

تا آنجا که مشتق پذیری وجود دارد، می توان مشتق گیری از مشتقات را ادامه داد و در این صورت، مشتق های مرتبه های بالاتر تابع  $y = f(x)$  را به صورت زیر نسبت به  $x$  نشان می دهیم:

$$y', f'(x), \frac{dy}{dx}, \frac{d}{dx}[f(x)], D_x(y) \quad \text{مشتق اول } f$$

$$y'', f''(x), \frac{d^2 y}{dx^2}, \frac{d^2}{dx^2}[f(x)], D_x^2(y) \quad \text{مشتق دوم } f$$

$$y^{(r)}, f^{(r)}(x), \frac{d^r y}{dx^r}, \frac{d^r}{dx^r}[f(x)], D_x^r(y) \quad \text{مشتق سوم } f$$


$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$y^{(n)}, f^{(n)}(x), \frac{d^n y}{dx^n}, \frac{d^n}{dx^n}[f(x)], D_x^n(y) \quad \text{مشتق } n \text{ ام } f$$

❖ **مثال:** اگر  $f(x)$  یک چندجمله ای درجه  $n$  باشد، یعنی

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

که در آن  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$  ثابت هستند،  $(a_n \neq 0)$  مشتق  $n$  ام،  $f(x)$  را حساب کنید.

**حل:**  چون تابع چندجمله ای درجه  $n$ ، از هر مرتبه مشتق پذیر است بنابراین:

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \dots + na_n x^{n-1}$$

$$f''(x) = 2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + \dots + n(n-1)a_n x^{n-2}$$

$$f^{(r)}(x) = 6a_3 + 24a_4 x + \dots + n(n-1)(n-2)a_n x^{n-r}$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2) \times \dots \times 2 \times 1 \times a_n = n! a_n$$

$$f^{(k)}(x) = 0, \quad k > n \text{ و برای هر}$$

**تمرین در کلاس** 

مشتق چهارم تابع  $f(x) = (x^2 + 1)(x^2 + 2)(x^2 + 3)$  را در  $x = 1$  حساب کنید.

❖ **مثال:** مشتق پذیری تابع  $f(x) = |x|$  و مشتق های مراتب بالاتر آن را روی  $\mathbb{R}$  بررسی کنید.

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

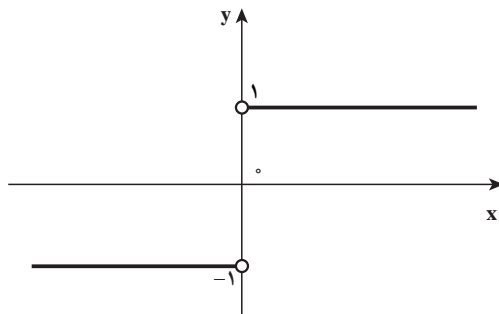
**حل:**  می دانیم

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1 \quad \text{چون}$$

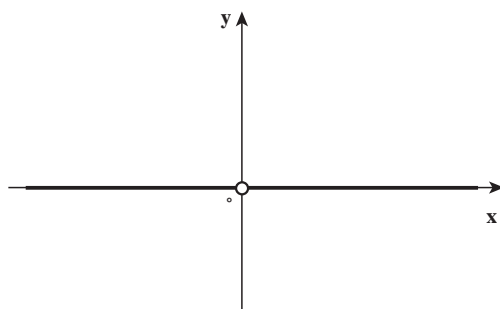
$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

بنابراین تابع  $f$  در  $x = 0$  مشتق پذیر نیست و

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & , x < 0 \\ \text{تعریف نشده} & , x = 0 \\ 1 & , x > 0 \end{cases}$$



$$f''(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ 0 & , x > 0 \end{cases}$$



تابع  $f''$  در  $x = 0$  تعریف نشده است.

$$f''(x) = 0, \quad x \neq 0$$

و یا

$$f^{(n)}(x) = 0, \quad x \neq 0$$

و برای هر  $n \geq 3$

### تمرین در کلاس

$$f(x) = |x^2 - 4|$$

فرض کنید

(الف) مشتق پذیری تابع  $f$  را در  $2$  و  $-2$  بررسی نمایید.

(ب) ضابطه تابع مشتق و نمودار آن را رسم کنید.

(پ) با تعیین ضابطه توابع  $f''$  و  $f^{(3)}$ ، ضابطه مشتق  $n$ ام تابع  $f$  را به دست آورید.

برای یافتن مشتق تابع‌های قطعه قطعه تعریف شده (نظیر تابع قدر مطلق و تابع جزء صحیح) قضیه زیر بسیار مؤثر است و حل مسأله را ساده‌تر می‌کند.

### ❖❖❖ قضیه ۳

الف) اگر  $f$  روی بازه  $(a, x_0]$  پیوسته و روی بازه باز  $(a, x_0)$  مشتق پذیر بوده و  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x)$  وجود داشته باشد، آنگاه:

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x)$$

ب) اگر  $f$  روی بازه  $[x_0, b)$  پیوسته و روی بازه باز  $(x_0, b)$  مشتق پذیر بوده و  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x)$  وجود داشته باشد، آنگاه:

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x)$$

❖❖❖ مثال: مشتق چپ و مشتق راست تابع  $f(x) = |x-1| + 2|x-2|$  را در  $x=1$  حساب کنید.

✍️ حل: تابع  $f$  روی  $\mathbb{R}$  پیوسته است و برای هر  $x$  از بازه  $(0, 1)$ ،  $f(x) = -3x + 5$

پس برای هر  $x$  از بازه  $(0, 1)$ ،  $f'(x) = -3$

همچنین برای هر  $x$  از بازه  $[1, 2)$ ،  $f(x) = -x + 3$

پس برای هر  $x$  از بازه  $(1, 2)$ ،  $f'(x) = -1$

بنابراین  $f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = -3$

$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = -1$

در نتیجه تابع در  $x=1$  مشتق پذیر نیست.



مشتق چپ و مشتق راست تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = x[x^2 + 3]$  را در نقطه  $x=0$  را در صورت وجود به دست آورید ([ ] نماد جزء صحیح است).

۱- فرض کنید تابع  $f$  در  $x = 1$  مشتق پذیر و  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = 3$ ، مقادیرهای  $f(1)$  و  $f'(1)$  را به دست آورید.

۲- فرض کنید  $f(x) = \begin{cases} x^3, & |x| \geq 1 \\ 2x^2 - 1, & |x| < 1 \end{cases}$  حاصل  $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$  را بیابید.

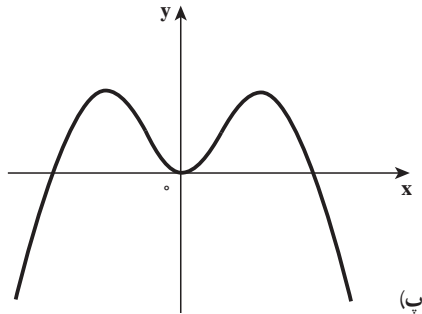
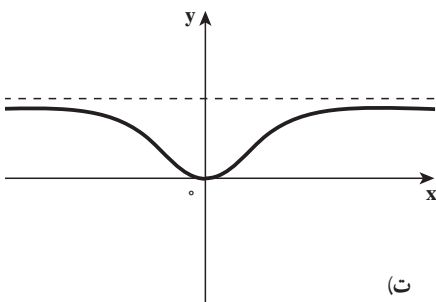
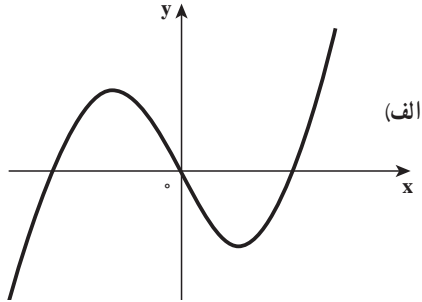
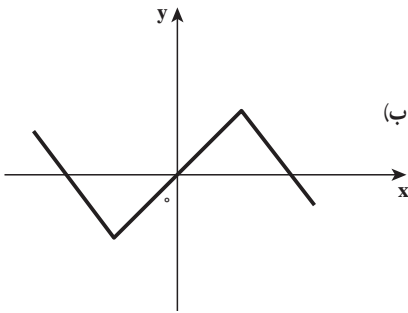
۳- فرض کنید  $f(x) = \sin x \left[ \cos \frac{x}{2} \right]$ ، مشتق چپ و مشتق راست تابع  $f$  را در نقطه  $x = \pi$  حساب کنید.

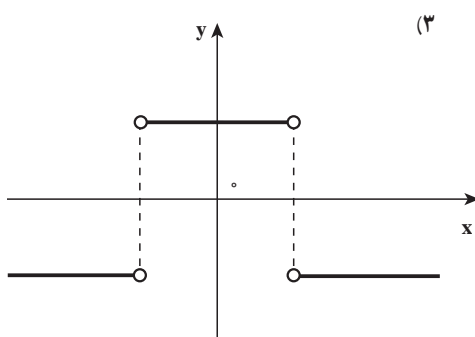
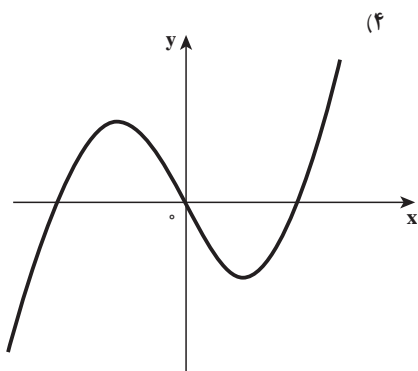
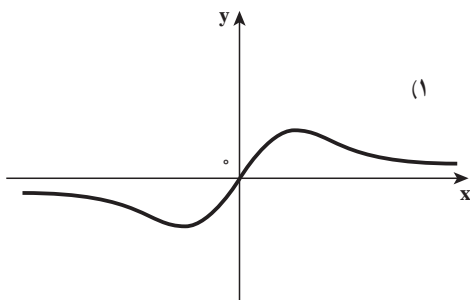
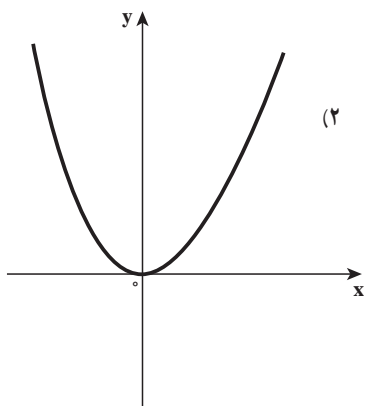
۴- الف ثابت کنید: اگر  $f$  در  $a$  مشتق پذیر باشد، حد زیر موجود و برابر با  $f'(a)$  است

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = f'(a)$$

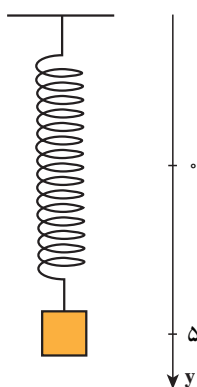
(ب) نشان دهید که اگر حد در قسمت الف وجود داشته باشد، لزومی ندارد که تابع در نقطه  $a$  مشتق پذیر باشد.

۵- نمودار هر یک از تابع‌های قسمت‌های (الف) تا (ت) را به نمودار مشتقش در قسمت‌های (۱) تا (۴) متناظر کنید و ضمناً دلیل انتخاب خود را بیان کنید.





۶- فرض کنید  $y = \frac{x}{\sqrt{1+x}}$ ، حاصل عبارت  $y'' + 2y'y'(1+x)$  را به دست آورید.



۷- جسمی به انتهای فنری آویزان است، آن را به اندازه ۵ سانتی متر پایین کشیده و در لحظه  $t = 0$  رهاش می کنیم (مطابق شکل رسم شده جهت رو به پایین، جهت مثبت است) موقعیت این جسم در زمان  $t$  از رابطه  $y = f(t) = 5 \cos t$  به دست می آید. سرعت و شتاب این جسم را در زمان  $t$  پیدا کنید و سپس به کمک نتایج به دست آمده حرکت جسم را تحلیل کنید.

۸- فرض کنید  $f(x) = x^6 - 2x^4 - x + 1$ ، حاصل  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(1+h) - f'(1)}{h}$  را به دست آورید.

۹- اگر  $f(x) = \frac{x+1}{x} \operatorname{sgn}(x^2 - x + 1)$ ،  $f'(x)$  را حساب کنید.  
 ۱۰- ضابطه تابع درجه دوم  $f$  را چنان انتخاب کنید که  $f(1) = 2$  و  $f'(1) = 3$  و  $f''(1) = 4$  باشد.

۱۱- نقطه‌ای روی نمودار تابع  $y = x^2 + x$  پیدا کنید که در آن نقطه، خط مماس بر منحنی تابع، موازی قاطعی باشد که دو نقطه با طول‌های  $x = 1$  و  $x = 3$  واقع بر منحنی تابع را به هم وصل کند.

۱۲- معادله خط مماس بر منحنی تابع  $f(x) = \frac{1 + 2 \sin x}{\sin x}$  را در نقطه  $(\frac{\pi}{6}, 4)$  به دست آورید.

۱۳- به ازای چه مقادیری از  $a$ ،  $b$  و  $c$  تابع  $f(x) = \begin{cases} x^3, & x < 1 \\ ax^2 + bx + c, & a \geq 1 \end{cases}$  در نقطه  $x = 1$  مشتق مرتبه دوم دارد؟

۱۴- الف) با محاسبه مشتق اول و دوم و سوم تابع  $f(x) = \sin x$ ، مشتق  $n$ ام تابع  $f$  را حدس بزنید و سپس درستی حدس خود را به استقراء ثابت کنید.  
 ب) با استفاده از قسمت الف، دستور مشتق  $n$ ام تابع  $f(x) = \cos x$  را به دست آورید.

### ۳-۸- قاعده زنجیری

با وجود اینکه می‌توانیم مشتق  $\sqrt{x}$  و  $x^2 + 1$  را بیابیم ولی هنوز نمی‌توانیم مشتق  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$  را حساب کنیم.

توجه کنید که  $f$  تابعی ترکیبی است که اگر فرض کنیم  $y = f(u) = \sqrt{u}$  و  $u = g(x) = x^2 + 1$  می‌توانیم بنویسیم:

$$y = f(x) = f(g(x))$$

$$f = f \circ g \text{ یعنی}$$

قاعده محاسبه مشتق تابع‌های  $f$  و  $g$  را می‌دانیم، در نتیجه دانستن قاعده‌ای که براساس آن بدانیم چگونه مشتق  $f = f \circ g$  را برحسب مشتق‌های  $f$  و  $g$  پیدا کنیم، بسیار با اهمیت است. و این قاعده قاعده زنجیری می‌نامند.

اکنون فرض کنید تابع  $y = \frac{1}{x^2 + 1}$  برابر است با تابع مرکب  $y = f(g(x))$ ، که در آن  $f(u) = \frac{1}{u}$  و  $u = g(x) = x^2 + 1$  و این توابع دارای مشتق‌های  $g'(x) = 2x$ ،  $f'(u) = \frac{-1}{u^2}$  هستند.

بنابر قاعدهٔ خارج قسمت (که حالت خاصی از قاعدهٔ زنجیری است)

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{x^2 + 1} \right) = \frac{-2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-1}{(x^2 + 1)^2} (2x) = f'(g(x))g'(x)$$

این مثال می‌گوید مشتق تابع مرکب  $y = f(g(x))$  برابر است با مشتق  $f$  به ازای  $g(x)$ ، ضرب در مشتق  $g$  به ازای  $x$ ، این همان قاعدهٔ زنجیری است.

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$$

طرح این مثال ایده‌ای است برای بیان قضیه مشتق تابع مرکب (و یا قاعده زنجیری)

❖ **قضیه ۱: قاعده زنجیری:** اگر تابع  $g$  در نقطهٔ  $x$  تابع  $f$  در نقطهٔ  $g(x)$  مشتق پذیر باشند، آنگاه

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

با استفاده از نمادگذاری لاینیتیس، اگر  $y = f(u)$ ، که در آن  $u = g(x)$  آنگاه  $y = f(g(x))$  و

آهنگ تغییر  $y$  نسبت به  $u$  عبارت است از  $\frac{dy}{du}$

آهنگ تغییر  $u$  نسبت به  $x$  عبارت است از  $\frac{du}{dx}$

بنابراین، آهنگ تغییر  $y = f(u) = f(g(x))$  نسبت به  $x$  عبارت است از  $\frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$  یعنی

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}} \quad (1)$$

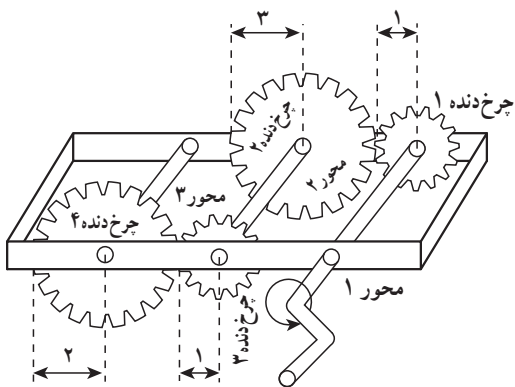
که  $\frac{dy}{du}$  در  $u = g(x)$  محاسبه شده است.

به نظر می‌رسد که برای رسیدن به رابطه (۱)، نماد  $du$  را از صورت و مخرج حذف کرده‌ایم، ولی این کار معنی‌داری نیست زیرا  $\frac{dy}{du}$  معرف خارج قسمت دو کمیت نیست، بلکه کل آن معرف کمیت واحدی به نام مشتق  $y$  نسبت به  $u$  است.

بیان یک مثال فیزیکی از مشتق تابع مرکب: در شکل صفحه بعد مجموعه‌ای از چرخ

دنده‌ها را می‌بینید که چرخ‌دندهٔ دوم و سوم روی محور واحدی قرار دارند. وقتی محور اول می‌چرخد، محور دوم را حرکت می‌دهد، و این محور خود محور سوم (چرخ‌دنده ۴) را حرکت خواهد داد. فرض کنیم  $y$ ،  $u$  و  $x$  تعداد دوران‌های محوره‌های اول، دوم، و سوم در دقیقه باشند.  $\frac{dy}{du}$  و  $\frac{du}{dx}$  و  $\frac{dy}{dx}$  را

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$



محور ۱:  $y$  دوران در دقیقه

محور ۲:  $u$  دوران در دقیقه

محور ۳:  $x$  دوران در دقیقه

حل. چون محیط چرخ دنده دوم ۳ برابر

محیط چرخ دنده اول است ( $r_2 = 3r_1$  شعاع)،

چرخ دنده اول باید ۳ دور بچرخد تا چرخ دنده

دوم یکبار دوران نماید. همچنین چرخ دنده

دوم باید ۲ دور بچرخد تا چرخ دنده چهارم

یکبار دوران نماید و داریم  $\frac{dy}{dx} = 3$  و  $\frac{du}{dx} = 2$

با ادغام این دو نتیجه معلوم می‌شود که محور اول باید ۶ دور بچرخد تا محور سوم (چرخ دنده ۴)

یکبار دوران نماید. در نتیجه

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dy}{du}\right)\left(\frac{du}{dx}\right) = (3)(2) = 6$$

به عبارت دیگر، میزان تغییر  $x$  حاصلضرب میزان تغییر  $y$  نسبت به  $u$  در میزان تغییر

$u$  نسبت به  $x$  است.

❖ مثال: مشتق تابع  $f(x) = \sqrt{x^4 + 1}$  را با استفاده از قاعده زنجیری پیدا کنید.

🚀 حل اول: ابتدا ضابطه  $f$  را به شکل  $f(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$  می‌نویسیم که در آن

$$u = g(x) = x^4 + 1 \text{ و } f(u) = \sqrt{u} \text{ چون } f'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}} \text{ و } g'(x) = 4x^3 \text{ پس بنا بر قضیه ۴}$$

$$f'(x) = f'(g(x)) \times g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^4 + 1}} \times 4x^3 = \frac{2x^3}{\sqrt{x^4 + 1}}$$

🚀 حل دوم: با استفاده از تساوی (۱) اگر فرض کنیم  $u = x^4 + 1$  و  $y = \sqrt{u}$ ، آنگاه

$$f'(x) \text{ یا } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \times 4x^3 = \frac{1}{2\sqrt{x^4 + 1}} \times 4x^3 = \frac{2x^3}{\sqrt{x^4 + 1}}$$

تمرین در کلاس

اگر  $n$  عدد حقیقی باشد و تابع  $u = g(x)$  مشتق‌پذیر، آن وقت  $\frac{d}{dx}(u^n)$  را به دست آورید.



یادداشت: از فعالیت بالا که محاسبه  $\frac{d}{dx}(u^n)$  مورد نظر است قاعده مهم زیر به دست می آید و آن را قاعده توانی کلی می نامیم.

$$\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1} \frac{du}{dx} = nu^{n-1} u'$$

❖ مثال: از توابع زیر مشتق بگیرید.

الف)  $y = \sin(x^2)$       ب)  $y = \cos^2(x)$

حل: 

الف) فرض کنید  $u = x^2$  و  $y = \sin u$  پس بنا بر قاعده زنجیری  $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$

در نتیجه  $\frac{dy}{dx} = (\cos u) \times 2x = 2x \cos x^2$

ب) فرض کنید  $u = \cos x$  و  $y = u^2$ ، پس بنا بر قاعده توانی کلی

$$\frac{dy}{dx} = 2u^1 u' = 2 \cos^2 x (-\sin x) = -2 \sin x \cos^2 x$$



فرض کنید  $u = g(x)$  تابعی مشتق پذیر باشد.

الف) مشتق تابع های  $y = \sin u$  و  $y = \cos u$  را بیابید.

ب) مشتق تابع های  $y = \tan u$  و  $y = \cot u$  (با شرط اینکه  $\tan$  و  $\cot$  در  $u$  مشتق پذیرند) را بیابید.

### ۹-۳- مشتق گیری ضمنی

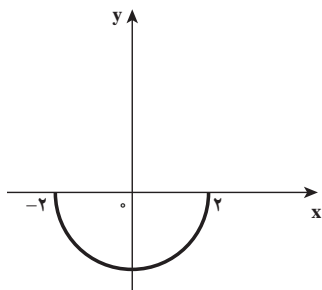
اکثر توابعی که با آنها سروکار داریم، دارای معادله ای هستند که  $y$  (مقدار تابع) را به طور صریح بر حسب متغیر  $x$  بیان می کند مثلاً

$$y = \sin x, \quad y = x\sqrt{x^2 + 1}$$

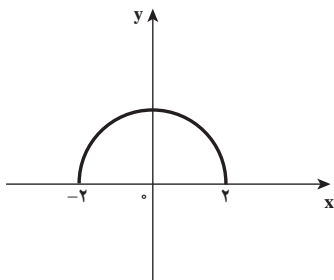
یا در حالت کلی،  $y = f(x)$

اما بعضی اوقات به معادلاتی نظیر  $4 = x^2 + y^2 - 6xy$ ،  $x^2 + y^2 = 4$ ،  $x^2 + y^2 = 6xy$  که  $y$  را به طور صریح بر حسب متغیر  $x$  به دست نمی دهند. البته در برخی موارد می توان چنین معادله هایی را حل کرد تا  $y$  را به طور صریح بر حسب  $x$  به دست آورد مثلاً در معادله  $x^2 + y^2 = 4$  (معادله دایره ای به مرکز مبدأ

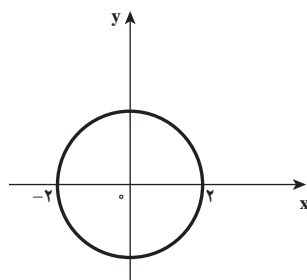
مختصات و به شعاع  $R = 2$  جواب‌های  $y$  می‌شوند  $y = \pm\sqrt{4-x^2}$  در نتیجه  $x^2 + y^2 - 4 = 0$ ، معادله ضمنی تابع‌های  $f(x) = \sqrt{4-x^2}$  و  $g(x) = -\sqrt{4-x^2}$  می‌باشد. نمودارهای  $f$  و  $y$  نیم‌دایره‌های بالایی و پایینی دایره  $x^2 + y^2 = 4$  هستند. (شکل زیر)



پ)  $g(x) = -\sqrt{4-x^2}$



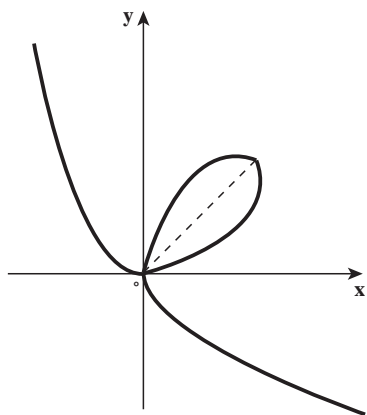
ب)  $y = \sqrt{4-x^2}$



الف)  $x^2 + y^2 = 4$

حل کردن معادله  $x^2 + y^2 = 6xy$  برای یافتن  $y$

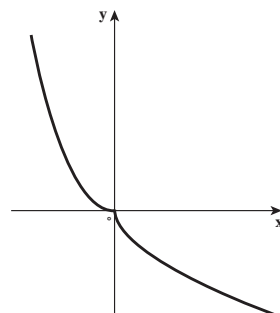
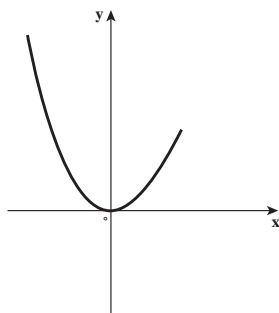
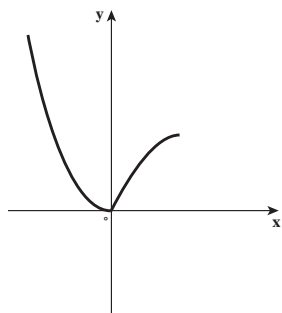
برحسب متغیر  $x$  کار ساده‌ای نیست (برای سیستم‌های جبری کامپیوتری چنین کاری دشوار نیست، اما عبارتی که به دست می‌آید خیلی پیچیده است) به هر حال  $x^2 + y^2 = 6xy$  معادله یک منحنی است که آن را منحنی برگگی دکارت می‌نامند. (شکل روبه‌رو)



نمودار  $x^2 + y^2 = 6xy$

و از این منحنی برگگی دکارت می‌توان چندین تابع

تعریف کرد که معادله ضمنی آن توابع همان  $x^2 + y^2 = 6xy$  است در شکل زیر سه تا از آن تابع‌ها نشان داده شده‌اند.



درخور توجه است که برای پیدا کردن  $\frac{dy}{dx}$  نیازی نداریم که  $y$  را برحسب متغیر  $x$  پیدا کنیم، به جای این کار از مشتق‌گیری ضمنی استفاده می‌کنیم، برای این منظور از دوطرف معادله نسبت به  $x$  مشتق می‌گیریم و از معادله حاصل  $y' = \frac{dy}{dx}$  را به دست می‌آوریم، با این فرض که همواره معادله داده شده،  $y$  را به‌طور ضمنی برحسب تابعی مشتق‌پذیر از  $x$  تعریف می‌کند.

❖ **مثال: الف)** اگر  $x^2 + y^2 = 4$  را بیابید.

ب) معادله مماس بر دایره  $x^2 + y^2 = 4$  را در نقطه  $(1, \sqrt{3})$  بیابید.

👉 **حل:** از طرفین معادله  $x^2 + y^2 = 4$  نسبت به  $x$  مشتق می‌گیریم.

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx} \quad (4)$$

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = 0$$

قابل توجه این که  $y = f(x)$  تابعی است مشتق‌پذیر و بنابراین قاعده «توانی کلی» در مشتق تابع مرکب

داریم:

$$\frac{d}{dx}(y^2) = 2yy'$$

$$2x + 2yy' = 0$$

بنابراین

اکنون از این معادله  $y'$  را پیدا می‌کنیم

$$\frac{dy}{dx} \quad \text{یا} \quad y' = \frac{-x}{y}, \quad (y \neq 0)$$

ب) در نقطه  $(1, \sqrt{3})$ ، مشتق تابع (نیم‌دایره بالایی) برابر است با

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{شیب مماس}$$

بنابراین معادله خط مماس بر دایره در نقطه  $(1, \sqrt{3})$  می‌شود

$$y - \sqrt{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x - 1)$$

یا

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

## تمرین در کلاس

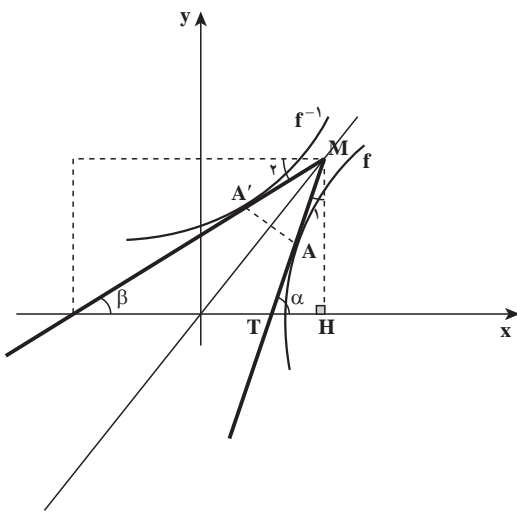
الف) اگر  $\cos \sqrt{y} = y^2 \sin x$  ،  $\frac{dy}{dx}$  را پیدا کنید.

ب) اگر  $x + y^2 + 1 = y + x^2 + xy^2$  ،  $\frac{d^2y}{dx^2}$  را در نقطه  $(1, 1)$  پیدا کنید.

پ) معادله خط مماس بر منحنی  $x^2 + y^2 = 6xy$  را در نقطه  $(\frac{4}{3}, \frac{1}{3})$  پیدا کنید.

### ۳-۱۰- مشتق تابع وارون

فرض کنید  $f$  تابعی یک به یک و مشتق پذیر باشد. با یک رویکرد هندسی می توانیم تابع مشتق پذیر را تابعی بدانیم که نمودارش گوشه یا پیچ ندارد. در نتیجه نمودار  $f^{-1}$  که قرینه نمودار  $f$  نسبت به خط



$y = x$  است، گوشه یا پیچ ندارد.

بنابراین انتظار داریم که  $f^{-1}$  نسبت به

خط  $y = x$  است، گوشه یا پیچ ندارد.

بنابراین انتظار داریم که  $f^{-1}$  نیز به جز در

جاهایی که مماس ها قائم اند، مشتق پذیر

باشد. و به صورت شهودی با یک

استدلال هندسی مقدار مشتق  $f^{-1}$  را در

نقطه داده شده به دست آورید در شکل

(روبرو) نقطه  $A(a, b)$  روی نمودار  $f$

و نقطه  $A'(b, a)$  قرینه  $A$  نسبت به خط

$y = x$  روی نمودار  $f^{-1}$  در نظر می گیریم

$$(f^{-1})'(b) = \tan \beta \text{ و } f'(a) = \tan \alpha$$

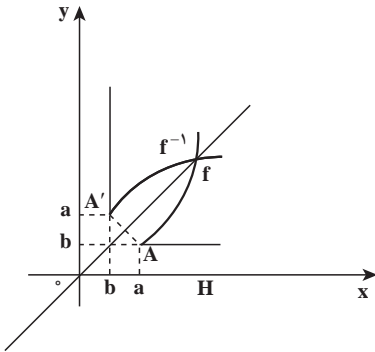
شکل (۶) را در نظر گرفته و رابطه بین  $f'(a)$  و  $(f^{-1})'(b)$  را به دست آورید.

فعالیت

نتیجه به دست آمده در این فعالیت یک ایده‌ای است برای بیان قضیه بعدی.

**❖ قضیه:** فرض کنید  $I$  یک بازه و  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  تابعی باشد که در نقاط درونی بازه  $I$  مشتق پذیر و مشتق آن همه جا مثبت یا همه جا منفی است. در این صورت تابع  $f^{-1}$  (وارون  $f$ ) نیز در همه نقاط درونی دامنه‌اش مشتق پذیر است و به ازای هر نقطه درونی از دامنه  $f^{-1}$  مانند  $b$  که  $b = f(a)$

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$$



یادداشت: اگر  $f'(a) = 0$  یعنی خط مماس بر نمودار  $f$  افقی باشد و به معادله  $y = b$ ، آن وقت خط مماس در نقطه  $b$  از نمودار  $f^{-1}$  خطی است عمود بر محور  $x$  و به معادله  $x = b$  و در این صورت تابع  $f^{-1}$  در نقطه  $b$  مشتق ندارد. (شکل روبه‌رو را ببینید)

**❖ مثال:** فرض کنید  $f(x) = 2x^2 + 3x^2 + 6x + 1$  مقدار  $(f^{-1})'(1)$  را در صورت وجود پیدا کنید.

**حل:** تابع  $f$  همواره مشتق پذیر و مشتق آن همه جا مثبت است (چرا؟) و  $b = 1$  پس از  $a = 0$  نتیجه می‌شود فقط  $1 = 2x^2 + 3x^2 + 6x + 1$  یعنی  $x = 0$

$$f'(x) = 6x^2 + 6x + 6 = f'(0) = 6$$

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{6}$$

بنابراین



- ۱- فرض کنید  $f^{-1}$  تابع وارون تابع مشتق پذیر  $f$  باشد و  $g(x) = \frac{1}{f^{-1}(x)}$  اگر  $f(1) = 2$  و  $f'(1) = \frac{1}{8}$ ،  $g'(2)$  را بیابید.
- ۲- تابع  $f(x) = \sin x$  را با دامنه  $D = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  در نظر بگیرید. مشتق تابع  $f^{-1} = \sin^{-1}$  را به

ازای هر  $x$ ، عضو بازه  $(-1, 1)$  بیاید.

### ۳-۱۱- مشتق توابع نمایی و لگاریتمی طبیعی

وقتی سرمایه‌ای با آهنگ یکنواخت ۱۴ درصد در سال افزایش می‌یابد به نظر منطقی است که انتظار داشته باشیم آهنگ رشد آن در هر لحظه با مقدار سرمایه در آن لحظه متناسب باشد و یا وقتی جمعیت یک جامعه با آهنگ یکنواخت ۳ درصد در سال افزایش می‌یابد، آهنگ رشد جمعیت متناسب با جمعیت است. اینها نمونه‌هایی از پدیده‌ای موسوم به رشد نمایی می‌باشند.

همانند رشد نمایی، می‌توان صحبت از زوال نمایی کرد مثلاً مقدار اورانیم رادیواکتیو  $U^{235}$  با آهنگی متناسب با مقدار موجود  $U^{235}$  زوال می‌یابد. زوال اورانیم (یا به‌طور کلی عنصرهای رادیواکتیو) نمونه‌ای از پدیده‌ای به نام زوال نمایی است.

اکثر مسائل رشد نمایی و زوال نمایی به مدل ریاضی  $f(x) = e^x$  می‌انجامد که برخی از خواص این تابع را پیش از این به وسیله مفهوم حد و پیوستگی بررسی کرده‌ایم.

اکنون می‌خواهیم آهنگ تغییر تابع نمایی طبیعی  $f(x) = e^x$  را بررسی کنیم و قاعده‌ای برای مشتق این تابع بیابیم.

**مشتق تابع نمایی طبیعی:** مشتق تابع  $f(x) = e^x$  را با استفاده از تعریف مشتق پیدا می‌کنیم

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} e^x \times \frac{e^h - 1}{h}$$

عامل  $e^x$  به  $h$  بستگی ندارد، بنابراین می‌توانیم آن را به پیش از حد ببریم:

$$f'(x) = e^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} \quad (1)$$

از تعریف  $e$  (عدد نپیر) داریم:

$$\lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{\frac{1}{h}} = e$$

$$(1+h)^{\frac{1}{h}} \approx e$$

$$((1+h)^{\frac{1}{h}})^h \approx e^h$$

$$(1+h) \approx e^h$$

از این رابطه و مفهوم حد نتیجه می‌شود

و این رابطه ایجاب می‌کند که

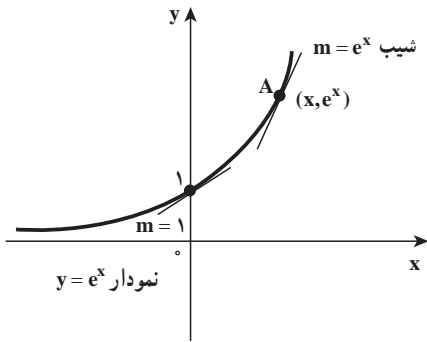
و یا

$$f'(x) = e^x \lim_{h \rightarrow 0} e^h = e^x \times 1 = e^x$$

این مقدار را در رابطه (۱) جایگزین می‌کنیم

مشتق تابع نمایی طبیعی

بنابراین



$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

در نتیجه تابع مشتق تابع نمایی طبیعی  $f(x) = e^x$  خودش می‌باشد و با بیان هندسی شیب

خط مماس بر منحنی  $y = e^x$  در هر نقطه برابر با مختص  $y$  همان نقطه است. (شکل روبه‌رو را ببینید)

یادداشت:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$  خط  $y = 0$  مجانب افقی  $y = e^x$  است.

❖ **مثال:** فرض کنید  $u = g(x)$  تابعی مشتق‌پذیر باشد، مشتق تابع  $y = e^u$  را بیابید.

🚀 **حل:** با فرض  $u = g(x)$  و  $f(x) = e^x$  و  $(f \circ g)(x) = e^u$ ، بنابر قاعده زنجیری داریم:

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) g'(x)$$

چون  $f'(x) = e^x$  پس  $f'(u) = e^u$ ، بنابراین

$$\frac{d}{dx}(e^u) = u' e^u$$



معادله خط مماس بر منحنی  $y = e^{\cos \pi x}$  را در نقطه  $(\frac{1}{2}, 1)$  پیدا کنید.

❖ **مثال:** مقدارهایی از  $\lambda$  را پیدا کنید که به ازای آنها  $y = e^{\lambda x}$  در معادله دیفرانسیل  $y'' + 6y' + 8y = 0$

صدق کند.

(معادله‌ای که رابطه‌ای بین  $y$  و مشتقات اول یا بالاتر آن را بیان می‌کند، یک معادله دیفرانسیل

نامیده می‌شود).

$$y' = \lambda e^{\lambda x}$$

$$y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

🚀 **حل:**

با جایگزین کردن  $y'$  و  $y''$  در معادله دیفرانسیل داریم:

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + 6\lambda e^{\lambda x} + 8e^{\lambda x} = 0$$

$$e^{\lambda x}(\lambda^2 + 6\lambda + 8) = 0$$

$$\lambda^2 + 6\lambda + 8 = 0$$

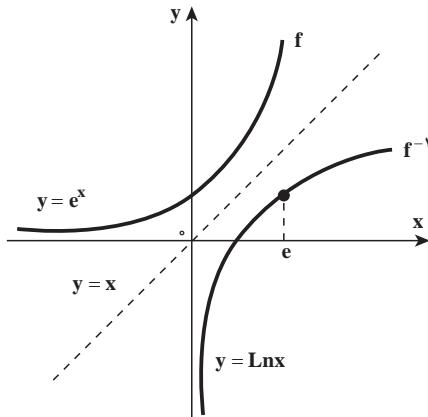
$$\lambda = -2, -4$$

چون  $e^{\lambda x} \neq 0$ ، پس

$y = e^{-2x}$  و  $y = e^{-4x}$  جواب‌های معادله دیفرانسیل  $y'' + 6y' + 8y = 0$  می‌باشند.

**تابع لگاریتمی طبیعی:** با توجه به ویژگی‌های  $f(x) = e^x$ ، تابع  $f$  پیوسته و یک به یک است بنابراین تابع وارون  $f$  موجود است و تابعی است پیوسته و یک به یک.

وارون تابع  $y = e^x$  را می‌توان به صورت  $x = e^y$  نوشت ( $y$  تابع  $f$ ،  $x$  تابع  $f^{-1}$  است و بالعکس) و در عبارت  $y = e^x$ ،  $x = e^y$  را لگاریتم  $x$  در پایه  $e$  می‌خوانیم و با نماد  $y = \text{Lnx}$  نشان می‌دهیم و این تابع را **تابع لگاریتمی طبیعی** می‌نامیم.



و با توجه به اینکه نمودار تابع وارون تابع  $f$ ، قرینه نمودار تابع  $f$  نسبت به نیمساز ربع اول و سوم است، به سادگی می‌توان نمودار تابع  $y = \text{Lnx}$  را، به کمک نمودار  $y = e^x$  رسم کرد. (شکل روبه‌رو)

دامنه تابع  $y = \text{Lnx}$ ،  $(0, +\infty)$ ، و برد آن  $\mathbb{R}$  است و  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \text{Lnx} = -\infty$ ،  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{Lnx} = +\infty$  بنابراین خط  $x = 0$  مجانب قائم تابع  $y = \text{Lnx}$  است.

**مشتق تابع لگاریتمی طبیعی:** تابع لگاریتم

طبیعی  $y = \text{Lnx}$  را در نظر می‌گیریم. می‌دانیم که این تابع مشتق‌پذیر است، زیرا وارون، تابع مشتق‌پذیر  $y = e^x$  است.

فرض کنید  $y = \text{Lnx}$ ، در این صورت  $x = e^y$  اگر از طرفین معادله  $e^y = x$  نسبت به متغیر  $x$  به صورت ضمنی مشتق بگیریم، به دست می‌آید:

$$e^y = \frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}$$

و یا





$$\frac{d}{dx}(\text{Ln}x) = \frac{1}{x} \quad (1)$$

فرض کنید  $u = g(x) > 0$  تابعی مشتق پذیر باشد، به کمک قاعده (1) و قاعده زنجیری ثابت

کنید:

$$\frac{d}{dx}(\text{Lnu}) = \frac{u'}{u}$$

❖ **مثال:** اگر  $f(x) = \text{Ln}|x|$ ،  $f'(x)$  را پیدا کنید.

**حل:** دامنه تابع  $f$ ،  $\mathbb{R} - \{0\}$  است پس

$$f(x) = \begin{cases} \text{Ln}x & , x > 0 \\ \text{Ln}(-x) & , x < 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & , x > 0 \\ \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x} & , x < 0 \end{cases}$$

بنابراین

در نتیجه به ازای هر  $x \neq 0$ ،  $f'(x) = \frac{1}{x}$

نتیجه مثال (7) ارزش به خاطر سپردن را دارد:

$$\frac{d}{dx}(\text{Ln}|x|) = \frac{1}{x}$$



۱- اگر  $u = g(x) \neq 0$  تابع مشتق پذیری باشد، به کمک نتیجه مثال 7 و قاعده زنجیری نشان

دهید:

$$\frac{d}{dx}(\text{Ln}|u|) = \frac{u'}{u}$$

۲- از دو طرف تساوی  $y = x^{\sqrt{x}}$ ،  $x > 0$  لگاریتم طبیعی بگیرید و با استفاده از مشتق گیری

ضمنی،  $\frac{dy}{dx}$  را پیدا کنید.

در یک آزمون ریاضی مسأله‌ای به شرح زیر مطرح شد.

مطلوب است مشتق تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = \text{Ln}(\text{Lnsinx})$ .

در جریان تصحیح پاسخنامه دانش‌آموزان شرکت‌کننده در آزمون مشخص شد که اکثریت

دانش‌آموزان مسأله را به صورت زیر حل کرده‌اند.

$$u(x) = \text{Ln}(\sin x) \Rightarrow f(x) = \text{Ln}(u(x))$$

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}, \quad u'(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\text{Ln}(\sin x)} = \frac{\cos x}{\sin x \text{Ln}(\sin x)}$$

دسته‌ای دیگر از دانش‌آموزان که در اقلیت بودند راه حل گروه اول را انجام ندادند و به شیوه‌ای کاملاً متفاوت با این مسأله برخورد کرده بودند و پاسخی متفاوت به این مسأله داده بودند.

الف) راه حل گروه نخست دانش‌آموزان را تجزیه و تحلیل کنید.

ب) سعی کنید راه حل گروه دوم را حدس بزنید!

پ) مستقل از این راه حل‌ها و با تفکر و اندیشه خودتان این مسأله را بررسی و

حل کنید.

### مسائل

ت) چه نتایجی از بررسی و حل این مسأله می‌توان گرفت؟

۱- در هر مورد  $f'(x)$  را پیدا کنید.

الف)  $f(x) = \sqrt[4]{\frac{x}{x^2+1}}$       ب)  $f(x) = \sqrt[3]{(x^2+x+1)^2}$

پ)  $f(x) = \sin(\cos x)$       ت)  $f(x) = \sin \sqrt[3]{x}$

ث)  $f(x) = \sqrt{\tan x + \cot x}$

۲- نقاطی از منحنی  $y = \tan(2x)$ ،  $(-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4})$ ، را تعیین کنید که در آنها مماس بر منحنی

با خط  $y = 4x$  موازی باشد.

۳- ثابت کنید:

الف) اگر تابع  $f$  زوج و مشتق‌پذیر باشد آنگاه تابع مشتقش فرد است.

ب) اگر تابع  $f$  فرد و مشتق پذیر باشد آنگاه تابع مشتقش زوج است.  
 ۴- با فرض اینکه تابع  $f$  زوج و تابع  $g$  فرد و  $f'(1) = 2$  و  $f'(1) = 3$  و  $g'(1) = 3$  ، مقدار  $(f+g)'(-1)$  را حساب کنید.

۵- با فرض این که تابع  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  در  $\mathbb{R}$  مشتق پذیر از مرتبه دوم باشد و به ازای هر عدد حقیقی  $x$ ،  $g(x) = f(2-x^2)$  و  $f'(2) = 2$  مقدار  $g''(0)$  را حساب کنید.

۶- اگر  $f$  تابعی چندجمله‌ای از درجه  $n$  و تابع  $f \circ f'$  از درجه ۱۲ باشد مقدار  $4n + n^2$  را حساب کنید.

۷- اگر  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$  ، آنگاه مشتق تابع باضابطه  $y = f(\cot x)$  را با شرط  $-\frac{\pi}{4} < x < 0$  حساب کنید.

۸- معادله خط مماس بر منحنی  $y = \sin(x^\circ)$  در نقطه‌ای با طول  $x = 45^\circ$  را به دست آورید.  
 (از رابطه  $\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$  نتیجه می‌شود،  $x$  مساوی  $x^\circ = \frac{\pi}{180}$  رادیان است)  
 ۹- با استفاده از استقرای ریاضی ثابت کنید، برای هر عدد صحیح مثبت  $n$ ، تساوی‌های زیر

برقرارند:

$$\frac{d^n}{dx^n} \sin(ax) = a^n \sin\left(ax + \frac{n\pi}{2}\right) \quad (\text{الف})$$

$$\frac{d^n}{dx^n} \cos(ax) = a^n \cos\left(ax + \frac{n\pi}{2}\right) \quad (\text{ب})$$

۱۰- معادله خط مماس بر نمودار تابع وارون، تابع  $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$  را در نقطه  $(2, 4)$  به دست آورید.

۱۱- تابع  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  در  $\mathbb{R}$  وارون پذیر و مشتق پذیر است و  $f'(x) = \sqrt{9+f^2(x)}$  ، مقدار  $(f^{-1})'(4)$  را پیدا کنید.

۱۲- معادله خط مماس بر نمودار  $x^2 + y^2 = 3xy$  در نقطه  $A\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right)$  را بیابید و نشان دهید خط قائم بر منحنی در نقطه  $A$  از مبدأ مختصات می‌گذرد.

۱۳- خط  $y = ax + b$  نمودار  $xy - 1 = x^2 + y^2$  را در نقاط  $M$  و  $N$  قطع می‌کند.  $a$  و  $b$  را چنان حساب کنید که مماس در نقاط  $M$  و  $N$  خط عمود بر محور  $x$  باشد.

۱۴- در هر مورد  $f'(x)$  را پیدا کنید.

$$f(x) = \ln|x^2 - 1| \quad (\text{ب}) \qquad f(x) = e^{\tan x} \quad (\text{الف})$$

$$f(x) = \text{Ln}|\cos x| \quad (\text{ت})$$

$$f(x) = \text{Ln}|\sin x| \quad (\text{ب})$$

۱۵- معادله خط مماس بر منحنی  $y = \frac{\text{Ln}x}{x}$  را در نقطه  $(1, 0)$  پیدا کنید.

۱۶- مشتق دوم تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + \frac{x}{n})^n$ ، (به ازای هر عدد حقیقی  $x$ ) را حساب کنید.

۱۷- در چه نقاطی نمودار  $f(x) = x^2 e^{-x^2}$  دارای مماس افقی است.

۱۸- مشتق تابع وارون، تابع  $f$  با ضابطه:  $f(x) = 3x + \text{Ln}x$  را به دست آورید.

۱۹- (مدلسازی یک بیماری همه‌گیر) تعداد  $(y)$  افرادی که به یک ویروس بسیار مسری مبتلا شده‌اند به وسیله منحنی تدارکاتی  $y = \frac{L}{1 + Me^{-kt}}$  مدلسازی شده است که در آن  $t$  از لحظه بروز بیماری، برحسب ماه اندازه‌گیری می‌شود.

در ابتدا تعداد مبتلایان ۲۰۰ نفر بود و یک ماه بعد، این تعداد به ۱۰۰۰ نفر افزایش یافت. سرانجام تعداد مبتلایان در عدد ۱۰۰۰۰ ثابت ماند. پارامترهای  $L$  و  $M$  و  $K$  را تعیین کنید و مشخص کنید تعداد مبتلایان ۳ ماه بعد از بروز بیماری چند نفر هستند و آنگاه رشد در آن لحظه چقدر بوده است.

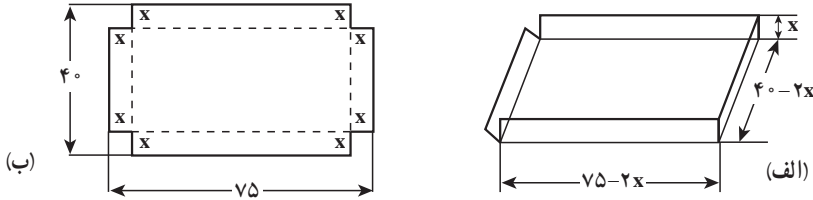
## ۱۲-۳ - مقدارهای اکسترمم سراسری و مسائل بهینه‌سازی

اغلب در زندگی وقتی با مسأله‌ای روبرو می‌شویم، تلاش می‌کنیم بهترین راه حل را برای آن مسأله پیدا کنیم.

برای مثال یک کشاورز می‌خواهد ترکیبی از محصولات انتخاب کند که تا حد امکان تولیدش بیشترین سود را داشته باشد. و یا یک پزشک علاقمند است که کمترین مقدار دارو را در طول درمان یک بیمار معین تجویز کند.

همچنین یک کارخانه‌دار مایل است هزینه توزیع کالاهايش را به حداقل برساند. گاهی اوقات یک مسأله از این نوع را می‌توان با نمادگذاری، رابطه‌ای (به شکل معادله) به عنوان ضابطه تابعی از یک متغیر بیان کرد تا با استفاده از روش‌های حسابان با ماکسیم کردن یا مینیم کردن مقدار تابع روی یک مجموعه خاص ابزار لازم برای حل این مسأله فراهم شود.

به عنوان نمونه با طرح مسأله ساختن یک جعبه در باز که در صنعت بسیار کاربرد دارد، شروع می‌کنیم.



❖ **مثال:** می‌خواهیم یک جعبه در باز از یک قطعه مقوای  $40 \times 75$  سانتی‌متر بسازیم با این روش که مربع‌هایی با اندازه مساوی از چهار گوشه این مقوا برش می‌زنیم و جدا می‌کنیم (شکل زیر). اکنون می‌خواهیم بدانیم طول ضلع این مربع‌ها چقدر باشد تا جعبه ساخته شده بیشترین حجم ممکن را داشته باشد.

برای مدل‌سازی این مسأله نماد  $x$  را برای طول ضلع مربع‌هایی که باید از چهار گوشه مقوا بریده شود انتخاب می‌کنیم (قسمت الف شکل بالا) و نماد  $V$  را برای حجم جعبه‌ای که می‌خواهیم بسازیم، در نظر می‌گیریم (قسمت ب شکل بالا). به بیان دیگر

$x$  : طول (برحسب سانتی‌متر) ضلع‌های مربع‌هایی که باید بریده شود.

$V$  : حجم (برحسب سانتی‌متر مکعب) جعبه در باز که ساخته می‌شود.

چون از هر گوشه مقوا، یک مربع به ضلع  $x$  از هر گوشه مقوا برش می‌دهیم، ابعاد جعبه در باز مطلوب عبارتند از  $x$  و  $(40 - 2x)$  و  $(75 - 2x)$ ، (شکل فوق)

بنابراین حجم این جعبه که به شکل مکعب مستطیل است به صورت زیر به دست می‌آید.

$$V = (40 - 2x)(75 - 2x) \times x = 4x^3 - 230x^2 + 3000x \quad (1)$$

متغیر  $x$  در این معادله با محدودیت‌های معینی روبرو است، زیرا به دلیل اینکه  $x$  طول ضلع مربع است، نمی‌تواند منفی باشد. همچنین عرض مقوا  $40$  سانتی‌متر است، پس  $x$  نمی‌تواند بیشتر از نصف آن باشد (چرا؟)

در نتیجه متغیر  $x$  از معادله (۱) باید در رابطه  $0 \leq x \leq 20$  صدق کند (چرا؟)

بنابراین مسأله واقعی ما به یک مدل ریاضی تبدیل شد که در این مدل ریاضی باید مقادیری از  $x$

را در بازه  $[0, 20]$  پیدا کنیم که مقدار  $V$  در معادله (۱) بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.

می‌توان این مسأله‌ها را به پیدا کردن مقدارهای ماکسیمم یا مینیمم تابع‌ها تبدیل کرد. ابتدا توضیح می‌دهیم که منظورمان از مقدارهای ماکسیمم و مینیمم چیست؟

**تعریف ۱:** فرض کنیم  $D$  دامنه تابع  $f$  و نقطه  $c$  عضو دامنه باشد، می‌گوییم:

(الف) مقدار ماکسیمم (ماکسیمم سراسری یا مطلق) تابع  $f$  روی  $D$  است،

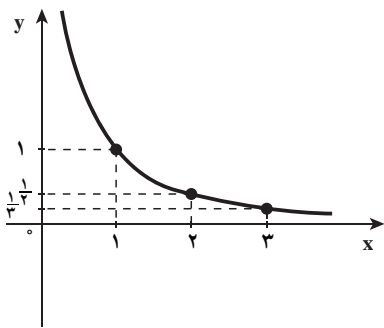
به شرطی که به ازای هر  $x$  عضو  $D$  داشته باشیم:  $f(x) \leq f(c)$

(ب) مقدار مینیمم (مینیمم سراسری یا مطلق) تابع  $f$  روی  $D$  است، به

شرطی که به ازای هر  $x$  عضو  $D$  داشته باشیم:  $f(c) \leq f(x)$

(پ) مقدار اکسترمم مطلق تابع  $f$  روی  $D$  است که یا مقدار ماکسیمم مطلق

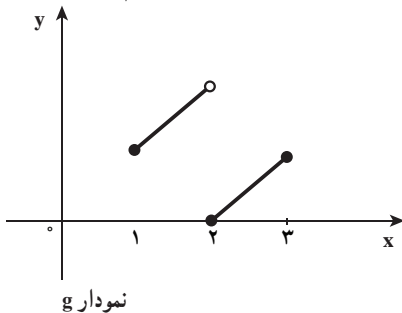
و یا مقدار مینیمم مطلق تابع  $f$  روی  $D$  باشد.



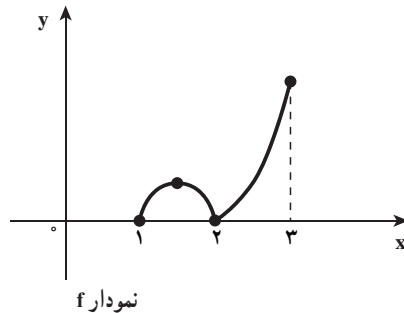
در این بخش از کتاب (۳-۱۲)، مقدار ماکسیمم مطلق، مقدار مینیمم مطلق، مقدار اکسترمم مطلق تابع را به اختصار مقدار ماکسیمم تابع، مقدار مینیمم تابع و مقدار اکسترمم تابع بیان می‌کنیم.

شکل روبه‌رو نمودار تابع  $f$  با دامنه  $D = (0, +\infty)$  و ضابطه  $f(x) = \frac{1}{x}$  را نشان می‌دهد. تابع  $f$  در بازه  $(0, +\infty)$  نه دارای مقدار ماکسیمم است و نه مقدار مینیمم

زیرا بُرد تابع مجموعه  $R = (0, +\infty)$  است و  $f(x)$  می‌تواند از هر عدد مثبتی بزرگتر شود (با نزدیک کردن  $x$  مثبت به صفر) و  $f(x)$  با مقادیر مثبت می‌تواند به صفر نزدیک شود (با انتخاب  $x$ ‌های مثبت و بزرگ) از طرف دیگر تابع  $f$  در بازه  $[1, 3]$  هم دارای ماکسیمم و هم دارای مینیمم است، مقدار ماکسیمم تابع  $f(1)$  = و مقدار مینیمم تابع  $f(3) = \frac{1}{3}$  است و اما تابع  $f$  در بازه  $(1, 3]$ ، مقدار مینیمم آن  $f(3) = \frac{1}{3}$  و در



نمودار  $g$



نمودار  $f$

این بازه مقدار ماکسیمم ندارد (چرا؟)

در شکل زیر نمودارهای توابع  $f$  و  $g$  را در نظر بگیرید.  
 الف) پیوستگی توابع  $f$  و  $g$  را در بازه  $[۱, ۳]$  بررسی نمایید.  
 ب) آیا توابع  $f$  و  $g$  در بازه  $[۱, ۳]$  دارای مقدار ماکسیمم و مقدار مینیمم هستند و اگر جواب مثبت است آن مقادیر را مشخص کنید.

در مثال بالا دیدیم که تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = (\frac{1}{x})$  در هر بازه بسته نظیر بازه  $[۱, ۳]$  که پیوسته است دارای مقدار ماکسیمم و مقدار مینیمم است.

همچنین در این فعالیت تابع  $f$  در بازه بسته  $[۱, ۳]$  پیوسته است. و تابع در این بازه دارای مقدار مینیمم و همچنین دارای مقدار ماکسیمم است. و اما تابع  $g$  در بازه  $[۱, ۳]$  ناپیوسته است (چرا؟) و در این بازه مقدار ماکسیمم ندارد ولی مقدار مینیمم دارد.

دیدیم که برخی تابع‌ها مقدار اکسترمم دارند و برخی ندارند. اکنون می‌خواهیم به این سؤال پاسخ دهیم که تحت چه شرایطی می‌توانیم تضمین کنیم تابع هم دارای ماکسیمم و هم دارای مینیمم است.

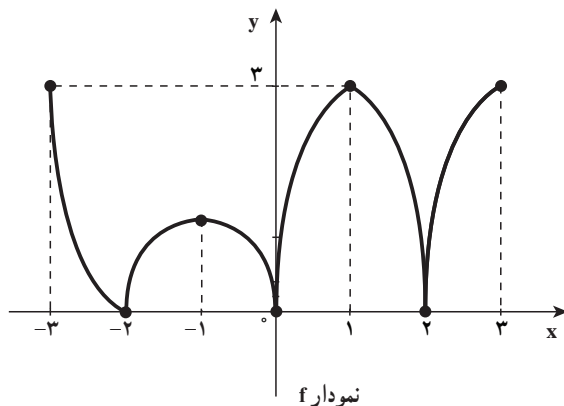
در قضیه زیر شرط‌هایی را آورده‌ایم که به اعتبار آنها تابع هم مقدار ماکسیمم و هم مقدار مینیمم دارد.

❖ **۱- قضیه ۱ (مقدار اکسترمم مطلق):** اگر تابع  $f$  در بازه بسته  $[a, b]$  پیوسته باشد، آن

وقت در این بازه هم مقدار ماکسیمم مطلق و هم مقدار مینیمم مطلق دارد.

برای درک بهتر قضیه مقدار اکسترمم، شکل زیر را در نظر بگیرید و به پرسش‌های زیر جواب دهید.

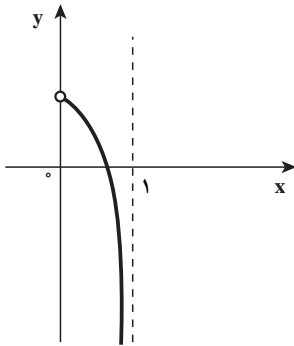
الف) تابع پیوسته  $f$  در بازه بسته  $[-۳, ۳]$  در چه نقاطی مینیمم دارد؟ در صورت مثبت بودن



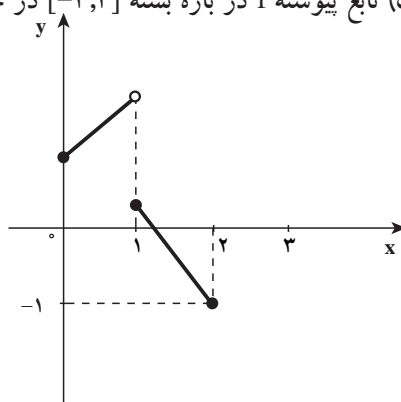
نمودار  $f$

جواب، مقدار مینیمم تابع را به دست آورید.

(ب) تابع پیوسته  $f$  در بازه بسته  $[-3, 3]$  در چه نقاطی ماکسیمم دارد؟ در صورت مثبت بودن



(ب) این تابع در دامنه‌اش که بازه باز  $(0, 1)$  است پیوسته است و نه ماکسیمم دارد و نه مینیمم



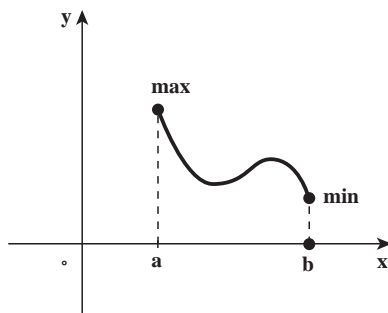
(الف) این تابع در دامنه‌اش که بازه بسته  $[0, 2]$  است پیوسته نیست و مقدار ماکسیمم ندارد ولی مقدار مینیمم دارد که برابر  $f(2) = -1$

جواب، مقدار ماکسیمم تابع را به دست آورید.

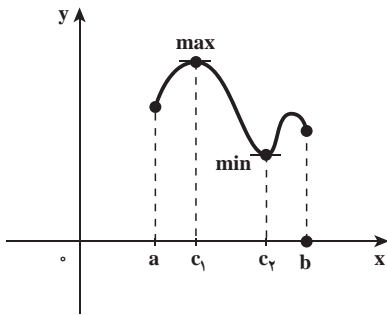
❖ پرسش: آیا شرایط قضیه مقدار اکسترمم در نمودارهای شکل زیر برقرار است (چرا؟)

❖ پرسش: می‌خواهیم بدانیم در چه نقاطی مقادیر اکسترمم رخ می‌دهند؟ معمولاً مقادیر اکسترمم یک تابع را در بازه‌ای مانند  $I$  از دامنه آن جستجو می‌کنیم البته ممکن است بازه  $I$  شامل نقاط انتهایی خود باشد و نباشد.

برای نمونه بازه  $I = [a, b]$  شامل هر دو نقطه انتهایی خود است. و بازه  $I = (a, b)$  فقط شامل نقطه انتهایی چپ خود می‌باشد و بازه  $I = (a, b)$  شامل نقطه انتهایی خود نیست. در سه حالت زیر





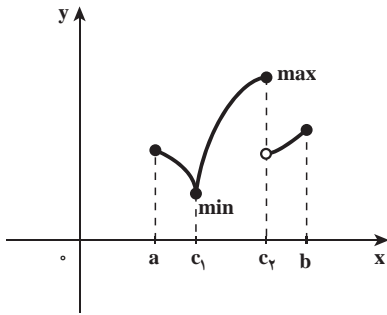


مقادیر اکسترمم تابع را بررسی می‌کنیم.

حالت اول: وقتی که مقادیر اکسترمم را در نقاط

انتهاپی بازه داشته باشیم. (شکل زیر)

حالت دوم: وقتی که مقادیر اکسترمم را در نقاط



درون بازه داشته باشیم و در آن نقاط مقدار مشتق صفر است. (شکل روبه‌رو)

حالت سوم: وقتی که مقادیر اکسترمم را در نقاط

درون بازه داشته باشیم و در آن نقاط تابع مشتق‌پذیر نباشد.

(شکل روبه‌رو) که تابع در نقطه  $c_1$  بازگشتی است و در نقطه  $c_2$  پرشی و ناپیوسته است.

در سه حالت بالا نقاطی را مطرح کردیم که نقاط کلیدی قضیه مقدار اکسترمم هستند.

نقطه‌ای از دامنه  $f$  در هر یک از حالت‌های دوم و سوم و بالا که تابع مقدار اکسترمم داشت «نقطه

بحرانی» تابع  $f$  می‌نامیم.

**تعریف ۲:** نقطه درونی  $c \in D_f$  را نقطه بحرانی تابع  $f$  می‌نامیم، هرگاه  $f'(c) = 0$

و یا  $f'(c)$  موجود نباشد.

❖ **مثال:** نقاط بحرانی تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = -2x^3 + 3x^2$  را در بازه  $[-\frac{1}{3}, 2]$  بیابید.

✍ **حل:** تابع  $f$  به ازای هر  $x$  از بازه باز  $(-\frac{1}{3}, 2)$  مشتق‌پذیر است و  $f'(x) = -6x^2 + 6x$  که به ازای

$x = 0$  و  $x = 1$  داریم  $f'(0) = 0$  و  $f'(1) = 0$  و در بازه  $(-\frac{1}{3}, 2)$  نقطه‌ای وجود ندارد که تابع  $f$  مشتق نداشته

باشد. بنابراین تابع  $f$  در نقاط  $0$  و  $1$  بحرانی است.