فصل ۴

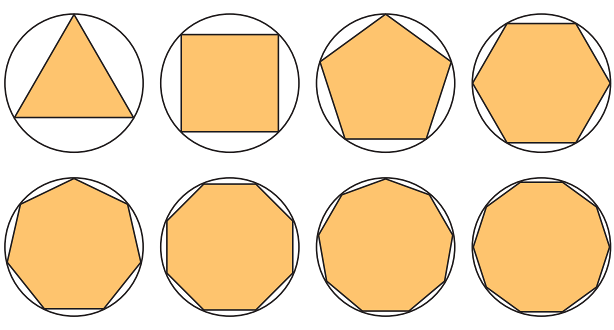
انتگرال

۴ـ۱ـ مسأله مساحت

فرمول‌های مربوط به مساحت چندضلعی‌ها، نظیر مربع، مستطیل، مثلث و ذوزنقه از زمان‌های شروع تمدن‌های نخستین به خوبی شناخته شده بوده است. با این‌حال، مسأله یافتن فرمولی برای بعضی نواحی که با مرزهای منحنی‌الخط هستند (که دایره ساده‌ترین آنهاست) برای ریاضیدانان اولیه در خور مشکلاتی بوده است.

اولین پیشرفت واقع‌بینانه محاسبه چنین مساحت‌هایی توسط ریاضیدان یونانی به نام ارشمیدس صورت گرفت. ارشمیدس توانست مساحت ناحیه‌هایی با مرزهای محدود به قوس‌های دایره، سهمی، و میخ و منحنی‌های دیگر را با استفاده از روش خارق‌العاده‌ای، که امروزه به روش اِفنا مشهور است، محاسبه کند. در چنین روشی برای محاسبه دایره از درج چندضلعی‌های منتظم در درون دایره استفاده می‌شود و تعداد اضلاع این چندضلعی‌ها متوالیاً زیاد و زیادتر شده و به نحو نامحدودی افزایش می‌یابد (شکل ۴ــ۱)

۳٫۱۳۹۵۲۵۹۷۶۴۷	۱۰۰
۳٫۱۴۱۰۷۵۹۰۷۸۱	۲۰۰
۳٫۱۴۱۳۶۲۹۸۲۵۰	۳۰۰
۳٫۱۴۱۴۶۳۴۶۲۳۶	۴۰۰
۳٫۱۴۱۵۰۹۹۷۰۸۴	۵۰۰
۳٫۱۴۱۵۷۱۹۸۲۷۸	۱۰۰۰
۳٫۱۴۱۵۸۷۴۸۵۸۸	۲۰۰۰
۳٫۱۴۱۵۹۰۳۵۶۸۳	۳۰۰۰
۳٫۱۴۱۵۹۱۳۶۱۶۶	۴۰۰۰
۳٫۱۴۱۵۹۱۸۲۶۷۶	۵۰۰۰
۳٫۱۴۱۵۹۲۴۴۶۸۸	۱۰٬۰۰۰



جدول و شکل ۴ــ۱ــ هرچه تعداد اضلاع چندضلعی بیشتر شود مساحت چندضلعی به مساحت دایره نزدیک و نزدیک‌تر می‌گردد.

همچنان که تعداد اضلاع چنین چندضلعی‌هایی افزایش می‌یابد، چندضلعی به پرکردن ناحیه درون دایره متمایل شد و در نتیجه مساحت این چندضلعی‌ها تقریب‌های بهتر و بهتری از مساحت دقیق دایره به دست می‌دهد.

برای آنکه ملاحظه کنیم که چگونه این روش کار می‌کند، فرض می‌کنیم نمایش مساحت چندضلعی با n ضلع بوده باشد که درون دایره به شعاع واحد محاط شده است.

جدول ۴ــ۱ مقادیر $A(n)$ را برای انتخاب‌های مختلف n نشان می‌دهد. می‌بینیم که برای مقادیر بزرگ n مساحت $A(n)$ ظاهراً به عدد نزدیک می‌گردد و این چیزی است که انتظارش را داریم. این تجربه به ما می‌گوید که برای مساحت دایره‌ای به شعاع ۱، می‌توانیم روش افنا را معادل تساوی حدی ارزیابی کنیم.

$$\lim_{n\to\infty} A(n)=\pi$$

اما یونانیان باستان از مفهوم «بینهایت» خوششان نمی‌آمد و لذا در بررسی‌های مربوط به ریاضیات از آن احتراز می‌کردند؛ در نتیجه محاسبه مساحت با استفاده از روش افنا یک فرایند سرانگشتی به حساب می‌آمد. در واقع این روش تا زمان نیوتن و لاىبنیتز باقی ماند ــ کسانی که روشی کلی برای محاسبه مساحت با استفاده ضمنی از مفهوم حد ارائه کردند. ما روش این دانشمندان را در بررسی مسأله زیر به‌کار خواهیم گرفت.

مسأله مساحت: با داشتن تابع پیوسته و نامنفی f که بر بازه $[a , b]$ تعریف شده است، مساحت بین نمودار f و بازه $[a , b]$ بر محور x را پیدا کنید (شکل ۴ــ۲)

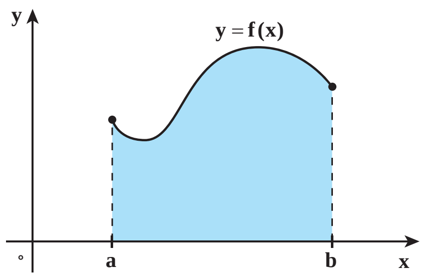
پرسش: همچنان که در شکل ۴ــ۱ ملاحظه می‌کنیم تعدادی چندضلعی منتظم در درون دایره به شعاع واحد محاسبه شده‌اند. در جدول سمت راست برای مقادیر بزرگ n که تعداد اضلاع چندضلعی را نشان می‌دهد، مساحت چندضلعی‌ها با نماد $A(n)$ نشان داده شده است. آیا می‌توان گفت که وقتی n بزرگ و بزرگ‌تر می‌شود مساحت n ضلعی محاطی با مساحت دایره برابر می‌گردد؟

به زبان دنباله‌ها، برای هر $A(n),\ n\geq ۳$ که مساحت n ضلعی است عددی است حقیقی. در نتیجه $\{A(n)\}_{n=۱}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی است که جمله n ام آن مساحت n ضلعی منتظم محاط در درون دایره است. می‌دانیم که مساحت دایره $S=\pi r^۲=\pi\times ۱=\pi$ می‌باشد. آیا به زبان حدی می‌توانیم بگوییم که:

$$\lim_{n\to+\infty} A(n)=\pi$$

یونانیان باستان از مفهوم «بی‌نهایت» خوششان نمی‌آمد و لذا در بررسی‌های مربوط به ریاضیات از آن احتراز می‌کردند، در نتیجه محاسبه مساحت با استفاده از روش افنا برایشان یک فرآیند

سرانگشتی به حساب می‌آمد. در واقع این روش تا زمان نیوتن و لایبنیتز باقی ماند ــ کسانی که روش کلی‌تر برای محاسبه مساحت با استفاده ضمنی از مفهوم حد ارایه کردند. ما روش این دانشمندان را در بررسی مسأله مساحت به‌کار خواهیم گرفت.



شکل ۴ــ۲ــ ناحیه تحت نمودار
تابع f محدود به محور x و دو خط x = a و x = b

ما در این فصل به مطالعه و بررسی مسأله مساحت می‌پردازیم و لذا این طریق مفهوم مهمّ انتگرال معین را فرمول‌بندی خواهیم کرد. امّا ذکر این نکته نیز جالب است که گرچه انتگرال در رابطه با مسأله مساحت مفهوم‌سازی شده است، لکن از این مفهوم برای بررسی و مطالعه مسأله‌های دیگری در ریاضیات، فیزیک و سایر علوم دقیقه استفاده می‌شود، نظیر مسأله پتانسیل الکتریکی، مسأله کار انجام شده توسط نیروها، مطالعه و تعیین معادله مسیر متحرک‌ها با استفاده از سرعت‌های داده شده و نظایر این‌ها.

قبل از آن که به مطالعه و بررسی مساحت بپردازیم لازم است با مجموع‌های متناهی و نماد سیگما آشنا شویم.

مجموع‌ها و نماد سیگما : در محاسبه و مطالعه مساحت‌ها که در بخش بعدی با آن درگیر می‌شویم، با مجموع‌هایی متناهی از مقدارهای یک تابع سروکار خواهیم داشت. در این بخش برآنیم تا نماد مناسبی برای نمایش یک مجموع با تعداد متناهی جمله معرفی کنیم. همچنین به روش‌هایی برای محاسبه حاصل جمع چنین مجموع‌هایی محتاج خواهیم بود. از نماد Σ (سیگما) برای نمایش یک مجموع استفاده می‌کنیم.

تعریف ۱ : نماد سیگما هرگاه m و n دو عدد صحیح $m \le n$ و همچنین f تابعی باشد که بر اعداد صحیح تعریف شده باشد، نماد $\sum\limits_{i=m}^{n} f(i)$ نشانگر حاصل جمع مقادیر تابع f در این اعداد می‌باشد: $m, m+۱, m+۲, \dots, m$

$$\sum_{i=m}^{n} f(i) = f(m) + f(m+۱) + \dots + f(n)$$

مجموع سمت راست این تساوی بسط مجموع تأثیر داده شده با سیگمای سمت چپ نامیده می‌شود.

مثال: $$\sum_{i=1}^{5} i^2 = 1^2+2^2+3^2+4^2+5^2=55$$

حرف i ظاهر شده در نماد $\sum_{i=m}^{n} f(i)$ را **اندیس جمع‌بندی** می‌نامیم.

پس برای محاسبه $\sum_{i=m}^{n} f(i)$ ، اندیس i را با اعداد $m, \ldots, m+1, \ldots, n$ متوالیاً جایگزین کرده و مقادیر حاصله را جمع می‌کنیم. ملاحظه می‌کنیم که مقدار حاصل جمع به اندیس جمع‌بندی بستگی ندارد؛ چرا که این اندیس در سمت راست تعریف وجود ندارد.

برای هر k:

$$\sum_{i=m}^{n} f(i) = \sum_{k=m}^{n} = f(k)$$

$$\sum_{k=1}^{5} k^2 = 1^2+2^2+3^2+4^2+5^2=55$$

لکن حاصل جمع $\sum_{i=m}^{n} f(i)$ به دو عدد جمع m و n بستگی تام دارد، این دو عدد را حدود جمع‌بندی می‌نامیم؛ m را **حد پایین** و n را **حد بالا** می‌نامیم.

مثال: نمایش حاصل جمع‌ها با استفاده از نماد سیگما

$$\sum_{j=1}^{20} j = 1+2+3+\cdots\cdots+18+19+20$$

$$\sum_{i=0}^{n} x^i = x^0+x^1+x^2+\cdots\cdots+x^{n-1}+x^n$$

$$\sum_{m=1}^{n} i = \underbrace{1+1+1+\cdots\cdots+1}_{\text{بار } n}$$

$$\sum_{k=-2}^{3} \frac{1}{k+8} = \frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}$$

نکته: در اکثر اوقات به‌جای استفاده از نماد تابعی $f(i)$ از یک متغیر اندیس‌دار مانند a_i برای نمایش جمله iام یک حاصل جمع عمومی استفاده می‌کنیم:

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n$$

به‌خصوص وقتی تعداد جملات نامتناهی باشد. چنین مجموعی را یک **سری نامتناهی** می‌نامیم:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

پس وقتی جمله‌ای به‌عنوان جمله آخر به دنبال سه نقطه ... نمی‌آید، باید این معنی را داشته باشد که جملات برای همیشه و به‌طور نامتناهی ادامه دارند.

پرسش : اکنون این پرسش پیش می‌آید که وقتی تعداد جملات متناهی باشد، استفاده از نماد سیگما چه ویژگی‌هایی دارد؟

چون نماد سیگما تعمیم عمل جمع به تعداد متناهی جمله است، پس ویژگی‌های اساسی عمل جمع را به ارث می‌برد. برای مثال، وقتی تعداد متناهی عدد را جمع می‌کنیم، ترتیب قرار گرفتن جملات تأثیری در مقدار حاصل جمع ندارد و یا آن که هرگاه همه جملات دارای عامل مشترک باشند، این عامل مشترک را می‌توان از جملات جدا کرده و به صورت فاکتور ضرب در نماد سیگما لحاظ کرد همانند وقتی که تعداد جملات فقط ۲ جمله است : $ca + cb = c(a + b)$

لذا قوانین اولیه حساب ویژگی‌هایی به نماد سیگما می‌دهد که اینک اهم آن را بیان می‌کنیم.

الف) $$\sum_{i=m}^{n} (Af(i)+Bg(i)) = A\sum_{i=m}^{n} f(i)+B\sum_{i=m}^{n} g(i)$$

که A، B اعدادی ثابت و مستقل از اندیس i هستند.

ب) دو عبارت $\sum_{i=m}^{m+n} f(i)$ و $\sum_{i=o}^{n} f(i+m)$ دارای یک بسط هستند؛ در واقع هر یک برابر $f(m) + f(m + ۱) + \ldots + f(m + n)$ هستند (امتحان کنید!). پس

د) $$\sum_{i=m}^{m+n} f(i) = \sum_{i=o}^{n} f(i+m)$$

این قانون را **قانون لغزاندن اندیس‌ها** می‌نامیم.

مثال: $\sum_{i=۳}^{۱۷} \sqrt{۱+i^۲}$ را به صورت $\sum_{i=۱}^{n} f(i)$ بنویسید.

حل: باید در عبارت داده شده اندیس‌های پایین و بالا را ۲ واحد کم کنیم تا اندیس پایین از ۱ شروع گردد؛ در عین حال به همان مقدار، یعنی ۲ واحد به اندیس عبارت تحت Σ باید اضافه کنیم :

$$\sum_{i=۳}^{۱۷} \sqrt{۱+i^۲} = \sum_{i=۱}^{۱۵} \sqrt{۱+(i+۲)^۲}$$

نکته: ملاحظه کنید که $\sum_{i=m+۱}^{n} f(i) = \sum_{i=۱}^{n} f(i) - \sum_{i=۱}^{m} f(i)$ (چرا؟)

تمرین در کلاس

اکنون شما عبارت $\sum_{i=a+۱}^{۱۲} f(b+i)^۳$ را به‌صورت $\sum_{i=۱}^{n} f(i)$ بنویسید.

محاسبه مجموع‌ها : وقتی یک مجموع مانند $S=\sum_{i=1}^{n} i = 1+2+3+\cdots+n$ داده می‌شود که درگیر تعداد زیادی جمله می‌باشد، داشتن فرمولی که مقدار این مجموع را به شکلی بسته نشان دهد بسیار ضروری می‌باشد.

منظورمان از شکل بسته چنین فرمولی آن است که از شکل بسط آن (شامل سه نقطه) استفاده نشده باشد. برای مجموع بالا فرمول به‌صورت $S=\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ می‌باشد.

دانش‌آموزان، در این مورد خاص، مشکلی ندارند. می‌توانید به شکل زیر عمل کنید.

$$S = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n$$

$$S = n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 2 + 1$$

پس جمع را یک بار به صورت معمولی به جلو هریک بار به‌صورت عقب‌گرد نوشته‌ایم. دو ردیف را همچنان که زیر هم نوشته شده‌اند با هم جمع می‌کنیم :

$$2S = (n+1) + (n+1) + (n+1) + \ldots + (n+1) + (n+1) = n(n+1)$$

فرمول S فوق الاشاره با تقسیم طرفین تساوی اخیری بر ۲ به‌دست می‌آید.

امّا همیشه محاسبه یک مجموع و یافتن فرمولی برای آن به این آسانی نخواهد بود. این مسأله یکی از مسأله‌های چالش‌برانگیز در مباحث ریاضیات است. لیکن چنین فرمول‌هایی که در بخش بعدی بدان نیاز داریم، فرمول‌هایی سرراست و ساده بوده که در قضیه بعدی گردآوری شده‌اند.

قضیه ۱ : فرمول‌های جمع‌بندی

الف) $\sum_{i=1}^{n} 1 = \underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{n} = n$

ب) $\sum_{i=1}^{n} i = 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

ج) $\sum_{i=0}^{n} i^2 = 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

د) $\sum_{i=1}^{n} r^{i-1} = 1+r+r^2+r^3+\cdots+r^{n-1} = \frac{r^n-1}{r-1} \ , \ (r\neq 1)$

برهان :

الف) بدیهی است حاصل جمع n بار عدد ۱ برابر n است. یک راه حل برای (ب) قبلاً ارایه گردید. برای اثبات (ج) n بار اتحاد زیر را

$$(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$$

به ازای هر k که $۱ \leq k \leq n$ نوشته و جمع می‌کنیم.

$$
\begin{array}{llllll}
k=۱ & ۲^۳-۱^۳ & =۳\times۱^۲ & + & ۳\times۱ & +۱\\
k=۲ & ۳^۲-۲^۳ & =۳\times۲^۲ & + & ۳\times۲ & +۱\\
k=۳ & ۴^۳-۳^۳ & =۳\times۳^۲ & + & ۳\times۳ & +۱\\
\vdots & \vdots & & & & \\
k=n-۱ & n^۳-(n-۱)^۳ & =۳(n-۱)^۲ & + & ۳(n-۱) & +۱\\
k=n & (n+۱)^۳-n^۳ & =۳n^۲ & + & ۳n & +۱\\
\hline
\end{array}
$$

با استفاده از (ب) $\quad (n+۱)^۳-۱=۳(\sum_{i=۱}^{n} i^۲)+\frac{۳n(n+۱)}{۲}+n$

در نتیجه به آسانی $\sum_{i=۱}^{n} i^۲$ از تساوی اخیر به‌دست می‌آید.

$$
\begin{aligned}
۳\sum_{i=۱}^{n} i^۲ &= (n+۱)^۳-\frac{۳n(n+۱)}{۲}-n-۱\\
&= n^۳+۳n^۳+۲n-\frac{۳n(n+۱)}{۲}\\
\sum_{i=۱}^{n} i^۲ &= \frac{n(n^۲+۳n+۲)}{۳}-\frac{n(n+۱)}{۲}=\frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}
\end{aligned}
$$

د) همان مجموع جملات یک تصاعد هندسی با قدرنسبت r می‌باشد که از قبل با آن آشنایی دارید.

فعالیت

در برهان قسمت ج، قسمت‌های سمت چپ n تساوی را باهم جمع کردیم و هر جمله اول یک تساوی با جمله دوم تساوی بعدی حذف گردید (به دلیل قرینه بودن) و از همه جملات، فقط جمله اول تساوی n ام (آخر) و جمله دوم تساوی اول باقی ماندند که همان عبارت $(n+۱)^۳ - ۱^۳$ سمت چپ، حاصل جمع تساوی ظاهر گردید. در واقع می‌توانستیم از نماد سیگما استفاده کنیم : هر عبارت در سمت چپ به شکل کلی $(k+۱)^۳-k^۳$ است که در آن $۱ \leq k \leq n$. پس جمع آن به شکل $\sum_{k=۱}^{n}((k+۱)^۳-k^۳)$ است. اما حاصل آن، با حذف جملات قرینه، برابر $(n+۱)^۳ - ۱^۳$ شد. بنابراین :

$$\sum_{k=۱}^{n}((k+۱)^۳-k^۳)=(n+۱)^۳-۱^۳ \qquad (۱)$$

فعالیت

این یک مثال از حالت کلی جمعی است که **جمع تلسکوپی** نامیده می‌شود.
فرم جمع تلسکوپی به‌صورت کلی :

$$\sum_{i=m}^{n}(f(i+1)-f(i))=f(n+1)-f(m) \qquad (۲)$$

می‌باشد، زیرا همه جملات آن به‌جز اولی و آخری حذف می‌شوند. قاعده جمع تلسکوپی را برخی **قاعده ادغام** نیز می‌نامند.

ابتدا تساوی (۱) را به استقراء ثابت کنید. سپس (۲) را به استقراء ابتدا از m ثابت کنید.

مثال : محاسبه کنید :

$$\sum_{k=m+1}^{n}(6k^2-4k+3)$$

که در آن $1\leq m\leq n$

حل : از قواعد جمع‌بندی و فرمول‌های قضیه قبل استفاده می‌کنیم :

$$\sum_{k=1}^{n}(6k^2-4k+3)=6\sum_{k=1}^{n}k^2-4\sum_{k=1}^{n}k+3\sum_{k=1}^{n}1$$

$$=6\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-4\frac{n(n+1)}{2}+3n$$

$$=2n^3+n^2+2n$$

بنابراین

$$\sum_{k=m+1}^{n}(6k^2-4k+3)=\sum_{k=1}^{n}(6k^2-4k+3)-\sum_{k=1}^{m}(6k^2-4k+3)$$

$$=2n^3+n^2+2n-2m^3-m^2-2m$$

نکته : برنامه‌ریزی میپل (Maple) شکل بسته فرمولی برخی از جمع‌ها را به دست می‌دهد.
برای مثال :

```
>Sum(i^4,i=1..n);factor(%);
```

$$=\frac{1}{5}(n+1)^5-\frac{1}{2}(n+1)^4+\frac{1}{3}(n+1)^3-\frac{1}{30}n-\frac{1}{30}$$

$$=\frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$$

مسائل

در تمرین‌های ۸ــ۱ جمع را بسط دهید :

۱ــ $\sum\limits_{i=۱}^{۴} i^{۳}$ ‌ ‌ ۲ــ $\sum\limits_{j=۱}^{۱۰۰} \frac{j^{۳}}{j+۱}$ ‌ ‌ ۳ــ $\sum\limits_{j=۱}^{n} ۳i$

۴ــ $\sum\limits_{i=۱}^{n-۱} \frac{(-۱)^{i}}{i+۱}$ ‌ ‌ ۵ــ $\sum\limits_{i=۳}^{n} \frac{(-۲)^{i}}{(i+۲)^{۲}}$ ‌ ‌ ۶ــ $\sum\limits_{j=۱}^{n} \frac{j^{۲}}{n^{۳}}$

۷ــ $\sum\limits_{n=۱}^{k} \sin\frac{n\pi}{۳k}$ ‌ ‌ ۸ــ $\sum\limits_{k=۲}^{n} \frac{e^{-k}}{nk}$

جمع‌های زیر را با استفاده از نِماد Σ بنویسید.(متذکر می‌شویم که جواب منحصر به‌فرد نمی‌باشد)

۹ــ $۵+۶+۷+۸+۹$

۱۰ــ $۲+۲+۲+۲- \ldots +۲$ (۲۰۰ بار)

۱۱ــ $۲^{۲}-۳^{۲}+۴^{۲}-۵^{۲}+\ldots-۹۹^{۲}$

۱۲ــ $۱+۲x+۳x^{۲}+۴x^{۳}+\ldots+۱۰۰x^{۹۹}$

۱۳ــ $۱+x+x^{۲}+x^{۳}+\ldots+x^{n}$

۱۴ــ $۱-x+x^{۲}-x^{۳}+\ldots+x^{۲n}$

۱۵ــ $۱-\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۹}-\frac{۱}{۱۶}+\cdots+\frac{(-۱)^{n-۱}}{\pi^{۲}}$

۱۶ــ $\frac{۱}{۲}+\frac{۲}{۴}+\frac{۳}{۸}+\frac{۴}{۱۶}+\cdots+\frac{n}{۲^{n}}$

۴ــ۲ــ مساحت به‌عنوان حد مجموع

در فصل ۳ با استفاده از تعریف حد، مماس بر یک منحنی خاص به مطالعه و بررسی مشتق پرداختیم. در اینجا نیز بیشتر دوست داشتیم تا با استفاده از تعریفی از مساحت یک ناحیه در صفحه به مطالعه انتگرال بپردازیم. امّا ارائه تعریفی از مساحت بسیار مشکل‌تر از تعریفی برای مماس است.

بنابراین فرض می‌کنیم که منظورمان از مساحت به گونه‌ای ملموس بر ما معلوم بوده و از این‌رو برخی از ویژگی‌های آن را یادآوری می‌شویم.

الف) مساحت یک ناحیه در صفحه عددی حقیقی و نامنفی برحسب واحدهای سطح (مربع‌ها) می‌باشد.

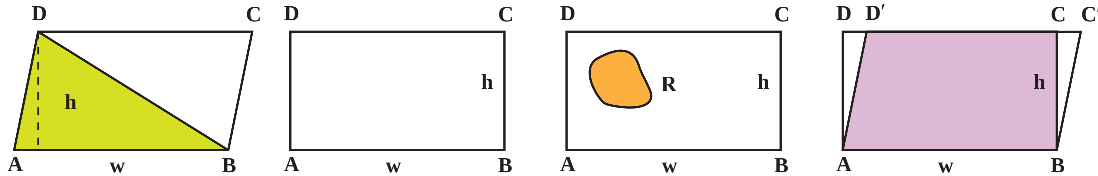
ب) مساحت یک مستطیل با عرض w و ارتفاع h برابر $A=wh$ است.

ج) مساحت ناحیه‌های صفحه‌ای که برابر باشند یکی است.

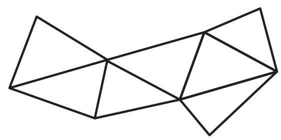
د) هرگاه ناحیه S درون ناحیه R باشد، مساحت S کمتر از مساحت R است.

هـ) هرگاه ناحیه R اجتماعی متناهی از ناحیه‌های مجزا باشد، مساحت R برابر مجموع مساحت‌های این ناحیه‌های مجزا است.

با استفاده از این ویژگی‌های شهودی مساحت می‌توانیم مساحت خیلی از اشکال هندسی را بررسی و یا محاسبه کنیم. شما در شکل‌های زیر می‌توانید بگویید که نتیجه حاصله که درزیر هر شکل نوشته شده است بر طبق کدام یک از ویژگی‌های (الف) ــ (هـ) می‌باشد.



مساحت مثلث ABC $= \frac{1}{2}$ wh   مساحت ABCD = w.h   مساحت S < مساحت R   مساحت ABC′D′ = w.h



مجموع مساحت مثلث‌ها مساوی مساحت چندضلعی

شکل ۴ــ۳ــ ویژگی مساحت‌ها

امّا فراتر از چندضلعی‌ها نمی‌توان رفت، مگر آنکه از مفهوم حد کمک بگیریم. شما با مفهوم حد در سال قبل و همچنین در فصل ۲ این کتاب به خوبی آشنا شده‌اید. هرگاه یک مساحت دارای مرزی منحنی‌وار بوده باشد، محاسبه ساده آن فقط می‌تواند به‌صورت تقریبی با استفاده از مساحت مثلث‌ها و مستطیل‌ها به دست آید؛ محاسبه دقیق این گونه مساحت‌ها محتاج محاسبه یک حد است.

روش مستطیل برای محاسبه مساحت : در این بخش قصدمان این است که نشان دهیم چگونه می‌توان مساحت یک ناحیه مانند R را که تحت نمودار تابع پیوسته و نامنفی $y=f(x)$ و محدود به دو خط قائم $x=a$, $x=b$ است به‌دست آوریم.

برای این کار به طرز زیر عمل می‌کنیم. بازه $[a,b]$ را به n زیر بازه جزء با استفاده از نقاط افرازی

$$a=x_{۰}<x_{۱}<x_{۲}<\dots<x_{n-۱}<x_n=b$$

$(n+۱)$ نقطه تقسیم می‌کنیم، طول بازه iام $[x_{i-۱},x_i]$ را به Δx_i نشان می‌دهیم :

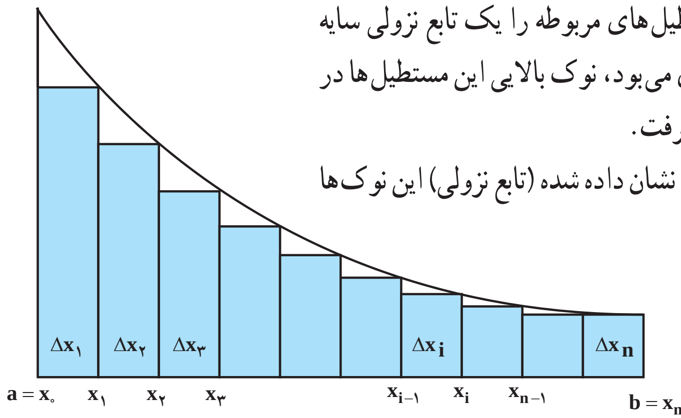
$$\Delta x_i=x_i-x_{i-۱} \quad , \quad (i=۱,۲,۳,\dots n)$$

بر روی هر بازه جز $[x_{i-1}, x_i]$ مستطیلی با عرض Δx_i و ارتفاع $f(x_i)$ می‌سازیم. پس مساحت این مستطیل برابر $f(x_i)\Delta x_i$ می‌باشد. مجموع این مساحت‌ها را تشکیل می‌دهیم.

$$S_n = f(x_1)\Delta x_1 + f(x_2)\Delta x_2 + \ldots + f(x_n)\Delta x_n$$
$$= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$

در شکل ۴ــ۴ مستطیل‌های مربوطه را یک تابع نزولی سایه زده‌ایم، اگر تابع‌مان صعودی می‌بود، نوک بالایی این مستطیل‌ها در بالای نمودار تابع قرار می‌گرفت.

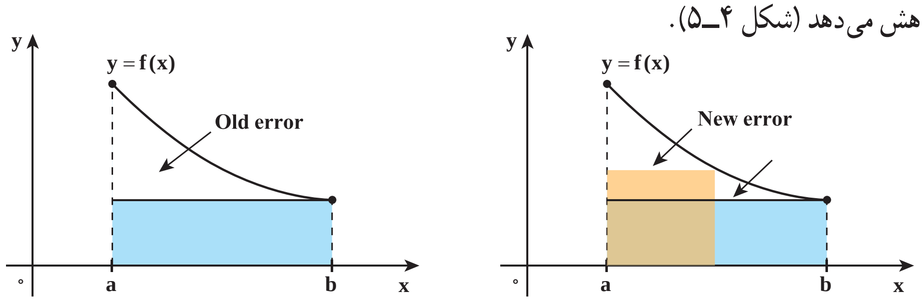
در حالی که در شکل نشان داده شده (تابع نزولی) این نوک‌ها در زیر نمودار قرار دارد.



شکل ۴ــ۴ــ حاصل جمع مساحت مستطیل‌ها برابر $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$ است.

واقع است که S_n تقریبی از مساحت ناحیه R است و با افزایش n این تقریب به مقدار واقعی مساحت R نزدیک‌تر می‌شود، مشروط بر آنکه نقاط $x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ را چنان انتخاب کنیم که عرض Δx_iها نیز به صفر میل کند.

برای مثال، در شکل بعدی، ملاحظه می‌کنیم که تقسیم یک بازه جزء، به دو بازه کوچک‌تر خطای این تقریب را، با کاهش قسمتی از مساحت تحت نمودار که مشمول در مستطیل‌ها شده است، کاهش می‌دهد (شکل ۴ــ۵).



شکل ۴ــ۵ــ استفاده از مستطیل‌ها بیشتر خطای محاسبه را کوچکتر می‌کند.

بنابراین برای یافتن مساحت R معقول آن است که حد دنباله S_n را وقتی $n\to\infty$ به دست آوریم (با این شرط که طول بزرگترین Δx_iها نیز به صفر میل کند).

$$\text{مساحت } R = \lim_{n\to\infty} S_n$$

نکته مهم : برای آنکه، درحدگیری Δx_iها همگی به صفر میل کنند، اغلب اوقات مناسب‌تر آن است که عرض همه بازه‌های جز مساوی اختیار شوند. در این صورت داریم :

$$\Delta x_i = \frac{b-a}{n} = \Delta x \quad , \quad x_i = a + i\Delta x = a + \frac{۱}{n}(b-a)$$

که در آن، چون همه Δx_iها را مساوی اختیار کرده‌ایم و طول مشترک را به Δx نشان داده‌ایم.

از این نوع تقسیم بازه، به بازه‌های جزء مساوی، به عنوان افراز منظم یاد خواهیم کرد.

معلوم است که در مورد افرازهای منظم، وقتی $n\to\infty$, $\Delta x\to ۰$ و دیگر نیازی به شرط آن که طول بزرگترین بازه جزء به صفر میل کند، نمی‌باشد.

محاسبه برخی مساحت‌ها : در این بخش به‌عنوان نمونه به محاسبه تقریبی برخی مساحت‌ها با استفاده از روش فوق می‌پردازیم. ابتدا با ناحیه‌ای شروع می‌کنیم که مساحت آن را از قبل می‌دانیم و از این راه بیشتر قانع می‌شویم که روش توصیف شده‌مان مقدار دقیق را به دست می‌دهد.

مثال : مساحت ناحیه‌ای را بیابید که تحت خط مستقیم به معادله $y=x+۱$ بوده و محدود به خطوط $x=۰$, $x=۲$ می‌باشد.

حل : ناحیه مورد نظر در شکل زیر هاشور زده شده است. این ناحیه یک ذوزنقه است. به‌علاوه می‌دانیم که مساحت این ناحیه ۴ واحد سطح است (چرا؟). اینک مساحت این ناحیه را به‌عنوان حد مجموع مساحت مستطیل‌هایی که به روش فوق ساخته می‌شوند به روش زیر می‌توانید حساب کنید.

۱ــ بازه $[۰,۲]$ را به n بازه جزء با طول مساوی تقسیم کنید :

$$x_۰ = ۰, x_۱ = \frac{۲}{n}, x_۲ = \frac{۴}{n}, x_۳ = \frac{۶}{n}, x_n = \frac{۲n}{n} = ۲$$

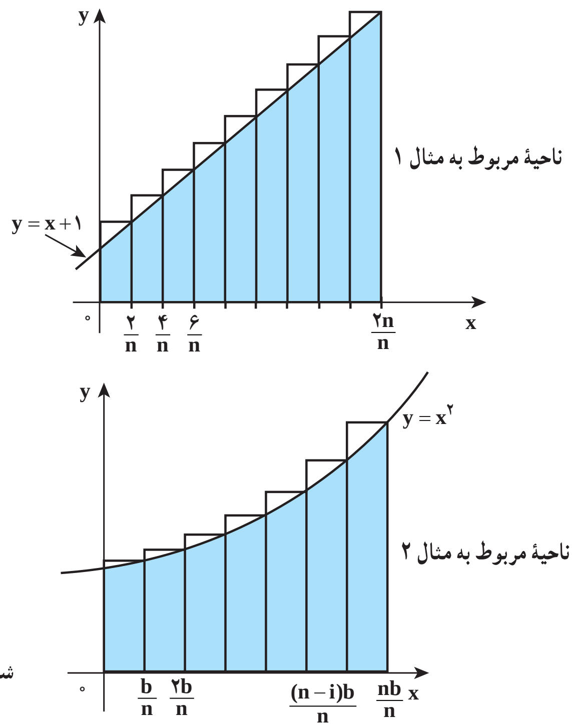
۲ــ پس مقدار تابع $f(x)=x+۱$ در نقطه دلخواه x_i برابر است با $\quad x_i + ۱ = \frac{۲i}{n} + ۱$

و بازه جزء iام $\left[\frac{۲(i-۱)}{n} = \frac{۲i}{n}\right]$ دارای طولی برابر $\Delta x_i = \frac{۲}{n}$ است.

۳ــ ملاحظه می‌کنیم که وقتی $n\to\infty$, $\Delta x\to ۰$ مجموع مساحت‌های مستطیل‌های نشان داده

در شکل ۴ـ۶ را محاسبه کنید.

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2i}{n}+1\right)\frac{2}{n}$$
$$=\frac{2}{n}\left[\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}i+\sum_{i=1}^{n}1\right]$$
$$=\left(\frac{2}{n}\right)\left[\frac{2}{n}\frac{n(n+1)}{2}+n\right]$$
$$=2\frac{n+1}{n}+2$$



شکل ۴ـ۶

قضیه: بنابراین مساحت A با حدگیری از این دنباله به‌دست می‌آید.

$$A=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(2\frac{n+1}{n}+2\right)=2+2=4$$ واحد سطح

مثال: مساحت ناحیه‌ای را که محدود به سهمی $y=x^2$ و خطوط $y=0$ ، $x=0$ ، $x=b>0$، می‌باشد به دست آورید.

حل: هرگاه مساحت ناحیه مورد بررسی را A بنامیم، A برابر حد مجموع‌های S_n (دنباله $(\{S_n\}_{n=1})$ مربوط به مساحات مستطیل‌های نشان داده‌شده در شکل ۴ـ۶ می‌باشد. با استفاده از افراز منظمی با $n+1$ نقطه افرازی، طول هریک از بازه‌ای جز، برابر $\frac{b}{n}$ می‌شود. پس ارتفاع مستطیل iام برابر $\left(\frac{ib}{n}\right)^2$ است. بنابراین بنابر قضیه(ج)

$$S_n=\sum_{n=1}^{n}\left(\frac{ib}{n}\right)^2\frac{b}{n}=\frac{b^3}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2=\frac{b^3}{n^3}\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

از این‌رو مساحت موردنظر با حدگیری به‌دست می‌آید :

$$A = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} b^۳ \frac{(n+۱)(۲n+۱)}{۶n^۲} = \frac{b^۳}{۳}$$ واحد سطح

تمرین در کلاس

۱ــ وقتی k افزایش می‌یابد یافتن مساحت زیر منحنی $y = x^k$ به مراتب مشکل و مشکل‌تر می‌گردد. در این مورد شاید تقسیم بازه به زیربازه‌ای مساوی کمتر کارساز باشد. در عوض هرگاه طول بازه‌ای جزء را به نسبت یک تصاعد هندسی اختیار کنیم، کار محاسبه ساده‌تر خواهد شد.

مثلاً اگر $b > a > ۰$ و مراد محاسبه مساحت زیر منحنی محدود به $x = a$ و $x = b$ بوده باشد، قرار می‌دهیم $t = (\frac{b}{a})^{\frac{۱}{n}}$ و $x_۰ = a, x_۱ = at, x_۲ = at^۲, x_۳ = at^۳, \dots, x_n = at^n = b$

در این‌صورت طول بازه i ام را (برحسب t و البته a و b) حساب کنید و همانند مثال پیش دنباله S_n را به‌دست آورده و حدگیری نمایید. هرگاه جواب واحد سطح $A = \frac{b^{k+۱} - a^{k+۱}}{k+۱}$ را به‌دست آورده باشید از حل این مثال لذت ببرید، در غیراین‌صورت محاسبات خود را یک بار دیگر چک کنید و یا از دبیر درس برای **راهنمایی** کمک بخواهید.

۲ــ با استفاده از اتحاد $(k+۱)^۴ - k^۴ = ۴k^۳ + ۶k^۲ + ۴k + ۱$ و قاعده تلسکوپی نشان دهید که $\sum_{i=۱}^{k} i^۳ = (\frac{k(k+۱)}{۲})^۲$

۳ــ مساحت ناحیه‌ای را که محدود به نمودار $y = x^۳$ و خطوط $x = b > ۰, x = ۰, y = ۰$ می‌باشد به‌دست آورید.

> گرچه ممکن است به‌نظر باطل‌نما جلوه کند، امّا همه علوم دقیق (علوم محض) تحت تسلط ایدهٔ تقریب هستند. (برتراندراسل ــ ریاضی‌دان انگلیسی)

یک پرسش اساسی

به لحاظ هندسی کاملاً مشهود است که مساحت تحت نمودار تابع f به شکل نمودار f بستگی

دارد. نمودار هر تابع در واقع رفتار هندسی مقادیر تابع را نمایان می‌سازد.

پس مقدار مساحت در مرحله اول به تابع موردنظر بستگی دارد. درمرحله بعد البته مقدار مساحت به بازه $[a ,b]$ که تابع در آن تعریف شده است، یعنی خطوط $x = a$ و $x = b$ که مرزهای عمودی ناحیه را می‌سازند نیز بستگی خواهد داشت. برای آنکه بیشتر وارد جزئیات جبری مسأله شویم، به مثال ۲ مراجعه می‌کنیم. ملاحظه کردیم که مساحت ناحیه محدود به نمودار $y = x^۲$ و خطوط $x = ۰$ و $x = b$ (یعنی بازه $[۰ , b]$) برابر است با :

$$A = \frac{b^۳}{۳}$$

پس هرگاه بخواهیم مساحت محدود به نمودار $y = x^۲$ را با پایه $x = ۰$ حساب کنیم، این مساحت برابر

$$A(x) = \frac{x^۳}{۳}$$

خواهد شد. حال سؤال اساسی در این‌جا چنین است که مدل $A(x)$ چه رابطه‌ای با تابع $y = x^۲$ دارد؟

همین سؤال را در مورد مثال ۱ نیز می‌توان مطرح کرد. در این‌جا $f(x) = x + ۱$ و برای محاسبه مساحت آن بر بازه $[۰ , b]$ (به‌جای $[۰,۲]$ در مثال) داریم :

$$x_۰ = ۰ , x_۱ = \frac{b}{n} , x_۲ = \frac{۲b}{n} , \cdots , x_n = \frac{nb}{n} = b$$

داریم :

$$f(x_i) = x_i + ۱ = \frac{ib}{n} + ۱$$

بنابراین :

$$S_n = \sum_{i=۱}^{n} (\frac{ib}{n} + ۱)\frac{b}{n}$$

$$= \frac{b}{n}\left[\frac{b}{n}\sum_{i=۱}^{n} i + \sum_{i=۱}^{n} ۱\right]$$

$$= \frac{b}{n}\left[\frac{b}{n}\frac{n(n+۱)}{۲} + n\right]$$

$$= \frac{(n+۱)}{n} \times \frac{b^۲}{۲} + b$$

و با حدگیری به‌دست می‌آوریم :

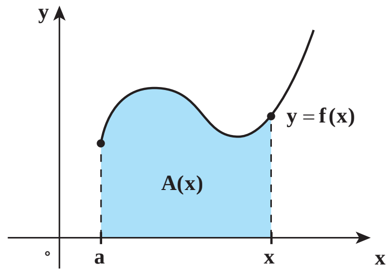
$$A(b) = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{b^۲}{۲} \times \frac{n+۱}{n} + \lim_{n\to\infty} b$$

$$= \frac{b^۲}{۲} + b$$

و هرگاه بخواهیم به‌جای بازه را منظور کنیم مساحت موردنظر به عنوان تابعی از x به‌دست

خواهد آمد :

$$A(x)=\frac{x^2}{2}+x$$



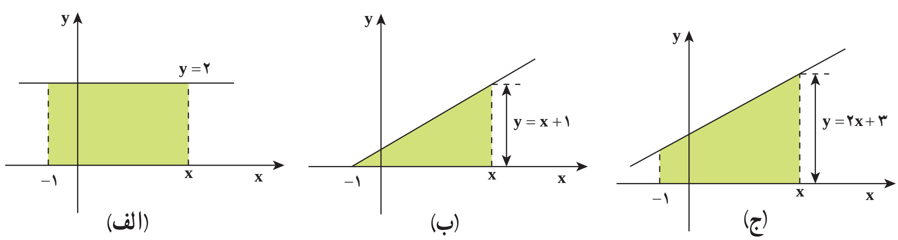
شکل ۴ــ۷ــ وقتی a ثابت باشد A(x) به x بستگی خواهد داشت.

فعالیت

برای هریک از توابع f، مساحت A(x) محصور به نمودار f و بازه $[-1 , x]$ را به‌دست آورید. سپس مشتق تابع A یعنی $A'(x)$ را محاسبه کرده و با تابع f مقایسه کنید.

الف) $f(x)=2$ ب) $f(x)=x+1$ ج) $f(x)=2x+3$

برای راهنمایی نمودار تابع f و بازه $[-1 , x]$ در هر مورد در شکل زیر نشان داده شده است.



شکل ۴ــ۸

مسائل

با استفاده از افرازهای مناسب همانند مثال‌های ۱ و ۲ این درس مساحت نواحی را که در تمرین‌های ۷ــ۱ آمده‌اند محاسبه کنید :

۱ــ ناحیه تحت $y=3x$، بالای $y=0$ از $x=0$ تا $x=1$.

۲ــ ناحیه تحت $y=2x+1$، بالای $y=0$ از $x=0$ تا $x=3$.

۳ــ ناحیه تحت $y=2x-1$، بالای $y=0$ از $x=1$ تا $x=3$.

۴ــ ناحیه تحت $y=3x+4$، بالای $y=0$ از $x=-1$ تا $x=2$.

۵ــ ناحیه تحت $y=x^{2}$، بالای $y=0$ از $x=1$ تا $x=3$.

۶ــ ناحیه تحت $y=x^{2}+1$، بالای $y=0$ از $x=0$ تا $x=a>0$.

۷ــ ناحیه تحت $y=x^{2}+2x+3$، بالای $y=0$ از $x=-1$ تا $x=2$.

در تمرین‌های ۱۱ــ ۸ مساحت‌ها را محاسبه کنید. به‌خاطر داشته باشید که مساحت همواره عددی مثبت خواهد بود.

۸ــ ناحیه بالای $y=x^{2}-1$ زیر $y=0$.

۹ــ ناحیه بالای $y=1-x$، زیر $y=0$ از $x=2$ تا $x=4$.

۱۰ــ ناحیه بالای $y=x^{2}-2x$، زیر $y=0$.

۱۱ــ ناحیه تحت $y=4-x^{2}+1$ بالای $y=1$.

۱۲ــ مساحت ناحیه محدود به $y=x^{3}$ را که بالای محور x بوده و بین خطوط $x=0$ و $x=b>0$. است به‌دست آورید (راهنمایی از فرمول $\sum\limits_{i=1}^{n} i^{3}=\frac{n^{2}(n+1)^{2}}{4}$ استفاده کنید.)

۱۳ــ مساحت تحت منحنی به معادله $y=\frac{1}{x}$ را که بالای $y=0$ و محدود به $x=a>0$ و $x=b>a$ است به‌دست آورید.

۴ـ۳ـ انتگرال معین

هدفمان در این بخش تعمیم آن چیزی است که در بخش قبلی برای محاسبه مساحت‌ها به‌کار بردیم. با استفاده از چنین تعمیمی مفهوم انتگرال معین تابعی مانند f را که بر بازه I تعریف شده است تعریف می‌کنیم. دربخش قبلی با استفاده از روش مستطیل‌ها و تشکیل دنباله $\{S_n\}$ و حدگیری به محاسبه مساحت پرداختیم. در این بخش برای محاسبه مساحت از دو راه وارد می‌شویم : از یک طریق مستطیل های کوچک را طوری انتخاب می‌کنیم که همگی زیر نمودار f واقع شوند و در طریق دیگر مستطیل‌های کوچک را طوری می‌گیریم که همگی بالای نمودار f قرار گیرند. این روش به ما این امکان را می‌دهد که با تقریبات نقصانی و همچنین تقریبات اضافی به مساحت تحت نمودار نگاه کنیم.

در سرتاسر این بخش فرض می‌کنیم که تابع f کراندار باشد امّا به این فرض که مقادیر f نامنفی باشند نیازی نخواهیم داشت. در واقع از ایده اولیه محاسبه مساحت عدول کرده و به تابع f بر بازه $[a , b]$ عددی وابسته خواهیم کرد که انتگرال معین f بر بازه $[a , b]$ نامیده خواهد شد. در این‌جا، گرچه هنوز شهود و نگرش هندسی کمک‌ساز خواهد بود اما استدلال و فرایند جبری نقش مهم‌تری را عهده‌دار خواهد بود؛ و این چاشنی تعمیم در ریاضیات است که به تجربه و جبر نقش اساسی‌تری می‌دهد تا با

موارد مجردتر بهتر و مؤثرتر برخورد گردد.

فرض کنیم P افرازی از بازه $[a,b]$ باشد. بنابراین P مجموعه‌ای از اعداد $\{x_۰, x_۱, x_۲, \ldots, x_{n-۱}, x_n\}$ است که در آن $x_{i-۱} < x_i$ ، $x_۰ = a$ ، $x_n = b$. عدد n که نشانگر تعداد بازه‌های جزء $[x_{i-۱}, x_i]$ است به افراز P بستگی دارد. درشت‌ترین افراز.

بازه $[a , b]$ افرازی است که فقط شامل یک بازه جزء یعنی خود بازه $[a , b]$ است. در این صورت عدد n برابر ۱ است. هرچه تعداد نقاط افراز بیشتر باشد، افراز ظریف‌تر خواهد بود و عدد n افزایش خواهد یافت. ضمناً یادآوری می‌کنیم که عدد $\Delta x_i = x_i - x_{i-۱}$

طول بازه جزء i ام می‌باشد. چون تابع f بر هر بازه جزء $[x_{i-۱}, x_i]$ نیز است، پس ماکسیمم و مینیمم (مطلق) خود را در این بازه اختیار می‌کند. یعنی نقاطی مانند I_i و U_i از $[x_{i-۱}, x_i]$ است که برای هر $x_{i-۱} \le x \le x_i$ و $f(L_i) \le f(x) \le f(u_i)$

هرگاه $f(x) \ge ۰$ بر $[a , b]$، آنگاه $f(L_i)\Delta x_i$ و $f(u_i)\Delta x_i$ نشانگر مساحت مستطیل‌های با قاعده (عرض) $[x_{i-۱}, x_i]$ بوده که نوک مستطیل اول زیر نمودار f و نوک مستطیل دوم بالای نمودار f قرار دارند (شکل **۴ـ۹**) به عبارت دیگر هرگاه ناحیه با قاعده $[x_{i-۱}, x_i]$ محدود به نمودار تابع f از A_i بنامیم، $f(I_i)\Delta x_i$ نمایشگر مساحت مستطیلی است که درون A_i محاط شده، در حالی که $f(u_i)\Delta x_i$ نمایشگر مساحت مستطیلی است که محیط بر A_i می‌باشد. به زبان جبری :

$$f(L_i)\Delta x_i \le A_i \le f(u_i)\Delta x_i \qquad (۱)$$

هرگاه f مقادیر منفی نیز اختیار کند آنگاه $f(L_i)\Delta x_i$ و یا $f(u_i)\Delta x_i$ و یا هردوی آنها ممکن است منفی باشند، در چنین صورتی این عبارت‌ها نمایشگر قرینه مساحت مستطیلی هستند که زیر محور x واقع است، در هر صورت که f همواره مقادیر نامنفی اختیار کند و یا مقادیر منفی نیز بگیرد نامساوی $f(L_i) \le f(u_i)$ برقراربوده و لذا همواره $f(L_i)\Delta x_i \le f(u_i)\Delta x_i$ برقرار است.

مجموع‌های بالا و پایین : اکنون به تعریف مجموع‌های بالا و پایین می‌پردازیم. قبل از این، برای ساده‌تر کردن نمادهایمان همواره فرض می‌کنیم که افراز چنان باشد که طول همه بازه‌های جزء حاصله مساوی باشند، پس هرگاه افراز P شامل $n + ۱$ نقطه بوده و در نتیجه n بازه جزء پدید آورد طول هر بازه جزء برابر $\frac{b-a}{n}$ می‌باشد.

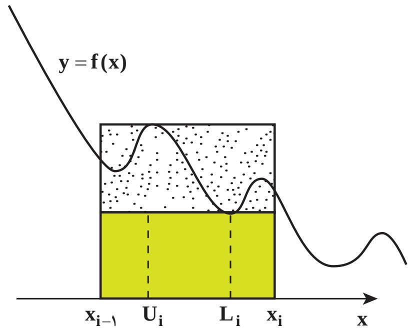
این‌گونه افرازها را **افرازهای منظم** می‌نامیم. عدد طبیعی n مشخص کننده افرازی با $n + ۱$ نقطه با طول بازه‌ای جزء $\frac{b-a}{n}$ است. پس به‌جای آن‌که از افرازها به عنوان متغیر یاد کنیم از عدد طبیعی n یاد می‌کنیم. در سرتاسر بحث f نمایشگر یک تابع است که در طول بحث ثابت فرض می‌شود.

الف) **مجموع پایین** که با نماد $L(f, p)$ و یا نماد ساده‌تر L_n نشان داده می‌شود چنین تعریف می‌گردد.

$$L_n = f(l_۱)\Delta x_۱ + f(l_i)\Delta x_۱ + \ldots + f(l_n)\,\Delta x_n$$

$$L_n = \sum_{i=۱}^{n} f(l_i)\Delta x_i$$

یعنی



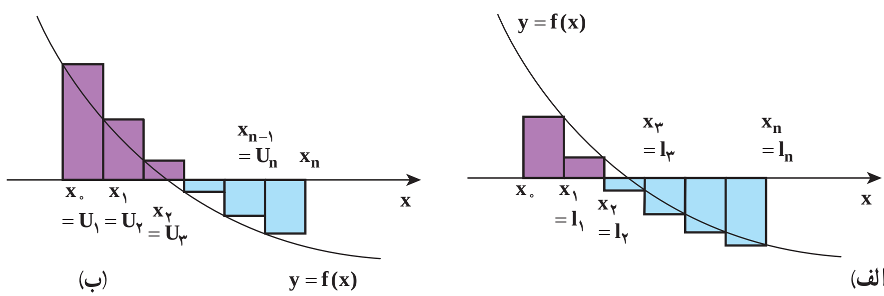
شکل ۴ــ ۹ــ مستطیل کوچک‌تر سهم $f(l_i)\Delta x_i$ و مستطیل بزرگ‌تر سهم $f(u_i)\Delta x_i$ متناظر با بازه جزء $[x_{i-۱}, x_i]$ را نشان می‌دهد.

ب) **مجموع بالا** که با نماد $U(f, p)$ و یا نماد ساده شده U_n[۱] نشان داده می‌شود چنین تعریف می‌گردد.

$$U_n = f(u_۱)\Delta x_۱ + f(u_۱)\Delta x_۱ + \ldots + f(u_n)\,\Delta x_n$$

$$U_n = \sum_{i=۱}^{n} f(u_i)\Delta x_i$$

در شکل زیر یک حاصل جمع پایین (سمت چپ) و یک حاصل جمع بالا (سمت راست) برای یک تابع نزولی نشان داده شده است. مساحت مستطیل‌های رنگی به‌صورت مثبت و مساحت مستطیل‌های با رنگ خاکستری هاشور زده شده به‌صورت منفی در مقدار انتگرال لحاظ خواهند شد.



شکل ۴ــ۱۰ــ الف) یک مجموع پایین و ب) یک مجموع بالا را برای یک تابع نزولی نشان می‌دهند. ناحیه‌های رنگی سهم‌های مثبت و ناحیه‌های خاکستری سهم‌های منفی به مقدار مجموع‌ها می‌دهند.

۱ــ L حروف اول Lower به معنی پایین و U حرف اول Upper به معنی بالا می‌باشد.