فصل ۴

هندسه در فضا

مسجد آقا بزرگ ــ کاشان

شاهکارهای معماری ایرانی، نمادی از پیوند فرهنگ و تمدن ایرانی و اسلامی است که به بهترین شکلی نبوغ و خلاقیت شگفت‌آور و روح زیبایی‌شناسی نیاکان ما را به نمایش درآورده است. شگفت‌آورترین ویژگی پنهان در خلق این آثار تاریخی ارزشمند، نقش اساسی و بی‌همتای ریاضیات و به‌ویژه ایده‌های مهم هندسی، محور اصلی و نقطه‌ی مرکزی در پیوند و ترکیب ابعاد زیبایی‌شناسی، هنری، استحکام و روح‌افزایی این آثار شکوهمند است. با نگاهی تیزبینانه‌تر به نقش ریاضیات و هندسه در این بناهای ماندگار، به خصلت نیکوی علم‌جویی و به‌کارگیری آن در نزد نیاکان خویش پی می‌بریم که همواره زبانزد بوده است.

تقریباً اکثر گردشگران خارجی که از این آثار و بناها بازدید می‌کنند، از شکوه و زیبایی، از فضای روح‌انگیز و آرامش‌بخش معنوی آن حیرت‌زده می‌شوند. و معمولاً ویژگی‌های هنری، دانش و علم به‌کار رفته در طراحی و ساخت آنها را مورد توجه و گاهی مورد سؤال قرار می‌دهند. این کنجکاوی‌ها و احساس‌ها و پرس‌وجوها معمولاً برای کسانی که نگاه معمولی و عادی دارند ممکن

است اتفاق نیافتد، با این حال آنها که نگاه تیزبینانه‌تر دارند، وقتی در چنین محیط‌هایی و فضاهایی قرار می‌گیرند، پرسش‌های بسیاری به ذهنشان سرازیر می‌شود!

حال این سؤال مطرح است که آیا طراحان و سازندگان این بناها از دانش و علم پایه و مبنا برای طراحی و ساخت، آگاه بوده‌اند؟ دانش و علم به‌کار رفته چه بوده است؟ چه قانون‌مندی‌های علمی و هنری بکار گرفته شده است؟ چه دانش‌هایی در طراحی و ساخت آنها نقش اصلی و تعیین کننده داشته‌اند؟ آیا از فرهنگ‌های دیگر اقتباس کرده‌اند یا خودشان ابداع کرده‌اند؟...

اکنون فرض کنید همراه با دانش‌آموزان کلاس و معلم ریاضی برای گردش علمی و آموزشی به کاشان رفته‌اید و در حال بازدید از مسجد آقا بزرگ هستید! چه سؤالهایی به ذهن شما می‌رسد؟ کدام ایده‌های ریاضی و هندسی را مشاهده می‌کنید؟ در کلاس درس دربارهٔ آنها بحث همگانی کنید.

ریاضیات و مفاهیم و ایده‌های هندسی در قلب پاسخ‌های علمی این پرسش‌ها قرار دارد. به‌خصوص ایده‌های هندسی مربوط به اجسام سه‌بعدی (مثل ساختمان‌ها) نقش محوری در احداث این بناها و مساجد دارد. در این فصل به مطالعه برخی از مفاهیم و ایده‌های هندسی مربوط به فضای سه‌بعدی و اشیاء و اجسام سه‌بعدی می‌پردازیم که نقش مقدماتی و پایه برای ایده‌های پیچیدهٔ هندسی به‌کار رفته در طراحی و ساخت این آثار دارد.

۴ــ۱ــ خط و صفحه در فضا

در شکل بالا، خطها و صفحه‌های زیادی را می‌بینید. برخی از رابطه‌هایی که در این تصویر بین خطها و صفحه‌ها می‌بینید، همانهایی هستند که قبلاً با آنها آشنا شده‌اید. مطالعه وسیعتر و عمیقتر این رابطه‌ها، هدف این فصل است.

۴ــ۱ــ۱ــ صفحه در فضا

فعالیت ۴ــ۱

۱ــ در کلاس درس، به تخته کلاس روبه‌روی خود نگاه کنید و گوشه بالای سمت راست آن را نقطه A بنامید. گوشه بالای سمت چپ دیوار پشت سر خود را نیز، نقطه B بنامید.

۲ــ از نقطه A چند خط می‌گذرد؟ از نقطه B چند خط می‌گذرد؟

۳ــ از یک نقطه دلخواه چند خط می‌گذرد؟

۴ــ از دو نقطه متمایز A و B چند خط می‌گذرد؟

۵ــ با چند نقطه، می‌توان یک خط را مشخص کرد؟

۶ــ حداقل چند نقطه برای مشخص کردن یک خط، لازم است؟

این فعالیت زمینه‌ساز پذیرش اصل زیر است.

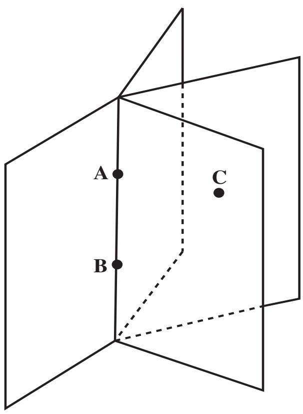
اصل ۱: از هر دو نقطه متمایز در فضا، **یک و تنها یک** خط، می‌گذرد.

توضیح: اصل ۱، دو مطلب مهم را بیان می‌کند :

الف) یک خط **وجود** دارد، که آن خط، از دو نقطه متمایز مفروض، می‌گذرد.

ب) این خط **یکتاست**. یعنی، اگر دو خط L_1 و L_2 از دو نقطه متمایز مانند A و B بگذرند، این دو خط **حتماً** بر هم منطبق می‌شوند. پس در واقع، یکی هستند.

فعالیت ۴ــ۲



۱ــ یک در را حول لولای خود (خط AB)، حرکت دهید. چه می‌بینید؟

۲ــ نقطه C را در فضا، در نظر بگیرید. آیا این در،ضمن حرکت،از نقطهٔ C می‌گذرد؟ این در، ضمن حرکت، چند بار از نقطه C می‌گذرد؟

۳ــ از هر دو نقطه A و B چند صفحه می‌گذرد؟

۴ــ با چند نقطه، می‌توان یک صفحه را مشخص کرد؟ در چه صورتی این نقطه‌ها، یک صفحه را مشخص می‌کنند؟

۵ــ برای مشخص‌کردن یک صفحه، **حداقل** چند نقطه لازم است؟

فعالیت ۴ــ۲، زمینه‌ساز پذیرش اصلهای زیر است.

اصل ۲: از هر سه نقطه در فضا که بر یک خط قرار ندارند، **یک و تنها یک** صفحه، می‌گذرد.

توضیح: اصل۲، دو مطلب مهم را بیان می‌کند :

الف) **یک صفحه وجود** دارد، که آن صفحه، از سه نقطه مفروض غیرواقع بر یک خط، می‌گذرد.

ب) این صفحه یکتاست. یعنی، اگر دو صفحه P_1 و P_2 از سه نقطه غیرواقع بر یک خط، مانند A، B و C بگذرند، این دو صفحه حتماً بر هم منطبق می‌شوند. پس در واقع، یکی هستند.

اصل ۳: در هر صفحه **حداقل** سه نقطه وجود دارد که بر یک خط قرار ندارند.

اصل ۴: حداقل چهار نقطه در فضا وجود دارد که بر یک صفحه قرار ندارند.

تمرین ۱ ــ به نظر شما فعالیت ۲، چه کمکی به درک بهتر اصل ۲، اصل ۳ و اصل ۴ می‌کند؟ هر کدام از این اصلها از کدام قسمتهای فعالیت ۲، نتیجه می‌شوند؟ توضیح دهید.

تمرین ۲ــ ثابت کنید خارج از هر صفحه حداقل یک نقطه وجود دارد.

راهنمایی: به اصل ۴ توجه کنید.

اگر مداد خود را روی سطح یک میز قرار دهید، مداد کاملاً روی سطح میز قرار می‌گیرد. این تجربه زمینه‌ساز پذیرش اصل زیر است.

اصل ۵: اگر دو نقطه متمایز از خطی، در یک صفحه باشند، آن خط به تمامی در آن صفحه قرار می‌گیرد.

تذکر: خط از هر دو طرف نامحدود است. صفحه از همه طرف نامحدود می‌باشد، بنابراین، طبیعی است که تمام صفحه را نمی‌توان در یک تصویر، نشان داد و آن‌چه که مشاهده می‌شود تنها بخشی از صفحه است.

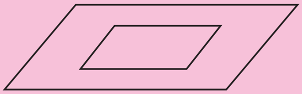
۴ــ۱ــ۲ــ وضعیت دو صفحه نسبت به هم، در فضا: در تصویر روبه‌رو، سطح آب و هر یک از دیواره‌های «پُل‌خواجو»، بخشهایی از دو صفحه هستند و همدیگر را در **یک خط** قطع کرده‌اند.

پل‌خواجو،اصفهان

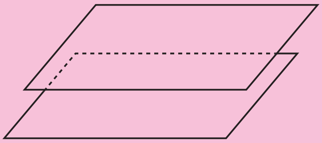
اصل ۶: اگر دو صفحه متمایز یک نقطه مشترک داشته باشند، آنگاه در یک خط، مشترک خواهند بود.

از این اصل نتیجه می‌شود که :

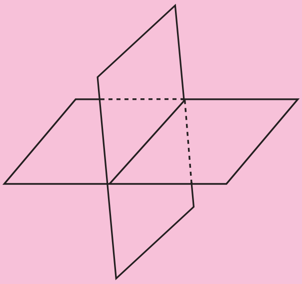
دو صفحه در فضا، نسبت به هم، یکی از سه وضعیت زیر را دارند :



الف) بر هم منطبق هستند.



ب) هیچ نقطه مشترکی ندارند.



پ) در یک خط مشترک هستند.

در دو وضعیت (الف) و (ب)، دو صفحه را **موازی** و در وضعیت (پ)، دو صفحه را **متقاطع** می‌نامند.

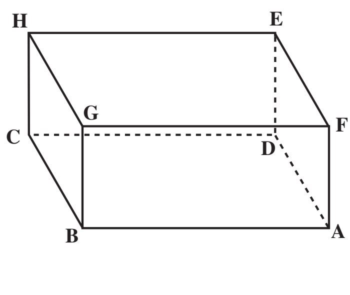
محل تقاطع دو صفحه، **فصل مشترک** آن دو صفحه نامیده می‌شود.

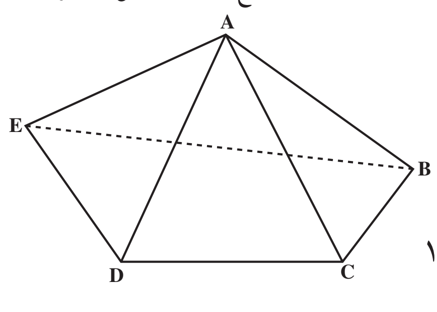
مثال: شیرازه هر کتاب، فصل مشترک تمام صفحه‌های آن کتاب است.

این مثال کمک می‌کند تا بهتر بفهمیم که چگونه از **یک خط**، **بیشمار صفحه می‌گذرد.**

تمرین ۱ـــ با یک کتاب و سطح یک میز، وضعیتهای‌مختلف دو صفحه نسبت به‌هم را، نشان دهید.

تمرین ۲ـــ در مکعب مستطیل و هرم داده شده، وضعیت صفحه‌های زیر را نسبت به هم مشخص کنید و در صورت متقاطع بودن، **فصل مشترک** آنها را مشخص کنید.





الف) صفحه‌های ADEF و BCHG در مکعب مستطیل.

ب) صفحه‌های ABC و ACD در هرم.

پ) صفحه‌های ABGF و FGHE در مکعب مستطیل.

ت) صفحه‌های ADE و ABC در هرم.

تمرین ۳ــ با استفاده از شکل تمرین (۲)، جاهای خالی را با کلمات مناسب پر کنید.

الف) در مکعب مستطیل، صفحه‌های ABC و ......، موازیند.

ب) در مکعب مستطیل، صفحه‌های ...... و BCHG متقاطعند.

پ) در مکعب مستطیل صفحه‌های ABGF و CDEH ......

ت) در مکعب مستطیل صفحه‌های CDEH و ABCD ......

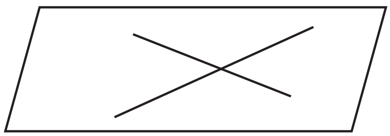
ث) در هرم صفحه‌های ABE و AED ......

ج) در هرم صفحه‌های BCD و ADE ......

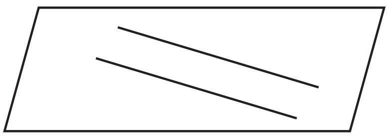
۴ــ۱ــ۳ــ وضعیت دو خط نسبت به هم، در فضا

چوب بازیِ اهالی تربت جام، شامل حرکتهای زیبایی است. این حرکتها، نمایش جالبی از وضعیت دو خط نسبت به هم در فضا هستند. مثلاً در یک حرکت، چوبها موازی هم قرار می‌گیرند و

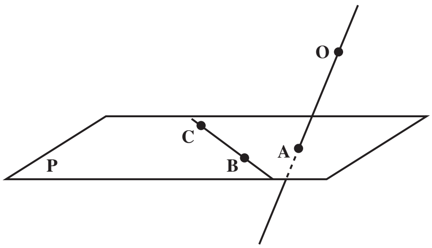
در حرکت دیگری چوبها به حالت متقاطع در می‌آیند. در این بازی حرکت دیگری هم وجود دارد که چوبها نه موازیند و نه متقاطع هستند. در این بازی، چوبها در واقع، خطهایی هستند که در فضا قرار گرفته‌اند.



اگر دو خط در فضا، در یک صفحه قرارگرفته باشند، طبق آنچه که در هندسه مسطحه دیده‌اید، نسبت به هم یا **موازیند** یا **متقاطع** هستند.

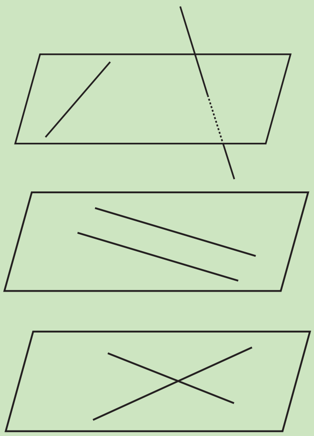


اما، می‌توانیم دو خط در فضا بیابیم که در یک صفحه قرار نگیرند.



مثال: یک صفحه P و یک نقطه O خارج آن در نظر بگیرید. حال، سه نقطه مانند A، B و C غیر واقع بر یک خط در این صفحه اختیار کنید. خطهای OA و BC در یک صفحه نخواهند بود. چرا؟

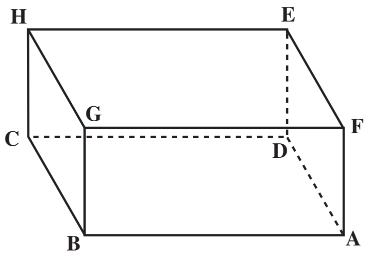
۱) دو خط در فضا را که در یک صفحه قرار نمی‌گیرند، دو خط **متنافر** می‌نامیم.
۲) دو خط در فضا را که در یک صفحه باشند و همدیگر را قطع نکنند، یا بر هم منطبق باشند، دو خط **موازی** می‌نامیم.
۳) دو خط در فضا را که فقط یک نقطهٔ مشترک داشته باشند، دو خط **متقاطع** می‌نامیم.

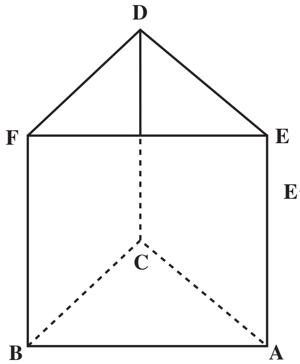


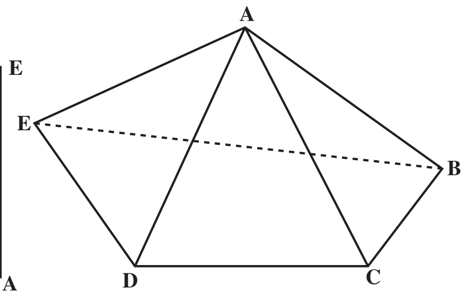
از دو خط متقاطع در فضا، همواره یک صفحه می‌گذرد. توجه کنید که متقاطع نبودن دو خط متمایز در فضا، به معنای موازی‌بودن آنها نیست، بلکه متقاطع نبودن و در یک صفحه قرار داشتن دو خط، به معنای توازی دو خط متمایز در فضا می‌باشد.

دو خط در فضا نسبت به هم،یا **متنافرند**،یا **متوازی‌اند** و یا **متقاطع**.

تمرین ــ در مکعب مستطیل، منشور و هرم داده شده، به سؤالات زیر پاسخ دهید.







الف) وضعیت دو خط AB و EH نسبت به هم، در مکعب مستطیل چگونه است؟ وضعیت دو خط AB و CD نسبت به هم، در منشور چگونه است؟ وضعیت دو خط AB و AD نسبت به هم، در هرم چگونه است؟

ب) در مکعب مستطیل دو خط **متنافر** با خط AB بیابید. در منشور دو خط **موازی** با خط AE بیابید. در هرم چند خط **متقاطع** با خط AB می‌توانید بیابید؟

پ) جاهای خالی را با کلمات مناسب پر کنید.

۱) در مکعب مستطیل، خط FG و خط ...... موازیند.

۲) در مکعب مستطیل، خط ...... و خط BC متقاطعند.

۳) در منشور، خط AD و خط ...... متنافرند.

۴) در منشور، خط DF و خط AC ......

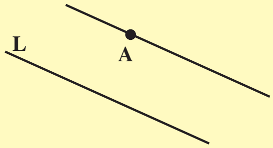
۵) در منشور، خط DC و خط ...... موازی است.

۶) در هرم، خط AC و خط ...... متنافرند.

اصل توازی اقلیدس

در هندسه مسطحه دیدیم که **از هر نقطه خارج یک خط، یک و تنها یک خط به موازات آن خط می‌گذرد.** این مطلب در فضا نیز برقرار است که آن را به عنوان یک اصل می‌پذیریم.

اصل ۷: از هر نقطه خارج یک خط در فضا، **یک و تنها یک** خط به موازات آن خط می‌گذرد.



توضیح: اصل ۷، دو مطلب مهم را بیان می‌کند :

الف) یک خط **وجود** دارد، که آن خط، از یک نقطه مفروض، به موازات یک خط مفروض می‌گذرد.

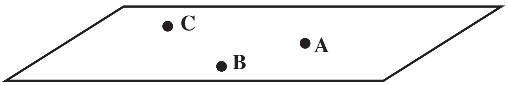
ب) این خط **یکتاست**. یعنی، اگر دو خط L_1 و L_2 از نقطه‌ای مانند A به موازات خطی مانند L بگذرند، این دو خط **حتماً** بر هم منطبق می‌شوند. پس در واقع، **یکی** هستند.

تمرین ــ اصلهای ۱ تا ۷ را مرور کنید و مشخص کنید در کدام اصلها، بر **وجود** خط یا صفحه تأکید شده است. در کدام اصلها، این وجود **یکتاست**.

مشخص‌کردن صفحه در فضا

به طور کلی، صفحه به صورتهای زیر مشخص می‌شود.

۱) از هر سه نقطه غیرواقع بر یک خط، یک و تنها یک صفحه می‌گذرد. (اصل ۲)



۲) از یک خط و یک نقطه خارج آن، یک و تنها یک صفحه می‌گذرد. چرا؟

۳) از دو خط متقاطع، یک و تنها یک صفحه می‌گذرد. چرا؟

۴) از دو خط متمایز موازی، یک و تنها یک صفحه می‌گذرد. چرا؟

صفحه در فضا را، به صورتهای دیگری نیز، می‌توان مشخص کرد.

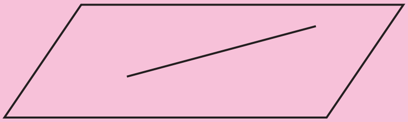
۴ـ۱ـ۴ـ وضعیت خط و صفحه نسبت به هم، در فضا

اگر دو نقطه متمایز از خطی در صفحه‌ای باشد، آن خط به تمامی در آن صفحه خواهد بود. در نتیجه، اگر خطی در صفحه‌ای قرار نداشته باشد، یا آن را قطع نمی‌کند، یا فقط در یک نقطه قطع می‌کند.

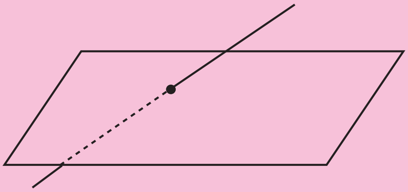
خط و صفحه در فضا، نسبت به هم، یکی از سه وضعیت زیر را دارند :

الف) خط صفحه را قطع نمی‌کند ؛

ب) خط به تمامی، در صفحه قرار می‌گیرد ؛

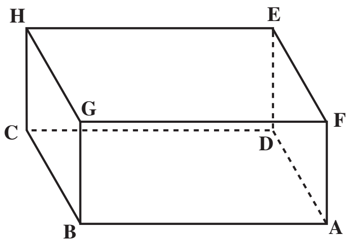


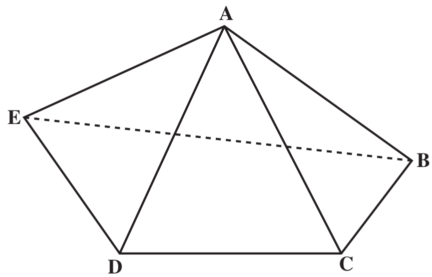
پ) خط و صفحه، در یک نقطه همدیگر را قطع می‌کنند.



در دو وضعیت (الف) و (ب)، خط و صفحه با هم **موازی** هستند و در وضعیت (پ)، خط و صفحه با هم **متقاطع** هستند.

تمرین ۱ـ در هر یک از شکلهای زیر، وضعیت خطها و صفحه‌های داده شده را نسبت به هم، مشخص کنید و در صورت متقاطع بودن، نقطه اشتراک آنها را تعیین کنید.





الف) صفحه ABGF و خط HC در مکعب مستطیل.

ب) صفحه BCDE و خط AB در هرم.

پ) صفحه EDCH و خط AD در مکعب مستطیل.

ت) صفحه ACE و خط BD در هرم.

تمرین ۲ــ با استفاده از شکلهای تمرین ۱، جاهای خالی را با کلمات مناسب پر کنید.

الف) در مکعب مستطیل خط AB با صفحه ...... موازی است.

ب) در مکعب مستطیل خط ...... با صفحه AFED متقاطع است.

پ) در مکعب مستطیل خط FG با صفحه BGHC ...... است.

ت) در هرم خط AC با صفحه ...... متقاطع است.

ث) در هرم خط ...... با صفحه ABC متقاطع است.

ج) در هرم خط BE با صفحه ...... موازی است.

مسأله‌ها

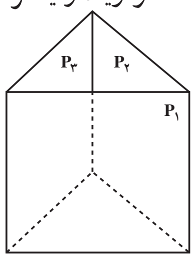
۱. اگر L_1 و L_2 دو خط متقاطع، و P_1 صفحه‌ای شامل L_1، و P_2 صفحه‌ای شامل L_2 باشند، وضعیت دو صفحه P_1 و P_2 نسبت به هم چگونه می‌تواند باشد؟

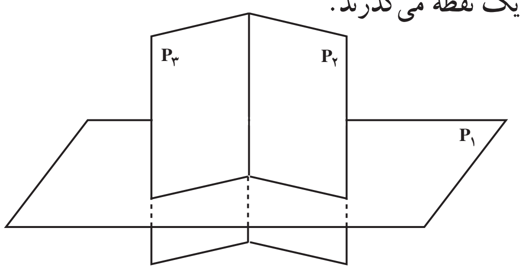
۲. اگر A، B، C و D چهار نقطه متمایز در فضا باشند، ثابت کنید این چهار نقطه در یک صفحه قرار دارند اگر و تنها اگر دو خط AB و CD متقاطع یا موازی باشند.

۳. اگر سه خط L_1، L_2 و L_3 دو به دو متقاطع باشند، ثابت کنید این سه خط در یک صفحه قرار دارند و یا همرسند.

۴. اگر A، B، C و D چهار نقطه در فضا باشند که در یک صفحه قرار نداشته باشند، وضعیت خطهایی که از دو به دو این نقطه‌ها می‌گذرد، چگونه است؟

۵. اگر P_1، P_2 و P_3 سه صفحه دو به دو متقاطع باشند، ثابت کنید فصل مشترکهای این سه صفحه، یا سه خط موازیند و یا هر سه از یک نقطه می‌گذرند.





راهنمایی: دو صفحه P_1، P_2 یکدیگر را در یک خط قطع می‌کنند. وضعیت این خط و صفحه P_3 را در نظر بگیرید.

ایل گلی در تبریز

۴ــ۲ــ خطها و صفحه‌های موازی

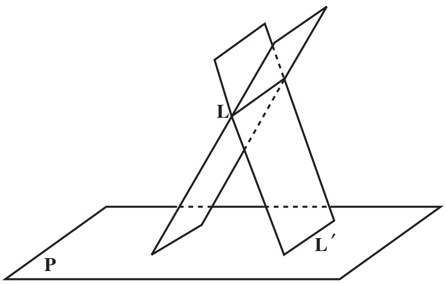
موازی بودن یک خط و صفحه در دو حالت رخ می‌دهد :

الف) خط و صفحه، هیچ نقطه اشتراکی ندارند، در نتیجه خط در صفحه قرار ندارد.

ب) خط به تمامی در صفحه قرار دارد.

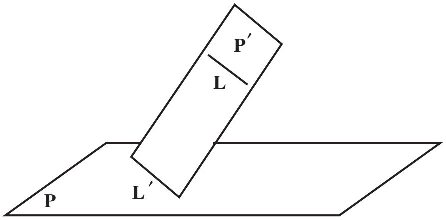
برای اثبات قضیه‌های مربوط به توازی خط و صفحه، باید هر دو حالت توازی در نظر گرفته شود.

۴ــ۲ــ۱ــ خط و صفحه موازی



اگر خط L با صفحه P موازی باشد و صفحه‌ای غیرموازی با P، از L بگذرد، P را در خطی مانند L′ قطع می‌کند. قضیه ۱ موازی بودن L و L′ را نشان می‌دهد.

قضیه ۱: اگر خط L با صفحه P موازی باشد، هر صفحه که از L بگذرد و با P متقاطع باشد، P را در یک خط موازی L قطع می‌کند.



برهان: برای اثبات این قضیه، دو حالت موازی بودن یک خط و صفحه در فضا را به تفکیک، در نظر می‌گیریم :

الف) خط L در صفحه P قرار ندارد.

فرض کنید P′ صفحه‌ای گذرنده از L باشد که P را در خط L′ قطع کند. L و L′ هر دو در صفحه P′ هستند و همدیگر را قطع نمی‌کنند، زیرا از متقاطع بودن L و L′ نتیجه می‌شود که خط L صفحه P را قطع می‌کند، که خلاف فرض است.

بنابراین، دو خط L و L′ هر دو، در صفحه P′ هستند و همدیگر را قطع نمی‌کنند، پس با هم موازیند.

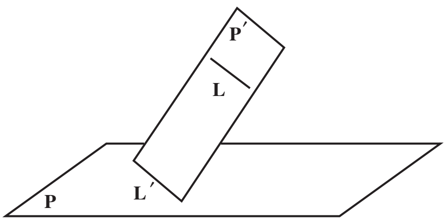
ب) خط L در صفحه P قرار دارد.

در این حالت هر صفحه P′ متمایز از P که از L می‌گذرد، صفحه P را در همان خط L قطع می‌کند و درستی قضیه روشن است.

از این قضیه، نتیجه می‌شود که اگر خطی با صفحه‌ای موازی باشد، با خطهای بیشماری از آن صفحه موازی است.

توجه: اگر خطی با صفحه‌ای موازی باشد، حداقل با یکی از خطهای آن صفحه موازی است. قضیه ۲ عکس این نتیجه را، نشان می‌دهد.

قضیه ۲: اگر خط L با یکی از خطهای صفحه P موازی باشد، آنگاه، خط L با صفحه P موازی است.



برهان: اگر خط L در صفحه P باشد **حکم قضیه برقرار است**. پس فرض کنید خط L در صفحه P قرار ندارد.

اگر L′ خطی از صفحه P باشد که با L موازی است، L و L′ متمایزند. صفحه‌ای را که از این دو خط موازی می‌گذرد P′ می‌نامیم. فصل مشترک دو صفحه P و P′ همان خط L′ است.

اگر خط L صفحه P را قطع کند محل تقاطع روی فصل مشترک این دو صفحه قرار دارد، یعنی دو خط L و L′ متقاطع خواهند شد که **خلاف فرض** است. پس خط L صفحه P را قطع نمی‌کند و با آن موازی است.

از این دو قضیه، نتیجه مهم زیر به دست می‌آید :

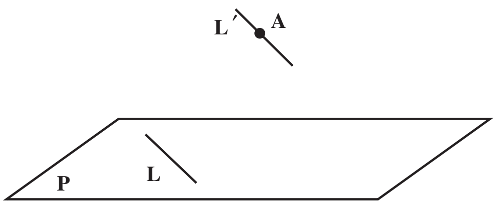
شرط توازی خط و صفحه: خط L با صفحه P موازی است، **اگر و تنها اگر**، L با یکی از خطهای صفحه P موازی باشد.

قضیه ۳: اگر خط L با صفحه P موازی و A نقطه‌ای از صفحه P باشد آنگاه، خطی که از A به موازات L رسم می‌شود، به تمامی در صفحه P قرار دارد.

این، نتیجه‌ای از قضیه ۱ و اصل توازی اقلیدس است[1].

مسأله: از نقطه A خارج صفحه P، خطی موازی P رسم کنید.

حل: در صفحه P، یک خط دلخواه L رسم کنید. از نقطه A، خط L' را موازی L بگذرانید. L' با یکی از خطهای صفحه P موازی است، پس خط L' با صفحه P موازی است.

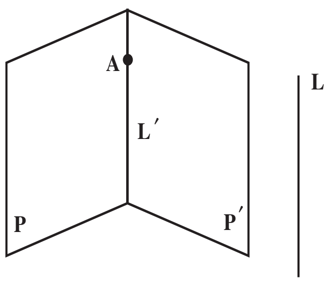


تمرین ــ چند خط می‌توان از یک نقطه مفروض موازی یک صفحه مفروض گذراند؟

نتیجه ۱ــ اگر دو خط با خط دیگری موازی باشند، آن دو خط با هم موازیند[2].

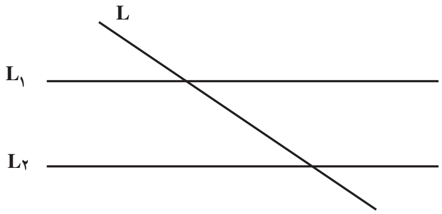
نتیجه ۲ــ اگر خطی با دو صفحه متقاطع، موازی باشد، با فصل مشترک آنها موازی است.

برهان: فرض کنید خط L موازی دو صفحه متقاطع P و P' باشد. از یک نقطه فصل مشترک مانند A، خط L' را موازی L رسم می‌کنیم. چون خط L با صفحه P موازی است، خط L' به تمامی در صفحه P قرار دارد. با استدلال مشابه خط L' به تمامی در صفحه P' قرار دارد. پس، L'، همان فصل مشترک دو صفحه P و P' است که با خط L نیز موازی است و **حکم، نتیجه می‌شود.**

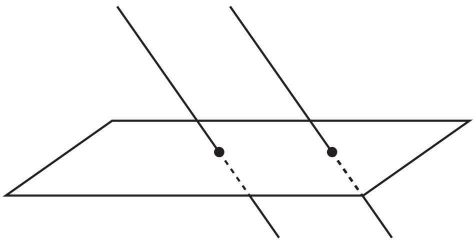


۱و۲ــ اثبات در پیوست

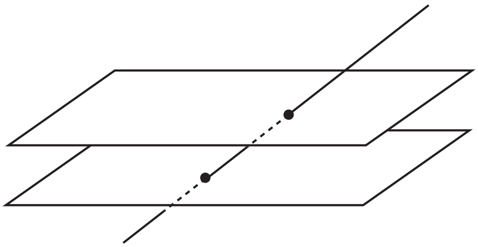
۴ــ۲ــ۲ــ چند ویژگی از خطها و صفحه‌های موازی



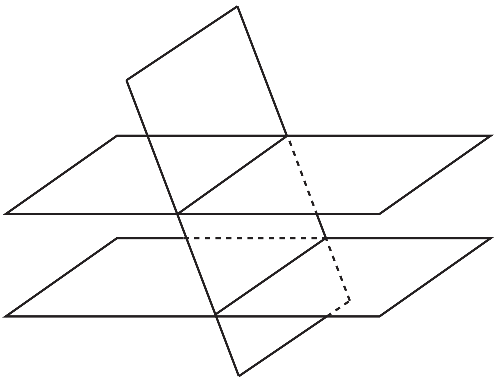
در هندسه مسطحه دیدیم، که اگر خطی یکی از دو خط موازی را قطع کند، دیگری را هم قطع می‌کند ؛ مشابه این ویژگی در فضا برای خطها و صفحه‌های موازی نیز وجود دارد، که به عنوان مثال، چند نتیجه زیر را بیان می‌کنیم :



نتیجه ۱ــ اگر صفحه‌ای یکی از دو خط موازی را قطع کند، دیگری را هم قطع می‌کند[1].



نتیجه ۲ــ اگر خطی یکی از دو صفحه موازی را قطع کند، دیگری را هم قطع می‌کند[2].



نتیجه ۳ــ اگر صفحه‌ای یکی از دو صفحه موازی را قطع کند، دیگری را هم قطع می‌کند و فصل مشترکها با هم موازیند[3].

۱ــ اثبات ۱،۲و۳ در پیوست

۴ـ۲ـ۳ـ صفحه‌های موازی

سطح میز و سطح زمین را به عنوان دو صفحه متمایز و موازی در نظر بگیرید. مداد خود را روی سطح میز قرار دهید.

۱ـ مداد نسبت به سطح زمین چه وضعیتی دارد؟

۲ـ مداد با سطح زمین موازی است یا متقاطع؟ توضیح دهید.

این مشاهده، زمینه‌ساز حدس زیر است :

اگر دو صفحه موازی باشند، هر خط از یکی از این دو صفحه، با صفحه دیگر موازی است.

می‌توان، با استدلال استنتاجی، درستی این حدس را ثابت کرد. بنابراین، اگر دو صفحه موازی باشند، هر خط یکی از این صفحه‌ها حداقل با یک خط از صفحه دیگر موازی است. پس، هر دو خط متقاطع از یکی از این دو صفحه، با دو خط متقاطع از صفحه دیگر موازی است. قضیه ۴ درستی عکس این مطلب را نشان می‌دهد.

قضیه ۴: اگر دو خط متقاطع از صفحه‌ای با دو خط متقاطع از صفحه دیگری دو به دو موازی باشند، آن دو صفحه موازیند[1].

مسأله: از نقطه A خارج از صفحه P، یک صفحه موازی صفحه P بگذرانید.

۱ـ اثبات در پیوست

حل: از نقطه A ، دو خط متمایز موازی صفحه P رسم می‌کنیم. طبق قضیه ۴ صفحه‌ای که از این دو خط می‌گذرد، همان صفحه موردنظر است.

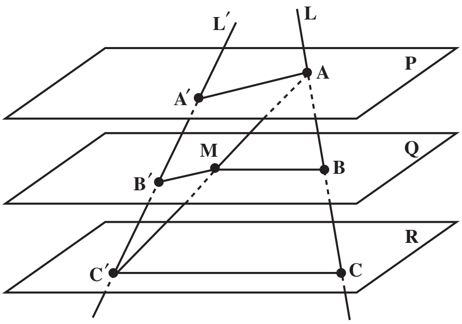
نتیجه ــ از یک نقطه خارج از یک صفحه، می‌توان صفحه‌ای موازی آن صفحه گذراند.

تمرین ــ در نتیجه بالا ثابت کنید، صفحه موازی **یکتاست**. یعنی، اگر دو صفحه Q_1 و Q_2 از نقطه A به موازات صفحه P بگذرند، این دو صفحه بر هم **منطبقند**، یعنی در واقع **یکی** هستند.

راهنمایی: به نتیجه ۳ توجه کنید.

قضیه ۵: (قضیه تالس در فضا). صفحه‌های موازی، روی دو خط که آنها را قطع می‌کنند، پاره‌خطهای متناظر متناسب ایجاد می‌کنند، یعنی اگر P، Q و R سه صفحه موازی باشند و دو خط L و L' این صفحه‌ها را به ترتیب در نقطه‌های A، B و C و A'، B' و C' قطع کنند، آنگاه :

$$\frac{AB}{BC}=\frac{A'B'}{B'C'}$$



برهان: طبق شکل، با فرض آن که صفحه Q بین دو صفحه P و R باشد، خط AC' را رسم کنید. این خط صفحه Q را در نقطه‌ای مانند M قطع می‌کند. صفحه گذرنده از دو خط متقاطع AC' و AC را P_1 و صفحه گذرنده از دو خط متقاطع AC' و $A'C'$ را P_2 بنامید. دو خط CC' و BM در صفحه P_1 ، موازیند (چرا؟). در صفحه P_1 ، با استفاده از قضیه تالس، نسبت زیر برقرار است.

$$\frac{AB}{BC}=\frac{AM}{MC'}$$

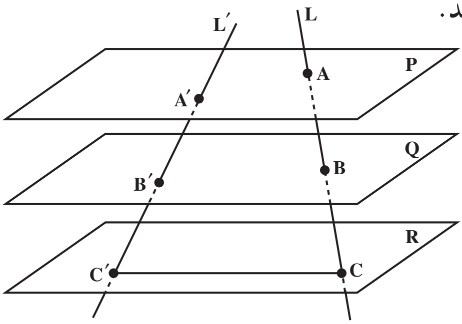
همچنین، دو خط AA' و MB' در صفحه P_2 موازیند (چرا؟)، و در صفحه P_2 ، با استفاده از قضیه تالس، نسبت زیر برقرار است.

$$\frac{A'B'}{B'C'}=\frac{AM}{MC'}$$

از این تساویها، حکم قضیه نتیجه می‌شود.

$$\frac{AB}{BC}=\frac{A'B'}{B'C'}$$

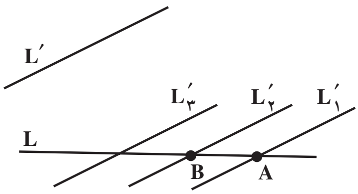
تمرین ــ سه صفحه موازی P، Q و R، دو خط متنافر L و L' را طبق شکل، به ترتیب در نقطه‌های A، B و C و A' ، B' و C' قطع کرده‌اند. اگر $\frac{AB}{BC}=\frac{۲}{۷}$ و $B'C'=۱۴$ باشد، اندازه پاره‌خط $A'B'$ را تعیین کنید.



توجه: عکس قضیه تالس در فضا، برقرار نیست. یعنی، اگر چند صفحه در فضا روی دو خط، پاره‌خطهای متناظر متناسب ایجاد کرده باشند، لزوماً آن صفحه‌ها موازی نیستند.

۴ــ۲ــ۴ــ زاویه بین دو خط در فضا

فعالیت ۴ــ۳



۱ــ دو خط متنافر L و L' را در نظر بگیرید.

۲ــ از یک نقطه مانند A روی خط L ، خط $L'_۱$ را به موازات L' رسم کنید. خطهای L و $L'_۱$ متقاطع می‌شوند. صفحه گذرنده از این دو خط را P بنامید.

۳ــ خط L' نسبت به این صفحه چه وضعیتی دارد؟ قضیه ۲ را فراموش نکنید!

۴ــ نقطه دیگری را نیز مانند B، روی خط L انتخاب کنید و از آن، خط $L'_۲$ را به موازات L' رسم کنید. خط $L'_۲$ نسبت به صفحه P چه وضعیتی دارد؟

۵ــ کدام مطلب به شما کمک کرد، تا وضعیت $L'_۲$ را نسبت به صفحه P تشخیص دهید؟

۶ــ نقطه دلخواه دیگری نیز، روی خط L انتخاب کنید و از آن، خط $L'_۳$ را به موازات L' رسم کنید. وضعیت $L'_۳$ نسبت به صفحه P چگونه است؟

۷ــ توضیح دهید که چرا خطهای L، L'_1، L'_2، L'_3 همگی در یک صفحه قرار دارند.

۸ــ آیا می‌توانید با استفاده از این فعالیت، زاویه بین دو خط متنافر را تعریف کنید؟ به آن فکر کنید! از فعالیت ۴ــ۳، می‌توان زاویه بین دو خط متنافر را به صورت زیر تعریف کرد :

دو خط متنافر L و L' داده شده‌اند. اگر از هر نقطه روی L یا L' خطی موازی دیگری رسم شود، زاویه حاده یا قائمه بین این دو خط متقاطع، **زاویه بین آن دو خط متنافر**، نامیده می‌شود.

با استفاده از این تعریف، عمودبودن دو خط در فضا، به صورت زیر تعریف می‌شود :

دو خط L و L' را **عمود** بر یکدیگر نامیم، هرگاه زاویه بین آنها، **قائمه** باشد.

تمرین ــ به محیط اطراف خود به دقت بنگرید و خطهای متنافر عمود بر هم را شناسایی کنید.

نتیجه ۱ــ اگر خطی بر یکی از دو خط موازی عمود باشد، بر دیگری هم عمود است.

همچنین، از فعالیت ۴ــ۳، نتیجه می‌شود که :

نتیجه ۲ــ اگر L و L' دو خط متنافر باشند، یک صفحه شامل L وجود دارد که با L' موازی باشد.

می‌توان ثابت کرد که صفحه شامل L و موازی L' یکتاست[۱].

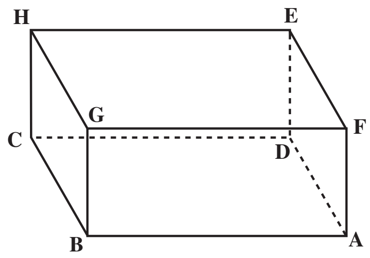
تمرین ــ با توجه به مکعب مستطیل زیر، جاهای خالی را با کلمات مناسب پر کنید.

۱) یال AB با یال ...... موازی است.

۲) یال ...... بر یال FE عمود است.

۳) یال GH و یال DE ......

۴) یال AD و یال HC ......



۱ــ اثبات در پیوست

مسأله‌ها

۱. ثابت کنید که اگر دو صفحه موازی باشند، هر خط واقع بر یکی از این صفحه‌ها، با صفحه دیگر موازی است. آیا عکس مطلب نیز درست است؟ یعنی، اگر هر خط از صفحه مفروضی، با صفحه مفروض دیگری موازی باشد، آیا آن دو صفحه موازیند؟

۲. از نقطه O خارج از صفحه P چند خط می‌گذرد که با P موازی است؟ از نقطه O خارج از یک خط مانند L چند صفحه می‌گذرد که با L موازی است؟

۳. اگر O نقطه‌ای خارج از صفحه‌ای مانند P باشد، ثابت کنید کلیه خطهای گذرنده از O که با P موازی هستند در یک صفحه موازی P قرار دارند.

۴. اگر دو صفحه با صفحه سومی موازی باشند، خودشان با هم موازیند.

۵. اگر صفحه‌ای با یکی از دو خط موازی، موازی باشد با دیگری هم موازی است.

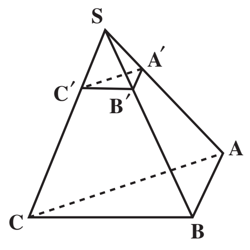
۶. ثابت کنید خطی که با یکی از دو صفحه موازی، موازی است با دیگری هم موازی است.

۷. در فضا، اگر خطی یکی از دو خط موازی را قطع کند، آیا لزوماً دیگری را هم قطع می‌کند؟ در صورت درستی این حکم، آن را ثابت کنید و در صورت نادرستی، یک مثال با شکل رسم کنید.

۸. اگر دو خط در دو صفحه موازی قرار داشته باشند، آیا می‌توان نتیجه گرفت این دو خط موازیند. در صورت درستی آن را ثابت کنید و در صورت نادرستی یک مثال با شکل رسم کنید.

۹. ثابت کنید که در یک هرم، وسط یالهای آن، در یک صفحه موازی صفحه قاعده قرار دارند.

۱۰. در هرم روبه‌رو صفحه $A'B'C'$ موازی صفحه قاعده ABC است و $SA = ۵SA'$. نسبت مساحت مثلث $A'B'C'$ به مساحت مثلث ABC چقدر است؟



ساختمان شمس‌العماره در تهران

۴ـ۳ـ خطها و صفحه‌های عمود برهم

ایده‌های هندسی فراوانی در ساختمان بناها بکار گرفته می‌شوند. مفهوم تعامد و عمود بودن برسطح زمین در مورد ستونهای اصلی و دیوارها از اصول اولیه در ساختن بناها می‌باشد. در واقع رعایت اصول ریاضی و هندسی موجب بقاء و پایداری این‌گونه بناها می‌شود. تصویر بالا یکی از آثار باستانی ارزشمند است که شمس‌العماره نامیده می‌شود. این بنا مملو از ایده‌های زیبای هندسی است. به آن فکر کنید و ایده‌های مربوط به خطها و صفحه‌های عمود بر هم را تجسم کنید.

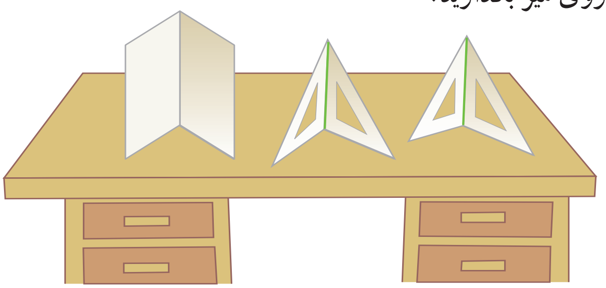
تخت‌جمشید در فارس

۴ـ۳ـ۱ـ خط عمود بر صفحه

خط L بر صفحه P عمود است، هرگاه صفحه P را قطع کند و بر هر خط صفحه P که از نقطه تقاطع می‌گذرد، عمود باشد.

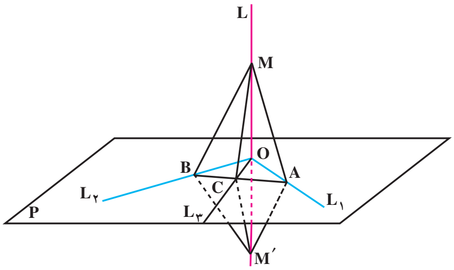
چون هر صفحه را، با دو خط غیرموازی آن می‌توان مشخص کرد، به نظر می‌رسد که برای عمود بودن یک خط بر صفحه، کافی است آن خط بر دو خط غیرموازی از آن صفحه عمود باشد. روش عملی زیر برای ساختن خط عمود بر یک صفحه، این حدس را تقویت می‌کند.

دو گونیا بردارید و از هرکدام، یک ضلع زاویه قائمه را، به گونه‌ای روی سطح میز قرار دهید که در یک امتداد نباشند و ضلع دیگر زاویه قائمه آنها، برهم منطبق شوند. کتاب هندسه خود را باز کنید و مطابق شکل زیر روی میز بگذارید.



درهر وضعیتی که دو گونیا را مطابق شرایط بالا قرار دهید، ضلع مشترک دو گونیا، بر صفحه سطح میز عمود می‌شود. به همین ترتیب فصل مشترکهای صفحه‌های کتاب نیز برصفحه سطح میز عمود است.

قضیه ۶: (قضیه اساسی تعامد). خط L بر صفحه P عمود است **اگر و تنها اگر**، صفحهٔ P را قطع کند و بر دو خط غیرموازی آن که از نقطهٔ تقاطع می‌گذرند، عمود باشد.



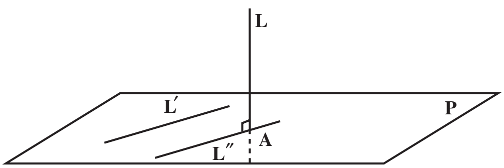
برهان: اگر خط L بر صفحه P عمود باشد، طبق تعریف، صفحهٔ P را قطع می‌کند و بر هر خط این صفحه که از نقطه تقاطع می‌گذرد، عمود است. در نتیجه بر آن دو خط غیرموازی گذرنده از نقطهٔ تقاطع نیز عمود است. برعکس، فرض کنید L صفحه P را در نقطه‌ای مانند O قطع کند و بر دو خط غیرموازی این صفحه مانند L_1 و L_2 که از O می‌گذرند عمود باشد. باید ثابت کنیم که L بر هر خطی از این صفحه مانند L_3 که از O می‌گذرد، عمود است. نقطه‌های A و B را به ترتیب روی L_1 و L_2 چنان اختیار می‌کنیم که پاره‌خط AB، خط L_3 را در نقطه‌ای مانند C قطع کند. روی خط L و در دو طرف نقطه O، نقطه‌های M و M' را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که $OM = OM'$ باشد. در صفحه گذرنده از خط L و نقطه A، خط OA عمودمنصف پاره‌خط MM' است، پس، $AM = AM'$. با استدلال مشابه، نتیجه می‌شود $BM = BM'$. بنابراین، دو مثلث MAB و $M'AB$ به حالت (ض‌ض‌ض)، همنهشتند. در نتیجه، دو زاویه $M\hat{A}C$ و $M'\hat{A}C$ مساویند و دو مثلث MAC و $M'AC$ نیز به حالت (ض‌زض) همنهشت هستند.

پس، $MC = M'C$ و مثلث MCM' ، در رأس C متساوی‌الساقین است و چون OC میانه وارد بر ضلع MM' است. پس، خط OC بر خط MM' عمود است، یعنی خط L بر خط L_3 عمود است.

تعمیم قضیهٔ اساسی تعامد

با توجه به تعریف عمودبودن دو خط متنافر، می‌توان نشان داد که **اگر خطی بر صفحه‌ای عمود باشد، بر هر خط از آن صفحه نیز، عمود است.**

برای نشان دادن این مطلب، فرض کنید خط L بر صفحه P عمود است و آن‌را در نقطه A قطع کرده است. فرض کنید L' خط دلخواهی در صفحه P باشد. از نقطه A در صفحه P خط L'' را به موازات L' رسم می‌کنیم. از آنجا که L بر L'' عمود است و L'' با L' موازی است، L بر L' هم عمود است.



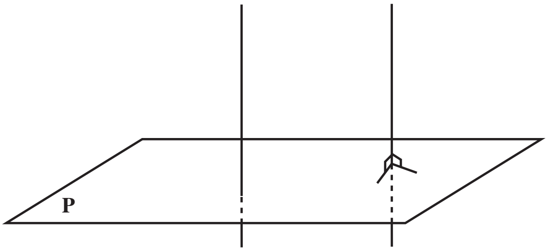
برعکس، اگر خط L بر همهٔ خطهای صفحهٔ P عمود باشد، می‌توان نشان داد که L بر صفحهٔ P عمود است. کافی است ثابت کنیم L صفحهٔ P را قطع می‌کند. بدین منظور می‌توان نشان داد که اگر خطی بر دو خط غیرموازی صفحه‌ای عمود باشد، با آن صفحه متقاطع است[1]. بنابراین :

> خط L بر صفحه P عمود است **اگر و تنها اگر**، L بر همهٔ خطهای صفحهٔ P عمود باشد.

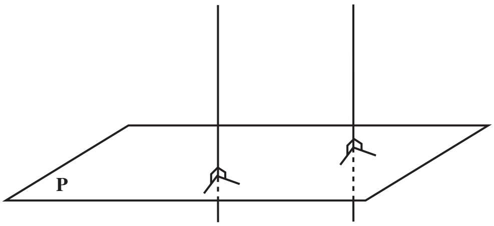
و قضیهٔ اساسی تعامد را به صورت زیر می‌توان تعمیم داد :

> خط L بر صفحهٔ P عمود است **اگر و تنها اگر**، بر دو خط غیرموازی از P عمود باشد.

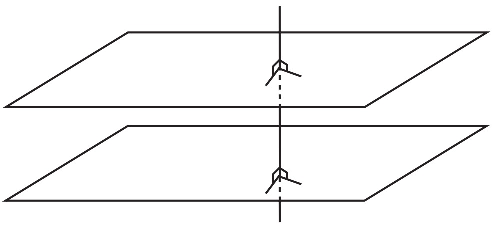
نتیجه ۱ــ اگر یکی از دو خط موازی بر یک صفحه عمود باشد، دیگری هم بر آن صفحه عمود است.[2]



نتیجه ۲ــ دو خط عمود بر یک صفحه، با هم موازیند.[3]

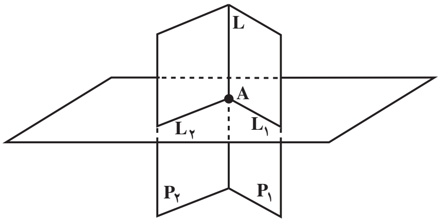


نتیجه ۳ــ دو صفحه عمود بر یک خط، با هم موازیند.[4]



۱ــ اثبات در پیوست

۲ــ اثبات ۲، ۳ و۴ در پیوست



مسأله ۱: از نقطه A روی خط L، صفحه‌ای بر خط L عمود کنید.

حل: می‌توانیم از خط L بیشمار صفحه بگذرانیم. دو صفحه متمایز از این صفحه‌ها را P_1 و P_2 می‌نامیم. از نقطه A در صفحه P_1، خط L_1 را عمود بر L رسم می‌کنیم. به طور مشابه، از نقطه A در صفحه P_2، خط L_2 را عمود بر L رسم می‌کنیم.

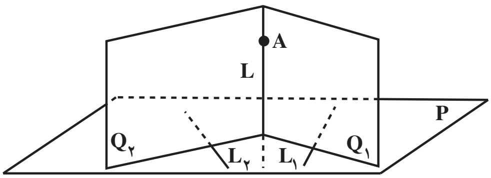
خطهای L_1 و L_2 متقاطعند و خط L بر هر دوی آنها عمود است. طبق **قضیه اساسی تعامد،** خط L بر صفحه گذرنده از L_1 و L_2 نیز عمود است. این صفحه، همان صفحه مطلوب است.

تمرین ــ از نقطه A خارج از خط L، یک صفحه عمود بر L، بگذرانید. ثابت کنید این صفحه یکتاست.

راهنمایی: به نتیجه ۳ توجه کنید.

بنابراین، نتیجه مهم زیر به دست می‌آید.

> از هر نقطه مانند A در فضا، **یک و تنها یک** صفحه می‌گذرد که بر خطی مانند L عمود باشد.

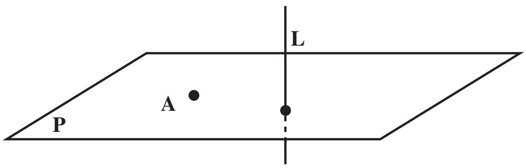


مسأله ۲: از نقطه A خطی رسم کنید که بر صفحه P عمود باشد.

حل: دو خط غیرموازی L_1 و L_2 را در صفحه P در نظر بگیرید. از نقطه A صفحه Q_1 را عمود بر L_1 و صفحه Q_2 را عمود بر L_2 رسم کنید. این دو صفحه متقاطعند ؛ فصل مشترک آنها را L بنامید. طبق قضیه اساسی تعامد، L بر صفحه P عمود است و L همان خط مطلوب است.

طبق نتیجه(۲)،این خط یکتاست، و نتیجه زیر برقرار است.

> از هر نقطه مانند A در فضا، **یک و تنها یک** خط می‌گذرد که بر صفحه‌ای مانند P عمود باشد.



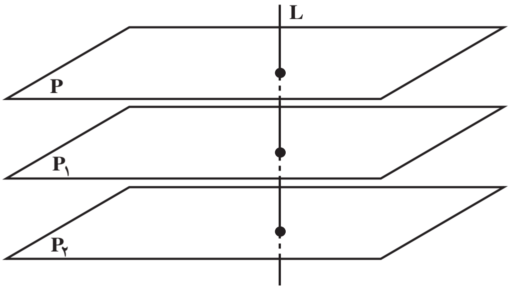
توضیح: با توجه به مسأله ۱ و یکتایی صفحه، در می‌یابیم که یک صفحه در فضا را به صورت زیر نیز، می‌توان مشخص کرد.

هر صفحه، با یک نقطه از آن، و یک خط عمود بر آن، مشخص می‌شود.

۴ــ۳ــ۲ــ کاربرد تعامد در حل مسأله‌های توازی

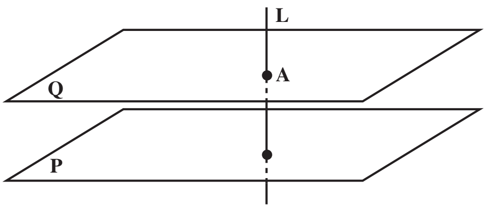
قضیه‌ها و نتیجه‌های این بخش، کمک می‌کنند تا بسیاری از مسأله‌هایی را که در **بخش خطها و صفحه‌های موازی** با آنها آشنا شده‌اید، با استفاده از **تعامد** حل کنید. برای نشان‌دادن این مطلب، سه مثال زیر را که قبلاً در بخش **خطها و صفحه‌های موازی** آنها را دیده‌اید، در نظر بگیرید. اکنون، این سه مثال را مجدداً، با کمک مطالب این بخش، حل می‌کنیم. لازم به توضیح است که حل این سه مثال **مستقل** از اثبات آنها در آن بخش است.

مثال ۱: اگر صفحه P با دو صفحه P_1 و P_2 موازی باشد، دو صفحه P_1 و P_2 نیز با هم موازیند.



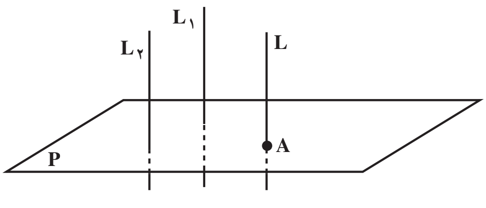
حل: خط L را بر صفحه P عمود می‌کنیم. L بر P_1 و P_2 نیز عمود می‌شود. پس، دو صفحه P_1 و P_2 بر یک خط عمودند. بنابراین با هم موازیند.

مثال ۲: از نقطه A خارج از صفحه P، یک صفحه موازی P می‌گذرد.



حل: از نقطه A خط L را عمود بر P رسم می‌کنیم. سپس، از نقطه A، صفحه Q را عمود بر L رسم می‌کنیم. دو صفحه P و Q هر دو بر خط L عمودند، بنابراین با هم موازیند.

مثال ۳: اگر خط L با دو خط L_1 و L_2 موازی باشد، دو خط L_1 و L_2 نیز با هم موازیند.

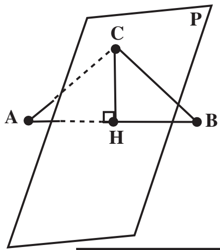


حل: صفحه P را بر خط L عمود می‌کنیم. P بر L_1 و L_2 نیز عمود می‌شود. پس، دو خط L_1 و L_2 بر یک صفحه عمودند، بنابراین با هم موازیند.

۴ــ۳ــ۳ــ صفحه عمودمنصف یک پاره‌خط

عمودمنصف یک پاره‌خط، در صفحه، خطی است که در وسط آن پاره‌خط بر آن عمود باشد. به‌طور مشابه، صفحه عمودمنصف یک پاره‌خط در فضا، تعریف می‌شود.

صفحه‌ای را که در وسط یک پاره‌خط، بر آن عمود باشد، صفحه عمودمنصف آن پاره‌خط، می‌نامیم.

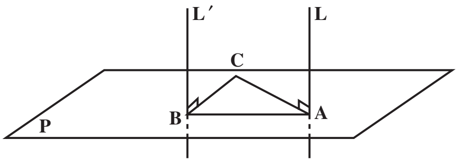


در فصل ۱ ثابت کردیم که عمودمنصف یک پاره‌خط، مکان هندسی نقطه‌هایی از صفحه است که از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله‌اند. برای صفحه عمودمنصف یک پاره‌خط در فضا نیز، همین حکم برقرار است.

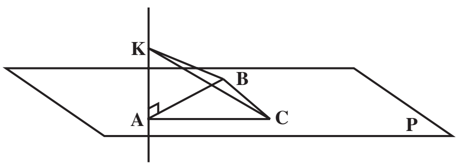
صفحه عمودمنصف یک پاره‌خط، مکان هندسی نقطه‌هایی از فضا است که از دو سر آن پاره‌خط، به یک فاصله‌اند[1].

مسأله‌ها

۱. ثابت کنید که در یک مکعب مستطیل هر یال در دو وجه قرار دارد، و با دو وجه موازی است، و بر دو وجه عمود است.



۲. فرض کنید L و L' دو خط موازی باشند که صفحه P را به ترتیب در نقاط A و B قطع کنند. اگر C نقطه‌ای در صفحه P باشد که روی خط AB نباشد و خط L بر خط AC و خط L' بر خط BC عمود باشد، ثابت کنید دو خط L و L' بر صفحه P عمودند.



۳. فرض کنید A، B و C سه نقطه از صفحه P باشند که بر یک خط قرار ندارند و $AB = AC$. اگر K نقطه‌ای خارج از صفحه P باشد که $KB = KC$ و خط KA بر خط AB عمود باشد، ثابت کنید خط KA بر صفحه P عمود است.

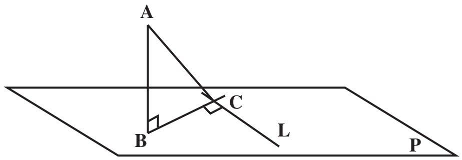
۴. اگر خطی بر یکی از دو صفحه موازی عمود باشد، بر دیگری هم عمود است.

۱ــ اثبات در پیوست

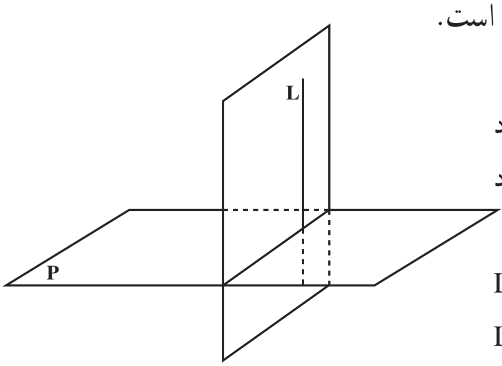
۵. اگر خط L بر صفحه P عمود باشد، هر خطی که بر خط L عمود باشد با صفحه P موازی است.

۶. تمام خطهای گذرنده از یک نقطه مانند O و عمود بر یک خط مانند L، در یک صفحه قرار دارند که بر خط L عمود است.

۷. اگر L و L′ دو خط متنافر باشند، از هر نقطه A یک و تنها یک خط می‌گذرد که بر L و L′ عمود است.



۸. فرض کنید L یک خط در صفحه P، و B و C دو نقطه متمایز در صفحه P باشند که خط BC در نقطه C بر خط L عمود باشد. اگر A نقطه‌ای در فضا باشد که خط AB بر صفحه P عمود باشد، ثابت کنید خط AC بر خط L عمود است.



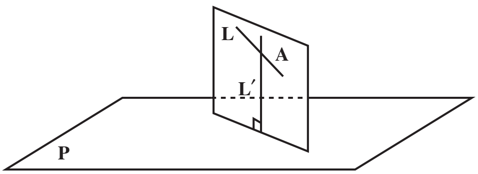
۴ــ۳ــ۴ــ دو صفحه عمود برهم

یادآوری از هندسه (۱): دو صفحه را عمود برهم می‌نامیم، هرگاه خطی در یکی از دو صفحه وجود داشته باشد، که بر دیگری عمود باشد.

از این تعریف، نتیجه می‌شود که اگر خط L بر صفحه P عمود باشد، هر صفحه‌ای که از L می‌گذرد، بر صفحه P عمود است.

مثال: در یک مکعب مستطیل، هر دو وجه مجاور آن، برهم عمودند.

> **قضیه ۷:** اگر P و Q دو صفحه عمود برهم باشند، هر کدام شامل خطی است که بر دیگری عمود است[1].

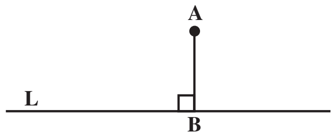


مسأله: اگر خط L بر صفحه P عمود نباشد، صفحه‌ای از خط L بگذرانید که بر P عمود باشد.

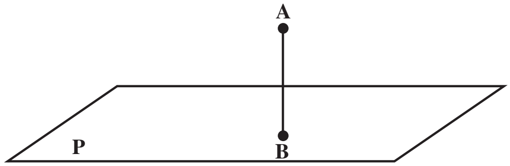
حل: از یک نقطه مانند A روی خط L، خط L′ را عمود بر صفحه P رسم می‌کنیم. L و L′ دو خط متقاطعند و صفحه‌ای که از این دو خط می‌گذرد، جواب مسأله است.

۱ــ اثبات در پیوست

۴ــ۳ــ۵ــ فاصله نقطه از صفحه



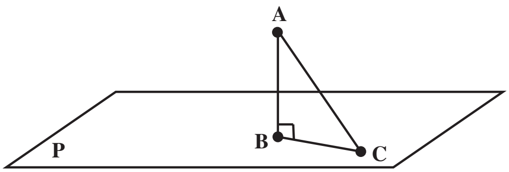
در هندسه مسطحه دیدیم که بنابه تعریف فاصله نقطه A از خط L، طول عمود AB است که از نقطه A بر خط L رسم می‌شود. (شکل روبرو)



در فضا نیز برای هر نقطه مانند A و صفحه‌ای مانند P، خط **یکتایی** از A می‌گذرد که بر P عمود است. اگر محل تلاقی این خط با P را نقطه B بنامیم، طول پاره‌خط AB را **فاصله نقطه A تا صفحه P** تعریف می‌کنیم.

اگر نقطه A در صفحه P باشد، B همان A خواهد بود و فاصله A تا P صفر می‌باشد.

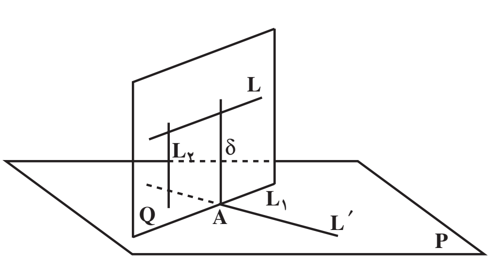
تمرین ــ ثابت کنید که، فاصله یک نقطه از یک صفحه، کوتاهترین فاصله بین آن نقطه تا نقاط آن صفحه است.



۴ــ۳ــ۶ــ عمود مشترک دو خط متنافر

اگر L و L' دو خط متنافر باشند، با روشهای گوناگون می‌توان خطی را به‌دست آورد که آنها را قطع کند و بر آنها عمود باشد. این خط را **عمود مشترک این دو خط متنافر** می‌نامند. یکی از روشهای رسم عمود مشترک دو خط متنافر، روش زیر است.

ابتدا، صفحه P شامل خط L' و موازی خط L را رسم می‌کنیم. سپس، صفحه Q را از L عمود بر صفحه P می‌گذرانیم. طبق قضیه ۱، فصل مشترک دو صفحه P و Q که آن را L_1 می‌نامیم، با خط L موازی است. بنابراین، خطهای L' و L_1 موازی نیستند و چون هر دو در یک صفحه قرار دارند با یکدیگر متقاطع خواهند بود.



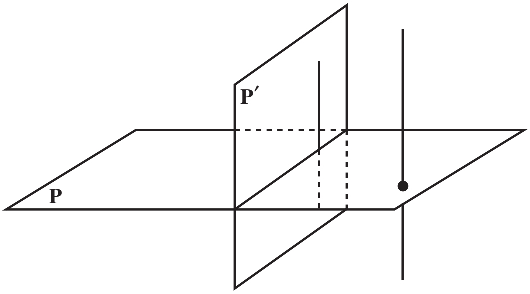
نقطه مشترک دو خط L' و L_1 را A می‌نامیم. از نقطه A، در صفحه Q خط δ را عمود بر خط L_1 و L رسم می‌کنیم. اگر L_2 خطی در Q باشد که بر P عمود است، دو خط δ و L_2 هر دو در صفحه Q قرار دارند و بر خط L_1 عمودند، بنابراین با هم موازیند. بنابراین، خط δ نیز بر صفحه P عمود است. پس، خط δ بر خط L' نیز عمود است. به این ترتیب خط δ بر هر دو خط متنافر L و L' عمود است و با آنها متقاطع نیز می‌باشد.

می‌توان ثابت کرد که عمود مشترک دو خط متنافر **یکتاست** و **کوتاهترین پاره‌خط متکی بر آن دو خط متنافر است**[1].

مسأله‌ها

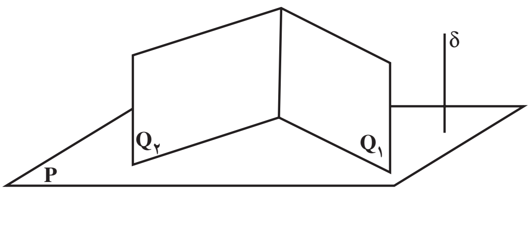
۱. اگر دو صفحه P و P' بر هم عمود باشند، ثابت کنید هر خط عمود بر صفحه P با صفحه P' موازی است.

راهنمایی: صفحه P' دارای یک خط عمود بر صفحه P است.



۲. اگر دو صفحه متقاطع Q_1 و Q_2 بر صفحه P عمود باشند، ثابت کنید فصل مشترک دو صفحه Q_1 و Q_2 بر صفحه P عمود است.

راهنمایی: یک خط δ عمود بر صفحه P در نظر بگیرید. وضعیت خط δ نسبت به دو صفحه Q_1 و Q_2 چگونه است؟

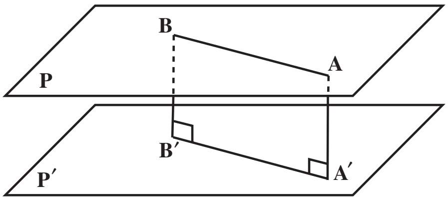


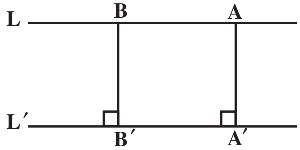
۱ــ اثبات در پیوست

۳. اگر صفحه‌ای بر یکی از دو صفحه موازی عمود باشد بر دیگری هم عمود است.

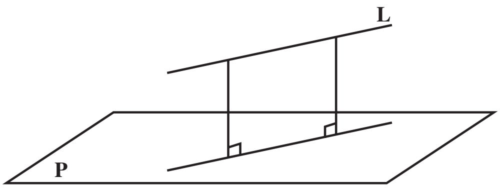
۴. از هر خط L که بر صفحه P عمود نیست یک و تنها یک صفحه می‌گذرد که بر صفحه P عمود باشد.

۵. در هندسه مسطحه دیدیم، که برای هر دو خط موازی L و L'، فاصله هر دو نقطه از خط L، تا خط L' یکسان است و این مقدار یکسان را، فاصله دو خط موازی L و L' می‌نامند. ثابت کنید برای دو صفحه موازی P و P'، فاصله هر دو نقطه از صفحه P، تا صفحه P' برابر است. این مقدار مساوی را فاصله این دو صفحه موازی می‌نامیم.





۶. اگر خط L با صفحه P موازی باشد، ثابت کنید فاصله هر دو نقطه از خط L، تا صفحه P، مساوی است. این مقدار مساوی را فاصله خط L تا صفحه P می‌نامند.



۷. ثابت کنید برای هر عدد $a > 0$، مکان هندسی نقطه‌هایی از فضا که از یک صفحه مانند P به فاصله a قرار دارند، دو صفحه موازی P است که در دو طرف P قرار دارند و فاصله هر کدام با P، برابر a است.

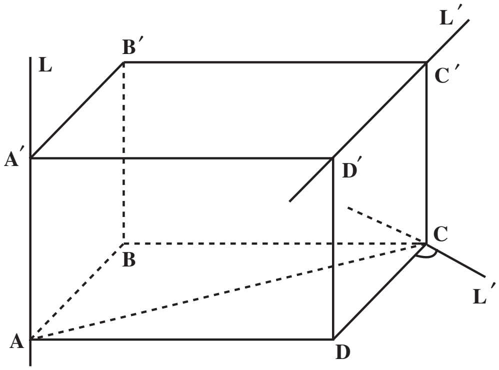
۸. اگر دو نقطه متمایز A و B از صفحه P به یک فاصله، و A و B هر دو در یک طرف P باشند، ثابت کنید خط AB با صفحه P موازی است و اگر A و B در دو طرف P قرار داشته باشند، ثابت کنید صفحه P از وسط پاره‌خط AB می‌گذرد.

۹. در مکعب مستطیل شکل زیر $AB=۶$ ، $AA'=۸$ و $BC=۱۰$.

الف) خط L با چند خط در این شکل متنافر است، آنها را نام ببرید.

ب) عمود مشترک دو خط متنافر L و L' که در شکل مشخص شده است، کدام پاره‌خط است؟ طول آن چقدر است؟

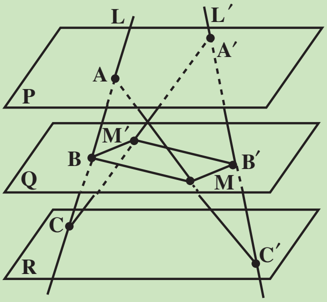
پ) در صفحه ABCD خط L' را در نقطه C بر خط AC عمود می‌کنیم. عمود مشترک دو خط L و L' را مشخص کنید و طول آن را به‌دست آورید.



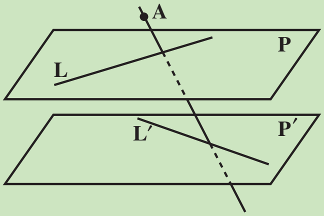
مسأله‌های گوناگون فصل ۴

این مسأله‌ها خارج از برنامه رسمی هندسه ۲ است. دانش‌آموزان علاقه‌مند، خود می‌توانند آنها را حل کنند.

۱. اگر P و Q دو صفحه موازی و متمایز باشند، مکان هندسی وسط پاره‌خطهایی که یک سر آنها در صفحه P و سر دیگر آنها در صفحه Q قرار دارند را به دست آورید.



۲. دو خط متنافر L و ′L، سه صفحه موازی و متمایز P، Q و R را طبق شکل روبه‌رو به ترتیب در نقطه‌های A، B و C و ′A، ′B و ′C قطع کرده‌اند. اگر خطهای ′AC و A′C صفحه Q را به ترتیب در نقطه‌های M و ′M قطع کرده باشند، ثابت کنید چهارضلعی BMB′M′ متوازی‌الاضلاع است.



۳. اگر خطهای L و ′L متنافر باشند و صفحه P شامل L و موازی ′L و ′P صفحه شامل ′L و موازی L باشد، آنگاه از هر نقطه مانند A خارج از P و ′P یک و تنها یک خط می‌گذرد که با L و ′L متقاطع باشد.

راهنمایی: اگر چنین خطی موجود باشد، این خط در صفحه گذرنده از خط L و نقطه A قرار دارد و این خط از محل تقاطع خط ′L و این صفحه می‌گذرد.

۴. اگر خط L و صفحه P متقاطع باشند، ثابت کنید از یک نقطه مانند A خارج از L، یک و تنها یک خط می‌گذرد که با صفحه P موازی است و با خط L متقاطع است. اگر A روی L باشد چند خط با این ویژگی وجود دارد؟

۵. اگر L یک خط دلخواه و P یک صفحه دلخواه و O نقطه‌ای از P باشد، خطی در P رسم کنید که از O بگذرد و بر L عمود باشد. بنا بر وضعیتهای مختلف بین L و P، مسأله چند جواب دارد؟

۶. برای یک خط دلخواه L و صفحه دلخواه P و نقطه دلخواه O، آیا خطی وجود دارد که از O بگذرد، با P موازی باشد و بر L عمود شود؟ بنا بر وضعیتهای مختلف بین P و L چند جواب وجود دارد؟

۷. اگر A و B دو نقطه متمایز باشند و L خطی در فضا باشد که نقطه‌های A و B روی آن قرار ندارند و بر خط AB عمود نباشد، ثابت کنید یک و تنها یک نقطه روی خط L مانند C وجود دارد، که مثلث CAB در رأس C متساوی‌الساقین باشد. اگر خط L بر خط AB عمود باشد مسأله چند جواب دارد؟

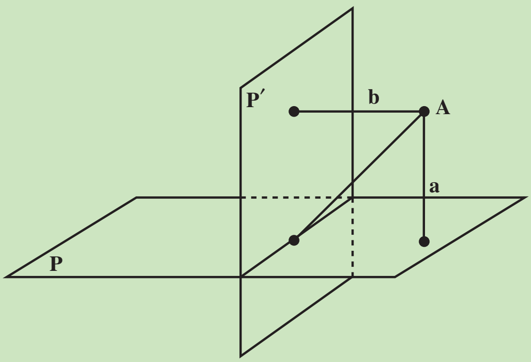
۸. صفحه P، خط L و نقطه A داده شده است. آیا صفحه‌ای وجود دارد که از A بگذرد، با L موازی باشد و بر P عمود شود؟ در وضعیتهای مختلف چند جواب وجود دارد؟

۹. یک صفحه P و یک خط L در آن، و یک خط L' خارج از P که نقطه اشتراکی با L ندارد، در نظر بگیرید. پاره‌خطی بیابید که دو سر آن روی L و L' باشد و بر P عمود شود. در وضعیتهای مختلف چند جواب وجود دارد؟

۱۰. اگر دو صفحه P و P' برهم عمود باشند و از یک نقطه P خط عمودی بر صفحه P' رسم کنیم، این خط در صفحه P قرار می‌گیرد.

۱۱. برای دو نقطه متمایز A و B و خط L، آیا صفحه‌ای وجود دارد که از L بگذرد و A و B از آن، به یک فاصله باشند؟ در حالات مختلف چند جواب وجود دارد؟

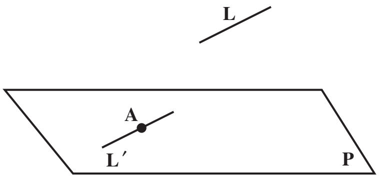
۱۲. اگر دو صفحه P و P' برهم عمود باشند و نقطه A از P و P' به ترتیب به فاصله a و b باشد، ثابت کنید فاصله A تا فصل مشترک این دو صفحه، برابر است با $\sqrt{a^{۲}+b^{۲}}$.



پیوست

مطالب پیوست، خارج از برنامه رسمی هندسه ۲ است و تنها برای استفاده دانش‌آموزان علاقه‌مند است.

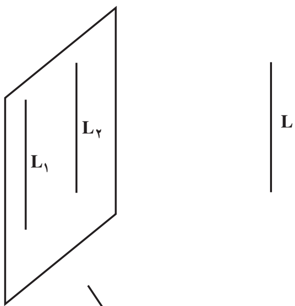
> **قضیه ۳:** اگر خط L با صفحه P موازی و A نقطه‌ای از صفحه P باشد، آنگاه خطی که از A به موازات L رسم می‌شود به تمامی در صفحه P قرار دارد.



برهان: دو حالت وجود دارد :

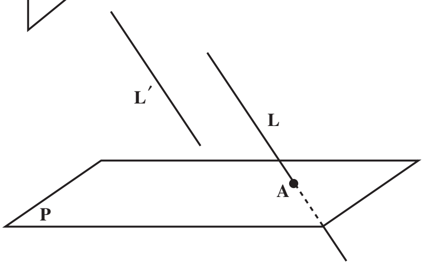
الف) خط L در صفحه P قرار ندارد : در این حالت، ابتدا یک خط ′L در صفحه P می‌یابیم که از نقطه A بگذرد و با L موازی باشد. صفحه گذرنده از نقطه A و خط L، طبق قضیه ۱، صفحه P را در خطی موازی L قطع می‌کند که از نقطه A می‌گذرد. این، همان خط موردنظر ′L است. حال، طبق اصل توازی اقلیدس فقط یک خط از نقطه A می‌گذرد که با L موازی است. پس، این خط همان ′L است و ′L نیز در صفحه P قرار دارد.

ب) خط L در صفحه P قرار دارد : در این حالت، اگر نقطه A روی خط L باشد، درستی حکم روشن است و اگر نقطه A خارج از خط L باشد، خط گذرنده از نقطه A به موازات L را ′L می‌نامیم. صفحه گذرنده از L و ′L با صفحه P در خط L و نقطه A اشتراک دارد، پس، این صفحه همان صفحه P است و خط ′L در صفحه P قرار دارد.



نتیجه ۱ـ اگر دو خط با خط سومی موازی باشند، خودشان با هم موازیند.[1]

راهنمایی: اگر دو خط متمایز L_1 و L_2 با خط L موازی باشند، یک صفحه از خط L_2 و نقطه دلخواهی از L_1 بگذرانید و وضعیت دو خط L_1 و L_2 را نسبت به آن بررسی کنید.



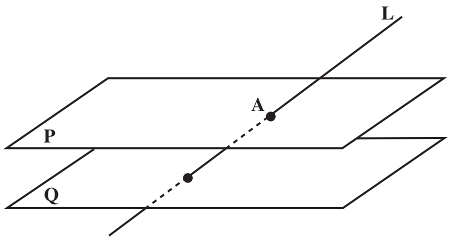
نتیجه ۱ـ اگر صفحه‌ای یکی از دو خط موازی را قطع کند، دیگری را هم قطع می‌کند.[2]

برهان: فرض کنید دو خط L و ′L موازیند و خط L با صفحه P در نقطه A متقاطع است. به برهان

۱ـ نتیجهٔ ۱ صفحهٔ ۱۴۰   ۲ـ نتیجهٔ ۲ صفحهٔ ۱۴۱

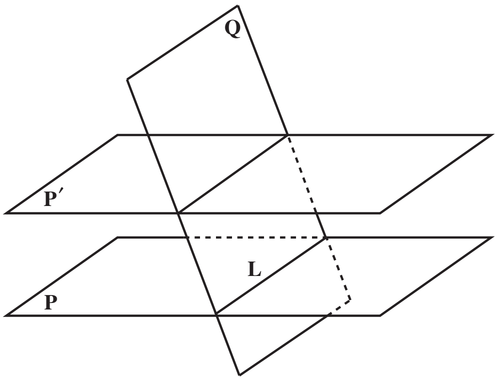
خلف فرض کنید L' با صفحه P موازی باشد. در این صورت، خطی که از A به موازات L' می‌گذرد، به تمامی در صفحه P قرار خواهد داشت. این خط، همان L است، یعنی خط L به تمامی در صفحه P است که خلاف فرض است.

نتیجه ۲ــ اگر خطی یکی از دو صفحه موازی را قطع کند، دیگری را هم قطع می‌کند.



برهان: فرض کنید P و Q دو صفحه متمایز موازی باشند و خط L صفحه P را فقط در نقطه‌ای مانند A قطع کرده باشد. به برهان خلف، فرض کنید خط L صفحه Q را قطع نکند، پس با آن موازی است. طبق قضیه ۱، یک خط مانند L' در صفحه Q وجود دارد که با L موازی است. خط L' صفحه P را قطع نمی‌کند، پس با آن موازی است. بنابراین، L خطی است که از یک نقطه صفحه P می‌گذرد و موازی خطی است که با صفحه P موازی است. در نتیجه، خط L به تمامی در صفحه P قرار می‌گیرد که خلاف فرض است.

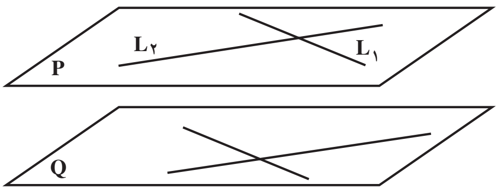
نتیجه ۳ــ اگر صفحه‌ای یکی از دو صفحه موازی را قطع کند، دیگری را هم قطع می‌کند و فصل مشترکها با هم موازیند.



برهان: فرض کنید دو صفحه P و P' موازیند و نقطه مشترکی ندارند و صفحه Q با صفحه P متقاطع است و فصل مشترک آنها خط L می‌باشد. در صفحه Q یک خط L' متقاطع با L در نظر می‌گیریم. L' خطی است که با صفحه P متقاطع است، پس طبق نتیجه ۲، L' صفحه P' را قطع می‌کند. در نتیجه صفحه Q، صفحه P' را قطع می‌کند.

فصل مشترکهای این صفحه‌ها دو خط هستند که هر دو در صفحه Q هستند و همدیگر را قطع نمی‌کنند. چرا؟ پس با هم موازیند.

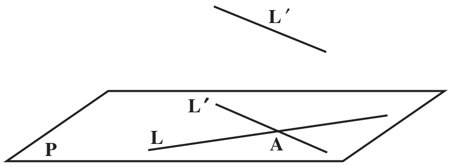
قضیه ۴: اگر دو خط متقاطع از صفحه‌ای با دو خط متقاطع از صفحه دیگری موازی باشند، آن دو صفحه موازیند.



برهان: فرض کنید P و Q دو صفحه متمایز و L_1 و L_2 دو خط متقاطع در صفحه P باشند که با دو خط از صفحه Q موازیند. بنابراین، L_1 و L_2 با صفحه Q موازیند و آن را قطع نمی‌کنند. چرا؟

به برهان خلف فرض کنید دو صفحه P و Q موازی نیستند و فصل مشترک آنها، خطی مانند L باشد. L خطی در صفحه P است و حداقل یکی از دو خط L_1 و L_2 را قطع می‌کند. چرا؟ پس، حداقل یکی از دو خط L_1 و L_2 صفحه Q را قطع می‌کند که خلاف فرض است.

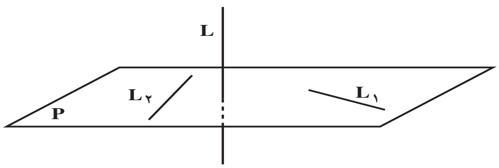
نتیجه ــ اگر L و L' دو خط متنافر باشند، صفحه یکتایی وجود دارد که بر L می‌گذرد و با L' موازی است.



برهان: از یک نقطه L مانند A، خط L' را به موازات L' رسم می‌کنیم. اگر P صفحه گذرنده از دو خط L و L' باشد، صفحه P بر خط L می‌گذرد و با L' موازی است.

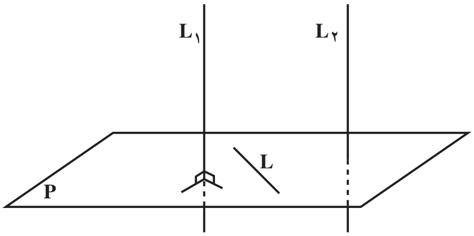
اگر Q صفحه دیگری باشد که بر L گذشته و با L' موازی است، خط L' نیز در صفحه Q قرار دارد. چرا؟ پس، Q بر P منطبق است و تنها یک صفحه وجود دارد که بر خط L می‌گذرد و با L' موازی است.

قضیه: اگر خطی بر دو خط غیرموازی از صفحه‌ای عمود باشد، با آن صفحه متقاطع است.



برهان: فرض کنید خط L بر دو خط غیرموازی L_1 و L_2 از صفحه P عمود باشد. به برهان خلف فرض کنید خط L صفحه P را قطع نکند، پس با آن موازی است. خط مانند L' در صفحه P وجود دارد که با L موازی باشد. L' نیز بر L_1 و L_2 عمود است. از آنجا که L_1 و L_2 به عنوان دو خط در صفحه P بر خطی از همان صفحه P عمودند، با هم موازیند که خلاف فرض است.

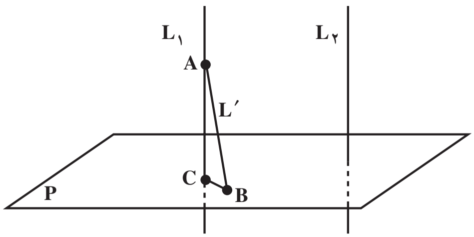
نتیجه ۱ـ اگر یکی از دو خط موازی بر یک صفحه عمود باشد، دیگری هم بر آن صفحه عمود است.



برهان: فرض کنید L_1 و L_2 دو خط موازی باشند و خط L_1 بر صفحه‌ای چون P عمود است. اگر L خطی در صفحه P باشد، L_1 بر L عمود است، پس، L_2 نیز بر L عمود است. بنابراین، خط L_2 بر همه خطهای صفحه P عمود است و در نتیجه L_2 نیز بر P عمود است.

نتیجه ۲ـ دو خط عمود بر یک صفحه با هم موازیند.

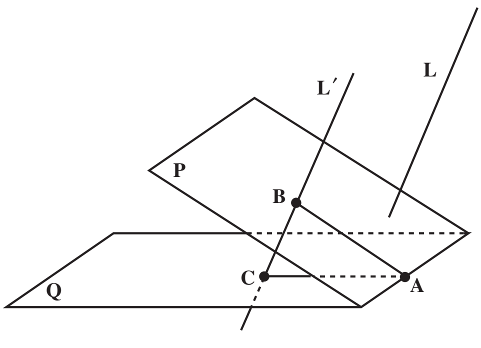
برهان: فرض کنید دو خط L_1 و L_2 بر صفحه P عمود باشند. به برهان خلف فرض کنید این دو خط موازی نباشند. از یک نقطه مانند A روی خط L_1 و خارج از صفحه P خط L' را به موازات L_2 می‌گذرانیم. دو خط L' و L_1 متمایزند و صفحه P را به ترتیب در دو نقطه متمایز مانند B و C قطع می‌کنند. خط L' نیز بر صفحه P عمود است. چرا؟



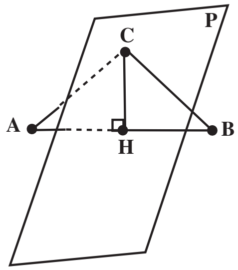
پس، مثلث ABC در هر دو رأس B و C قائمه‌الزاویه است که این، ممکن نیست.

نتیجه ۳ـ دو صفحه عمود بر یک خط با هم موازیند.

برهان: فرض کنید دو صفحه مانند P و Q هر دو بر خطی مانند L عمود باشند. به برهان خلف فرض کنید دو صفحه P و Q موازی نباشند و یک نقطه مشترک مانند A داشته باشند. یک نقطه مانند B روی صفحه P خارج از صفحه Q انتخاب می‌کنیم. از نقطه B خطی موازی L رسم می‌کنیم و L' می‌نامیم. خط L' بر دو صفحه P و Q عمود است و صفحه Q را در نقطه‌ای مانند C قطع می‌کند. سه نقطه A ، B و C متمایزند و بر یک خط قرار ندارند. چرا؟ پس، مثلث ABC در دو رأس B و C قائمه‌الزاویه است که این ممکن نیست.



قضیه صفحه عمود منصف: صفحه عمودمنصف یک پاره‌خط، مکان هندسی نقاطی از فضا است که از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله‌اند.

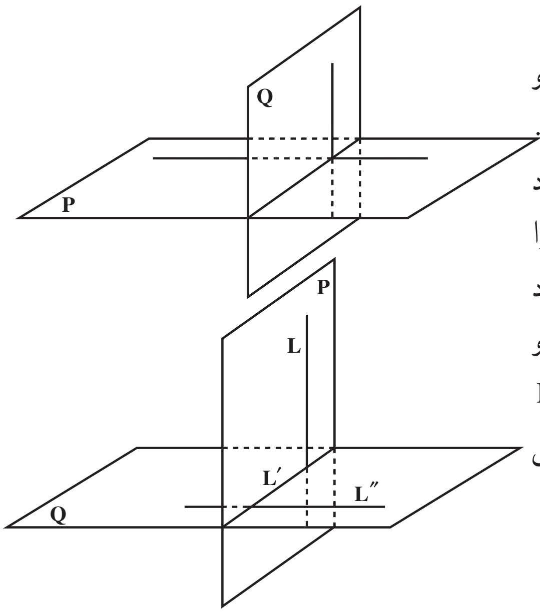


برهان: فرض کنید A و B دو نقطه متمایز در فضا و P صفحه عمودمنصف پاره‌خط AB باشد. وسط پاره‌خط AB را نقطه H می‌نامیم.

اگر C نقطه‌ای از این صفحه و متمایز از H باشد، در صفحه‌ای که از سه نقطه A، B و C می‌گذرد، خط CH، عمودمنصف پاره‌خط AB است، پس، $AC = BC$.

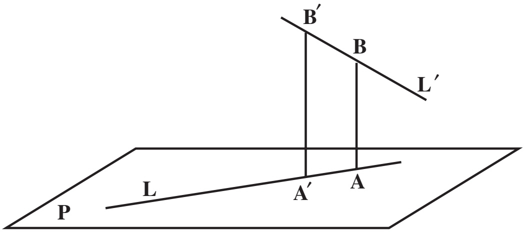
برعکس، فرض کنید، C' نقطه‌ای از فضا باشد که $AC' = BC'$. در این صورت مثلث ABC' در رأس C' متساوی‌الساقین، و خط $C'H$ بر پاره‌خط AB عمود است. با انتخاب خط دلخواهی از صفحه P که از نقطه H بگذرد و با خط $C'H$ موازی نباشد، صفحه گذرنده از این خط و نقطه C' را Q می‌نامیم. پاره‌خط AB بر دو خط غیرموازی Q عمود است، چرا؟ پس، AB بر هر دو صفحه P و Q در نقطه H عمود است. طبق یکتایی چنین صفحه‌ای، دو صفحه P و Q یکی هستند. پس، نقطه C' در صفحه P است.

قضیه ۷: اگر P و Q دو صفحه عمود بر هم باشند، هرکدام شامل خطی است که بر دیگری عمود است.



برهان: طبق تعریف یکی از این دو صفحه شامل خطی عمود بر دیگری است. فرض کنید L خطی در P باشد که بر Q عمود است. فصل مشترک دو صفحه P و Q را L' می‌نامیم. در صفحه Q خط L'' را عمود بر L' رسم می‌کنیم. L بر L'' عمود است و در نتیجه L'' بر دو خط غیرموازی L و L' از صفحه P عمود است. بنابراین، L'' خطی از صفحه Q است که بر P عمود است.

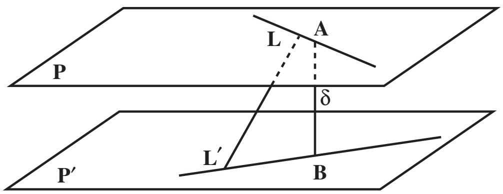
قضیه : عمود مشترک دو خط متنافر یکتا است.



برهان: به برهان خلف، برای دو خط متنافر L و L' دو عمود مشترک مانند AB و $A'B'$ در نظر بگیرید. اگر P صفحه‌ای باشد که با L و L' موازی است، هر دو خط AB و $A'B'$ بر آن عمودند، پس با هم موازیند. در نتیجه، چهار ضلعی $ABB'A'$ در یک صفحه قرار دارد و یک مستطیل است. بنابراین، خطهای AA' و BB' با هم موازیند. اما، این دو خط، همان L و L' هستند که با هم متنافرند و این خلاف فرض است.

قضیه : اگر L و L' دو خط متنافر و δ عمود مشترک این دو خط باشد که آنها را در نقاط A و B قطع می‌کند، AB کوتاهترین پاره‌خطی است که یک سر آن روی L و سر دیگر آن روی L' است.

راهنمایی: دو صفحه P و P' به ترتیب شامل L و L' به گونه‌ای رسم کنید که با هم موازی باشند. طول پاره‌خط AB همان فاصله P و P' است. طول بقیه پاره‌خطهایی که رأسهای آنها روی L و L' قرار دارند چه رابطه‌ای با فاصله بین P و P' دارند؟



منابع

1.Billstein R. , Libeskind, S. Lott J. , **A Problem Solving Approach to Mathematics for Elementary School Teachers,** (2rd ed.) Benjamin Cummings Publish. Co. 1984.

2. Chazan, D.& Houde, R. (1989). **How to Use Conjecturing and Microcomputers to Teach Geometry.** National Council of Teachers of Mathematics. Reston, VA.

3. Howson, G.(1995). **Mathematics Textbooks: A Comparative Study of Grade 8 Texts.** The Third International Mathematics and Science Study: TIMSS. Monograph No. 3. Pacific Educational Press, Vancouver, CANADA.

4. ICMI (The International Commission on Mathematics Instruction) (1995). Perspectives on teaching of geometry for the 21 st century. **Educational Studies in Mathematics,** 28, 91-98.

5. Jacobs, H.R. (1974). **Geometry.** W.H. Freeman & Company.

6. Kalin, R. & Corbitt, M. K. (1990). **Gemetry: Teachers' Edition.** Prentice Hall, NJ.

7. Kelly, B. (1987). **MATHQUEST Six.** Addison Wesley Publishers Limited.

8. Kelly, B. , Alexander, B. & Atkinson, P. (1987). **Mathematics 10.** Addison Wesley Pub. Ltd.

9. Kindt, M. & etal. (1996) (eds.). **Working Group 13; 8th International Congress on Mathematics Education: Curriculum Changs in the Secondary School.** Freudenthal Institute, The Netherlands.

10. Lang, S. Murrow, G. (1988). **Geometry: A High School Course,** 2nd ed. Springer-Verlag.

11. Lewis, Harry. (1964). Geometry A contemporary course. D.Van Nostrand.

12. National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (1989). **Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics,** Reston, VA: Author.

13. National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (1991). **Geometry**

from Multiple Perspectives: Addenda Series, Grades 9-12: Author.
14. Steen, L. A. (1994) (ed.). **For all Practical Purposes: Introduction to Contemporary Mathematics** (3rd Ed.). COMAP, Inc.
15. Usiskin, Z. & etal. (1996). **The University of Chicago School Mathematics Project (UCSMP) GEOMETRY Scott foresman integrated mathematics (2nd Ed.).** Field Test Version. Scott Foresman.
16. Welchons, A. M. , Krickenberger, W. R. , Pearson & H. R. (1976). **Plane Geometry.** Ginn & Company.
17. Wheeler, R.E.(1984). **Modern mathematics: An elementary approach** (6th Ed.).

۱۸. السجزی، عبدالجلیل، **رسالهٔ سجزی در روشهای حل مسایل هندسی.** ترجمهٔ محمد باقری (۱۳۷۵). انتشارات فاطمی، تهران.

۱۹. بوزجانی ابوالوفا. **هندسهٔ ایرانی: کاربرد هندسه در عمل.** برگردان به عبارت روز و گردآوری ضمیمه از : سیدعلیرضا جذبی، انتشارات سروش، تهران، ۱۳۶۹.

۲۰. بیرشک،احمد، معیری، طاهر. جزوهٔ تکمیلی هندسه۲، وزارت آموزش و پرورش (۱۳۷۶).

۲۱. پولیا، جورج. (۱۹۶۲). **خلاقیّت ریاضی**، ترجمهٔ پرویز شهریاری (۱۳۷۳). چاپ دوم. انتشارات فاطمی، تهران.

۲۲. دانز و موئیز (۱۳۷۳). هندسه (مترجم : محمود دیانی)، انتشارات فاطمی، تهران.

۲۳. **در باب برنامهٔ درسی ریاضیات دبیرستان**، ترجمهٔ جواد حاجی‌بابایی (۱۳۷۵).
رشد آموزش ریاضی، شماره ۴۶، انتشارات دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتابهای درسی.

۲۴. رستمی، محمدهاشم. دایرة المعارف هندسه، جلد ۱۴، هندسهٔ فضایی. انتشارات مدرسه، (۱۳۸۲).

۲۵. صفاری، حسن، قربانی ابوالقاسم، هندسه برای سال پنجم دبیرستانها، چاپخانه علی‌اکبر علمی (۱۳۳۰).

۲۶. ظهوری زنگنه، بیژن، گویا، زهرا. **دیدگاههای نوین آموزش هندسه**، گزارش کارگاه آموزش ریاضی، بیست و ششمین کنفرانس ریاضی کشور، دانشگاه شهید باهنر کرمان، فروردین ۱۳۷۴.