فصل ۲

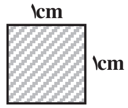
مساحت و قضیه‌ی فیثاغورس

کشتزارهای شاهرود

۲ــ۱ــ مساحت

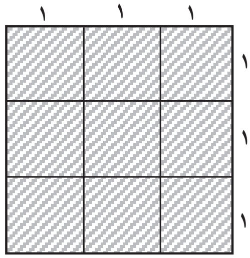
با انتخاب هر واحدی برای اندازه‌گیری طول یک پاره‌خط، واحدی نیز برای اندازه‌گیری مساحت به‌دست می‌آوریم که به کمک آن می‌توانیم مقدار سطح محدود شده در ناحیه‌ای از صفحه را اندازه بگیریم. برای مثال، اگر **سانتی متر** را برای اندازه‌گیری طول انتخاب کنیم واحد نظیر آن برای

اندازه‌گیری مساحت، **سانتی‌مترمربع** است که عبارت است از مساحت ناحیه‌ی محدود به مربعی به ضلع یک سانتی‌متر (شکل ۱).



شکل ۱: $1cm^2$ = مساحت

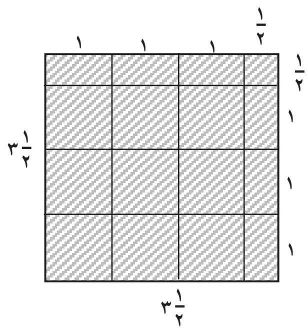
مربعی که طول ضلع آن یک واحد باشد (با هر واحد اندازه‌گیری طول)، **مربع واحد** نامیده می‌شود. برای محاسبه‌ی مساحت ناحیه‌های مختلف در صفحه باید تعداد مربع‌های واحد و بخش‌هایی از مربع‌های واحد که ناحیه را می‌پوشانند، پیدا کنیم. برای مثال، مساحت مربعی به ضلع ۳ سانتی‌متر، ۹ سانتی‌متر مربع است (شکل ۲)، زیرا با ۹ مربع واحد می‌توان سطح آن‌را پوشاند.



شکل ۲

فعالیت ۲ــ۱

۱. مربعی به ضلع $۳\frac{۱}{۲}$ سانتی‌متر را با ۹ مربعِ واحد، ۶ تا نیمه مربع و بالاخره مربع کوچکی به ضلع $\frac{۱}{۲}$ سانتی‌متر که مساحت آن یک چهارم مساحت مربع واحد است پوشانده‌ایم (شکل ۳).



شکل ۳

بنابراین مساحت این مربع برابر است با

$$۹+(۶\times\frac{۱}{۲})+\frac{۱}{۴}=۹+۳+\frac{۱}{۴}$$
$$=۱۲\frac{۱}{۴}cm^۲$$

۲. مربعی به ضلع $۴\frac{۱}{۴}$ سانتی متر رسم کنید. مساحت این مربع را با شمارش تعداد مربع‌های واحد و بخش‌هایی از مربع واحد که برای پوشاندن آن لازم است به‌دست آورید، سپس حاصل‌ضرب $۴\frac{۱}{۴} \times ۴\frac{۱}{۴}$ را پیدا و با آن مقایسه کنید.

۳. مستطیلی رسم کنید که اندازه‌ی ضلع‌های آن ۳ سانتی‌متر و ۵ سانتی‌متر باشد. مساحت این مستطیل را با شمارش تعداد مربع‌های واحد که برای پوشاندن آن لازم است، تعیین کنید و با حاصل‌ضرب ۵×۳ مقایسه کنید.

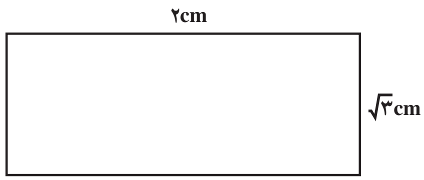
۴. مستطیلی به ضلع‌های $۶\frac{۱}{۴}$ سانتی‌متر و ۵ سانتی متر رسم کنید و با شمارش تعداد مربع‌های واحد و بخش‌هایی از مربع واحد که برای پوشاندن آن لازم است، مساحت آن را به‌دست آورید. سپس نتیجه را با حاصل ضرب $۵\times ۶\frac{۱}{۴}$ مقایسه کنید.

نتایجی را که از فعالیت ۲ــ ۱ به‌دست آورده‌ایم به‌صورت کلی خلاصه می کنیم :

مساحت مستطیلی به طول ضلع‌های a و b برابر است با :

a.b

توجّه: اندازه‌ی ضلع‌های مربع و مستطیل می‌توانند اعداد گنگ مثبت هم باشند.



شکل ۴

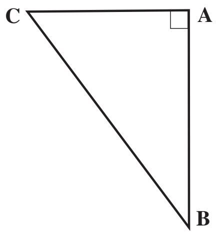
مثال ۱: در شکل ۴، اندازه ضلع‌های مستطیل ۲ و $\sqrt{۳}$ سانتی متر هستند.

بنابراین :

$$\text{مساحت مستطیل} = ۲\times\sqrt{۳} = ۲\sqrt{۳}\,\text{cm}^۲$$

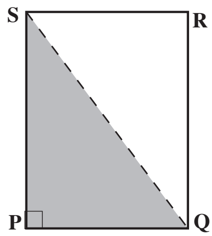
فعالیت ۲ــ۲

۱. مثلث ABC را که در رأس A قائمه است رسم کنید (شکل ۵).



شکل ۵

۲. مستطیل PQRS را طوری رسم کنید که طول و عرض آن به‌ترتیب برابر با AB و AC باشند. آنگاه قطر QS را رسم کنید (شکل ۶).



شکل ۶

۳. آیا مثلث‌های ABC، PQS و RSQ همنهشت هستند؟ جواب خود را با دلیل بیان کنید.

۴. از قسمت ۳ چه نتیجه‌ای در مورد مساحت این سه مثلث به دست می آورید؟

۵. طول مستطیل را ۵ و عرض آن را ۳ واحد طول بگیرید. مساحت این مستطیل چقدر است؟

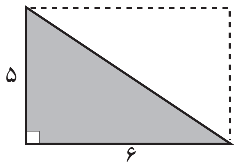
۶. با اندازه‌های فوق، مساحت مثلث‌های PQS، RSQ و ABC را به‌دست آورید.

۷. چه رابطه‌ای بین مساحت مثلث ABCو مساحت مستطیل PQRS وجود دارد؟

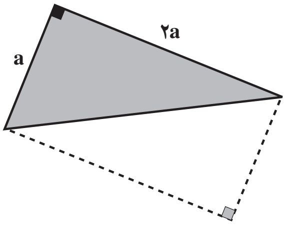
۸. اگر طول ضلع‌های زاویه‌های قائمه در مثلث شکل ۵، b وc واحد باشند، مساحت آن چگونه به‌دست می‌آید؟ توضیح دهید.

مثال ۲: با توجه به نتیجه‌ی فعالیت ۲ــ ۲، مساحت مثلث قائم‌الزاویه در شکل ۷ برابر است با :

$$\frac{۱}{۲}\times ۵\times ۶ = ۱۵cm^{۲}$$



شکل ۷



شکل ۸

مثال ۳: مساحت مثلث قائم‌الزاویه در شکل ۸ برابر است با :

$$\frac{۱}{۲}\times ۲a\times a = a^{۲}$$ واحد سطح

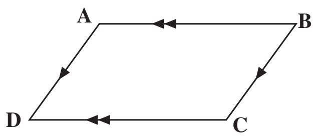
مساحت مثلث قائم‌الزاویه

مساحت یک مثلث قائم‌الزاویه برابر است با نصف حاصل ضرب اندازه‌های دو ضلع زاویه‌ی قائمه، یعنی اگر طول ضلع‌های زاویه‌ی قائمه در یک مثلث قائم‌الزاویه a و b باشد، آنگاه :

$$\text{مساحت مثلث قائم‌الزاویه} = \frac{۱}{۲}ab$$

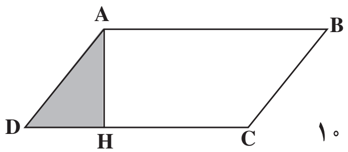
فعالیت ۲ــ۳

۱. روی یک قطعه مقوا، متوازی‌الاضلاع ABCD[1] را رسم[2] کنید.



شکل ۹

۲. ارتفاع AH وارد بر ضلع DC را رسم کنید تا مثلث AHD تشکیل گردد.

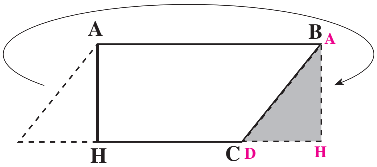


شکل ۱۰

۱ــ بهتر است متوازی‌الاضلاع‌های رسم شده متفاوت باشند.

۲ــ تکیه‌ی این فعالیت بر چگونگی رسم متوازی‌الاضلاع نیست.

۳. مثلث AHD را بریده و آن‌را طوری به سمت راست منتقل کنید که ضلع AD روی ضلع BCقرار بگیرد.



شکل ۱۱

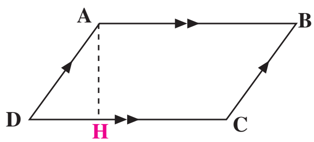
۴. به نظر شما چهارضلعی ABHH چه نوع چهارضلعی است؟ چرا؟

۵. با توجه به مساحت ABHH، روشی برای پیدا کردن مساحت متوازی‌الاضلاع ABCD پیدا کنید.

حال به کمک استدلال استنتاجی، رابطه‌ای را که در فعالیت قبل برای مساحت متوازی‌الاضلاع به‌دست آوردید، نشان می‌دهیم.

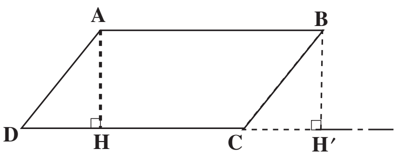
فعالیت ۲ــ۴

۱. متوازی‌الاضلاع ABCD را در نظر می‌گیریم و ارتفاع وارد بر ضلع DC را رسم می‌کنیم (شکل ۱۲).

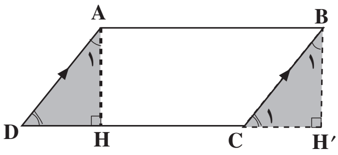


شکل ۱۲

۲ــ ضلع DC را امتداد می‌دهیم و از رأس B خطی بر امتداد آن عمود می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطه‌ی H′ قطع کنند (شکل ۱۳).



شکل ۱۳



شکل ۱۴

۳. نشان دهید چهارضلعی $ABH'H$ مستطیل است.

۴. در متوازی‌الاضلاع $ABCD$، ضلع‌های AD و BC موازی و مساوی هستند و به کمک قضیه‌ی خطوط موازی می‌توان نتیجه گرفت (چرا؟).

$$\hat{D} = \hat{C}_۱$$

درنتیجه متمم‌های آن‌ها یعنی $\hat{A}_۱$ و $\hat{B}_۱$ نیز برابرند.

با ادامه‌ی این فعالیت می‌توان نتایج زیر را به‌دست آورد :

الف) دو مثلث AHD و $BH'C$ به حالت (ز ض ز) همنهشت هستند، پس :

مساحت مثلث $BH'C$ = مساحت مثلث AHD

ب) مثلث AHD و ذوزنقه‌ی $ABCH$، متوازی‌الاضلاع $ABCD$ را به دو قسمت مجزا[1] تقسیم کرده‌اند، پس :

مساحت ذوزنقه‌ی $ABCH$ + مساحت مثلث AHD = مساحت متوازی‌الاضلاع $ABCD$

مقدار مساوی مساحت AHD را از (الف) جایگزین می‌کنیم.

مساحت ذوزنقه‌ی $ABCH$ + مساحت مثلث $BH'C$ = مساحت متوازی‌الاضلاع $ABCD$

پ) با دقت در شکل ۱۴، دیده می‌شود که ذوزنقه‌ی $ABCH$ و مثلث $BH'C$ ، مستطیل $ABH'H$ را می سازند، درنتیجه

مساحت مستطیل $ABH'H$ = مساحت متوازی‌الاضلاع $ABCD$

یا

$AB \times AH$ = مساحت متوازی‌الاضلاع $ABCD$

چون $AB = DC$ ، پس

$DC \times AH$ = مساحت متوازی‌الاضلاع $ABCD$

مساحت متوازی‌الاضلاع

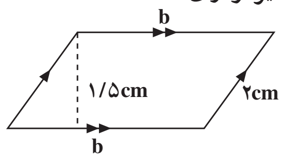
مساحت هر متوازی‌الاضلاع برابر با حاصل ضرب قاعده در ارتفاع نظیر آن است.

$b \times h$ = مساحت متوازی‌الاضلاع

۱ــ منظور از دو شکل مجزا آن است که مساحت اشتراک آن‌ها صفر باشد.

مثال ۴: محیط متوازی الاضلاعی ۱۶ سانتی‌متر، یک ضلع آن ۲ سانتی‌متر و ارتفاع وارد بر ضلع دیگر ۱/۵ سانتی‌متر است. مساحت متوازی الاضلاع را حساب کنید.

حل: چون در هر متوازی‌الاضلاع، ضلع‌ها دو به دو با هم مساوی هستند، پس محیط آن برابر است با دو برابر مجموع دو ضلع غیرموازی،



شکل ۱۵

یعنی :

$$\text{محیط متوازی‌الاضلاع} = ۲(۲+b) = ۱۶$$

$$۲+b=۸$$

$$b=۸-۲$$

پس $b=۶$. درنتیجه :

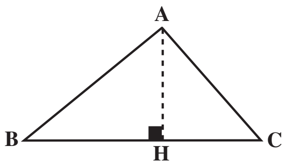
$$\text{مساحت متوازی الاضلاع} = \text{قاعده} \times \text{ارتفاع}$$

$$=۶\times ۱/۵$$

$$=۹cm^۲$$

می‌توان مساحت مثلث را با استفاده از مساحت متوازی‌الاضلاع، به‌دست آورد.

مثلث ABC (شکل ۱۶) را در نظر بگیرید.

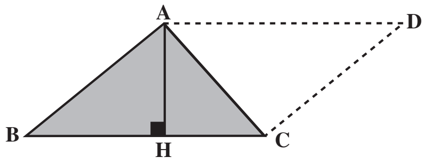


شکل ۱۶

پاره‌خط AH که از رأس A بر ضلع BC عمود شده است، **ارتفاع** مثلث و ضلع BC **قاعده‌ی** نظیر این ارتفاع نامیده می‌شود. هریک از ضلع‌های مثلث را می‌توان به عنوان قاعده درنظر گرفت و ارتفاع نظیر آن را رسم نمود.

تمرین: مثلثی با یک زاویه‌ی قائمه و مثلث دیگری با یک زاویه‌ی منفرجه رسم کرده، سپس سه ارتفاع هریک از آن‌ها را رسم کنید.

در مثلث ABC (شکل ۱۷) از رأس A پاره‌خط AD را موازی BC رسم می‌کنیم طوری که $AD = BC$. آنگاه نقطه‌ی D را به C وصل می‌کنیم. به این ترتیب متوازی‌الاضلاع ABCD با ارتفاع AH و قاعده‌ی BC به‌دست می‌آید.



شکل ۱۷

(۱) $\text{ABCD مساحت متوازی‌الاضلاع} = BC \times AH$

از طرف دیگر، دو مثلث ABC و ACD که متوازی‌الاضلاع ABCD را تشکیل می‌دهند، به‌حالت تساوی سه ضلع همنهشت هستند، پس مساحت‌های آن‌ها با هم برابر است. درنتیجه

$\text{مساحت مثلث ADC} + \text{مساحت مثلث ABC} = \text{ABCD مساحت متوازی‌الاضلاع}$

(۲) $\text{ABCD مساحت متوازی‌الاضلاع} = ۲(\text{مساحت مثلث ABC})$

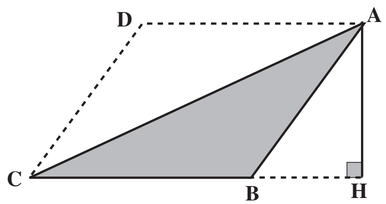
از روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم که

$BC \times AH = ۲(\text{مساحت مثلث ABC})$

یا

$\text{ABC مساحت مثلث} = \frac{۱}{۲}(BC \times AH)$

در شکل ۱۷، ارتفاع نظیر BC داخل مثلث قرار گرفته بود. اگر این ارتفاع مانند شکل ۱۸ در خارج مثلث یعنی بر امتداد قاعده‌ی BC عمود شود، همان استدلال بالا را می‌توان برای به‌دست آوردن مساحت آن به‌کار برد.



شکل ۱۸

برای این کار، از رأس A، پاره‌خط AD را مساوی و موازی با BC رسم می‌کنیم. سپس نقطه‌ی D را به C متصل می کنیم. مساحت متوازی الاضلاع ABCD برابر است با

$$AH \times BC$$

از طرفی، دومثلث ABC و ACD به حالت (ض ض ض) همنهشت هستند. پس مساحت‌های آنها با هم برابر است :

$$\text{مساحت مثلث } ADC + \text{مساحت مثلث } ABC = \text{مساحت متوازی‌الاضلاع } ABCD$$
$$= ۲(\text{مساحت مثلث } ABC)$$

بنابراین

$$\text{مساحت مثلث } ABC = \frac{۱}{۲}(AH \times BC)$$

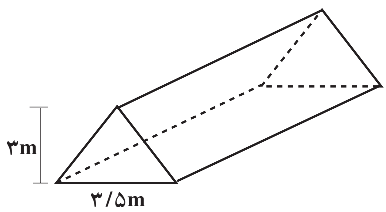
اگر مثلث ABC قائم‌الزاویه باشد، متوازی الاضلاعی که همانند بالا روی آن ساخته می‌شود در واقع یک مستطیل است که ارتفاع و قاعده‌ی آن همان دو ضلع زاویه‌ی قائمه در مثلث هستند، پس به‌طور کلی

مساحت مثلث

مساحت هر مثلث، برابر است با نصف حاصل ضرب ارتفاع در قاعده‌ی نظیر آن، یعنی اگر اندازه‌ی ارتفاع h و اندازه قاعده‌ی نظیر آن b باشد

$$\text{مساحت مثلث} = \frac{۱}{۲}bh$$

مثال ۵: به شکل ۱۹ نگاه کنید. این نمایی از یک چادر صحرایی است. می‌بینید که قسمت جلوی چادر به شکل مثلثی به ارتفاع ۳ متر و قاعده‌ی ۳/۵ متر است. برای پوشاندن جلوی این چادر چند مترمربع پارچه لازم است؟



شکل ۱۹

حل: چون مساحت مثلث جلوی چادر برابر است با

$$\frac{۱}{۲}\times ۳\times (۳/۵)=\frac{۱۰/۵}{۲}=۵/۲۵m^۲$$

پس۵/۲۵ مترمربع پارچه لازم است.

مثال ۶: اگر مساحت مثلثی ۵ سانتی مترمربع و قاعده‌ی آن ۳ سانتی‌متر باشد، ارتفاع آن چقدر است؟

حل: چون

$$\text{مساحت مثلث} = \frac{۱}{۲}\,(\text{ارتفاع} \times \text{قاعده})$$

$$=\frac{۱}{۲}bh$$

در رابطه‌ی فوق با داشتن مقدارهای معلوم مساحت و قاعده، مقدار ارتفاع را که مجهول است، پیدا می‌کنیم :

$$۵=\frac{۱}{۲}\times ۳\times h=\frac{۳h}{۲}$$

درنتیجه :

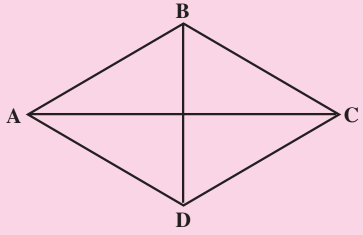
$$h=\frac{۲\times ۵}{۳}=\frac{۱۰}{۳}cm$$

توجّه: با استفاده از **مساحت مثلث**، می‌توان مساحت لوزی را به‌دست آورد :

مساحت لوزی

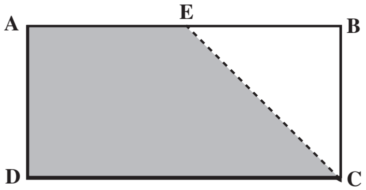
مساحت هر لوزی برابر با نصف حاصل ضرب قطرهای آن است.

$$\text{مساحت لوزی ABCD} = \frac{۱}{۲}(AC\times BD)$$



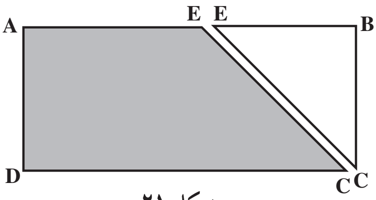
تمرین: نشان دهید مساحت لوزی برابر است با نصف حاصل ضرب قطرهای آن.

فعالیت ۲ـ۵



شکل ۲۰

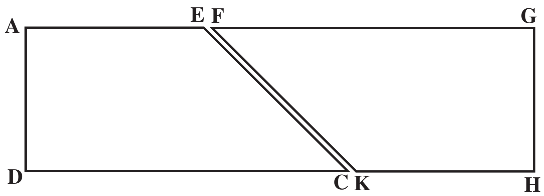
۱. مقوای مستطیل شکل ABCD را تهیه کنید. نقطه‌ی E را روی ضلع AB انتخاب و از آن به رأس C وصل کنید (شکل ۲۰).



شکل ۲۱

۲. مقوا را در امتداد پاره‌خط CE ببرید. دو شکل به‌دست می‌آید. یکی مثلث EBC و دیگری چهارضلعی AECD که یک **ذوزنقه** است (شکل ۲۱).

۳. با یک تکه مقوا، ذوزنقه‌ی FGHK را همنهشت با AECD ببرید. سپس دو ذوزنقه را مانند شکل ۲۲ کنار هم بگذارید تا مستطیل AGHD تشکیل شود.



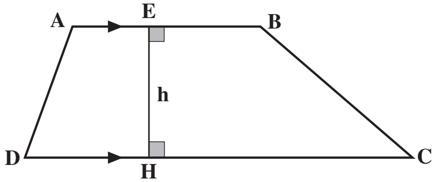
شکل ۲۲

۴. مساحت مستطیل AGHD را به‌دست آورید.

۵. به کمک نتیجه‌ی قسمت ۴، مساحت ذوزنقه AECD را بیابید.

ذوزنقه یک چهارضلعی است که فقط دو ضلع آن موازی یکدیگرند.

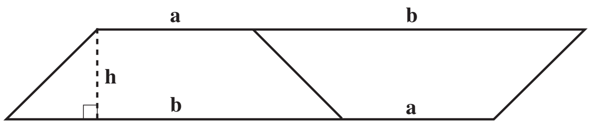
دو ضلع موازی در یک ذوزنقه، **قاعده‌های** ذوزنقه و پاره‌خطی که بر هر دو قاعده عمود است، **ارتفاع** ذوزنقه نامیده می‌شود (شکل ۲۳).



شکل ۲۳

فعالیت ۲ــ۶

۱. یک تکه مقوا به شکل ذوزنقه تهیه کنید. طول قاعده‌ی کوچک را a، طول قاعده‌ی بزرگ راb و طول ارتفاع را h بنامید (شکل ۲۴).



شکل ۲۴

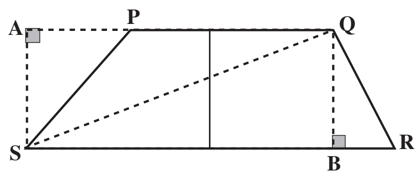
۲. ذوزنقه‌ی دیگری همنهشت با ذوزنقه‌ی بریده شده تهیه کنید و مانند شکل آن‌ها را کنار هم بگذارید. نشان دهید شکل حاصل متوازی الاضلاع است.

۳. مساحت متوازی‌الاضلاع به‌دست آمده را پیدا کنید.

۴. مساحت ذوزنقه را از روی مساحت متوازی‌الاضلاع حساب کنید.

فعالیت ۲ــ۷

۱. در ذوزنقه‌ی شکل ۲۵، قاعده‌ی PQ را امتداد دهید. سپس از رأس S بر آن عمودی رسم کنید تا آن‌را در نقطه‌ی A قطع کند. پاره‌خط SA ارتفاع نظیر قاعده‌ی PQ است. سپس ارتفاع QB را رسم کرده و دو رأس مقابل Q و S را به هم وصل کنید تا قطر QS به‌دست آید.



شکل ۲۵

۲. طول قاعده‌ی کوچک را a، طول قاعده‌ی بزرگ را b و ارتفاع $QB = SA$ را h بگیرید؛

۳. با توجه به اینکه طول QB برابر h و طول SR برابر b است، مساحت مثلث QRS را پیدا کنید؛

۴. با توجه به اینکه طول SA، برابر h و طول PQ برابر a است، مساحت مثلث PQS را به‌دست آورید ؛

۵. مساحت ذوزنقه‌ی PQRS را بر حسب a، b و h حساب کنید.

مساحت ذوزنقه

مساحت ذوزنقه برابر است با نصف مجموع دو قاعده ضرب در ارتفاع، یعنی مساحت ذوزنقه‌ای با طول قاعده‌های a و b و ارتفاع h برابر است با

$$\frac{۱}{۲}(a+b)h$$

مثال ۷: مساحت ذوزنقه‌ای با قاعده‌های ۸cm و ۱۰cm و ارتفاع ۶cm برابر است با

$$\frac{۱}{۲}(۸+۱۰)\times ۶ = ۵۴cm^{۲}$$

مجله‌ی ریاضی

برای به‌دست آوردن مساحت، از **چهار اصل مساحت** استفاده کردیم :

اصل ۱ : مساحت هر شکلی در صفحه، یک عدد حقیقی مثبت است.

اصل ۲ : اگر یک شکل از بخش های مجزایی تشکیل شده باشد، مساحت آن برابر با مجموع مساحت‌های آن بخش‌ها است.

اصل ۳ : مساحت شکل‌های همنهشت مساوی هستند.

اصل ۴ : مساحت مستطیل برابر با حاصل ضرب طول در عرض آن است.

مسائل[۱]

۱. ارتفاع مثلثی h و قاعده‌ی آن ۲h است. مساحت مثلث را بر حسب h پیدا کنید.

۲. ارتفاع مثلثی نصف قاعده‌ی آن است. اگر مساحت مثلث ۳۶ مترمربع باشد، طول قاعده‌ی آن را پیدا کنید.

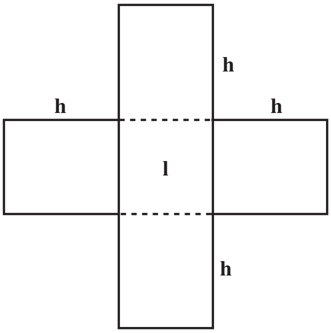
۱ــ اگر واحد اندازه‌گیری ذکر نشده باشد، شما می‌توانید واحد دلخواه اختیار کنید.

۳. مساحت مستطیلی ۱۴۴۰ سانتی مترمربع و طول آن ۵ برابر عرض آن است. طول و عرض مستطیل را حساب کنید.

۴. اگر مقوای نشان داده شده در شکل روبه‌رو را از محل‌های نقطه‌چین تا کنیم، یک جعبه‌ی درباز درست می‌شود.

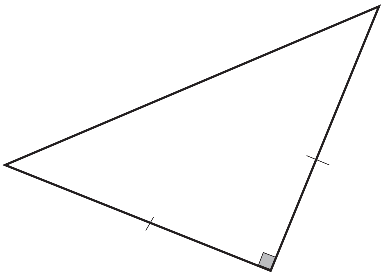
الف) اگر l = ۴cm و h = ۵cm ، برای ساخت جعبه چه مقدار مقوا (برحسب سانتی‌مترمربع) لازم است؟

ب) مساحت مقوا را در حالت کلی بر حسب l و h پیدا کنید.

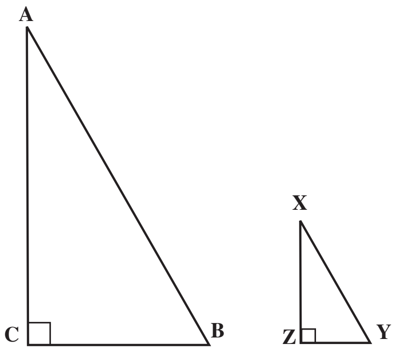


۵. اگر ارتفاع مثلثی ۱۲ و مساحت آن ۳۶ باشد، قاعده‌ی آن‌را حساب کنید.

۶. مساحت مثلث قائم الزاویه‌ی متساوی‌الساقینی ۴۰ است. اندازه‌ی هرکدام از ساق‌ها را پیدا کنید (شکل روبرو).



۷. در شکل روبه‌رو، اندازه ضلع‌های زاویه‌ی قائمه در مثلث ABC دو برابر اندازه‌ی ضلع‌های زاویه‌ی قائمه در مثلث XYZ است :

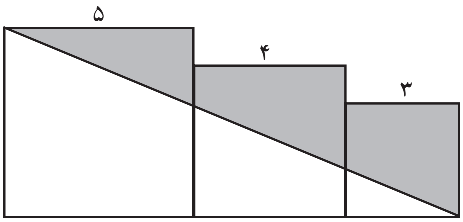


نسبت مساحت مثلث ABC به مساحت مثلث XYZ چقدر است؟

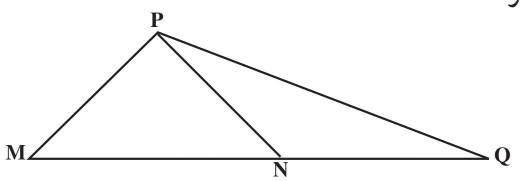
(**راهنمایی:** اگر XZ = a و YZ = b ، آنگاه اندازه‌های AC و BC، به ترتیب ۲a و ۲b خواهد بود.)

۸. مسألهٔ‌ی قبل را برای حالتی که اندازه‌ی ضلع‌های مثلث ABC، n برابرِ طول اضلاع مثلث XYZ باشد حل کنید (n عدد طبیعی است).

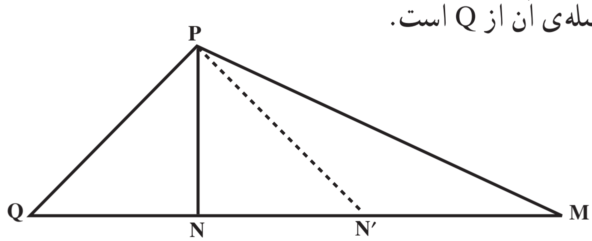
۹. در شکل زیر، سه مربع به ضلع‌های ۴،۵و ۳ در کنار یکدیگر قرار گرفته‌اند. مساحت ناحیه‌ی سایه زده شده چقدر است؟



۱۰. در مثلث PQM، نقطه‌ی N وسط ضلع QM است. نشان دهید مساحت‌های دو مثلث PNQ وPMN برابرند.



۱۱. در شکل زیر، نقطه‌ی N روی پاره‌خط QM چنان انتخاب شده است که فاصله‌ی آن از M دو برابر فاصله‌ی آن از Q است.

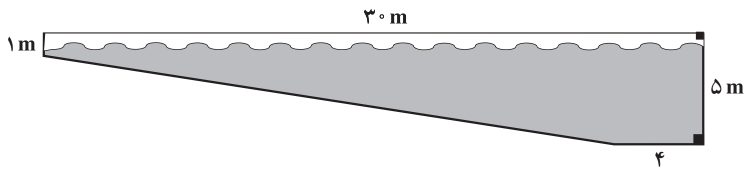


الف) ثابت کنید مساحت PNM دو برابر مساحت PQN است.

ب) اگر N′ وسط NM باشد، مساحت‌های PN′M و PQN چه رابطه‌ای با هم دارند؟

پ) چه رابطه‌ای بین مساحت PNN′ و مساحت PQM وجود دارد؟

۱۲. طول یک استخر شنا ۳۰ متر و گودی آن در قسمت کم عمق یک متر است. عمق استخر تا ۵ متر زیاد می‌شود. مساحت دیوار کناری این استخر را به‌دست آورید.



۱۳. ثابت کنید اگر قطرهای یک چهارضلعی بر هم عمود باشند، مساحت چهار ضلعی برابر نصف حاصل ضرب اندازه‌ی قطرها خواهد بود.

۱۴. می‌خواهیم کف یک استخر شنا به شکل مستطیل و با طول ۹ متر و عرض ۶ متر را با کاشی‌های مربع شکلی به ضلع ۰/۵ متر بپوشانیم. اگر قیمت هر کاشی ۳۵۰ تومان باشد، هزینه‌ی این کار چقدر خواهد بود؟

۱۵. اگر ارتفاع‌های دو مثلث برابر باشند، نشان دهید که نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر نسبت قاعده‌های نظیر آن ارتفاع‌ها است.

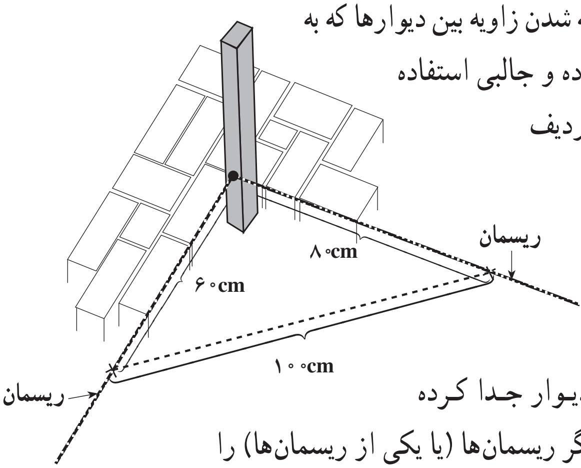
۱۶. اگر قاعده‌های دو مثلث برابر باشند، ثابت کنید که نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر نسبت ارتفاع‌های نظیر آن قاعده‌ها است.

۱۷. نتیجه‌گیری‌های الف، ب و پ بعد از فعالیت ۲ــ۴ بر پایه کدام‌یک از اصل‌های بیان شده در مجله ریاضی صفحه ۴۵ است.

۲ــ۲ــ قضیه‌ی فیثاغورس

در اکثر مناطق کشورمان آجر، بلوک‌های سیمانی، سنگ و سیمان و گاهی خِشت از جمله مصالح اصلی خانه‌سازی و ساختمان‌ها هستند. یکی از موارد مهم در ساختن خانه‌ها و ساختمان‌ها، قائمه بودن زاویه‌ی بین دیوارها و یا گوشه‌های اتاق‌ها و اسکلت‌بندی ساختمان است، همانگونه که در ضرب‌المثل‌ها آمده است :

خِشت اول چون نهَد معمار کج   تا ثریا می‌رود دیوار کج



معمولاً بنّاهای ماهر و با تجربه برای قائمه شدن زاویه بین دیوارها که به آن «گونیا کردن» می‌گویند، از روش بسیار ساده و جالبی استفاده می‌کنند. به این صورت که پس از چیدن اولین ردیف گوشه بین دو دیوار، روی لبه اولین ردیف و در امتداد دیوارها ریسمان‌کشی می‌کنند. (شکل روبه‌رو) و سپس به‌وسیله متر روی یک ریسمان ۸۰ سانتی‌متر و روی ریسمان دیگر به اندازه ۶۰ سانتی‌متر از گوشه دو دیوار جدا کرده علامت‌گذاری می‌کنند. سپس آنقدر دو سرِ دیگر ریسمان‌ها (یا یکی از ریسمان‌ها) را

تغییر می‌دهند تا فاصله بین دو محل علامت‌گذاری شده دقیقاً به اندازه‌ی ۱۰۰ سانتی‌متر شود. در این وضعیت طرفِ دیگر ریسمان‌ها را ثابت کرده و شروع به آجرچینی در امتداد ریسمان‌ها می‌کنند. پس از چند ردیف دیوارچینی، قائمه بودن زاویه‌ی بین دو دیوار کاملاً مشهود خواهد بود. سؤالی که مطرح می‌گردد این است که آیا این روش، مبنای ریاضی دارد؟

فعالیت ۲ــ۸

۱. با استفاده از خط‌کش، مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم کنید که طول ضلع‌های زاویه‌ی قائمه آن ۸ سانتی‌متر و ۱۵ سانتی‌متر باشند. برای اطمینان از آنکه زاویه‌ی رسم شده دقیقاً °۹۰ است، می‌توانید از یک نقاله و یا گوشه‌ی راست یک مقوا استفاده کنید.

۲. طول وتر مثلثی را که رسم کرده‌اید، با دقت به وسیله‌ی خط‌کش اندازه بگیرید.

۳. مثلث قائم‌الزاویه‌ی دیگری رسم کنید که طول ضلع‌های زاویه‌ی قائمه آن ۳ سانتی‌متر و ۴ سانتی‌متر باشد.

۴.طول وتر این مثلث را نیز دقیقاً اندازه بگیرید.

۵. در قسمت ۲، طول وتر چقدر بود؟ در قسمت ۴ چقدر است؟

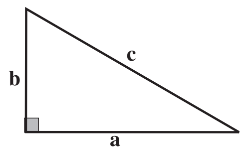
۶. باتوجه به نتیجه‌ی قسمت ۵، چه رابطه‌ای بین طول ضلع‌های زاویه‌ی قائمه و طول وتر در مثلث فوق وجود دارد؟

مجله‌ی ریاضی

فیثاغورس ریاضیدان و فیلسوف یونان باستان بود که ۵۳۰ سال قبل از میلاد می‌زیست و رهبر گروهی از فلاسفه بود که بیش از ۱۰۰ سال در اوج شهرت بودند. این گروه، علاوه‌بر ریاضیات به موسیقی، اخلاق و مذهب نیز می‌پرداختند. آن‌ها کشفیات زیادی در ریاضیات انجام دادند که مطابق آیین خود همه را به فیثاغورس نسبت می‌دادند، از جمله ثابت کردند که مجموع زاویه‌های داخلی یک مثلث °۱۸۰ است. قضیه فیثاغورس را به جرأت می‌توان معروفترین قضیه هندسه نامید که تا حال بیش از ۳۷۰ اثبات برای آن ارائه شده است.

فعالیت ۲ـــ۹

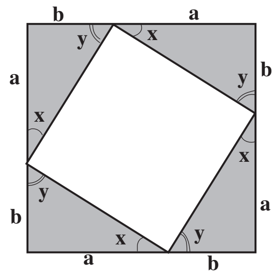
۱. مثلث قائم‌الزاویه‌ای به طول ضلع‌های a، b و c را روی یک تکه مقوا ببرید ؛



شکل ۲۶

۲. سه مثلث همنهشت با این مثلث را با مقوا تهیه کنید.

۳. مطابق شکل ۲۷، چهار مثلث را طوری کنار هم بگذارید تا مربعی به طول ضلع $a+b$ تشکیل شود.



شکل ۲۷

۴. در شکل ۲۷، چرا زاویه‌هایی که با x نامگذاری شده‌اند، با هم و زاویه‌هایی که با y نامگذاری شده‌اند با هم برابرند؟ دلیل خود را توضیح دهید.

۵. به کمک قضیه مجموع زاویه‌های مثلث، اندازه‌ی زاویه‌های داخلی چهارضلعی تشکیل شده در وسط را بیابید.

۶. از قسمت‌های ۴ و ۵ چه نتیجه‌ای درباره‌ی چهارضلعی وسط به‌دست می‌آورید؟

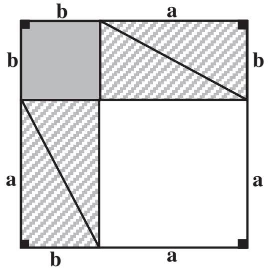
۷. مربعی به طول ضلع c یعنی طول وتر این مثلث قائم‌الزاویه با مقوایی از رنگ متفاوت تهیه کنید.

۸. چهار مثلث قائم‌الزاویه‌ی همنهشت به ضلع‌های a ، b و c و مربعی به ضلع c، مربع بزرگتر به ضلع $a+b$ را درست کرده‌اند. درنتیجه :

(۱) مساحت مربع به ضلع c + مساحت چهار مثلث قائم‌الزاویه‌ی همنهشت = مساحت مربع‌بزرگتر

۹. مجدداً با مقوا، چهار مثلث همنهشت با مثلث قائم‌الزاویه‌ی به طول ضلع‌های a وb وc و دومربع به‌طول ضلع‌های زاویه‌ی قائمه این مثلث یعنی a و b تهیّه کنید.

۱۰. این چهار مثلث و دو مربع را مانند شکل ۲۸ طوری کنار هم قرار دهید تا مربع بزرگتر به طول ضلع $a+b$ ساخته شود.

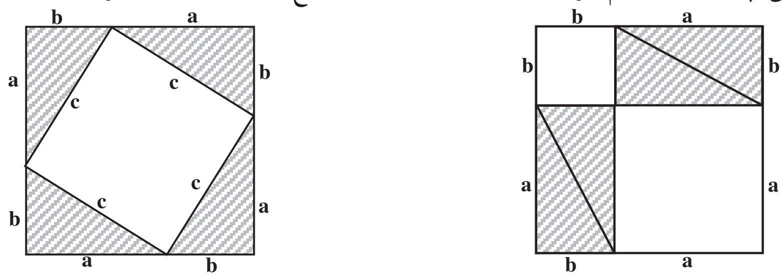


شکل ۲۸

۱۱. شکل ۲۸، از ۶ قسمت مجزّا تشکیل شده است، درنتیجه مساحت آن برابر مجموع مساحت‌های این ۶ قسمت می‌شود.

(۲) مساحت دومربع به طول ضلع‌های a و b + مساحت ۴ مثلث قائم الزاویه‌ی همنهشت = مساحت مربع بزرگتر

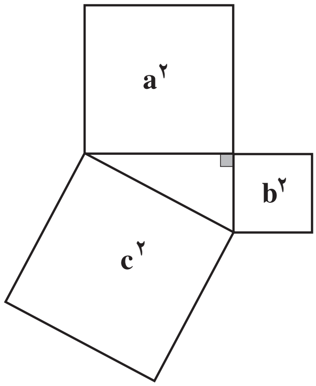
۱۲. از دو مربع همنهشت به طول ضلع $a+b$ در شکل‌های ۲۷ و ۲۸، قسمت‌های مساوی آن‌ها یعنی چهار مثلث قائم الزاویه‌ی همنهشت به طول ضلع‌های a، b وc را بردارید.



شکل ۲۹

آنچه از شکل ۲۷ باقی می‌ماند مربعی است که روی وتر مثلث قائم الزاویه به ضلع‌های a، b و c ساخته شده است و مساحت آن c^2 است. از شکل ۲۸ هم دو مربعی باقی می‌ماند که روی ضلع‌های زاویه‌ی قائمه از همین مثلث ساخته شده است که مساحت‌های آن‌ها به ترتیب a^2 و b^2 است. یعنی مساحت باقی مانده از شکل ۲۷ برابر مساحت باقی مانده از شکل ۲۸ است :

$$c^2=a^2+b^2$$



شکل ۳۰

این نتیجه را مستقیماً از رابطه‌ی (۱) و به کمک عبارت‌های جبری نیز می‌توان به‌دست آورد.
طول ضلع مربع بزرگتر $a+b$ ، طول ضلع‌های زاویه‌ی قائمه مثلث‌های همنهشت a، b و طول وتر c است. حال رابطه‌ی (۱) را دوباره‌نویسی می‌کنیم :

$$(a+b)^{۲} = ۴\times\frac{۱}{۲}ab+c^{۲}$$

از طرفی

$$(a+b)^{۲} = a^{۲}+۲ab+b^{۲}$$

درنتیجه :

$$a^{۲}+۲ab+b^{۲} = ۲ab+c^{۲}$$

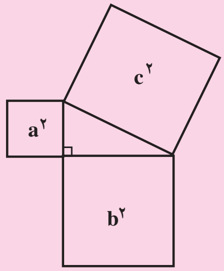
با حذف ۲ab از دو طرف رابطه‌ی فوق

$$a^{۲}+b^{۲}=c^{۲}$$

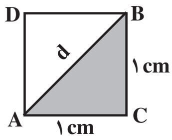
قضیه‌ی فیثاغورس

در هر مثلث قائم‌الزاویه، مساحت مربعی که روی وتر ساخته می‌شود، برابر مجموع مساحت‌های دو مربعی است که روی ضلع‌های زاویه‌ی قائمه‌ی آن ساخته می‌شود.

$$c^{۲}=a^{۲}+b^{۲}$$



مثال ۸: طول قطر مربعی به ضلع یک سانتی‌متر را پیدا کنید.



شکل۳۱

حل: اگر طول قطر d سانتی‌متر باشد، طبق قضیه‌ی فیثاغورس در مثلث ABC

$$d^۲ = ۱^۲ + ۱^۲ = ۲$$

پس $d = \sqrt{۲}cm$.

مثال ۹: طول قطر مستطیلی به ضلع‌های ۳ سانتی‌متر و ۴ سانتی‌متر را پیدا کنید.

حل: طبق قضیه‌ی فیثاغورس، اگر طول قطر را d بنامیم

$$d^۲ = ۳^۲ + ۴^۲ = ۹ + ۱۶ = ۲۵$$

درنتیجه d برابر ۵ سانتی‌متر است.

مثال ۱۰: طول ضلع‌های زاویه‌ی قائمه در یک مثلث قائم‌الزاویه ۶ واحد و ۷ واحد است.

الف) طول وتر این مثلث را پیدا کنید.

ب) اگر طول ضلع‌های زاویه قائمه این مثلث ۲ برابر شود، طول وتر آن چه تغییری می‌کند؟

پ) اگر طول ضلع‌های این مثلث r برابر شود ($r > ۰$)، طول وتر چه تغییری می‌کند؟

حل: الف) اگر طول وتر مثلث قائم‌الزاویه را d بنامیم، طبق قضیه‌ی فیثاغورس

$$d^۲ = ۶^۲ + ۷^۲$$

$$d = \sqrt{۶^۲ + ۷^۲} = \sqrt{۳۶ + ۴۹} = \sqrt{۸۵}$$ واحد

ب) این بار طول ضلع‌های قائمه دو برابر شده است پس طول وتر

$$d = \sqrt{(۲ \times ۶)^۲ + (۲ \times ۷)^۲}$$
$$= \sqrt{۲^۲(۶^۲ + ۷^۲)}$$
$$= ۲\sqrt{۶^۲ + ۷^۲} = ۲\sqrt{۸۵}$$ واحد

است، یعنی طول وتر نیز ۲ برابر می‌شود.

پ) در حالت کلّی، اگر ضلع‌های زاویه‌ی قائمه $۶r$ و $۷r$ باشد، پس طول وتر

$$d=\sqrt{(۶r)^{۲}+(۷r)^{۲}}=\sqrt{r^{۲}(۶^{۲}+۷^{۲})}$$
$$=r\sqrt{۸۵}\ \text{واحد}$$

است، یعنی طول وتر نیز r برابر می‌شود.

مثال ۱۱ : نسبت طول ضلع‌های زاویه‌ی قائمه در مثلث قائم‌الزاویه‌ای ۳ به ۵ است. اگر مساحت مثلث ۱۶ واحد مربع باشد، طول وتر چقدر خواهد بود؟

حل: اگر طول ضلع‌های زاویه‌ی قائمه در این مثلث a و b باشد، آنگاه $\frac{a}{b}=\frac{۳}{۵}$. یعنی $۳b=۵a$ یا $b=\frac{۵}{۳}a$.

چون مساحت مثلث قائم‌الزاویه برابر نصف حاصل ضرب اندازه‌ی دو ضلع زاویه‌ی قائمه آن است،

$$۱۶=\frac{۱}{۲}\times a\times b=\frac{۱}{۲}\times a\times\frac{۵}{۳}a=\frac{۵}{۶}a^{۲}$$

درنتیجه :

$$a^{۲}=\frac{۶\times ۱۶}{۵} \qquad (۱)$$

از اینجا می‌توانیم طول وتر را به کمک قضیه‌ی فیثاغورس بیابیم. اگر وتر c باشد

$$c^{۲}=a^{۲}+b^{۲}$$

چون $b=\frac{۵}{۳}a$ ، پس $b^{۲}=\frac{۲۵}{۹}a^{۲}$ ، درنتیجه :

$$c^{۲}=a^{۲}+\frac{۲۵}{۹}a^{۲}=(۱+\frac{۲۵}{۹})a^{۲}$$
$$=\frac{۳۴}{۹}a^{۲}$$

با جایگزین کردن مقدار $a^{۲}$ از (۱) در تساوی اخیر، به‌دست می‌آوریم

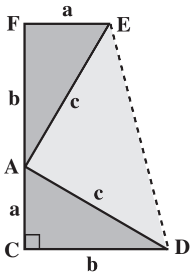
$$c^{۲}=\frac{۳۴}{۹}\times\frac{۶\times ۱۶}{۵}=\frac{۳۴\times ۳۲}{۱۵}$$

و سرانجام

$$c=\sqrt{\frac{۳۴\times ۳۲}{۱۵}}$$

فعالیت ۲ــ۱۰

ذوزنقه‌ی FEDC را درنظر بگیرید (شکل ۳۲).



شکل ۳۲

۱. مساحت ذوزنقه را بر حسب a و b به‌دست آورید.

۲. نشان دهید مثلث ADE قائم الزاویه است.

۳. مساحت مثلث‌های ACD و AEF را پیدا کنید.

۴. مساحت ذوزنقه را برحسب مجموع مساحت‌های مثلث‌های AEF، ACD و ADE به‌دست آورید.

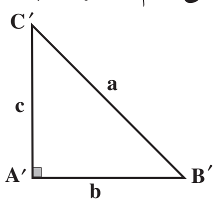
۵. با استفاده از ۱ و ۴، قضیه‌ی فیثاغورس را ثابت کنید.

طبق قضیه‌ی فیثاغورس، در هر مثلث قائم‌الزاویه، مربع وتر برابر مجموع مربع‌های دو ضلع زاویه‌ی قائمه است. یعنی اگر طول ضلع‌های زاویه‌ی قائمه b ، c و طول وتر a باشد، آنگاه

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad (۱)$$

آیا عکس این مطلب نیز درست است؟ یعنی آیا اگر در مثلثی با طول ضلع‌های a،b و c، رابطه‌ی (۱) برقرار باشد، می‌توان نتیجه گرفت که آن مثلث قائم‌الزاویه است؟

فرض کنید رابطه‌ی (۱) برای مثلث ABC به طول ضلع‌های a،b و c برقرار باشد. مثلث قائم‌الزاویه‌ی $A'B'C'$ را به طول ضلع‌های زاویه‌ی قائمه b و c رسم می‌کنیم. برای این منظور کافی است زاویه‌ی قائمه‌ای به رأس A' رسم کنیم، سپس روی ضلع‌های این زاویه پاره‌خط‌هایی به طول‌های b و c جدا می‌کنیم و انتهای پاره‌خط‌ها را به ترتیب B' و C' می‌نامیم (شکل ۳۳).



شکل ۳۳

حال C' را به B' وصل می‌کنیم تا مثلث $A'B'C'$ به‌دست آید. چون این مثلث قائم‌الزاویه است. بنابر قضیه‌ی فیثاغورس

$$B'C'^{2} = b^{2} + c^{2}$$

و با توجه به رابطه (۱)

$$B'C'^{2} = a^{2}$$

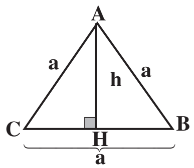
یعنی $B'C' = a$. پس دو مثلث ABC و $A'B'C'$ به حالت تساوی سه ضلع همنهشت هستند. درنتیجه زاویه‌های روبه‌رو به ضلع‌های مساوی، با هم برابرند. چون $\hat{A}' = 90^\circ$ پس $\hat{A} = 90^\circ$. به این ترتیب، عکس قضیه‌ی فیثاغورس ثابت می‌شود.

عکس قضیه‌ی فیثاغورس

اگر در مثلث ABC، $AB = c$ ، $AC = b$ ، $BC = a$ و $a^{2} = b^{2} + c^{2}$ ، آنگاه مثلث ABC در رأس A قائمه است.

مثال ۱۲: با استفاده از قضیه‌ی فیثاغورس، مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به طول ضلع a را حساب کنید.

حل: ارتفاع وارد بر ضلع BC (یا یکی از دو ضلع دیگر) را رسم می‌کنیم :



شکل ۳۴

چون در هر مثلث متساوی‌الاضلاع، ارتفاع وارد بر هر ضلع میانه وارد بر آن ضلع نیز می‌باشد، پس

$$BH = HC = \frac{1}{2}a$$

همچنین، در مثلث قائم‌الزاویه‌ی AHC،

$$AH^{2} = AC^{2} - HC^{2}$$

مقدارهای $AC = a$ و $HC = \frac{1}{2}a$ را در رابطه‌ی فوق جایگزین می‌کنیم تا طول ارتفاع $AH = h$ را برحسب a به‌دست آوریم :

$$h^2 = a^2 - \frac{1}{4}a^2$$
$$= \frac{3}{4}a^2$$

پس

$$\boxed{h = \frac{\sqrt{3}}{2}a}$$

با دانستن مقدار ارتفاع و قاعده، مساحت مثلث ABC را محاسبه می‌کنیم :

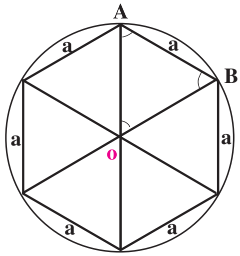
$$\text{مساحت مثلث ABC} = \frac{1}{2} \times AH \times BC$$
$$= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}a \times a$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

در نتیجه :

مساحت هر مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع a برابر $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ است.

مثال ۱۳: مساحت یک شش‌ضلعی منتظم به طول ضلع a را پیدا کنید.

حل: مرکز دایره را به رئوس شش‌ضلعی منتظم وصل می‌کنیم، شش مثلث پدید می‌آید :



چون مجموع زاویه‌های مرکزی 360° است و هرکدام از زاویه‌های مرکزی روبه‌روی وترهای مساوی هستند، پس هر شش زاویه‌ی مرکزی با هم مساوی و هرکدام برابر $60^\circ = 6 \div 360^\circ$ می‌باشد، (چرا؟) همچنین، شش مثلث فوق متساوی‌الساقین هستند زیرا دو ضلع هرکدام در واقع شعاع‌های دایره می‌باشند. درنتیجه دو زاویه‌ی روبه‌رو به شعاع‌ها با هم برابرند. از طرفی، زاویه‌ی سوّم هر یک از این مثلث‌ها زاویه‌ی مرکزی و 60° است و مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث نیز 180° است. پس

$$\text{مجموع دو زاویه‌ی روبه‌رو به شعاع} = 180^\circ - 60^\circ$$
$$= 120^\circ$$

و چون این دو زاویه با هم برابرند،

$$\text{هر زاویه‌ی روبه‌رو به شعاع} = \frac{120}{2}$$
$$= 60^\circ$$

بنابراین هر سه زاویه‌ی هریک از مثلث‌ها مساوی 60° است. پس نتیجه می‌گیریم که مثلث‌ها متساوی‌الاضلاع هستند و چون طول ضلع همه‌ی آن‌ها برابر a است پس این مثلث‌ها همنهشت هم می‌باشند. بنابراین،

$$\text{مساحت شش‌ضلعی منتظم به ضلع } a = 6 \times \text{مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع } a$$
$$= 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

$$\text{مساحت شش ضلعی منتظم به ضلع } a = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2$$

مسائل

۱. طول قطر مربعی را به‌دست آورید که طول ضلع آن برابر است با :

الف) ۳cm ؛

ب) ۵cm ؛

پ) a سانتی متر.

۲. طول قطر مستطیلی را به‌دست آورید که طول ضلع‌های آن برابر است با :

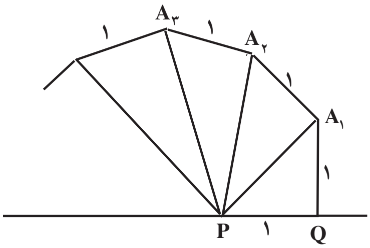
الف) ۳ و ۵ ب) ۴ و ۷

پ) ۳r و ۵r ت) ۴r و ۷r

۳. مساحت مربعی ۱۴۴ سانتی‌متر مربع است. طول قطر این مربع چقدر است؟

۴. در یک مثلث قائم‌الزاویه، طول یک ضلع زاویه قائمه دو برابر طول ضلع دیگر است. اگر مساحت مثلث ۷۲ سانتی‌متر مربع باشد، طول وتر مثلث چقدر است؟

۵. در شکل روبرو، طول هریک از اضلاع زاویه قائمه در مثلث PQA_1، برابر ۱ سانتی‌متر است.



الف) طول وتر PA_1 چقدر است؟

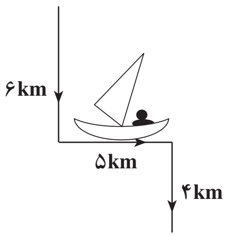
پاره خط A_1A_2 نیز به طول ۱ سانتی‌متر و بر PA_1 عمود است. طول پاره‌خط A_2A_3 نیز ۱ سانتی‌متر است و بر PA_2 عمود است، ...

ب) طول پاره خط PA_2 چقدر است؟

پ) طول پاره‌خط PA_3 چقدر است؟

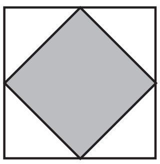
طول n–امین پاره‌خط یعنی PA_n چقدر است؟

۶. یک قایق از نقطه‌ی شروع حرکت، ۶ کیلومتر به سمت جنوب، ۵ کیلومتر به سمت شرق و مجدداً ۴ کیلومتر به سمت جنوب پیموده است. این قایق چند کیلومتر از نقطه‌ی شروع حرکت فاصله دارد؟



۷. نسبت طول ضلع‌های زاویه قائمه در مثلث قائم‌الزاویه‌ای ۲ به ۳ است. اگر مساحت مثلث ۲۷ باشد، طول وتر آن چقدر است؟

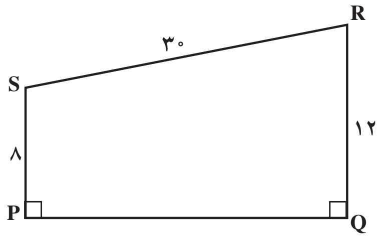
۸. طول یکی از ضلع‌های زاویه‌ی قائمه در مثلث قائم‌الزاویه‌ای $\frac{۴}{۵}$ دیگری است. مساحت مثلث ۳۲۰ سانتی‌متر مربع است. طول اضلاع زاویه قائمه را بیابید.



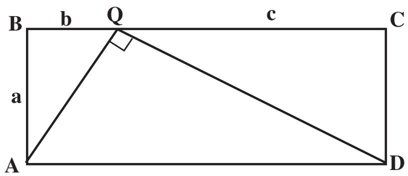
۹. از به هم وصل کردن وسط‌های ضلع‌های مربعی، یک مربع دیگر ایجاد شده است. نسبت مساحت مربع کوچکتر به مساحت مربع بزرگتر چقدر است؟

۱۰. مساحت مربعی که طول قطر آن $۸\sqrt{۲}$ است را پیدا کنید.

۱۱. در شکل زیر، طول ضلع PQ را محاسبه کنید.



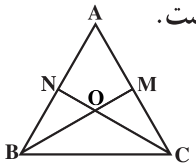
۱۲. در شکل زیـــر، ABCD یک مستطیل و AQD یک مثلث قائم‌الزاویه است. اگر $AB=a$ ، $BQ=b$ و $QC=c$ ، ثابت کنید :



الف) $AD=\sqrt{2a^2+b^2+c^2}$

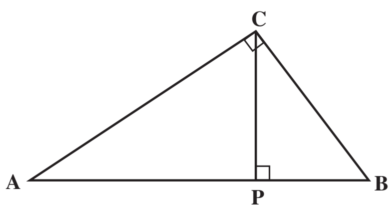
ب) $a^2=bc$

۱۳. در هر مثلث قائم الزاویه ضلع رو به رو به زاویه‌ی 30° نصف وتر است.



۱۴. در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC، نیمسازهای $\hat{B}$ و $\hat{C}$ یکدیگر را در نقطه‌ی O قطع کرده‌اند ثابت کنید : $\frac{OB}{OM}=\frac{OC}{ON}=2$

۱۵. مثلث ABC در رأس C قائمه است. از C، پاره‌خط CP را بر AB عمود می‌کنیم. ثابت کنید :

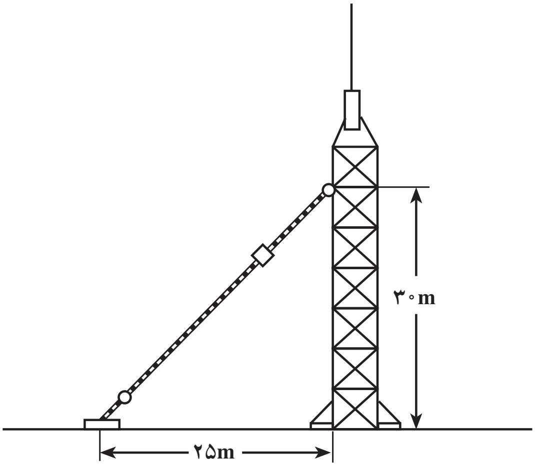


الف) $PC^2=AP\times PB$

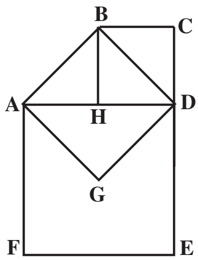
ب) $AC^2=AP\times AB$

۱۶. با استفاده از قضیه‌ی فیثاغورس ثابت کنید، اگر وتر و یک ضلع زاویه‌ی قائمه از یک مثلث قائم‌الزاویه با وتر و یک ضلع زاویه‌ی قائمه از مثلث قائم‌الزاویه‌ی دیگر برابر باشند، طول اضلاع دیگر زاویه‌ی قائمه در دو مثلث با هم برابرند.

۱۷. یک آنتن تلویزیونی از ارتفاع ۳۰ متری توسط یک سیم به‌طور قائم نگه داشته شده است. این سیم به فاصله‌ی ۲۵ متر از پایه‌ی آنتن به زمین وصل شده است. طول این سیم چند متر است؟



۱۸. سه مربع مانند شکل، یکدیگر را قطع کرده‌اند. مساحت مثلث ADG را در هریک از حالت‌های زیر به‌دست آورید.



الف) AF = ۱۰ ؛

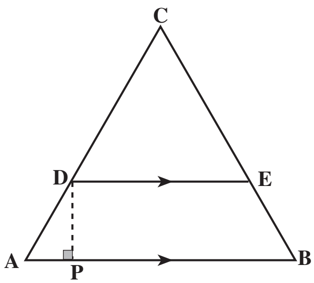
ب) CE = ۱۸ ؛

پ) $BD = ۳\sqrt{۲}$ ؛

ت) مساحت مربع BCDH = ۴۹ ؛

ث) مساحت شکل AGDEF = ۲۷ ؛

۱۹. مثلث متساوی‌الاضلاعی به طول ضلع ۱۰ واحد را درنظر بگیرید و پاره‌خط DE را طوری رسم کنید تا AD برابر ۴ واحد گردد.

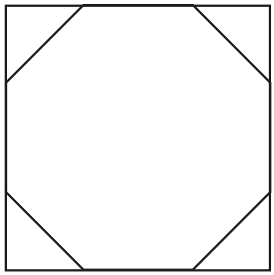


الف) طول DP را به‌دست آورید.

ب) طول PE را محاسبه کنید.

پ) چگونه با سه بُرش روی ذوزنقه ABED می‌توان مثلث متساوی الاضلاعی با طول ۸ واحد ساخت؟ آیا با دو برش نیز می‌توان این کار را انجام داد؟

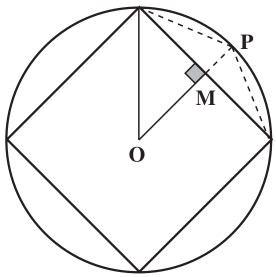
۲۰. در شکل زیر یک هشت‌ضلعی منتظم در داخل یک مربع محاط شده است.



الف) اگر طول ضلع هشت‌ضلعی ۲ سانتی‌متر باشد، طول ضلع مربع را بیابید.

ب) اگر طول ضلع مربع ۱۰ سانتی‌متر باشد، محیط هشت‌ضلعی را به‌دست آورید.

۲۱. مربعی در یک دایره‌ی به شعاع واحد محاط شده است.



الف) فاصله‌ی مرکز دایره تا نقطه M وسط ضلع مربع را بیابید.

ب) طول MP را به‌دست آورید.

پ) طول ضلع هشت‌ضلعی منتظمی که در این دایره محاط می‌شود را محاسبه کنید.

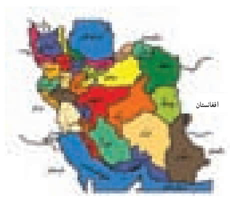
۲۲. مسأله‌ی ۲۱ را در حالتی که یک شش ضلعی در دایره محاط شده باشد، در نظر بگیرید و طول ضلع دوازده ضلعی منتظمِ محاط در دایره را بدست آورید.

فصل ۳

تشابه

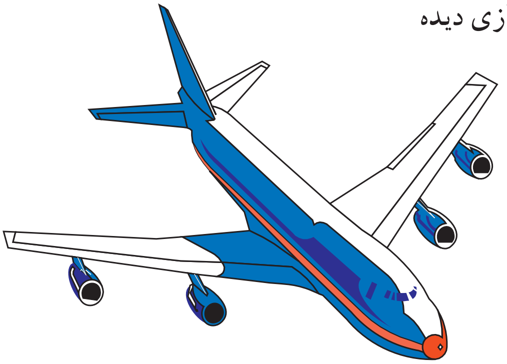
۳ــ۱ــ نسبت و تناسب

به این دو تصویر نگاه کنید. چه شباهت‌ها و تفاوت‌هایی بین آن‌ها وجود دارد؟



هر دو در واقع یک تصویر ولی با اندازه‌های مختلف هستند. این شکل‌های شبیه به هم نمونه‌ای از شکل‌های **متشابه** می‌باشند.

شکل‌های متشابه کاربردهای بسیاری در زندگی معمولی ما دارند. برای مثال، یکی از بهترین راه‌های دادن آدرس به افراد، استفاده از نقشه است. نقشه، تصویری از دنیای واقعی در ابعاد کوچک‌تر و متشابه با آن است. همچنین، برای ساختن یک ساختمان یا یک وسیله، طراحی ماکت آن که مشابه با ساختمان یا وسیله‌ی اصلی است، کمک مهمّی به حساب می‌آید.



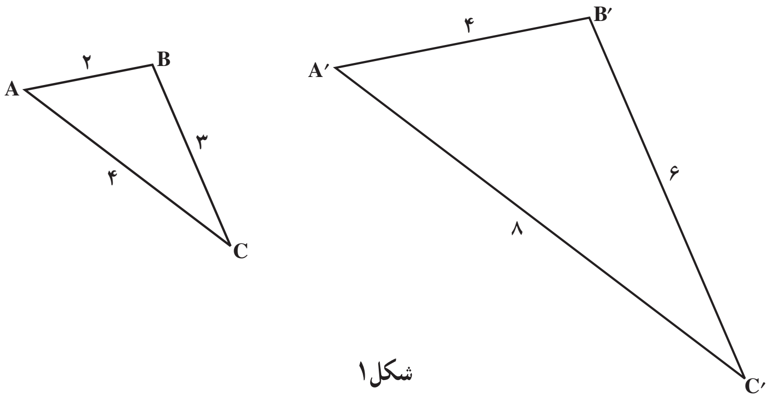
در شکل روبه‌رو، تصویر یک هواپیمای اسباب‌بازی دیده می‌شود. فرق این تصویر با هواپیمای واقعی این است که اندازه‌های اجزای آن نسبت به هواپیمای واقعی خیلی کوچک‌تر است، یعنی شکل‌های هواپیمای واقعی و اسباب‌بازی **متشابه** هستند. در دو شکل متشابه، اندازه‌های اجزای یک شکل با اندازه‌های اجزای نظیر در شکل دیگر متناسب هستند و این ویژگی در ساختن تمام ماکت‌ها نیز رعایت می‌شود.

یکی دیگر از مثال‌های ملموس شکل‌های متشابه، بزرگ شده یا کوچک‌شده‌ی تصویر چهره‌ی انسان است.

برای مثال، در تصویرهای ۴×۳ و ۸×۱۲ نسبت فاصله‌ی دو چشم برابر با نسبت فاصله‌ی بینی تا دهان در دو تصویر است. به همین ترتیب، نسبت موجود در تمام اجزای متناظر در دو تصویر ثابت می‌ماند. یعنی، به جز اندازه‌های ابعاد دو عکس، تفاوت دیگری بین این دو تصویر دیده نمی‌شود. در واقع، با دیدن هریک از آن‌ها می‌توانید صاحب تصویر واقعی را درنظر مجسم کنید.

در شکل ۱، مثلث‌های ABC و $A'B'C'$ دو شکل متشابه هستند، زیرا از هر نظر شبیه یکدیگرند، جز این‌که اندازه‌ی هر ضلع مثلث $A'B'C'$ ، دوبرابر اندازه‌ی هر ضلع مثلث ABC است، یعنی

$$A'B' = ۲AB \ , \ B'C' = ۲BC \ , \ A'C' = ۲AC$$



شکل۱

بنابراین، **نسبت** هر ضلع مثلث بزرگ به ضلع نظیر آن در مثلث کوچک برابر با ۲ است و تمام این نسبت‌ها با هم برابرند، یعنی

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA} = ۲$$

که هر دو نسبت برابر تشکیل یک **تناسب** می‌دهند. از نسبت و تناسب در حل مسائل مختلف ریاضی استفاده می‌شود.

مثال ۱: اگر قیمت ۵ خودکار ۲۵۰ تومان باشد، چند خودکار با ۱۵۰ تومان می‌توان خرید؟

حل: قیمت ۵ خودکار ۲۵۰ تومان است. پس قیمت هرخودکار

$$\frac{۲۵۰}{۵} = ۵۰ \text{ تومان}$$

اگر با ۱۵۰ تومان بتوان a خودکار خرید، آن‌گاه

$$\frac{۱۵۰}{a} = \frac{۲۵۰}{۵} = ۵۰$$

و یک تناسب به‌دست می‌آید، که به راحتی می‌توان a را از آن به‌دست آورد :

$$a=\frac{۱۵۰}{۵۰}=۳$$

نسبت بین دو عدد a و b عبارت است از کسر $\frac{a}{b}$ ، که b نباید صفر باشد، چون تقسیم کردن یک عدد بر صفر معنی ندارد.

تساوی بین دو نسبتِ $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ ، (که b و d صفر نیستند) یک **تناسب** نامیده می‌شود.

در تناسب $\frac{c}{d}=\frac{a}{b}$ ، a و d دو جملهٔ کناری (طرفین) و b و c دو جملهٔ میانی (وسطین) نام دارند. همچنین، اگر دو طرف تناسب $\frac{c}{d}=\frac{a}{b}$ را در bd ضرب کنیم،

$$bd(\frac{a}{b})=bd(\frac{c}{d})$$

آنگاه

$$ad=bc$$

در تناسب

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

حاصل ضرب دو جملهٔ میانی برابر حاصل‌ضرب دو جملهٔ کناری است.

$$ad=bc$$

این ویژگی، ما را در حل مسائل مربوط به نسبت و تناسب و شکل‌های متشابه یاری می‌کند.

مثال ۲: در هریک از تناسب‌های زیر، مقدار m را پیدا کنید :

الف) $\frac{m}{۳}=\frac{۹}{۱۰}$ ب) $\frac{m}{m+۲}=\frac{۳}{۴}$

حل : ویژگی مهم تناسب که در بالا به آن اشاره شد، کمک می‌کند که مقدار m را در قسمت‌های (الف) و (ب) به‌دست آوریم :

الف)

$$۱۰m=۳\times۹$$

$$۱۰m=۲۷$$

پس $$m = \frac{۲۷}{۱۰}$$

ب) $$۴m = ۳(m+۲)$$
$$= ۳m + ۶$$

در نتیجه :

$$۴m - ۳m = ۶$$

پس $$m = ۶$$

مثال ۳: مقدارهای x و y را از تناسب‌های

(۱) $$\frac{x}{۴} = \frac{۱}{y} \quad \text{و} \quad \frac{۱}{y} = ۳$$

به‌دست آورید.

حل: چون $\frac{۳}{۱} = \frac{۱}{y}$ پس $۳y = ۱$ یعنی $y = \frac{۱}{۳}$. از طرف دیگر از تناسب $\frac{۱}{y} = \frac{x}{۴}$ نتیجه می‌گیریم

(۲) $$xy = ۴ \times ۱ = ۴$$

مقدار $y = \frac{۱}{۳}$ را که از تناسب قبل به‌دست آمد، در (۲) جایگزین می‌کنیم.

$$x \times \frac{۱}{۳} = ۴$$

یعنی :

$$x = ۳ \times ۴ = ۱۲$$

دو تناسب رابطهٔ (۱) را می‌توان به صورت زیر نوشت :

$$\frac{x}{۴} = \frac{۱}{y} = ۳$$

مثال ۴: مقدار n را در تناسب

$$\frac{۳}{۹} = \frac{۹}{n}$$

به‌دست آورید.

حل: چون $۳n = ۹ \times ۹ = ۸۱$. پس

$$n = \frac{۸۱}{۳} = ۲۷$$

عدد ۹ یک **میانگین هندسی**[۱] دو عدد ۳ و ۲۷ نامیده می‌شود.

۱ــ به میانگین هندسی، واسطه هندسی نیز گفته می‌شود.

در تناسب $\frac{b}{c}=\frac{a}{b}$ ، b **میانگین هندسی** دو جمله‌ی کناری a و c نامیده می‌شود و مقدار آن از رابطه‌ی $b^۲ = ac$ به‌دست می‌آید.

فعالیت ۳ــ۱

آیا عدد π را به یاد می‌آورید؟ π نسبت محیط دایره به قطر آن است. ریاضیدانان باستان مقدار π را با تقریب‌های خوبی به‌دست آورده بودند و در محاسبات، ازآن استفاده می‌کردند. آن‌ها مقدارهای تقریبی π را به صورت نسبت بیان می‌کردند. دو نسبت معروف در تاریخ ریاضی که به عنوان تقریب π به‌کار می‌رفته‌اند، عبارت از $\frac{۲۲}{۷}$ و $\frac{۳۵۵}{۱۱۳}$ هستند.

۱. نسبت $\frac{۲۲}{۷}$ را به صورت اعشاری تا دو رقم اعشار گرد کنید و بنویسید.

۲. نسبت $\frac{۳۵۵}{۱۱۳}$ را به صورت اعشاری تا دو رقم اعشار گرد کنید و بنویسید.

۳. چه رابطه‌ای بین مقدارهای تقریبی به‌دست آمده در قسمت‌های ۱ و ۲ وجود دارد؟

۴. برای دو نسبت $\frac{۲۲}{۷}$ و $\frac{۳۵۵}{۱۱۳}$ حاصل ضرب دو جمله‌ی میانی و حاصل‌ضرب دو جمله‌ی کناری را پیدا کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۵ . علت تفاوت بین پاسخ‌های سؤال‌های ۳ و ۴ در چیست؟

بعضی از ریاضی‌دانان ایرانی نیز نسبت $\frac{۲۲}{۷}$ را به جای مقدار π به‌کار می‌برده‌اند. نخستین ریاضی‌دانی که مقدار π را تا ۱۶ رقم اعشار محاسبه کرد، **غیاث‌الدین جمشید کاشانی** (۷۶۳ــ۸۰۷ هجری) بود.

بعضی از ویژگی‌های مهم تناسب که کاربرد بسیاری در حل مسائل تشابه دارند در اینجا گردآوری شده‌اند.

۱. در تناسب $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ می‌توان جای دو جمله میانی را عوض کرد و تناسب $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ را به‌دست آورد.

۲. درتناسب $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ می‌توان کسرها را معکوس کرد و تناسب $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$ را به‌دست آورد.

۳. اگر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$، آن‌گاه $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ و $\frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}$ ؛

۴. اگر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$، آن‌گاه، $\frac{a+c+e}{b+d+f}=\frac{a}{b}$.

مثال ۵: به کمک ویژگی‌های تناسب، مقدار p را از تناسب

$$\frac{۷-P}{P}=\frac{۱۲}{۲۰}$$

پیدا کنید.

حل: بنابر ویژگی۳،

$$\frac{(۷-p)+p}{p}=\frac{۱۲+۲۰}{۲۰}$$

در نتیجه :

$$\frac{۷}{p}=\frac{۳۲}{۲۰}$$

یعنی :

$$۳۲p=۱۴۰$$

پس :

$$p=\frac{۱۴۰}{۳۲}=\frac{۳۵}{۸}$$

مسائل

۱. اگر قیمت ۱۰ عدد از یک کالا ۴۰۰ تومان باشد، قیمت چند عدد از آن، ۸۰ تومان خواهد بود؟

۲. میانگین هندسی بین هریک از جفت عددهای زیر را پیدا کنید :

الف) ۴ و ۲۵ ؛

ب) $۳\sqrt{۲}$ و $۶\sqrt{۲}$ ؛

پ) ۷ و ۲۱ ؛

۳. در هریک از موارد زیر، ازکدام‌یک از ویژگی‌های تناسب استفاده شده است؟

الف) اگر $\frac{۸}{۵}=\frac{a}{b}$، آنگاه $۵a=۸b$ ؛

ب) اگر $\frac{۳}{۲} = \frac{c}{d}$ ، آنگاه $\frac{۲}{۳} = \frac{d}{c}$ ؛

پ) اگر $\frac{۴}{۹} = \frac{e}{v}$ ، آنگاه $\frac{۴}{e} = \frac{۹}{v}$ ؛

ت) اگر $\frac{b}{۱۱} = \frac{a}{۳}$ ، آنگاه $\frac{b+۱۱}{۱۱} = \frac{a+۳}{۳}$.

۴. در هریک از موارد زیر جای خالی را پر کنید :

الف) اگر $\frac{۱}{۲} = \frac{x}{y}$ ، آنگاه $\square = \frac{x+۱}{y+۲}$ ؛

ب) اگر $\frac{d}{۵} = \frac{c}{۴} = \frac{b}{۳} = \frac{a}{۲}$ ، آنگاه $\frac{a}{\square} = \frac{a+b+c+d}{\square}$ ؛

پ) اگر $\frac{۳}{۱۰} = \frac{۱۲}{x}$ ، آنگاه $\square = \frac{۱۲}{۳}$.

۵ . در هریک از موارد زیر مقدار x را به‌دست آورید :

الف) $\frac{۲۴}{x} = \frac{۴}{۵}$

ب) $\frac{۳}{۷} = \frac{x}{۱۸۰-x}$

پ) $\frac{x}{۹} = \frac{۴}{x}$

ت) $\frac{۲}{۳x-۲} = \frac{۴}{x+۱}$

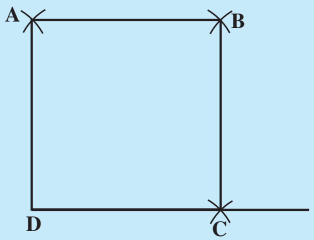
۶ . مقدار x و y را از هرکدام از تناسب‌های زیر محاسبه کنید :

الف) $\frac{۲۱}{y} = \frac{x}{۲۰} = \frac{۹}{۱۲}$

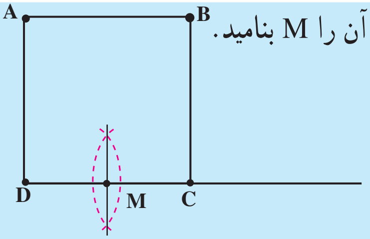
ب) $y = \frac{۲۰}{x} = \frac{x}{۵}$

مجله‌ی ریاضی

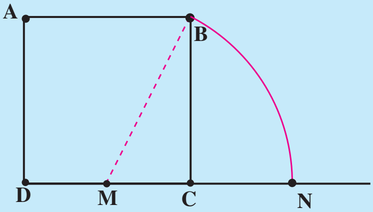
۱. مربع ABCD را با ضلع دلخواه رسم کنید.



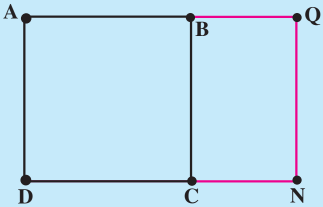
۲. وسط ضلع DC را بیابید و آن را M بنامید.



۳. به مرکز M و با شعاع MB کمانی بزنید تا امتداد DC را در نقطه N قطع کند.



۴. از نقطه N، خطی عمود بر DC رسم کنید تا امتداد AB را در Q قطع کند.

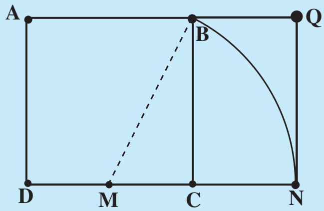


چهارضلعی AQND یک **مستطیل طلایی** نامیده می‌شود که به وسیله‌ی BC به یک مربع و یک مستطیل بازهم **طلایی** تقسیم شده است! هر دو شکل AQND و BQNC مستطیل‌های طلایی هستند که ضلع‌های نظیر آن‌ها با هم **متناسبند**.

۵ . برای نشان دادن این که چرا ضلع‌های دو مستطیل با هم متناسب هستند، فرض کنید در مستطیل زیر، $MC = ۱$ سپس اندازه‌ی طول‌های زیر را حساب کنید :

الف) BC　　　ب) MB　　　پ) MN

ت) CN　　　ث) DN



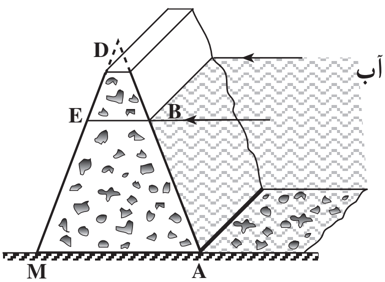
۶ . با استفاده از طول‌های به‌دست آمده در قسمت (۵)، نشان دهید که اجزای متناظر مستطیل AQND و مستطیل BQNC با هم **متناسب** هستند.

جالب است بدانید که نسبت ضلع بلندتر به ضلع کوتاه‌ترِ **مستطیل طلایی** که **نسبت‌طلایی** نامیده می‌شود، در بسیاری از طرح‌های هنری از قبیل معماری و خطّاطی ظاهر می‌شود. مطابق تحقیقات انجام شده، نسبت طول ضلع قاعده به ارتفاع، در اهرام ثلاثه مصر، برابر نسبت طلایی است. همچنین دیوارهای معبد پارتنون از مستطیل‌های طلایی ساخته شده است؛ زیرا به اعتقاد آن‌ها، مستطیل‌های با نسبت‌های طلایی به چشم خوشایندتر هستند!

سد جیرفت

۳ـ۲ـ قضیه تالس در مثلث

شکل ۲، نمای جانبی ساده‌ای از یک سد را نشان می‌دهد. سطح مقطع قائم سد، مثلث DAM[1] است. همان‌طور که می‌بینید، خط سطح آب پشت سد، موازی ضلع پایینی مثلث است. چون مقاومت سد در برابر فشار آب پشت آن به عوامل متعددی ازجمله طول BA بستگی دارد، در نتیجه محاسبه‌ی طول BA برای به‌دست آوردن مقاومت سد ضروری است. قضیه‌ی تالس در مثلث به ما کمک می‌کند تا این طول را محاسبه کنیم.



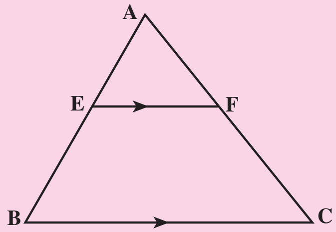
شکل ۲

۱. DAM در انگلیسی به معنای سد است!

قضیه‌ی تالس

اگر خطی با یک ضلع مثلث موازی باشد و دو ضلع دیگر را قطع کند، نسبت پاره‌خط‌هایی که روی یک ضلع پدید می‌آورد، برابر است با نسبت پاره‌خط‌هایی که روی ضلع دیگر ایجاد می‌کند.

یعنی اگر در مثلث ABC، EF موازی BC باشد، آن‌گاه $\frac{AE}{EB}=\frac{AF}{FC}$



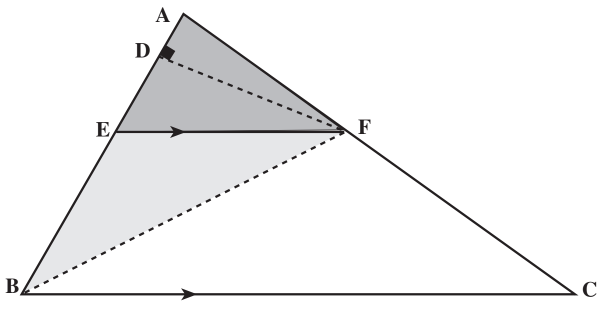
شکل ۳

قبل از این‌که به اثبات قضیه تالس بپردازیم، کاربرد این قضیه را در مثال سد می‌بینیم. در شکل ۲، چون پاره‌خط BE موازی AM است و ضلع‌های DM و DA را قطع می‌کند، در نتیجه طبق قضیه‌ی تالس، نسبت طول دو پاره‌خط DB و BA برابر نسبت طول دو پاره‌خط DE و EM است. یعنی :

$$\frac{DB}{BA}=\frac{DE}{EM}$$

حال قضیه‌ی تالس را در چهار مرحله با استفاده از استدلال استنتاجی ثابت می‌کنیم.

مرحله‌ی ۱: از F به B وصل کرده، سپس پاره‌خط FD را بر AB عمود می‌کنیم. پاره‌خط FD ارتفاع نظیر قاعده‌ی AE از مثلث AFE و همچنین ارتفاع نظیر قاعده‌ی EB از مثلث EFB خواهد بود. بنابراین



شکل ۴

$$AFE\ \text{مساحت مثلث} = \frac{۱}{۲} AE \times FD$$

$$EFB\ \text{مساحت مثلث} = \frac{۱}{۲} EB \times FD$$