صفحهٔ $۲x-۳y+۴z=۵$ را پیدا کنید.

۱۶. خط L با معادلات $\frac{x+۱}{۲}=\frac{y+۳}{۳}=-z$ و صفحهٔ Γ با معادلهٔ $۳x-۲y+۴z=-۱$ مفروض است.

الف) نقطهٔ $P_\circ$ ، نقطهٔ تقاطع L و Γ را پیدا کنید،

ب) معادلهٔ صفحهٔ عمود بر L در نقطهٔ $P_\circ$ را پیدا کنید،

ج) معادلهٔ خط گذرا از $P_\circ$ و عمود بر Γ را نیز پیدا کنید.

۱۷. معادلهٔ صفحهٔ عمودمنصف پاره‌خط واصل بین دو نقطهٔ $(۳,۱,۰)$ و $(۵,-۱,۳)$ را پیدا کنید.

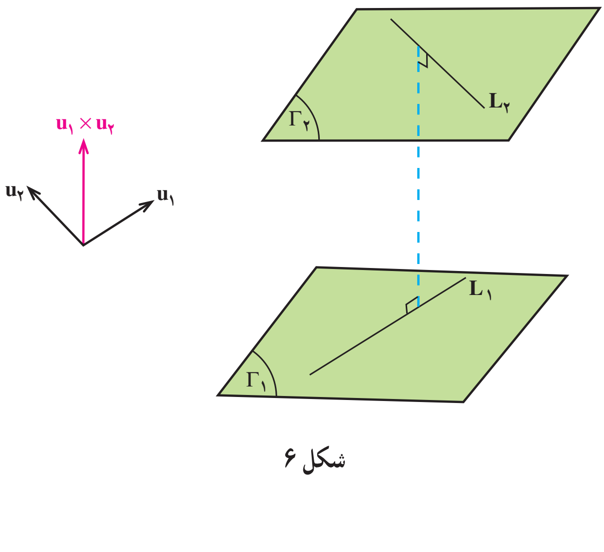
۱۸. نقاط فصل مشترک دو به دوی هر دسته از صفحه‌های زیر را پیدا کنید. آیا هر دسته از صفحه‌های زیر یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند؟

الف) $x+y=۱$ ، $y+z=۲$ ، $x+z=۳$ ،

ب) $x+y-z=۲$ ، $-x+۲y-z=۳$ ، $x-y-z=۰$.

۱۹. برای دو خط متنافر $L_۱$ با معادلات $\frac{x+۱}{۲}=\frac{y}{-۱}=\frac{z+۲}{۱}$ و $L_۲$ با معادلات $\frac{x}{۱}=\frac{y}{۲}=\frac{z}{۳}$ کوتاهترین فاصلهٔ بین دو خط (طول عمود مشترک) را پیدا کنید.

(راهنمایی : طول مورد نظر، طول پاره‌خطی است که محصور بین دو خط داده شده است و بر هر دو عمود است (به شکل ۶ نگاه کنید). راستای این عمود مشترک در راستای $u_۱\times u_۲$ قرار دارد که $u_۱$ و $u_۲$ به‌ترتیب دو بردار موازی با $L_۱$ و $L_۲$ هستند. حال صفحه‌های $\Gamma_۱$ و $\Gamma_۲$ که راستای عمود بر هر دوی آنها $u_۱\times u_۲$ است را درنظر می‌گیریم. فاصلهٔ این دو صفحه، فاصلهٔ مطلوب است.)



شکل ۶

خواجه نصیرالدین طوسی

خواجه نصیر طوسی

ابوجعفر محمدبن حسن معروف به خواجه نصیر طوسی

در سال ۵۹۷ قمری/ ۵۷۹ شمسی/ ۱۱۹۰میلادی در طوس متولد شد.

در سال ۶۷۲ قمری / ۶۵۲ شمسی/ ۱۲۷۳ میلادی در کاظمین درگذشت.

منجم، سیاستمدار و ریاضیدان

کارهای ریاضی او عبارتند از :

۱. نگارش کتاب کشف‌القناع در اسرار شکل‌القطاع درباره‌ی مثلثات مسطح و کروی و تعیین شکل قطاع کروی و مقاطع مخروطی

۲. نگارش کتاب جامع‌الحساب درباره‌ی نظریه‌ی اعداد و تلفیق حساب و هندسه

منابع

۱. تاریخ علم جرج سارتن، جلد ۱ صفحات ۴۱۷ تا ۴۲۵

۲. اطلس ریاضی صفحه‌ی ۵۸۲

۳. زندگینامه‌ی ریاضیدانان دوره‌ی اسلامی ابوالقاسم قربانی، صفحه‌ی ۴۸۶

۴. زندگینامه‌ی علمی دانشوران جلد ۳ صفحات ۵۰۸ تا ۵۱۴

۵. لغت‌نامه‌ی دهخدا تحت نام نصیرالدین طوسی