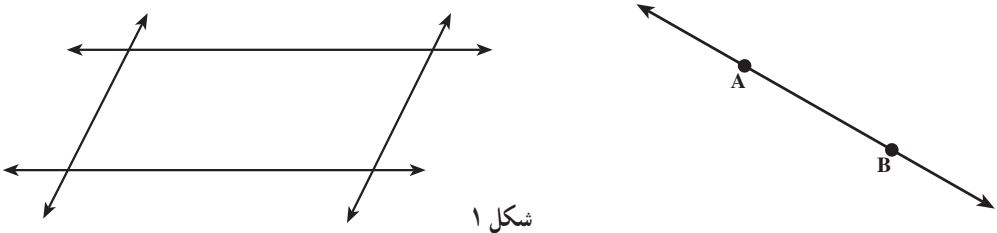


۴-۱- خط و صفحه در فضا

کلاس درس نمودی از فضای سه‌بعدی است. سقف^۱ و کف کلاس و هر کدام از دیوارهای آن نشان‌دهنده‌ی یک صفحه هستند. محل‌های تلاقی دیوارهای کلاس و کف آن یک خط در فضا تشکیل می‌دهند. صفحه‌ی کتاب یا دفترچه‌ای که روی آن می‌نویسید نیز نشان‌دهنده‌ی یک صفحه در فضا است و لبه‌های کتاب، خط‌هایی در صفحه هستند. همان‌طور که خط در فضا از دو طرف نامحدود است، صفحه نیز از همه طرف در فضا نامحدود است.

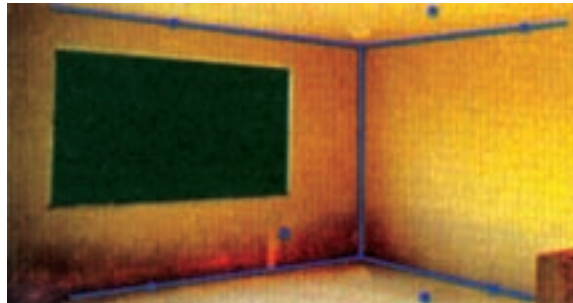


شکل ۱

دیوارهای کلاس یا صفحه‌ی کتاب بخش‌هایی از صفحه در فضا هستند. معمولاً یک صفحه را با متوازی‌الاضلاع نشان می‌دهیم.

دو خط در یک صفحه موازی نامیده می‌شوند اگر هیچ نقطه‌ی اشتراکی نداشته باشند یا بر هم منطبق باشند.

بار دیگر به کلاس درس خود نگاه کنید. لبه‌ی بالایی تخته سیاه یک خط در فضا است. اگر این خط را ادامه دهیم، سقف کلاس را قطع نمی‌کند. در این وضعیت می‌گوییم لبه‌ی بالایی تخته سیاه با سقف کلاس موازی است.

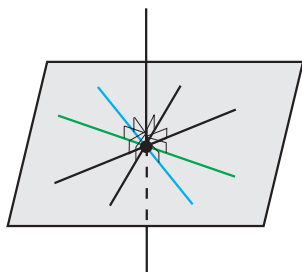


شکل ۲

۱- سقف کلاس‌ها در همه‌ی مناطق ایران نشان‌دهنده‌ی یک صفحه نمی‌باشند. به عنوان مثال، سقف‌های گنبدی شکل مناطق کویری و سقف‌های بعضی مناطق شمال ایران به صورت یک صفحه نیستند.

یک خط و یک صفحه را که فقط یک نقطه‌ی اشتراک داشته باشند متقاطع
گوییم. در غیر این صورت خط و صفحه موازیند.

حالا به خط قائم گوشه‌ی کلاس نگاه کنید. این خط بر کف کلاس عمود است. خطی که یک
صفحه را قطع می‌کند با خط‌هایی که درون صفحه قرار دارند و از نقطه‌ی تلاقی آن خط با صفحه
می‌گذرند، زاویه تشکیل می‌دهد.

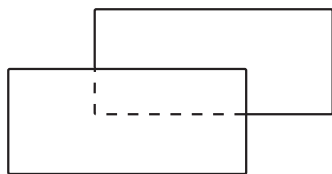


شکل ۳

یک خط را بر یک صفحه عمود گوییم، اگر صفحه را قطع کند و با هر خطی در
صفحه که از نقطه‌ی تلاقی می‌گذرد زاویه‌ی قائمه تشکیل دهد.

نکته: می‌توان نشان داد که در تعریف فوق عمود بودن خط بر حداقل دو خط متقاطع در
صفحه کافی است.

دو دیوار روبه‌روی هم در کلاس، یکدیگر را قطع نمی‌کنند، یعنی بخش‌هایی از دو صفحه‌ی
موازی هستند (شکل ۴).



شکل ۴

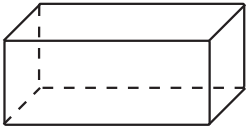
دو صفحه را موازی گویند، اگر یکدیگر را قطع نکنند یا بر هم منطبق باشند.

از طرف دیگر هر یک از دیوارهای کلاس درس بر کف کلاس عمود است.

دو صفحه را عمود بر هم می‌نامند، هرگاه خطی در یکی از دو صفحه وجود
داشته باشد که بر صفحه‌ی دیگر عمود باشد.

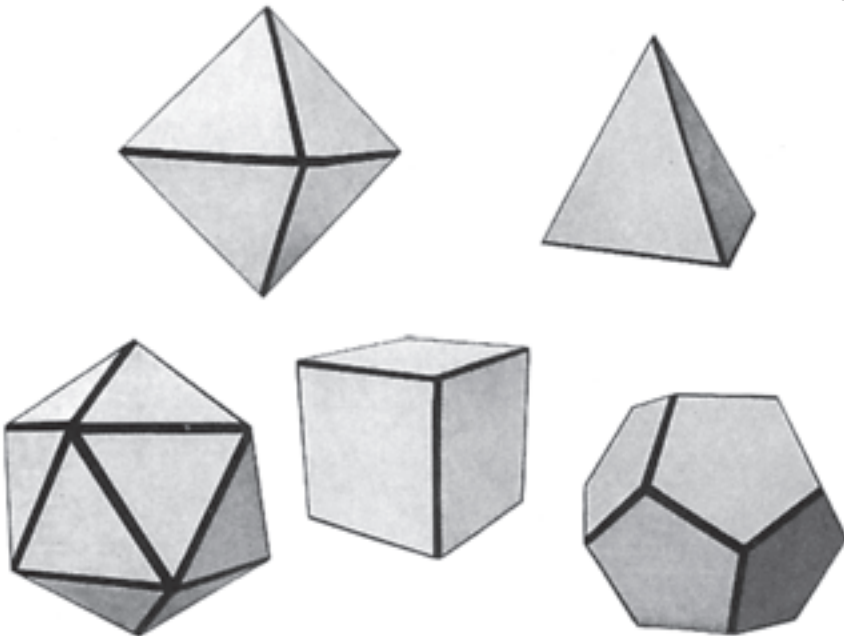


۴-۲- مکعب مستطیل



شکل ۵

به شکل ۵ نگاه کنید. این شکل یک مکعب مستطیل است. در زندگی روزانه با اشیای بسیاری سروکار داریم که به شکل مکعب مستطیل هستند. جعبه‌ی خمیردندان، جعبه‌ی دستمال کاغذی، قوطی کبریت و بعضی از مدادپاکن‌ها نمونه‌هایی از مکعب مستطیل هستند. مکعب مستطیل شکل خاصی از چندوجهی است (شکل ۶).

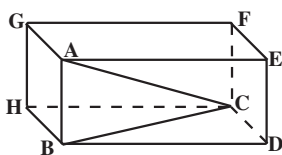


شکل ۶

بخشی از فضا که از همه طرف به صفحه محدود است شکلی پدید می‌آورد که به آن چندوجهی می‌گویند.

بخش‌هایی از صفحه‌ها که چندوجهی را پدید می‌آورند سطح‌هایی با محیط چندضلعی ایجاد می‌کنند. هر کدام از این چندضلعی‌ها یک وجه، ضلع‌های این وجه‌ها، یال‌ها و رأس‌های این وجه‌ها، رأس‌های چندوجهی نامیده می‌شوند.

مکعب مستطیل یک شش وجهی است که همه‌ی وجه‌های آن مستطیل شکل هستند.



شکل ۷

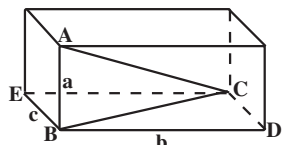
وجه‌های روبه‌رو در مکعب مستطیل موازی و همنهشت هستند. وجه‌های مجاور یک مکعب مستطیل صفحه‌های عمود بر هم و یال‌های آن بر وجه‌ها عمود هستند (شکل ۷). مکعب مستطیل، ۸ رأس و ۱۲ یال دارد.

در مکعب مستطیل به دو رأس مانند A و C در شکل ۷ که در یک وجه قرار ندارند، رأس‌های متقابل گفته می‌شود.

الف) در شکل ۷، A، B، C سه رأس مکعب مستطیل هستند. رأس‌های دیگر را نام ببرید.
 ب) AB و CD دو یال این مکعب مستطیل هستند. یال‌های دیگر را نام ببرید.
 پ) پاره خط AC، دو رأس متقابل A و C را به هم وصل کرده است. رأس‌های متقابل دیگر را نام ببرید.

در هر مکعب مستطیل، پاره خطی که دو رأس متقابل را به هم وصل می‌کند، قطر مکعب مستطیل نامیده می‌شود.

فرض کنید طول یال‌های AB، BD و BE به ترتیب a ، b و c باشد (شکل ۸). می‌خواهیم طول قطر AC را پیدا کنیم. چون یال AB بر وجه پایینی مکعب مستطیل عمود است، بنابراین مثلث ABC قائم‌الزاویه و AC وتر آن است. پس با محاسبه‌ی طول وتر در مثلث قائم‌الزاویه ABC، طول AC یعنی قطر مکعب مستطیل به دست می‌آید.



شکل ۸

۱- در این جا منظور از چندضلعی، سطح چندضلعی است.

طول ضلع AB از مثلث ABC برابر a است ولی طول ضلع دیگر یعنی BC داده نشده است. اما چون مکعب مستطیل از وجه‌های مستطیل شکل تشکیل یافته است، پس $BE = CD = c$. مثلث BCD نیز قائم الزاویه است و BC وتر آن است. پس می‌توانیم از رابطه‌ی فیثاغورس طول BC را بیابیم:

$$BC^2 = b^2 + c^2$$

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \quad \text{بنابراین:}$$

$$= a^2 + (b^2 + c^2)$$

$$= a^2 + b^2 + c^2$$

در نتیجه:

$$AC = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \quad (1)$$

مثال ۱: طول یال‌های AB، BD و BE در مکعب مستطیل شکل ۸، به ترتیب ۱، ۲ و ۳ سانتی متر است. طول قطر AC را محاسبه کنید.

حل: با قراردادن $a=1$ ، $b=2$ و $c=3$ در رابطه‌ی (۱) طول AC را به دست می‌آوریم

$$AC = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$$

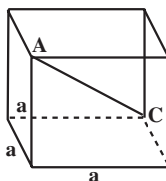
مکعب مستطیلی که طول یال‌های آن با هم برابر باشند، مکعب نامیده می‌شود.

مثال ۲: اگر طول یال‌های مکعبی برابر a باشد، طول قطر آن را پیدا کنید.

حل: چون طول یال‌ها برابر a است، پس در رابطه‌ی (۱) به جای a، b و c مقدار a را قرار

می‌دهیم.

$$AC = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}$$



شکل ۹

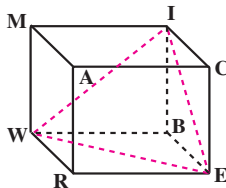
مثال ۳: اگر طول یال مکعب را دو برابر کنیم، طول قطر آن چه تغییری می‌کند؟
 حل: اگر طول یال‌های مکعب شکل ۹ را دو برابر کنیم، آنگاه طول یال مکعب جدید، $2 \times a = 2a$ خواهد بود. اگر قطر مکعب جدید را $A'C'$ بنامیم، به کمک رابطه‌ی (۱) طول آن را به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} A'C' &= \sqrt{(2a)^2 + (2a)^2 + (2a)^2} \\ &= \sqrt{3 \times 4a^2} \\ &= 2a\sqrt{3} \\ &= 2AC \end{aligned}$$

در نتیجه، اگر طول یال مکعب را دو برابر کنیم، طول قطر آن نیز دو برابر می‌شود.

فعالیت ۴-۱

الف) به مکعب شکل ۱۰ نگاه کنید. این شکل را در دفتر خود رسم کنید.

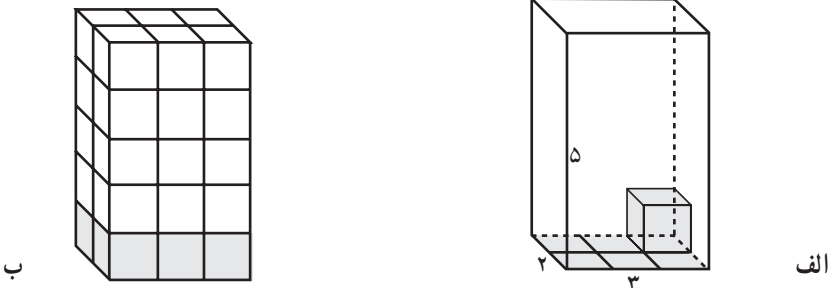


۱. در این مکعب رأس متقابل رأس I را نام ببرید.
 ۲. کدام یک از یال‌های این مکعب با یال MA موازی هستند؟
 ۳. این مکعب چند قطر دارد؟ آن‌ها را رسم کنید و نام ببرید.
 - ب) حال پاره‌خط‌های IE، WI و WE را نیز به شکلی که در دفتر خود رسم کرده‌اید اضافه کنید.
 ۴. اندازه‌ی زاویه‌های IWB و BWE را به دست آورید.
 ۵. اندازه‌ی زاویه IWE را به دست آورید.
 ۶. آیا رابطه‌ی $\widehat{IWE} = \widehat{IWB} + \widehat{BWE}$ برقرار است؟ چرا؟
 ۷. اگر طول یال این مکعب ۸ سانتی‌متر باشد، طول پاره‌خط WI را حساب کنید.
- در شکل ۱۰، WI، قطر و وجه نامیده می‌شود.

آیا هنگام نوشیدن آب داخل یک لیوان، از خود پرسیده‌اید مقدار آبی که درون لیوان جای می‌گیرد چقدر است؟ یا هنگامی که بادکنکی را باد می‌کنید از خود پرسیده‌اید چه اندازه هوا داخل بادکنک جای می‌گیرد؟ یا گنجایش مخزن سوخت اتومبیل چقدر است؟

برای اندازه‌گیری طول یک پاره خط واحد طولی مثل سانتی‌متر، یا میلی‌متر انتخاب کردیم و با انتخاب آن واحدی نیز برای اندازه‌گیری مساحت مثل سانتی‌متر مربع یا میلی‌متر مربع به دست آوردیم. برای محاسبه‌ی حجم یک شکل فضایی نیز محتاج یک واحد هستیم. این واحد، حجم مکعبی با طول یال واحد است که برابر یک سانتی‌متر مکعب یا یک میلی‌متر مکعب (برحسب واحدی که برای اندازه‌گیری طول یال آن انتخاب می‌کنیم) در نظر گرفته می‌شود. همان‌طور که برای محاسبه‌ی مساحت مستطیل آن را با مربعهای واحد پوشانیدیم، برای محاسبه‌ی حجم یک مکعب مستطیل آن را با مکعب‌های واحد (مکعب‌هایی با طول یال واحد) پر می‌کنیم و با شمارش تعداد آن‌ها یا کسری از آن‌ها، حجم مکعب مستطیل را می‌یابیم. مکعب مستطیل شکل ۱۱-الف دارای یال‌هایی به طول‌های ۳ سانتی‌متر، ۲ سانتی‌متر و ۵ سانتی‌متر است، که آن‌ها را طول، عرض و ارتفاع آن می‌نامند. این مکعب مستطیل را مانند شکل ۱۱-ب با مکعب‌های واحد پر می‌کنیم. چون ارتفاع مکعب مستطیل ۵ است، ۵ ردیف از مکعب‌های واحد آن را پر می‌کنند. در هر ردیف نیز ۶ مکعب وجود دارد زیرا وجه پایینی این مکعب مستطیل، مستطیلی با طول ۳ سانتی‌متر و عرض ۲ سانتی‌متر است و مساحت مستطیل $2 \times 3 = 6$ سانتی‌متر مربع است، بنابراین در هر ردیف ۶ مکعب واحد لازم خواهد بود. در نتیجه:

$$2 \times 3 \times 5 = 6 \times 5 = 30$$



شکل ۱۱

مکعب واحد برای پر کردن کل فضای داخل مکعب مستطیل لازم است. از این رو حجم این مکعب مستطیل 30 سانتی‌متر مکعب است.

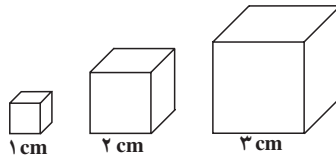
$$\text{ارتفاع} \times \text{عرض} \times \text{طول} = \text{حجم مکعب مستطیل}$$

طول و عرض مکعب مستطیل در واقع طول و عرض مستطیل وجه پایینی آن هستند که قاعده‌ی مکعب مستطیل نامیده می‌شود. چون مساحت مستطیل برابر با حاصل ضرب طول و عرض است، در نتیجه:

$$\text{ارتفاع} \times \text{مساحت قاعده} = \text{حجم مکعب مستطیل}$$

فعالیت ۴-۲

سه مکعب به طول یال‌های ۱، ۲ و ۳ سانتی‌متر مطابق شکل ۱۲ در نظر بگیرید.



شکل ۱۲

۱. مجموع مساحت‌های همه‌ی وجه‌های مکعب را به دست آورید و آن را مساحت کل بنامید.
 ۲. اگر طول یال یک مکعب را دو برابر کنیم، مساحت کل آن چه تغییری می‌کند؟
 ۳. اگر طول یال مکعبی را سه برابر کنیم، مساحت کل آن چه تغییری می‌کند؟
 ۴. حجم هر کدام از این مکعب‌ها را حساب کنید.
 ۵. اگر طول یال مکعبی دو برابر یا سه برابر شود، حجم آن چه تغییری می‌کند؟
- مثال ۴:** حجم مکعبی به طول یال a را پیدا کنید.

حل: چون طول و عرض و ارتفاع مکعب با هم برابرند، در نتیجه:

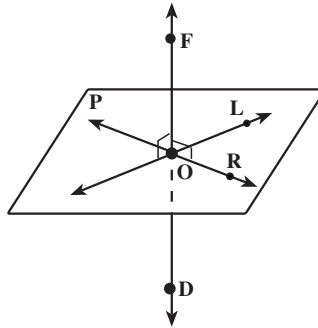
$$a^3 = (\text{طول یال})^3 = \text{حجم مکعب}$$

مسائل

۱. نمایی از خط‌ها و صفحه‌هایی که در کلاس درس یا اتاق منزل خود می‌بینید در دفترچه خود رسم و خط‌های عمود بر صفحه‌ها را نام‌گذاری کنید. آنگاه، همه‌ی زاویه‌های قائمه‌ای را که تشکیل می‌شوند نام ببرید.

۲. در شکل زیر خط FD بر صفحه‌ی P عمود است و خط‌های OL و OR درون صفحه

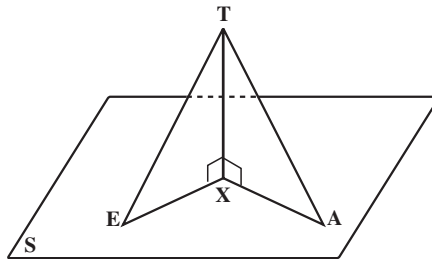
هستند:



الف) از عمود بودن خط بر صفحه، چه نتیجه‌ای به دست می‌آورید؟
ب) زاویه‌هایی را که قائمه هستند نام ببرید.

۳. در شکل زیر، پاره خط TX بر صفحه‌ی S عمود است و $TE = TA$. چرا زاویه‌ی TEX

با زاویه‌ی TAX مساوی است؟



۴. حجم مکعب مستطیلی را که طول، عرض و ارتفاع آن $\sqrt{2}$ ، $\sqrt{3}$ و $\sqrt{5}$ سانتی متر است

به دست آورید.

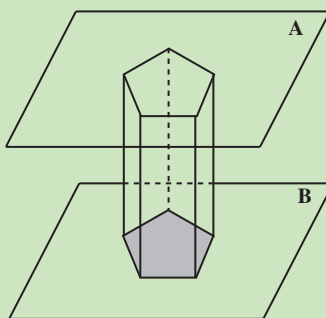
۵. اگر طول قطر مکعبی $\sqrt{6}$ باشد، مساحت کل آن را حساب کنید.

۴-۳- منشور و استوانه

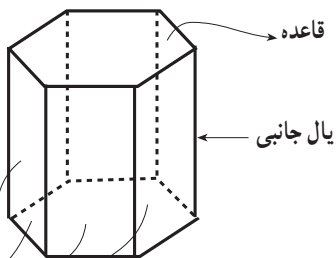
به تصویر زیر نگاه کنید. این تصویر، نمونه‌هایی از یک منشور است.



منشور یک چند وجهی است که دو وجه آن همنهشت بوده و در دو صفحه‌ی موازی قرار گیرند و وجه‌های دیگر آن متوازی‌الاضلاع باشند.



شکل ۱۳



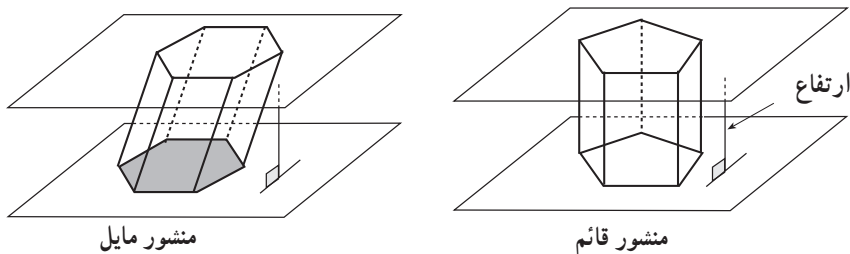
وجه‌های جانبی

شکل ۱۴

دو وجه همنهشت منشور که در دو صفحه‌ی موازی قرار می‌گیرند، قاعده‌های منشور نام دارند. وجه‌های دیگر که متوازی‌الاضلاع هستند، وجه‌های جانبی و یال‌هایی از منشور که محل تلاقی وجه‌های جانبی منشور هستند، یال‌های جانبی نامیده می‌شوند که همگی با هم

موازی کنید. (شکل ۱۴) ارتفاع منشور پاره‌خطی است که صفحه‌های دو قاعده را به هم وصل می‌کند و بر هر دو قاعده عمود است.

اگر یال‌های جانبی بر قاعده‌های منشور عمود باشند، آن را یک منشور قائم و اگر یال‌های جانبی بر قاعده‌ها عمود نباشند آن را منشور مایل می‌نامند (شکل ۱۵).

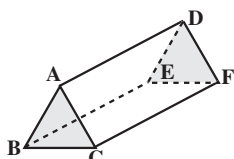


شکل ۱۵

منشور را بر اساس شکل چندضلعی قاعده‌های آن نامگذاری می‌کنند. مثلاً اگر قاعده‌ی یک منشور مثلث باشد، آن را منشور مثلثی می‌نامند. به این ترتیب، مکعب مستطیل یک منشور چهارضلعی قائم است. (چرا؟)



شکل ۱۶



شکل ۱۷

فیزیکدان‌ها معمولاً به قطعه‌ی شیشه‌ای مثلثی که می‌تواند نور را به طیف‌های آن تجزیه کند، منشور می‌گویند. این قطعه شیشه‌ی یک منشور مثلثی قائم است (شکل ۱۷).

تمرین ۱: شکل ۱۷ یک منشور مثلثی است.

الف) قاعده‌های این منشور را نام ببرید.

ب) این منشور چند وجه جانبی دارد؟ وجه‌های جانبی آن چه شکلی دارند؟

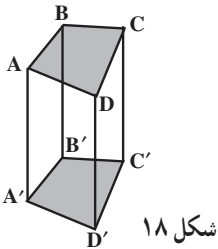
پ) یال‌های جانبی آن را نام ببرید.

تمرین ۲: در شکل ۱۸ یک منشور چهارضلعی قائم می‌بینید.

الف) این منشور چند وجه دارد؟

ب) وجه‌های آن چه شکلی دارند؟

پ) یال‌هایی از این منشور را که موازیند، نام ببرید.



شکل ۱۸

می‌توان مجموع مساحت وجه‌ها را برای هر منشور دلخواه نیز مانند مساحت کل مکعب

مستطیل به‌دست آورد.

مجموع مساحت‌های وجه‌های جانبی یک منشور را مساحت جانبی و مجموع مساحت جانبی و مساحت دو قاعده‌ی منشور، مساحت کل آن نامیده می‌شود.

فعالیت ۳-۴

طول ضلع‌های قاعده‌ی منشور شکل ۱۹، به ترتیب ۱، ۲، ۳ و ۴ واحد و طول یال‌های جانبی

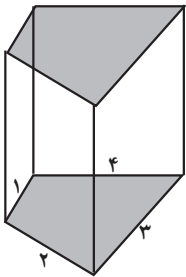
آن ۶ واحد است.

۱. مساحت هر یک از وجه‌های جانبی این منشور را به‌دست آورید.

۲. مساحت جانبی منشور چقدر است؟

۳. محیط قاعده را به‌دست آورید و آن را در طول یال جانبی ضرب کنید.

۴. از مقایسه‌ی پاسخ سؤال‌های ۲ و ۳ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟



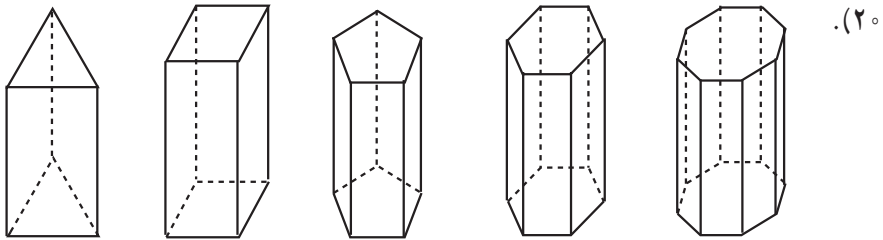
شکل ۱۹

۵. اگر طول یال جانبی یک منشور قائم h و محیط قاعده‌ی آن p باشد برای محاسبه مساحت جانبی منشور چه فرمولی پیشنهاد می‌کنید؟

۶. اگر طول، عرض و ارتفاع یک مکعب مستطیل یعنی یک منشور چهارضلعی قائم a ، b و c باشند، به کمک نتیجه‌ی سؤال ۵، فرمولی برای پیدا کردن مساحت جانبی مکعب مستطیل به دست آورید.

۷. مساحت کل مکعب مستطیل سؤال ۶، برحسب a ، b و c چقدر است؟

یک دسته از منشورهای جالب آن‌هایی هستند که قاعده‌ی آن‌ها چندضلعی منتظم است (شکل



شکل ۲۰

هرچه تعداد ضلع‌های چند ضلعی منتظم بیشتر می‌شود، قاعده‌ی منشور به دایره نزدیک و نزدیک‌تر می‌گردد. اگر تعداد ضلع‌های چند ضلعی خیلی زیاد شود، هرکدام از وجه‌ها باریک و باریک‌تر می‌گردند تا تقریباً شبیه به یک خط می‌شوند و قاعده‌های منشور بیشتر و بیشتر شبیه دایره می‌شوند. در نتیجه منشور حاصل به یک شکل فضایی که قاعده‌ی آن دایره است تبدیل می‌شود. این شکل فضایی را استوانه می‌نامند.



شکل ۲۱

بسیاری از وسایلی که در زندگی روزانه با آن‌ها سر و کار داریم، استوانه‌ای شکل هستند. بعضی از لیوان‌های آب‌خوری، بیستون موتور اتومبیل‌ها و لوله‌های آب همگی استوانه‌اند.

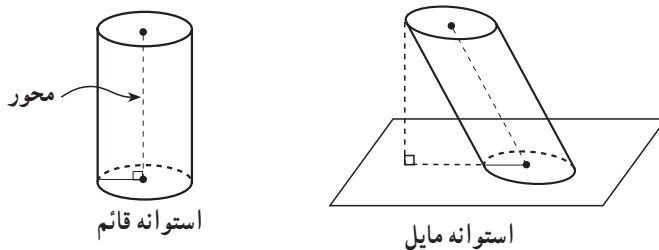


شکل ۲۲

آیا شما نیز می‌توانید چند شیء استوانه‌ای شکل را نام ببرید؟

استوانه^۱ شکلی فضایی شبیه منشور است که قاعده‌های آن به جای چند ضلعی، دو دایره‌ی هم‌نهشت هستند.

اگر محور استوانه یعنی، پاره‌خطی که مرکزهای دو قاعده را به هم وصل می‌کند، بر قاعده عمود باشد، استوانه را قائم و در غیر این صورت آن را مایل می‌نامند (شکل ۲۳).



شکل ۲۳

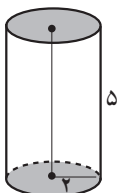
توجه: در استوانه قائم، محور استوانه همان ارتفاع استوانه است. همانند منشور، مساحت رویه‌ای (سطحی^۲) که اطراف استوانه را تشکیل می‌دهد، مساحت جانبی و مجموع مساحت جانبی و مساحت‌های دو قاعده مساحت کل نامیده می‌شود.

۱- عمداً از آوردن تعریف دقیق ریاضی پرهیز کرده‌ایم.

۲- Surface (سطح - رویه)

فعالیت ۴-۴

طول محور یعنی طول ارتفاع استوانه قائم شکل ۲۴ برابر ۵ سانتی متر و شعاع قاعده‌ی آن ۲ سانتی متر است. قاعده‌های این استوانه را بردارید و از کنار، آن‌را به موازات محور برش داده و باز کنید، یک مستطیل به دست می‌آید.

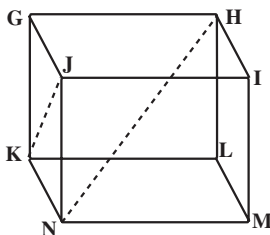


شکل ۲۴

۱. طول و عرض مستطیل حاصل چقدر است؟
۲. مساحت مستطیل را به دست آورید.
۳. مساحت این مستطیل چه رابطه‌ای با مساحت جانبی استوانه دارد؟
۴. با توجه به پاسخ سؤال ۳، مساحت جانبی استوانه چیست؟
۵. به همین روش، مساحت جانبی یک استوانه با ارتفاع h و شعاع قاعده‌ی r را به دست آورید.
۶. مساحت هریک از دایره‌های استوانه‌ی شکل ۲۴ چقدر است؟
۷. مساحت کل استوانه را حساب کنید.
۸. به کمک پاسخ سؤال‌های ۶ و ۷، مساحت کل استوانه‌ی سؤال ۵ را محاسبه کنید.

مسائل

۱. طول هر یال مکعب شکل زیر ۶ سانتی متر است.



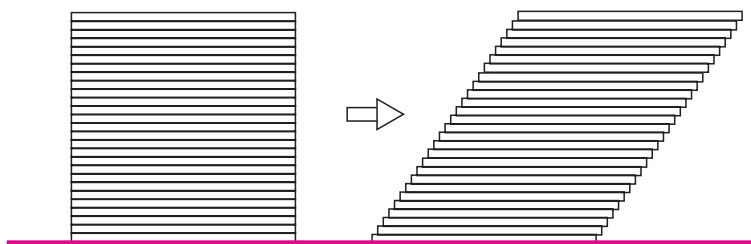
- الف) طول JK یعنی قطر وجه $GJNK$ چقدر است؟
 ب) طول قطر HN چقدر است؟
۲. طول قطر وجه یک مکعب 10° سانتی متر است. مساحت کل آن را حساب کنید.
 ۳. اگر قاعده‌ی یک منشور قائم، مثلث متساوی الاضلاعی به طول ضلع ۸ سانتی متر و ارتفاع منشور ۱۲ سانتی متر باشد، مساحت جانبی و مساحت کل این منشور را پیدا کنید.

۴. طول ضلع قاعده‌ی یک منشور قائم شش‌ضلعی منتظم 10° سانتی‌متر و ارتفاع منشور ۱۸ سانتی‌متر است. مساحت جانبی و مساحت کل آن را پیدا کنید.

۵. چرا ارتفاع یک منشور مایل کوتاهتر از طول یال جانبی آن است؟

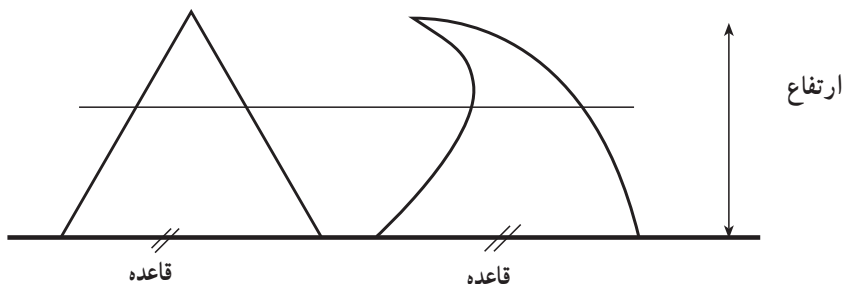
۴-۴ اصل کاوالیری، حجم منشور و استوانه

یک دسته کارت هم‌اندازه را روی یکدیگر قرار دهید و از پهلو به آن نگاه کنید. یک سطح مستطیل شکل ایجاد شده است. اگر این دسته کارت را به آرامی فشار دهید و مجدداً از پهلو به آن نگاه کنید، یک متوازی‌الاضلاع دیده می‌شود. این متوازی‌الاضلاع و مستطیل دارای قاعده‌ها و ارتفاع‌های برابر هستند در نتیجه مساحت آن‌ها مساوی است. قاعده‌های متوازی‌الاضلاع و مستطیل شکل ۲۵ بر روی یک خط قرار دارند. هر خطی که به موازات قاعده این دو شکل را قطع کند، در آن‌ها طول‌های مساوی ایجاد می‌کند.



شکل ۲۵

دو شکل زیر دارای قاعده‌ها و ارتفاع‌های برابر هستند و هر خطی موازی با قاعده‌ها، در دو شکل قطعه‌هایی با طول‌های مساوی به وجود می‌آورد.



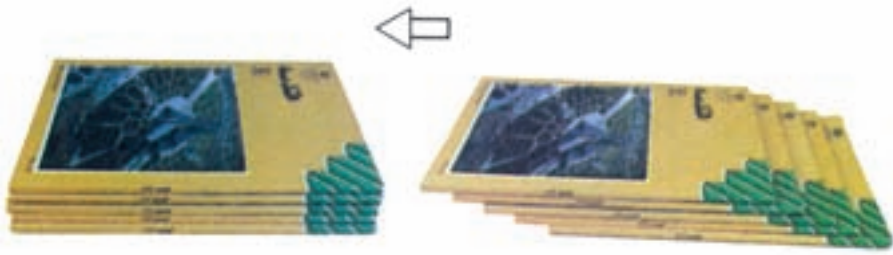
شکل ۲۶

طبق اصل کاوالیری^۱، چنین دو شکلی دارای مساحت‌های برابر هستند.

اصل کاوالیری درباره‌ی مساحت‌ها

فرض کنید قاعده‌های دو شکل بر روی یک خط قرار گرفته باشند. اگر هر خطی موازی قاعده‌های دو شکل در آن‌ها قطعه‌هایی با طول‌های مساوی ایجاد کند، مساحت‌های آن دو شکل برابر است.

کتاب‌های هندسه‌ی خود و دوستانتان را طوری روی هم قرار دهید که مانند شکل ۲۷ یک منشور مستطیلی مایل ایجاد شود. کتاب‌ها را از کنار به آرامی با دست فشار دهید تا به صورت قائم روی یکدیگر قرار گیرند. با این کار، مساحت کتاب‌ها و ارتفاع منشور تغییر نمی‌کند ولی یک منشور مستطیلی قائم به دست می‌آید.



شکل ۲۷

اگر حجم منشور مایل را برابر مجموع حجم‌های این کتاب‌های هم‌اندازه بگیریم، نباید با فشاردادن کتاب‌ها و تبدیل منشور مایل به قائم، حجم آن تغییر کند. همچنین مساحت هرکدام از کتاب‌های فوق یعنی S و ارتفاع منشور یعنی h نیز با فشاردادن تغییر نمی‌کنند. بنابراین،

$$\text{حجم منشور مستطیلی مایل} = S \times h$$

$${}^3V = S \times h$$

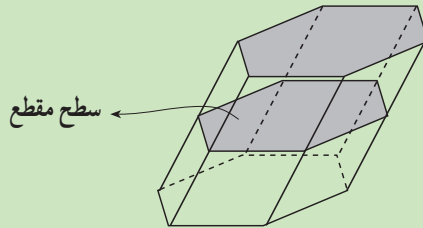
از تساوی حجم دو منشور قائم و مایل، به بیان اصل کاوالیری برای حجم‌های شکل‌های فضایی مانند آنچه برای مساحت‌های دو شکل مسطح بیان کردیم می‌پردازیم. اما قبل از آن، نیازمند تعریف زیر هستیم:

۱_ Cavalieri

۲_ Surface

۳_ Volume

سطح مقطع یک شکل فضایی، شکلی است که از برخورد آن با یک صفحه حاصل می‌شود.



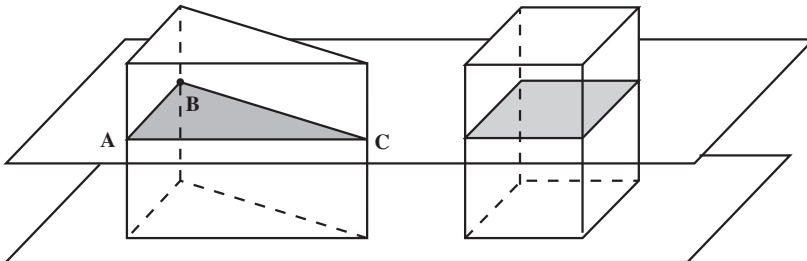
اگر قاعده‌های دو منشور در یک صفحه قرار گرفته و مساحت سطح مقطع‌هایی که از برخورد هر صفحه‌ای موازی با این صفحه حاصل می‌شوند برابر باشند، آنگاه نتیجه می‌گیریم که حجم‌های این دو منشور برابر هستند. این مطلب را نخستین بار، کاوالیری، ریاضیدان ایتالیایی قرن هفدهم، به صورت کلی‌تری بیان کرد.

اصل کاوالیری درباره‌ی حجم‌ها

دو شکل فضایی و صفحه‌ای که قاعده‌های دو شکل در آن قرار گرفته باشند را در نظر بگیرید. اگر هر صفحه‌ای موازی با این صفحه که یکی از این دو شکل را قطع می‌کند، دیگری را نیز قطع کند و سطح مقطع‌های حاصل دارای مساحت‌های برابر باشند، آنگاه حجم‌های این دو شکل فضایی برابر هستند.

طبق اصل کاوالیری، اگر مساحت قاعده‌های دو منشور هم ارتفاع برابر باشند، حجم‌های آن‌ها برابر خواهند بود.

حجم منشور برابر با حاصل ضرب مساحت قاعده در ارتفاع آن است.

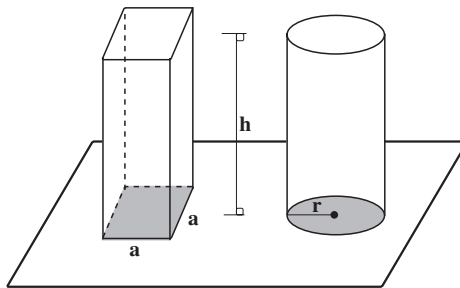


مثال ۵: در شکل صفحه‌ی قبل مساحت‌های مربع و مثلث که قاعده‌های دو منشور را تشکیل می‌دهند، همچنین ارتفاع دو منشور برابر هستند. هر صفحه‌ای موازی با صفحه‌ی P یک منشور را در مربع و منشور دیگر را در یک مثلث قطع می‌کند که باز دارای مساحت‌های برابر هستند. پس بنا بر اصل کاوالیری، حجم‌های این دو منشور برابرند. یکی از این منشورها یک مکعب مستطیل است و حجم آن برابر با حاصل ضرب مساحت قاعده در ارتفاع است. پس حجم منشور دیگر نیز برابر با حاصل ضرب مساحت قاعده در ارتفاع آن می‌باشد. در نتیجه، اگر h ارتفاع و S مساحت قاعده‌ی هر منشوری باشد، حجم آن از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$V = S \times h$$

فعالیت ۴-۵

در شکل ۲۸ استوانه‌ی قائمی که شعاع دایره‌ی قاعده‌ی آن r و ارتفاع آن h است و یک منشور چهارضلعی قائم به همان ارتفاع رسم شده است.

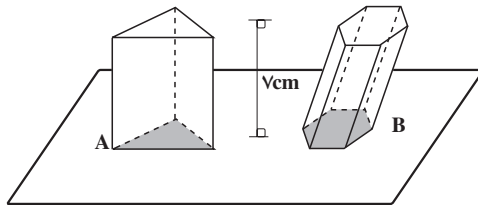


شکل ۲۸

۱. اگر مساحت قاعده‌های استوانه و منشور شکل ۲۸ برابر باشند، اندازه‌ی طول ضلع مربع یعنی a را بر حسب r به دست آورید.
۲. با مقداری که برای a در قسمت ۱ به دست آورده‌اید، حجم منشور را حساب کنید.
۳. با توجه به اصل کاوالیری، حجم استوانه‌ی قائم را به دست آورید.
۴. آیا حجم استوانه‌ی مایل نیز مانند حجم استوانه‌ی قائم به دست می‌آید؟ توضیح دهید.

مسائل

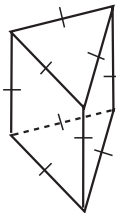
۱. با استفاده از اصل کواالیری نشان دهید دو مثلث با قاعده‌ها و ارتفاع‌های برابر، مساحت برابر دارند (از قانون مساحت مثلث استفاده نکنید).
(راهنمایی: از تشابه مثلث‌ها استفاده کنید).
۲. در شکل زیر، قاعده‌های یک منشور سه‌ضلعی قائم (A) و یک منشور شش‌ضلعی مایل (B) در یک صفحه قرار گرفته‌اند. ارتفاع هر دو منشور ۷ سانتی‌متر است.



- الف) اگر مساحت قاعده‌ی منشور A، 10 سانتی‌متر مربع باشد، حجم آن چقدر است؟
فرض کنید هر صفحه‌ای موازی با قاعده‌های این دو منشور، سطح مقطع‌هایی با مساحت برابر ایجاد کند:

ب) حجم منشور B را به دست آورید.

۳. طول هر یال منشور قائم شکل روبه‌رو ۴ سانتی‌متر است.



الف) مساحت هر کدام از وجه‌ها و قاعده‌ها را حساب کنید.

ب) ارتفاع منشور چقدر است؟

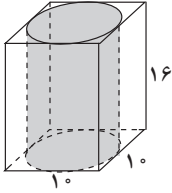
پ) حجم منشور را به دست آورید.

۴. دو استوانه‌ی قائم یکی به شعاع قاعده‌ی ۲ سانتی‌متر و ارتفاع ۱ سانتی‌متر و دیگری به

شعاع قاعده‌ی ۱ سانتی‌متر و ارتفاع ۲ سانتی‌متر در نظر بگیرید.

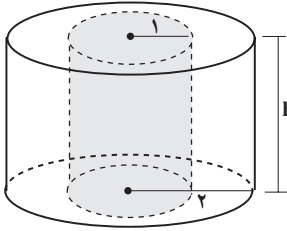
الف) مساحت‌های جانبی این دو استوانه را محاسبه و با هم مقایسه کنید.

ب) حجم‌های این دو استوانه را پیدا کرده با هم مقایسه کنید.



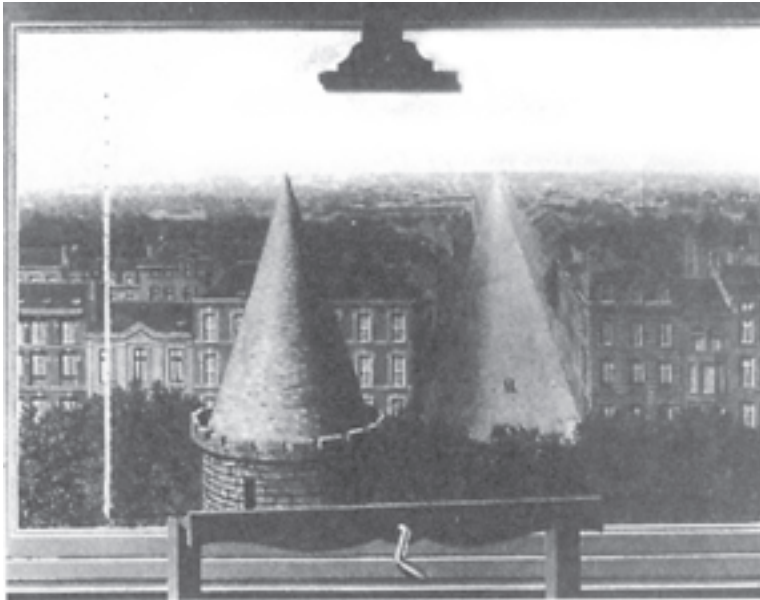
۵. در شکل روبه‌رو طول ضلع مکعب مستطیل 10 سانتی‌متر و ارتفاع آن 16 سانتی‌متر است.

الف) مساحت کل و حجم استوانه را به دست آورید.
ب) حجم ناحیه‌ی بین استوانه و مکعب مستطیل چقدر است؟



۶. دو استوانه‌ی قائم که مرکز قاعده‌های آن‌ها یکی است، را در نظر بگیرید. با توجه به اندازه‌های روی شکل:

الف) نسبت مساحت جانبی استوانه‌ی بزرگتر به مساحت جانبی استوانه‌ی کوچکتر را بیابید.
ب) نسبت حجم استوانه‌ی بزرگتر به حجم استوانه‌ی کوچکتر چقدر است؟
پ) حجم فضای بین این دو استوانه را پیدا کنید.



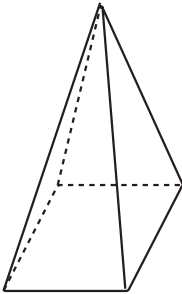
درباره‌ی اثر معروف رنه ماگريت با عنوان گردش‌گاه اقلیدوسی فکر کنید، در آن چه می‌بینید؟

۴-۵- هرم و مخروط

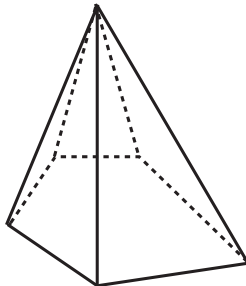
یکی از بزرگترین شکل‌های فضایی ساخت دست بشر، اهرام مصر است که بیش از چهارهزار سال از عمر آن می‌گذرد و تنها مورد از «عجایب هفتگانه» است که هنوز پا برجا می‌باشد. هرکدام از این هرم‌ها، ارتفاعی به اندازه‌ی یک ساختمان چهل طبقه دارد و بر روی هم با بیش از دو میلیون قطعه سنگ که وزن هرکدام بین ۲ تا ۱۵۰ تن است ساخته شده‌اند.



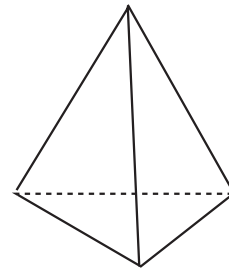
اگرچه مصریان باستان هرم‌هایی ساختند که قاعده‌ی آن‌ها به شکل مربع بود، ولی چندضلعی‌های دیگر نیز می‌توانند قاعده‌ی یک هرم باشند.



هرم مربعی

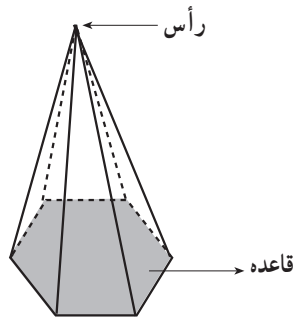


هرم پنج ضلعی



هرم مثلثی

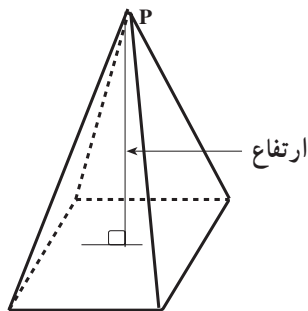
هرم یک چندوجهی است که همه‌ی وجه‌های آن به جز یکی در یک رأس مشترک اند.



شکل ۲۹

وجهی از هرم که رأس هرم در آن قرار ندارد قاعده‌ی هرم و وجه‌های دیگر وجه‌های جانبی نامیده می‌شوند. وجه‌های جانبی همواره به شکل مثلث هستند. (چرا؟)

ارتفاع هرم پاره‌خطی است که از رأس هرم بر قاعده‌ی آن عمود می‌شود.



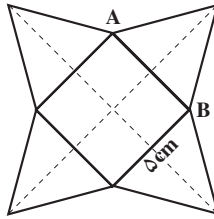
قاعده‌های هرم‌های معروف مصر، چهارضلعی‌های منتظم (مربعی شکل) هستند.

اگر قاعده‌ی یک هرم، چند ضلعی منتظم بوده و پای ارتفاع آن بر مرکز قاعده منطبق باشد، هرم را منتظم می‌نامیم.

توجه: مرکز چند ضلعی منتظم، مرکز دایره‌ای است که از رأس‌های این چند ضلعی می‌گذرد.

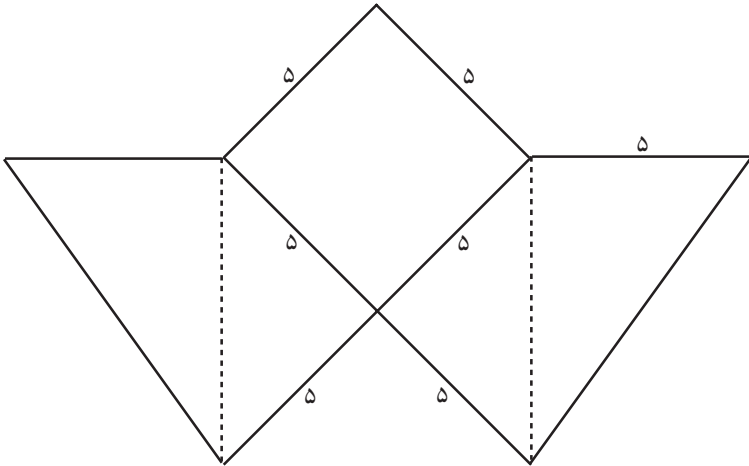
فعالیت ۴-۶

۱. ارتفاع مثلث‌ها در شکل 30° چقدر باشد تا هرم به دست آمده ارتفاعی برابر $2/5$ سانتی متر داشته باشد؟

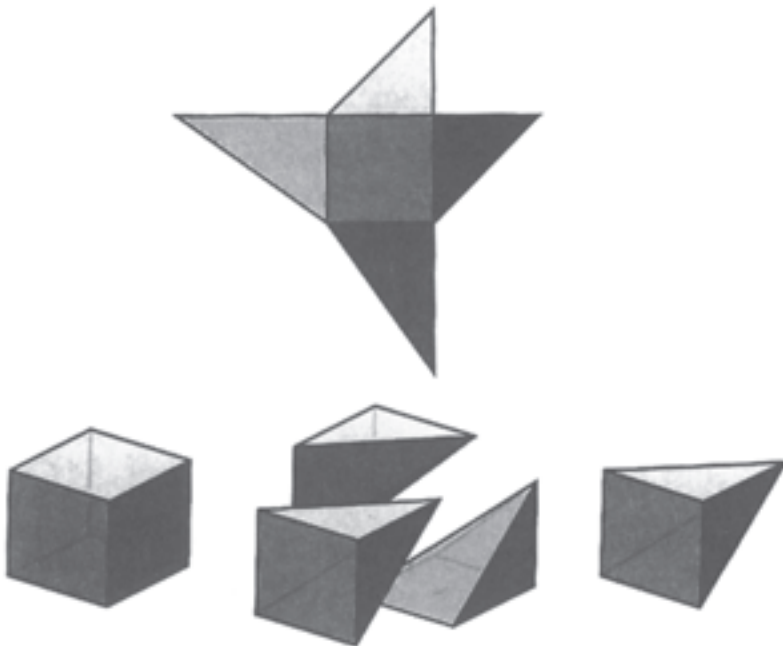


شکل ۳۰

۲. طول بزرگترین ضلع در الگوی زیر چند واحد است؟



سه قطعه مقوا مطابق الگوی فوق برش دهید و سه هرم بسازید. هرم‌ها را طوری کنار هم قرار دهید تا یک مکعب به دست آید. چه نتیجه‌ای درباره‌ی حجم مکعب و هرم‌ها می‌گیرید؟ حجم هرم، برحسب حجم مکعب چقدر است؟



شکل ۳۱

در فعالیت فوق، سه هرم را کنار هم گذاشتید و یک مکعب که خود یک منشور است ساختید. این کار مانند آن است که یک مکعب را به سه هرم با حجم‌های مساوی تجزیه^۱ کنیم. قبلاً نیز برای محاسبه‌ی مساحت مثلث، یک متوازی‌الاضلاع یا مستطیل را به دو مثلث هم مساحت تجزیه کردیم.



شکل ۳۲

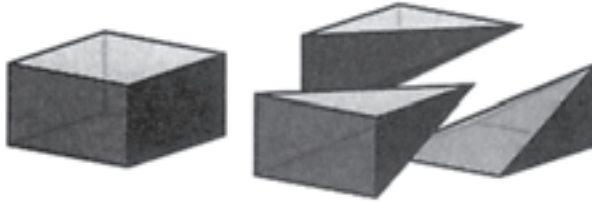
با استفاده از ایده‌ی تجزیه‌ی شکل‌ها، می‌توان حجم هرم را در حالت کلی محاسبه کرد. با پذیرفتن این موضوع که دو هرم با سطح قاعده‌ها و ارتفاع‌های مساوی دارای حجم‌های یکسان هستند^۲، کافی است که حجم یک هرم با قاعده‌ی مربع را پیدا کنیم زیرا برای هر هرم دیگری می‌توان هر می با قاعده‌ی مربع ساخت که مساحت قاعده و ارتفاع آن با مساحت قاعده و ارتفاع آن هرم برابر باشد^۳. برای این منظور مکعب مستطیلی می‌سازیم که قاعده‌ی آن همان قاعده‌ی هرم فوق و ارتفاع آن

۱- Decomposition

۲- در این کتاب، این مطلب را بدون اثبات می‌پذیریم.

۳- اگر مساحت قاعده‌ی هرم اولیه S باشد کافی است هر می با قاعده‌ی مربع به طول ضلع \sqrt{S} بسازیم.

نیز با ارتفاع هرم برابر باشد. این مکعب مستطیل را به سه هرم تجزیه می‌کنیم (شکل ۳۳).



شکل ۳۳

این سه هرم همنهشت نیستند ولی دارای حجم‌های مساوی هستند.^۱ چون حجم مکعب مستطیل مساوی مجموع حجم این سه هرم است. بنابراین،

$$\begin{aligned} \text{حجم هرم} &= \frac{1}{3} (\text{حجم مکعب مستطیل}) \\ &= \frac{1}{3} (S \times h) \end{aligned}$$

که S مساحت قاعده‌ی هرم و h ارتفاع آن است.

حجم هرمی به مساحت قاعده‌ی S و ارتفاع h برابر است با

$$V = \frac{1}{3} S \times h$$

همان‌طور که با زیاد کردن تعداد ضلع‌های قاعده‌ی یک منشور که چندضلعی منتظم بود شکل



بستنی قیفی

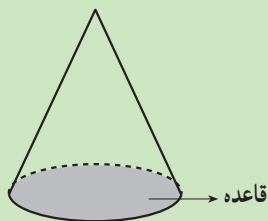


کلاه مخروطی

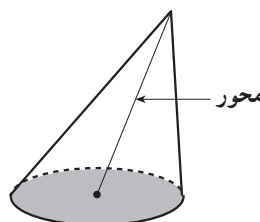
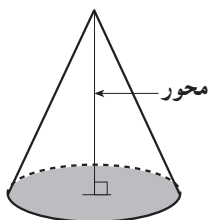
قاعده به دایره نزدیک و نزدیک‌تر شد و به این ترتیب استوانه را به دست آوردیم، با انجام همین عمل در مورد هرم‌های منتظم نیز یک شکل فضایی به نام مخروط به دست می‌آید. اگر نگاهی به اطراف خود بیندازید، اشیای مخروطی شکل بسیاری می‌بینید.

۱- اثبات این مطلب خارج از برنامه‌ی این درس است.

مخروط^۱ شکلی فضایی شبیه هرم است که قاعده‌ی آن به جای چند ضلعی، دایره است.



رأس، قاعده و ارتفاع یک مخروط مانند هرم تعریف می‌شوند. پاره‌خطی که رأس مخروط را به مرکز دایره‌ی قاعده وصل می‌کند، محور مخروط نام دارد. اگر محور بر قاعده عمود باشد، مخروط، قائم و در غیر این صورت مایل نامیده می‌شود (شکل ۳۴).



شکل ۳۴

حجم یک مخروط را می‌توان با حجم یک هرم با قاعده‌ی چند ضلعی منتظم تقریب زد:

$$\text{ارتفاع (مساحت قاعده)} \times \frac{1}{3} \approx \text{حجم مخروط}$$

هر اندازه تعداد ضلع‌های این چند ضلعی بیشتر گردد، مساحت قاعده‌ی هرم به مساحت قاعده‌ی مخروط نزدیکتر می‌شود و در نتیجه، حجم هرم به حجم مخروط نزدیکتر می‌گردد. بنابراین،

حجم یک مخروط با شعاع قاعده‌ی r و ارتفاع h برابر است با

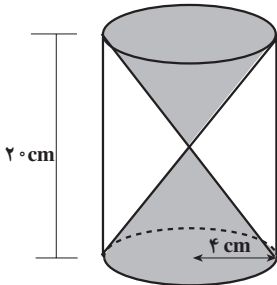
$$V = \frac{1}{3} \times \pi r^2 \times h$$

۱- عمداً از آوردن تعریف دقیق ریاضی پرهیز کرده‌ایم.

۲- علامت \approx را بخوانید: تقریباً برابر است با

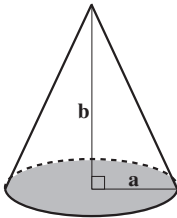
مسائل

۱. ساعت شنی که مردمان باستان برای اندازه‌گیری زمان از آن استفاده می‌کردند، از دو مخروط یکسان که درون یک استوانه‌ی قائم قرار داشتند ساخته شده بود. فرض کنید ارتفاع استوانه 20 سانتی‌متر و شعاع قاعده‌ی آن 4 سانتی‌متر است.



الف) حجم ناحیه‌ی سایه زده شده در شکل را پیدا کنید.
ب) حجم ناحیه‌ی محصور بین دو مخروط و استوانه را محاسبه کنید.

۲. شعاع قاعده‌ی یک مخروط a و ارتفاع آن b است. برای هر کدام از موارد زیر عبارتی بر حسب a و b پیدا کنید:



الف) حجم مخروط؛

ب) حجم مخروطی با همین شعاع قاعده اما ارتفاع دو برابر؛

پ) حجم مخروطی با همین ارتفاع اما شعاع قاعده‌ی دو برابر؛

ت) حجم مخروطی با ارتفاع دو برابر و شعاع قاعده‌ی دو برابر.

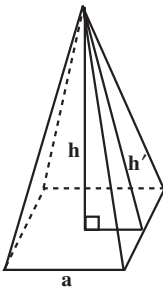
۳. حجم مخروط چه تغییری می‌کند اگر:

الف) ارتفاع آن دو برابر شود، اما شعاع قاعده تغییر نکند؛

ب) شعاع قاعده دو برابر شود، ولی ارتفاع تغییر نکند.

۴. حجم هرم مربعی منتظم در شکل مقابل را با توجه به داده‌های زیر

به‌دست آورید:



الف) $a = 14 \text{ cm}$, $h' = 25 \text{ cm}$ ؛

ب) $h = 6 \text{ cm}$, $h' = 6/5 \text{ cm}$ ؛

پ) $a = 1 \text{ cm}$, $h = 1/3 \text{ cm}$.

۵. یک چهاروجهی را که همه‌ی وجه‌های آن مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع a می‌باشد

در نظر بگیرید، حجم آن را بر حسب a به‌دست آورید. اگر $a = 4/5 \text{ cm}$ حجم چهاروجهی چقدر

می‌شود؟ (در این چهاروجهی ارتفاع از محل تقاطع نیمسازهای وجه مقابل می‌گذرد.)



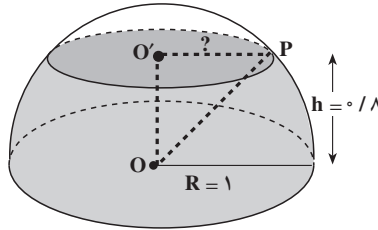
۴-۶- کره

تجربه‌ی سال‌های کودکی شما که توپ سرخ و سفید و آبی را محکم به زمین می‌زدید تا به هوا رفتنش را با شادی تماشا کنید، فرصت خوبی برای آشنا شدن با کره بود. توپ شما میانش خالی بود و چون سطح آن کاملاً گرد بود، روی زمین آرام و قرار نداشت و می‌غلتید و شما را به دنبال خودش می‌کشانید! اگر به اطراف خود نگاه کنید، جسم‌های کروی (کره‌ای شکل) زیادی را می‌بینید. توپ بسکتبال و توپ تنیس روی میز به شکل کره هستند و توپ فوتبال خیلی شبیه کره است.

کره مجموعه‌ی نقاطی از فضا است که از یک نقطه‌ی ثابت به نام مرکز به یک فاصله باشند. این فاصله‌ی ثابت شعاع کره نامیده می‌شود.

فعالیت ۴-۷

۱. یک کیک به شکل نیمکره را در نظر بگیرید که شعاع آن یک واحد باشد. کیک را از قسمت مسطح آن روی یک سینی بگذارید (شکل ۳۵).



شکل ۳۵

اگر کیک را موازی با سینی و در ارتفاع‌های متفاوت ببرید، قطعه‌هایی با سطح مقطع‌های متفاوت به دست می‌آورید. برای مثال، سطح مقطع برشی از کیک را در ارتفاع $h = 0/8$ به دست می‌آوریم. برای این کار، با استفاده از قضیه‌ی فیثاغورس، شعاع سطح مقطع را از مثلث قائم‌الزاویه‌ی $O'PO$ محاسبه می‌کنیم:

$$O'P^2 = OP^2 - OO'^2$$

$$OP = 1 \text{ شعاع نیمکره و } OO' = 0/8$$

چون

پس

$$O'P^2 = 1^2 - (0/8)^2$$

$$= 1 - 0/64$$

$$= 0/36$$

و چون شعاع سطح مقطع همان $O'P$ است، پس مساحت سطح مقطع (A) برابر است با:

$$A = \pi \times O'P^2$$

$$= 3/14 \times 0/36$$

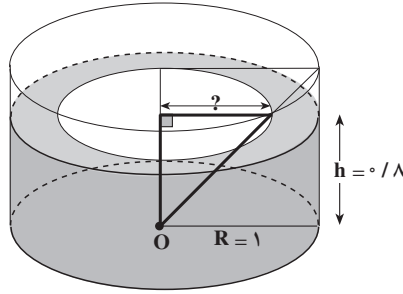
در نتیجه:

$$A = 1/1304$$

الف) مساحت برشی از کیک (سطح مقطع نیمکره) را در ارتفاع $h = 0/6$ به دست آورید.

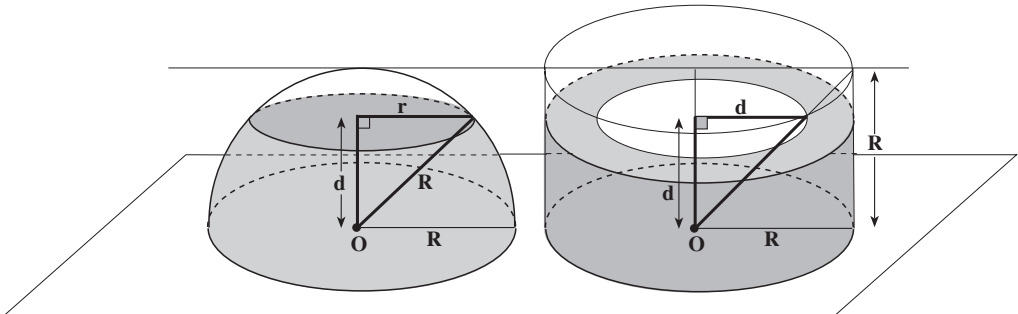
ب) شعاع برشی از کیک را در ارتفاع $h = 0/4$ پیدا کنید.

پ) فرمولی برای پیدا کردن مساحت برشی از کیک (A) برحسب h به دست آورید.
 ۲. اکنون کیک به شکل استوانه که یک قسمت مخروطی شکل از داخل آن برداشته شده است در نظر بگیرید، به طوری که سطح قاعده و ارتفاع این کیک برابر سطح قاعده و ارتفاع کیک نیمکره‌ای شکل باشد.



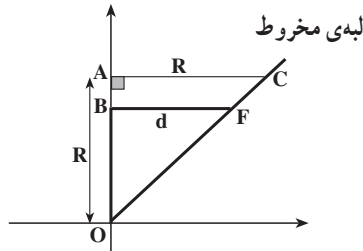
شکل ۳۶

۳. قسمت‌های (الف) تا (پ) را برای کیک فوق انجام دهید.
 ۴. با مقایسه‌ی مساحت برش‌های مختلف (سطح مقطع‌ها) در دو کیک، چه نظری در مورد حجم نیمکره دارید؟ اصل کاوالیری را به یاد بیاورید!
 می‌خواهیم با استفاده از اصل کاوالیری، حجم نیمکره را با حجم استوانه‌ای که یک مخروط از آن خارج شده است مقایسه کنیم.
 برای این کار، یک نیمکره با شعاع R و یک استوانه با شعاع R و ارتفاع R در نظر بگیرید که مخروطی با همان ارتفاع و همان شعاع از داخل آن برداشته شده است. این دو جسم فضایی را بر روی یک صفحه قرار می‌دهیم و آن‌ها را در ارتفاع d ، d کوتاه‌تر از R است) به وسیله‌ی یک صفحه‌ی موازی با این صفحه قطع کرده، آنگاه سطح مقطع‌های آن‌ها را با هم مقایسه می‌کنیم.



شکل ۳۷

سطح مقطع قائم شکل ۳۷ را دوباره رسم می کنیم.



با توجه به این که شعاع قاعده و ارتفاع استوانه و مخروط برابر هستند، مثلث OAC متساوی الساقین است و چون زاویه‌ی A قائمه است، زاویه‌های O و C هر دو 45° هستند. همچنین در مثلث OBF نیز $\hat{O} = 45^\circ$ و $\hat{B} = 90^\circ$ ، در نتیجه $\hat{F} = 45^\circ$. پس مثلث OBF متساوی الساقین است. یعنی،

$$BF = OB$$

از طرفی $OB = d$. بنابراین :

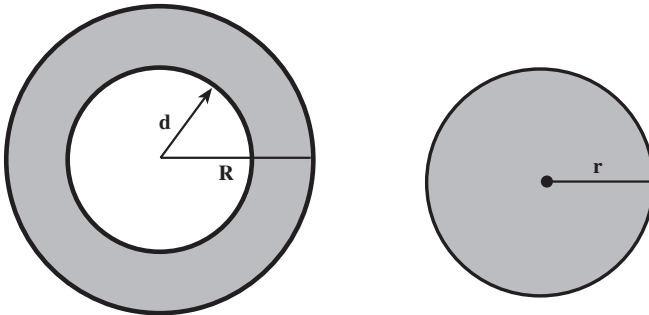
$$BF = d$$

حال اگر سطح مقطع شکل ۳۷ را در نظر بگیرید، یک حلقه به دست می آید که شعاع دایره‌ی بزرگتر، R و شعاع دایره‌ی کوچکتر d است.

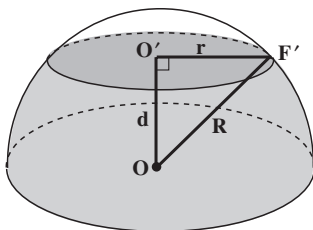
و

$$\text{مساحت قسمت هاشورخورده} = \pi R^2 - \pi d^2 \quad (۱)$$

همچنین سطح مقطع نیمکره یک قرص است.



برای پیدا کردن شعاع این قرص، به برش قائم آن نگاه می‌کنیم.



چون مثلث $OO'F'$ قائم‌الزاویه است (دلیل آن را توضیح دهید).

پس بنا بر قضیه‌ی فیثاغورس

$$\begin{aligned} r^2 &= R^2 - d^2 \\ \text{مساحت قرص} &= \pi r^2 \\ &= \pi(R^2 - d^2) \\ &= \pi R^2 - \pi d^2 \end{aligned} \quad (2)$$

چون (۱) و (۲) یعنی مساحت سطح مقطع‌های شکل ۳۷ با هم برابرند در نتیجه طبق اصل کاوالیری، حجم‌های آن‌ها نیز با هم مساوی هستند یعنی حجم نیمکره با حجم استوانه‌ای که یک مخروط هم قاعده و هم ارتفاع از آن خارج شده باشد برابر است. پس

$$\text{حجم مخروط} - \text{حجم استوانه} = \text{حجم نیمکره} \quad (3)$$

چون شعاع استوانه R و ارتفاع آن نیز R است در نتیجه:

$$\begin{aligned} \text{ارتفاع} \times \text{مساحت قاعده} &= \text{حجم استوانه} \\ &= \pi R^2 \times R \\ &= \pi R^3 \end{aligned} \quad (4)$$

همچنین حجم مخروطی با شعاع قاعده‌ی R و ارتفاع R برابر است با:

$$\begin{aligned} \text{ارتفاع} \times \text{مساحت قاعده} &= \frac{1}{3} \times \text{حجم مخروط} \\ &= \frac{1}{3} \pi R^2 \times R \\ &= \frac{1}{3} \pi R^3 \end{aligned} \quad (5)$$

از جایگزینی (۴) و (۵) در (۳)، حجم نیمکره به دست می آید:

$$\text{حجم نیمکره} = \pi R^3 - \frac{1}{3} \pi R^3$$

$$\boxed{\text{حجم نیمکره} = \frac{2}{3} \pi R^3}$$

حجم کره دو برابر حجم نیمکره است، در نتیجه:

حجم کره‌ای به شعاع R برابر است با:

$$\text{حجم کره} = 2 \times \frac{2}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi R^3$$

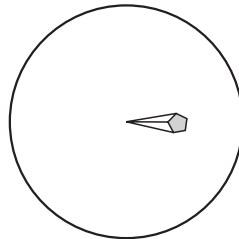
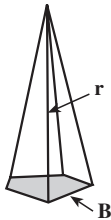
پیدا کردن سطح جانبی کره با استفاده از حجم کره

حجم تقریبی کره را می‌توانیم به طریق دیگری به دست آوریم. برای این کار، کره را به تعداد



زیادی شبه هرم تقسیم می‌کنیم، یعنی تصور کنید که سطح کره با تعداد بسیاری چندضلعی‌های خیلی کوچک پوشانده شده است. البته باید توجه داشته باشیم که این چندضلعی‌ها واقعی نیستند زیرا روی کره هیچ پاره‌خط راستی نمی‌تواند قرار بگیرد. هرکدام از این شبه چندضلعی‌ها قسمت‌هایی از سطح کره هستند، پس مسطح نمی‌باشند. تصور کنید که نقاط روی ضلع‌های این شبه چندضلعی‌ها را به مرکز کره وصل کرده‌ایم به طوری که این شبه چندضلعی‌ها، قاعده‌های

تعداد بسیاری شبه هرم با رأس مشترک یعنی مرکز کره باشند. در نتیجه، ارتفاع این شبه هرم‌ها برابر شعاع کره یعنی R است.



اگر قاعده‌ی یکی از شبه‌هرم‌ها را S در نظر بگیریم، حجم آن تقریباً مساوی $\frac{1}{3}R \times S$ می‌گردد. مجموع حجم این شبه‌هرم‌ها تقریب خوبی برای حجم کره می‌باشد. اگر سطح قاعده‌ی هر شبه‌هرم را به ترتیب S_1, S_2, \dots, S_n بنامیم، پس

$$\text{مجموع حجم شبه‌هرم‌ها} = \text{حجم تقریبی کره} = \frac{1}{3}RS_1 + \frac{1}{3}RS_2 + \dots + \frac{1}{3}RS_n$$

یا

$$\text{حجم تقریبی کره} = \frac{1}{3}R(S_1 + S_2 + \dots + S_n)$$

از طرفی، مجموع مساحت‌های قاعده‌های شبه‌هرم‌ها برابر مساحت سطح کره است که آن را با S نمایش می‌دهیم. در نتیجه:

$$\boxed{\text{حجم تقریبی کره} = \frac{1}{3}RS}$$

باید توجه داشته باشیم که هرچقدر تعداد شبه‌هرم‌ها بیشتر و بیشتر شود، حجم تقریبی کره به مقدار واقعی آن یعنی $\frac{4}{3}\pi R^3$ نزدیک و نزدیک‌تر می‌گردد. بنابراین،^۱

$$\frac{1}{3}RS = \frac{4}{3}\pi R^3$$

و از آنجا

$$S = 4\pi R^2$$

یعنی

$$\boxed{\text{مساحت کره} = 4\pi R^2}$$

۱- تنها قسمت نادقیق این استدلال، مساوی قراردادن مقدار حجم تقریبی با حجم واقعی بود. برای دقیق‌نمودن این استدلال، نیاز به ابزاری داریم که بالاتر از سطح این درس است.

مسائل

۱. دو کره به ترتیب دارای شعاع‌های ۱ و ۲ سانتی‌متر هستند.
الف) مساحت هرکدام از آن‌ها را پیدا کنید.
ب) حجم هر یک را به دست آورید.
پ) اگر شعاع یک کره دو برابر شود، مساحت آن چه تغییری می‌کند؟
ت) اگر شعاع یک کره دو برابر شود، حجم آن چه تغییری می‌کند؟
۲. مشابه سه‌بعدی یک نیم‌دایره، نیمکره است. چون محیط یک دایره به شعاع r ، برابر است با $2\pi r$ ، طول یک نیم‌دایره $= \pi r = \frac{1}{2}(2\pi r)$ است. فرض کنید شعاع نیمکره r باشد. برای هرکدام از موارد زیر فرمولی به دست آورید:
الف) حجم نیمکره؛
ب) مساحت رویه‌ی نیمکره؛
پ) مساحت کل نیمکره، یعنی مجموع مساحت‌های رویه‌ی نیمکره و سطح دایره‌ای مسطح آن.
۳. زمین تقریباً شکل یک کره است. شعاع زمین 6400 کیلومتر است.
الف) مساحت سطح زمین را حساب کنید.
ب) حجم زمین را حساب کنید.
۴. مساحت سطح یک کره 36π سانتی‌متر مربع است.
الف) شعاع این کره را به دست آورید.
ب) حجم کره را محاسبه کنید.

منابع

- 1- Dieudonné, J. (1981). The **universal domination of geometry**. ZDM, 13 (1), P 5-7.
- 2- Discussion Document for an ICME Study. (1994). **Perspectives on the teaching of geometry for the 21 st century**. The International Commission on Mathematical Instruction.
- 3- Dukowski, L. & etal. (1988). **Mathematics 8**. Houghton Mifflin Canada Limited.
- 4- Hoffer, A. (1981). Geometry is more than Proof. **Mathematics Teacher**. 74(1),11-26
- 5- Hoehsmann, K. (1991). **Lecture notes**. Mathematics Department, The University of British Columbia. Vancouver, Canada.
- 6- Jacobs, H. R. (1974). **Geometry** . W.H.Freeman & Company.
- 7- Jacobs, H. R. (1982). **Mathematics, A Human Endeavor**. 2nd ed. W. H. Freeman & Company.
- 8- Kalin, R.& Corbitt, M.K. (1990). **Geometry: Teachers' Edition**. Prentice Hall, N J.
- 9- Kelly, B., Alexander, B.& Atkinson, P. (1987). **Mathematics 10**. Addison - Wesley Pub. Ltd.
- 10- Kerr, D.R, JR. (1981). A geometry from National Assessment. **Mathematics Teacher**. 74 (1), 27-32
- 11- Kline, M. (1974). **Why Johnny Can't add: The failure of the New Math**. New york: Vintage Books.
- 12- Lakatos, I. (1977). **Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery**. London: Cambridge University Press.
- 13- Lang, S., Murrow, G. (1988). **Geometry: A High School Course**, 2nd ed. Springer - Verlag.
- 14- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (1970). **A History of Mathematics Education in the United States and Canada**. Thirty Second



- year book. Author.
- 15- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (1985). **Secondary School mathematics Curriculum: 1985 Yearbook**. Edited by C.R.Hisch. Reston, VA: Author
 - 16- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (1987). **Learning and teaching Geometry, K-12: 1987 Yearbook**. Edited by M.M. Lindquist. Reston, VA: Author
 - 17- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (1989). **Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics**, Reston, VA: Author.
 - 18- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (1991). **Geometry from Multiple Perspectives: Addenda Series, Grades 9-12: Author**.
 - 19- Robitaille, D. F.(1973). Why are we teaching high school Geometry? **Vector**. 14 (4), 13 - 22.
 - 20- Senk, S. (1989). Van Hiele levels and achievement in writing geometry proofs. **Journal of Research in Mathematics Education**. 20 (3), 309-321.
 - 21- Steen, L. A.(ed.) (1990). **On the shoulders of Giants: New approach to numeracy**. National Academy Press, Washington D.C.
 - 22- Stone, M. (1971). Learning and teaching axiomatic geometry. **Educational Studies in Mathematics**. 4, 91-103.
 - 23- Welchons, A. M., Krichenberger, W. R., Pearson & H. R.(1976). **Plane Geometry** . Ginn & Company.

۲۴- مویز و دانز (۱۳۷۳). هندسه (مترجم: محمود دبانی)، انتشارات فاطمی، تهران.

۲۵- بختیاری، جواد. جوهره و ساختار هندسی خط نستعلیق.



فهرست

۱	فصل ۱- هندسه و استدلال
۱	۱-۱- کشف اطلاعات از طریق مشاهده
۲	۲-۱- کشف اطلاعات از طریق تجربه
۱۵	۳-۱- استدلال در هندسه
۱۷	۴-۱- مثلث‌های همنهشت
۲۱	۵-۱- مثلث متساوی‌الساقین
۲۸	۶-۱- از خَم ساده تا چندضلعی
۳۱	۷-۱- متوازی‌الاضلاع
۳۷	فصل ۲- مساحت و قضیه‌ی فیثاغورس
۳۷	۱-۲- مساحت
۵۳	۲-۲- قضیه‌ی فیثاغورس
۶۸	فصل ۳- تشابه
۶۸	۱-۳- نسبت و تناسب
۷۷	۲-۳- قضیه تالس در مثلث
۸۳	۳-۳- مثلث‌های متشابه
۸۶	۴-۳- حالت‌های تشابه دو مثلث
۹۳	۵-۳- پاره‌خط‌های متناسب در دو مثلث متشابه
۹۷	۶-۳- محیط و مساحت شکل‌های متشابه
۱۰۷	فصل ۴- شکل‌های فضایی
۱۰۸	۱-۴- خط و صفحه در فضا
۱۱۰	۲-۴- مکعب مستطیل
۱۱۷	۳-۴- منشور و استوانه
۱۲۳	۴-۴- اصل کاوالیری، حجم منشور و استوانه
۱۲۹	۵-۴- هرم و مخروط
۱۳۶	۶-۴- کُرّه
۱۴۴	منابع