مثال: مجموع‌های پایین و بالا را برای تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ بر بازه [۱,۲] با افراز منظم P مستطیل از ۵ نقطه و ۴ بازه جزءِ محاسبه کنید.

حل: چنین افرازی می‌بایست مشتمل بر نقاط به طول‌های $x_۰=۱$ و $x_۱=\frac{۵}{۴}$ و $x_۲=\frac{۳}{۲}$ و $x_۳=\frac{۷}{۴}$ و $x_۴=۲$ بوده باشد. (چرا؟)

چون تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ بر این بازه نزولی است مینیمم و ماکزیمم آن بر بازه به ترتیب برابر $\frac{۱}{x_i}$ و $\frac{۱}{x_{i-۱}}$ می‌باشد. سپس مجموع‌های پایین و بالا چنین‌اند:

$$L_۴=\frac{۱}{۴}(f(\frac{۵}{۴})+f(\frac{۳}{۲})+f(\frac{۷}{۴})+f(۲))$$

$$=\frac{۱}{۴}(\frac{۴}{۵}+\frac{۲}{۳}+\frac{۴}{۷}+\frac{۱}{۲})=\frac{۵۳۳}{۸۴۰}\approx ۰/۶۳۴۵$$

$$U_۴=\frac{۱}{۴}(f(۱)+f(\frac{۵}{۴})+f(\frac{۳}{۲})+f(\frac{۷}{۴}))$$

$$=\frac{۱}{۴}(۱+\frac{۴}{۵}+\frac{۲}{۳}+\frac{۴}{۷})=\frac{۳۱۹}{۴۲۰}\approx ۰/۷۵۹۵$$

مثال: مجموع‌های پایین و بالا را برای تابع $f(x)=x^۲$ بر بازه [۱,۲] به ازای $n=۱$، $n=۲$، $n=۴$، $n=۸$ محاسبه کنید.

حل: می‌دانیم تابع f بر [۱,۲] صعود است، پس بر هر بازه جزءِ آن نیز صعودی است. لذا برای بازه جزءِ iام یعنی $[x_{i-۱},x_i]$ و $l_i=x_{i-۱}$ و $u_i=x_i$.

وقتی $n=۱$، فقط یک بازه جزءِ وجود دارد و آن هم بازه [۱,۲] است:

$L_۱=(۲-۱)f(۱)=۱$ و $U_۱=(۲-۱)f(۲)=۴$

برای $n=۲$، دو بازه جزءِ $[۱,\frac{۳}{۲})$ و $[\frac{۳}{۲},۲)$ خواهیم داشت. پس

$$L_۲=\frac{۱}{۲}(f(۱)+f(\frac{۳}{۲}))=\frac{۱}{۲}(۱+\frac{۹}{۴})=۱/۶۲۵$$

$$U_۲=\frac{۱}{۲}(f(\frac{۳}{۲})+f(۲))=\frac{۱}{۲}(\frac{۹}{۴}+۴)=۳/۱۲۵$$

برای $n=3$، سه بازه جزء داریم $[1,\frac{4}{3}]$ $[\frac{4}{3},\frac{5}{2}]$ $[\frac{5}{3},2]$

$$L_3=\frac{1}{3}(f(1)+f(\frac{4}{3})+f(\frac{5}{3}))=\frac{1}{3}(1+\frac{16}{9}+\frac{25}{9})=\frac{50}{27}=1/851$$

$$U_3=\frac{1}{3}(f(\frac{4}{3})+f(\frac{5}{3})+f(2))$$

$$=\frac{1}{3}(\frac{16}{9}+\frac{25}{9}+4)=\frac{77}{27}=2/651$$

با انتخاب $n=4$ مشابهاً مقادیر $U_4=2/718$ و $L_4=1/968$ را به دست می‌آوریم.

بالاخره با انتخاب $n=8$ مقادیر $U_8=2/148$ و $L_8=2/534$ را به دست می‌آوریم.

تمرین در کلاس

در رابطه با تابع مثال ۲، L_3، L_5، L_6، L_7 و همچنین U_3، U_5، U_6، U_7 را محاسبه کنید.

نکته: مقادیر L_1 تا با L_8 نشانگر آنند که دنباله $\{L_n\}_{n=1}$ دنباله‌ای صعودی است، در حالی‌که مقادیر U_1 تا با U_8 نشان می‌دهند که دنباله $\{U_n\}_{n=1}$ دنباله‌ای نزولی است. البته این حدسی بیش نیست، امّا می‌توانید آن را به طریق ملموس و شهودی با استفاده از مستطیل‌های محاطی و محیطی برای یک نمودار دلخواه از تابعی پیوسته و به تعیین نزدیک نمایید. کافی است دو جمله متوالی مانند L_n، L_{n+1} را با هم مقایسه کنید.

پرسش: آیا می‌توانیم بگوییم که دنباله‌های U_n، L_n به یک عدد همگرا هستند؟

فعالیت

مجموع‌های پایین و بالا را برای تابع $f(x)=x^2$ بر بازه $[0,\alpha]$ محاسبه کنید؛ مجموع‌هایی که متناظر افرازی منظم از این بازه متشکل از $n+1$ نقطه و n بازه جزءِ بوده باشند. بدین‌سان جملات عمومی دنباله‌ای $\{L_n\}$، $\{U_n\}$ را محاسبه خواهید کرد. سپس $\lim_{n\to\infty} U_n$ و $\lim_{n\to\infty} L_n$ را به دست آورید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

این مثال‌ها و بررسی‌ها ما را به صورت‌بندی تعریف مهم زیر رهنمون می‌کند :

هرگاه دنباله‌های عددی مجموع‌های بالا و پایین تابع f به یک عدد مانند A همگرا باشند، عدد A را انتگرال معین این تابع بر بازه $[\alpha,b]$ می‌نامیم و می‌نویسیم. $A=\int_a^b f(x)dx$

$\int$ که صورت کشیده حرف S است از حرف اول کلمه مجموع (Sum) اقتباس شده است و آن معادل حرف سیگما Σ یونانی است. بنابراین $A=\int_a^b f(x)dx$ را انتگرال یعنی f بر $[a,b]$ و یا انتگرال معین f از a تا b می‌نامیم.

باید توجه کنیم وقتی f تابعی نامنفی است تعبیر هندسی انتگرال معین مساحت تحت نمودار f و محدود به بازه $[a,b]$ است امّا ما این شرط را نداشته‌ایم، بنابراین انتگرال معین، در حالت کلی عددی حقیقی است که می‌تواند مثبت، منفی و یا برابر صفر باشد.

مثال : ثابت کنید تابع $f(x)=x^2$ بر بازه $[0,a]$، $a>0$، انتگرال‌پذیر است و مقدار $\int_0^a x^2dx$ را به‌دست آورید.

حل : قبلاً دنباله‌های L_n، U_n را محاسبه کردیم. کافی است حد این دنباله‌ها را به‌دست آوریم.

$$\lim_{n\to\infty} L_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)(2n-1)a^3}{6x^2} = \frac{a^3}{3}$$

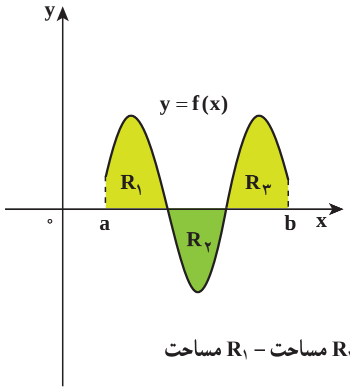
$$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(2n+1)a^3}{6x^2} = \frac{a^3}{3}$$

بنابراین :

$$\int_0^a x^2dx = \frac{a^3}{3}$$

نکته : باید توجه داشته باشیم که تعریف انتگرال به شکل فوق مستقل از مفهوم مساحت است، گرچه این مفهوم در آغاز از مفهوم مساحت به‌وجود آمده است. وقتی تابع f بر بازه $[0,a]$ تابعی نامنفی باشد، یعنی نمودار آن بالای محور x باشد، مقدار انتگرال معین برابر مساحت محدود به نمودار تابع f و خطوط $x=a$ و $x=b$ است. برای وقتی که همواره $f(x)\leq 0$، یعنی نمودار تابع پایین محور x است، $\int_a^b f(x)dx$ برابر قرینه مساحت محدود به نمودار f و خطوط می‌باشد. در حالت کلی، $x=a$ و $x=b$ برابر است. در حالت کلی، $\int_a^b f(x)dx$ برابر است با مساحت قسمتی از ناحیه R (یعنی ناحیه تحت نمودار و محدود به خطوط $x=a$ و $x=b$) که بالای محور x است منهای مساحت بخشی از R که زیر

محور x است. (شکل ۴ـ۱۱)



شکل ۴ـ۱۱ـ $\int_a^b f(x)dx$ برابر است با مساحت R_3 + مساحت R_2 − مساحت R_1

تمرین در کلاس

۱ـ $\int_0^a xdx$ را که در آن $a>0$ ، محاسبه کنید.

۲ـ $\int_a^b dx$ را محاسبه کنید. توجه کنید که در اینجا $f(x)=1$ تابع ثابت با مقدار ۱ است.

۳ـ $\int_a^b cdx$ را، که در آن $f(x)=c$ تابع ثابت با مقدار c است، محاسبه کنید.

تعمیم : در تعریف انتگرال معین فرض کردیم که تابع f بر $[a,b]$ پیوسته است. اکنون یک گام به جلو بر می‌داریم و فرض می‌کنیم که تابع f بر $[a,b]$ کراندار بوده امّا لزوماً پیوسته نباشد. می‌دانیم که هر تابع پیوسته بر یک بازه بسته کراندار است امّا عکس این حکم در حالت کلی برقرار نمی‌باشد. قصدمان این است که انتگرال معین را برای توابع کراندار نیز تعریف کنیم.

فرآیند تعریف را که برای توابع پیوسته به‌کار گرفتیم در اینجا نیز می‌توانیم اعمال کنیم. تنها یک تفاوت کوچک وجود دارد که در نتیجه کار بلااثر می‌باشد. فرض کنیم P یک افراز $[a,b]$ باشد. f بر $[a,b]$ کراندار است پس بر هر بازه جزء $[x_{i-1},x_i]$ نیز کراندار است. چون f (مقادیر) بر این بازه یک مجموعه کراندار است، پس از بالا کراندار است. پس دارای سوپریممی مانند M_i است. مشابهاً چون f بر این بازه کراندار است از پایین کراندار بوده و در نتیجه دارای اینفیممی مانند m_i است.

واضح است که برای هر $x\in[x_{i-1},x_i]$ ، $m_i\le f(x_i)\le M_i$. در نتیجه $m_i\Delta x_i\le f(x_i)\Delta x_i\le M_i\Delta x_i$

اکنون مجموع‌های بالا و پایین را چنین تعریف می‌کنیم.

$$U_n=\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i \quad ، \quad L_n=\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i$$

هرگاه دنباله‌های $\{L_n\}$ و $\{U_n\}$ هر دو به یک عدد مانند A همگرا باشند گوییم تابع f بر $[\alpha,b]$ انتگرال‌پذیر است و عدد A را مقدار انتگرال معین f بر این بازه می‌نامیم. به زبان نمادی می‌نویسیم.

$$\int_a^b f(x)dx = A$$

اینک این تعریف را با تعریف قبلی در باب توابع پیوسته مقایسه کنید.

وقتی تابع پیوسته است، m_i به ازای نقطه‌ای مانند l_i از $[x_{i-1},x_i]$ حاصل می‌شود.

$$m_i=f(l_i)$$

همچنین M_i به ازای u_i از $[x_{i-1},x_i]$ به دست می‌آید. $(M_i=f(u_i$

و ماجرا عیناً به حالت قبل برمی‌گردد.

امّا تعریف اخیر کلی است و نیازی ندارد که f پیوسته فرض شود، بلکه کافی است f کراندار فرض گردد.

تعمیم‌های دیگری نیز می‌توان صورت‌بندی کرد لیکن از حوصله این درس خارج است. به مثال ۲ توجه کنید.

مثال: تابع f بر بازه $[۰,۱]$ چنین تعریف شده است.

$$f(x)=\begin{cases} ۱ & , x\in Q \\ ۰ & , x\notin Q \end{cases}$$

ثابت کنید انتگرال معین $\int_۰^۱ f(x)dx$ وجود ندارد.

حل: فرض کنیم P افرازی دلخواه از $[۰,۱]$ با $n+۱$ نقطه افرازی باشد.

بنابراین $\Delta x\frac{۱}{n}$

هرگاه m_i و M_i را به ترتیب مینیمم و ماکزیمم تابع f بر بازه جزء iام بنامیم، چون در هر بازه اعداد گویا و ناگنگ وجود دارد،

$$m_i=۰ \ ، ۱\leq i\leq n$$

$$M_i=۱ \ ، ۱\leq i\leq n$$

در نتیجه:

$$L_n=\sum_{i=۱}^{n} m_i\Delta x_i=\sum_{i=۱}^{n} ۰\times\frac{۱}{n}=۰$$

$$U_n=\sum_{i=۱}^{n} M_i\Delta x_i=\sum_{i=۱}^{n} ۱\times\frac{۱}{n}=\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n} ۱=\frac{۱}{n}\times n=۱$$

بنابراین $\lim_{n\to\infty} L_n=۰$ ، $\lim_{n\to\infty} U_n=۱$ زیرا L_n دنباله ثابت صفر و U_n دنباله ثابت ۱ است. در نتیجه تابع f بر $[۰,۱]$ انتگرال‌پذیری نمی‌باشد.

تمرین در کلاس

تابع f را بر بازه $[-۱,۱]$ چنین تعریف می‌کنیم.
$$f(x)=\begin{cases} x & ,x\geq ۰ \\ ۱-x & ,x<۰ \end{cases}$$

ثابت کنید $\int_{-۱}^{۱} f(x)dx$ وجود دارد و مقدار آن را به دست آورید. (نمودار تابع را رسم کنید).

قضیه زیر را بدون اثبات می‌پذیریم.

قضیه ۱ : هر تابع پیوسته بر یک بازه بسته، انتگرال‌پذیر است.

نتیجه : هرگاه f پیوسته باشد می‌توانیم با یکی از دنباله‌های $\{L_n\}$ یا $\{U_n\}$ کار کنیم و با حدگیری مقدار انتگرال را به‌دست آوریم.

نکته : در حساب مقدماتی آموخته‌اید که نامساوی‌های هم‌جهت را می‌توان با هم جمع کرد؛

یعنی هرگاه $a_۱\leq b_۱$ ، $a_۲\leq b_۲$ آنگاه $a_۱+a_۲\leq b_۱+b_۲$

و اگر یکی از نامساوی‌های فرض اکید باشد، نامساوی به‌دست آمده نیز اکید است. این ویژگی نامساوی‌ها به آسانی قابل تعمیم است :

هرگاه $\alpha_i\leq b_i$ $(۱\leq i\leq n)$ n نامساوی باشند آنگاه $\sum_{i=۱}^{n} a_i\leq\sum_{i=۱}^{n} b_i$. از این ویژگی نامساوی‌ها استفاده می‌کنیم و یکی از خواص توابع پیوسته را در رابطه با مقدار انتگرال به آسانی به دست می‌آوریم؛

در مابقی این بخش مجدداً همه‌جا f را پیوسته فرض می‌کنیم.

قضیه ۲ : هرگاه تابع f بر بازه $[a,b]$ پیوسته باشد و m و M به ترتیب مقادیر مینیمم و ماکزیمم مطلق f بر این بازه باشند، آنگاه
$$m(b-a)\leq\int_a^b f(x)dx\leq M(b-a)$$

برهان : فرض کنیم P افرازی منظم با n بازه جزء از بازه $[a,b]$ باشد.

برای هر i، $u_i\leq M$ ، $m\leq l_i$ (چرا).

پس :
$$L_n=\sum_{i=۱}^{n}\frac{b-a}{n}l_i=\frac{b-a}{n}\sum_{i=۱}^{n}l_i$$
$$\geq\frac{b-a}{n}\sum_{i=۱}^{n}m=\frac{b-a}{n}\times m\sum_{i=۱}^{n}۱$$
$$=\frac{b-a}{n}\times m\times n=m(b-a)$$

همچنین :

$$U_n = \sum_{i=۱}^{n} \frac{b-a}{n} u_i$$

$$= \frac{b-a}{n} \sum_{i=۱}^{n} u_i \le \frac{b-a}{n} \sum_{i=۱}^{n} M = (b-a)M$$

در نتیجه، با حدگیری،

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{x\to\infty} L_n \ge m(b-a)$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} U_n \le M(b-a)$$

اکنون دو نامساوی را با هم می‌نویسیم

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a) \qquad (۱)$$

آیا می‌توانید این نامساوی‌ها را در شکل ۴ــ۱۲ تعبیر کنید؟ مستطیل‌های با پایه $b-\alpha$ و ارتفاع m و M را درنظر بگیرید.

نامساوی‌های (۱) را به‌صورت زیر نیز می‌توان نوشت

$$m \le \frac{۱}{b-a} \int_a^b f(x)dx \le M$$

تعریف : قرار می‌دهیم

$$\bar{f} = \frac{۱}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

$\bar{f}$ را **مقدار متوسط** یا **میانگین تابع f** بر بازه [a,b] می‌نامیم.

میانگین تابع f برابر ارتفاع مستطیلی با پایه b−a است که مساحت آن برابر مساحت ناحیه تحت f (برای $f\ge ۰$) محدود به خطوط x=a و x=b می‌باشد.

قضیه زیر یکی دیگر از خواص اساسی انتگرال معین است که در واقع خواص قدرمطلق را برای مجموع چند عدد به ارث می‌برد.

قضیه۳: هرگاه f تابعی انتگرال‌پذیر باشد،

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx \qquad (*)$$

برهان: ابتدا یادآور می‌شویم که نامساوی فوق متناظر نامساوی $|x+y|\le|x|+|y|$

و یا در حالت کلی :

$$\left|\sum_{i=۱}^{n} x_i\right| \le \sum_{i=۱}^{n} |x_i|$$

می‌باشد، برای اثبات (*) فرض کنیم P افرازی منظم از بازه [a,b] با n بازه جزء باشد. می‌دانیم

برای هر $x\in[x_{i-1},x_i]$، $-|f(x)|\leq f(x)\leq|f(x)|$

لذا هرگاه m_i، M_i به ترتیب مینیمم و ماکزیمم f بر $[x_{i-1},x_i]$ و همچنین m'_i، M'_i به ترتیب مینیمم و ماکزیمم |f| بر این بازه جزء باشند، داریم.

$$-m'_i\leq m_i\leq m'_i \qquad (1\leq i\leq n)$$

و

$$-M'_i\leq M_i\leq M'_i \qquad (1\leq i\leq n)$$

بنابراین

$$-m'_i\Delta x\leq m_i\Delta x\leq m'_i\Delta x \qquad (1\leq i\leq n)$$

از جمع این نامساوی‌ها به‌دست می‌آوریم :

$$-\sum_{1}^{n} m'_i\Delta x \leq \sum_{1}^{n} m_i\Delta x \leq \sum_{1}^{n} m'_i\Delta x$$

یعنی

$$-L'_n\leq L_n\leq L'_n$$

با حدگیری به دست می‌آوریم

$$-\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

امّا این نامساوی‌ها معادلند با نامساوی قدرمطلقی

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

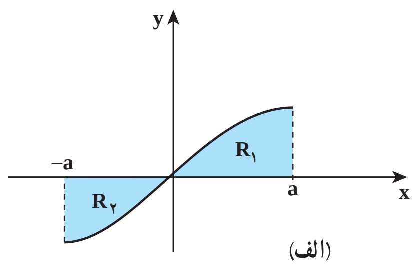
فعالیت

۱ــ فرض کنیم f تابعی زوج بر $[-a,a]$ باشد، یعنی برای هر x از این بازه ثابت کنید

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

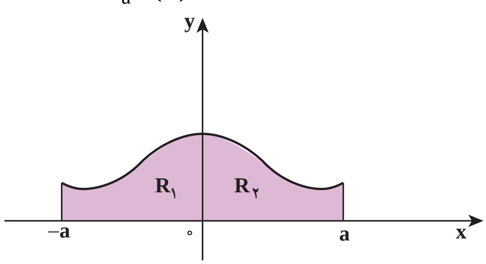
۲ــ فرض کنیم f تابعی فرد بر $[-a,a]$ باشد، یعنی برای هر x از این بازه $f(-x)=-f(x)$ ثابت کنید.

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$



(الف)

شکل الف تابع f فرد است.



(ب)

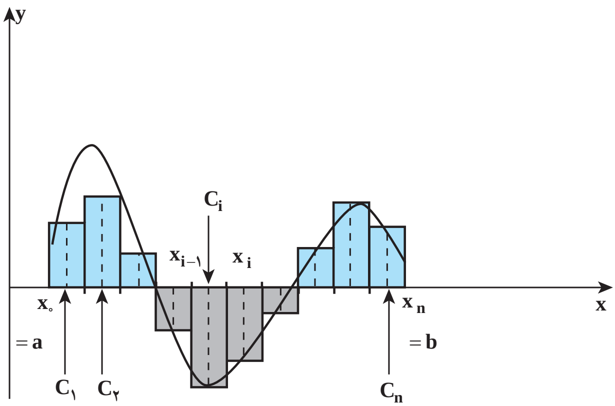
شکل (ب) تابع f زوج است.

(تعبیری دیگر از انتگرال معین)ــ فرض کنیم تابع f بر بازه $[\alpha,b]$ پیوسته باشد؛ همچنین

$$P:\ x_0=\alpha<x_1<x_2<\dots<x_{i-1}<x_i<\dots<x_n=b$$

افرازی دلخواه از این بازه باشد. هرگاه $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ $(1 \le i \le n)$ نقطه دلخواهی از بازه جزء iام باشد، ثابت کنید.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$



$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$ مجموع مساحت مستطیل‌های رنگی منهای حاصل جمع مستطیل‌های با رنگ خاکستری است.

راهنمایی : از اینکه f بر هر بازه جزء پیوسته است استفاده کنید. سپس با استفاده از حاصل‌جمع‌های بالا و پایین و قضیه فشردگی، تساوی فوق به آسانی به‌دست می‌آید.

مسائل

در تمرین‌های ۱ـ۶، P_n یک افراز منظم از بازه $[a,b]$ است به‌طوری که $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$. برای این تمرین‌ها، L_n، U_n را برای مقدار مفروض n به دست آورید.

۱ــ $f(x)=x$ بر $[0,2]$، با انتخاب $n=8$.

۲ــ $f(x)=x^2$ بر $[0,4]$، با انتخاب $n=4$.

۳ــ $f(x)=e^x$ بر $[-2,2]$، با انتخاب $n=4$.

۴ــ $f(x)=L_n x$ بر $[1,2]$، با انتخاب $n=5$.

۵ــ $f(x)=\sin x$ بر $[0,\pi]$، با انتخاب $n=6$. مقدار انتگرال را با مساحت توضیح دهید.

۶ــ $f(x)=\cos x$ بر $[0,2\pi]$، با انتخاب $n=4$. مقدار انتگرال را با مساحت توضیح دهید.

در تمرین‌های ۷ــ۸ ابتدا L_n، U_n را برای افراز منظم با n بازه جزءِ محاسبه کنید.

سپس ثابت کنید که $\lim\limits_{n\to\infty} L_n = \lim\limits_{n\to\infty} U_n$ از این‌رو انتگرال معین مربوطه را به‌دست آورید.

۷ــ $f(x)=1-x$ بر $[a,b]=[0,2]$

۸ــ $f(x)=$ بر $[a,b]=[0,1]$

۹ــ انتگرال را محاسبه کنید. $\int_{-3}^{3} \sqrt{9-x^2}\,dx$

۱۰ــ فرض کنیم f تابعی پیوسته و صعودی اکید بر [a,b] و P افراز منظم با n بازه جزءِ از این بازه بوده باشد. ثابت کنید.

$$U_n - L_n = \frac{(b-a)(f(b)-f(a))}{n}$$

چون سمت راست این عبارت را می‌توانیم n با انتخاب n به قدر کافی بزرگ از هر عدد مثبتی کوچک‌تر کنیم، تابع f می‌بایست بر [a,b] انتگرال‌پذیر باشد. (این مسأله اثباتی ساده از قضیه به‌دست می‌دهد.)

۱۱ــ دو تمرین جفت برای تمرین‌های ۵ و ۶ به شکل زیر می‌تواند مطرح شود :

$\int_0^{2\pi} \sin x\,dx$ و $\int_0^{\pi} \cos x\,dx$. این مقادیر را حساب کرده و آنها را به ترتیب با اعداد به‌دست آمده در ۵ و ۶ مقایسه کنید.

۴ـ۴ـ ویژگی‌های انتگرال معین

ریاضیدانان را عادت بر این است که وقتی مفهومی را برای موارد ملموس و فیزیکی فرمول‌بندی می‌کنند، آن را به‌صورتی کلی‌تر و در واقع در نهایت کلی آن، تعمیم دهند. ما انتگرال معین $\int_a^b |f(x)|\,dx$ را با محدودیت‌هایی مطرح و بررسی کردیم :

ابتدا فرض کردیم f تابعی پیوسته بر بازه [a,b] باشد، سپس آن را به توابع کراندار تعمیم دادیم.

چون بازه [a,b] نقش کلیدی در تعریف انتگرال داشت (افرازها چنین نقشی داشتند) پس $a<b$؛ و این یک فرض الزام‌آور به حساب آمده است!

سخن از وقتی که f ناپیوسته باشد و یا آنکه f بر [a,b] بی‌کران باشد خارج از برنامه این درس است.

امّا برای وقتی‌که $a=b$ و یا $a>b$، به آسانی می‌توانیم مفهوم انتگرال معین را تعمیم دهیم.

(الف) قرار می‌دهیم $\int_a^a f(x)dx = 0$

در واقع در چنین صورتی هر افراز از بازه $[a,b]$ فقط شامل یک نقطه است و لذا طول بر بازه جزءِ $\Delta x_i=0$ است. x_iها به شکل ضریب در Σ ظاهر می‌شدند، پس تعریف فوق که حالت خاص از انتگرال معین است، طبیعی می‌نماید.

ب) هرگاه $a>b$، تعریف می‌کنیم.
$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

قضیه ۴ (خواص خطی انتگرال): فرض کنیم f و g توابعی انتگرال‌پذیر $[a,b]$ و c_1 و c_2 دو عدد ثابت باشند. در این صورت تابع c_1f+c_2g نیز بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر است؛ به‌علاوه

$$\int_a^b (c_1 f(x) + c_2 g(x))dx = c_1 \int_a^b f(x)dx + c_2 \int_a^b f(x)dx \qquad (1)$$

عبارت c_1f+c_2g را اصطلاحاً یک ترکیب خطی از g و f می‌نامیم.

رابطه (۱) را با رابطه مشابه در خصوص سیگماها مقایسه کنید.

$$\sum_{i=1}^{n}(c_i a_i + c_2 b_i) = c_1 \sum_{i=1}^{n} a_i + c_2 \sum_{i=1}^{n} b_i \qquad (2)$$

اثبات (۱) نیز اساساً براساس مفهوم انتگرال و خواص مشابه برای Σ انجام می‌شود.

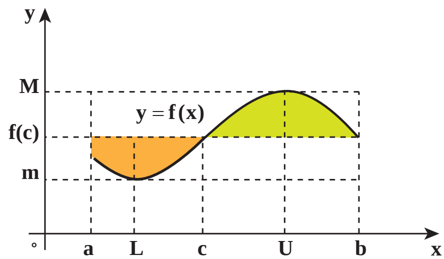
مثال:
$$\int_0^1 (x^3 + 4x^3)dx = \int_0^1 x^3 dx + 4\int_0^1 x^2 dx$$
$$= \frac{1}{4} + \frac{4}{3} = \frac{7}{12}$$

زیرا قبلاً ملاحظه کرده‌ایم که $\int_0^1 x^3 = \frac{1}{4}$ ، $\int_0^1 x^2 = \frac{1}{3}$.

قضیه ۵: فرض کنیم g،f توابعی انتگرال‌پذیر و برای هر $\alpha \le x \le b$
$$f(x) \le g(x)$$
در این‌صورت
$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$$

قضیه زیر که به کمک قضیه مقدار میانی اثبات می‌گردد، قضیهٔ مقدار میانگین در انتگرال‌ها نامیده می‌شود.

قضیه ۶: (قضیه مقدار میانگین در انتگرال‌ها) هرگاه f بر $[a,b]$ تابعی پیوسته باشد، نقطه‌ای مانند c از این بازه هست به قسمی که
$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c)$$



شکل ۴ــ۱۲ــ مقدار انتگرال برابر مساحت مستطیلی به ارتفاع f(c) و قاعده b−a

برهان: می‌دانیم :

$$m < \frac{۱}{b-a}\int_a^b f(x)dx < M$$

که در آن M و m به ترتیب ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع f بر [a,b] هستند.

(قضیه ۲) چون f پیوسته است، بنابرقضیه مقدار میانی فصل ۲، هر مقدار بین ماکزیمم و مینیمم خود را در نقطه‌ای مانند c∈[a,b] می‌گیرد، یعنی :

$$\frac{۱}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(c)$$

و یا

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c)$$

۴ـ۵ـ قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال

همچنان که در فصل ۳ خوانده‌ایم، هرگاه تابع مشتق‌پذیر F بر بازه [a,b] چنان باشد که $F'(x)=f(x)$ ، F را یک **پادمشتق** و یا یک **تابع اولیه** تابع f می‌نامیم. در این بخش سعی‌مان این است تا ارتباطی بین دو مفهوم انتگرال معین، که در بخش پیشین تعریف گردید، و مفهوم پادمشتق برقرار سازیم. چنان‌که قبلاً نیز گفته‌ایم، خواهیم دید که این ارتباط به نحوی چشمگیر محاسبه بسیاری از انتگرال‌های معین را میسر می‌سازد. این ارتباط که در واقع ارتباطی بین مفهوم‌های مشتق و انتگرال معین برقرار می‌کند، به‌طرزی شایسته به عنوان قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال نامگذاری شده است.

قضیه ۷: (قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال) فرض کنیم تابع f بر بازه I که شامل نقطه a است پیوسته باشد، در این صورت احکام ذیل برقرارند.

الف) هرگاه تابع F را بر I با ضابطه :

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

تعریف کنیم آنگاه تابع F مشتق‌پذیر است و $F'(x)=f(x)$، یعنی F یک تابع اولیه f می‌باشد؛

به عبارت دیگر :

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)dt\right) = f(x)$$

اگر I در یک طرف یا دو طرف بسته باشد، در هر نقطهٔ انتهایی مشمول بازه، مشتق یک طرفه (مشتق راست، مشتق چپ) منظور می‌شود.

ب) هرگاه G تابع اوّلیه دیگری برای f باشد، به‌طوری که $G'(x)=f(x)$، آنگاه برای هر دو نقطه از I مانند a و b، $(a<b)$،

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$$

برهان: با استفاده از تعریف مشتق، مشتق F را محاسبه می‌کنیم:

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^{x} f(t)dt\right)$$

بنا بر قضیه ۴

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_a^{x+h} f(t)dt$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} h.f(c)$$

که در آن $c=c(h)$ به h بستگی داشته امّا بین x و x+h می‌باشد (قضیه ۶) بنابراین:

$$F'(x) = \lim_{c\to x} f(c)$$

$$=f(x)$$

زیرا وقتی $h\to 0$، $c\to x$ و f پیوسته می‌باشد.

ب) چون $G'(x)=f(x)$، $F(x)=G(x)+C$ برای هر $x\in I$ که در آن C مقدار ثابتی است. از این‌رو

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) = G(x) + C$$

اکنون فرض کنیم $x=a$، پس

$$0 = G(a) + C$$

یعنی $C=-G(a)$. بار دیگر، فرض می‌کنیم $x=b$؛ به‌دست می‌آوریم.

$$\int_a^b f(t)dt = G(b) + C = G(b) - G(a)$$

البته می‌توانیم t را با x (و یا با هر متغیر دلخواه دیگری) در سمت چپ تساوی فوق تعویض کنیم.

نکته: هر دو قسمت قضیه اساسی را باید به خوبی به‌خاطر داشت. قسمت الف به شما می‌گوید که چگونه می‌توان از یک انتگرال نسبت به حد بالایی آن مشتق‌گیری کرد. قسمت (ب) راه محاسبه

یک انتگرال معین را به دست می‌دهد مشروط بر آنکه بتوان یک تابع اولیه برای تابع تحت انتگرال‌گیری پیدا کرد.

نماد محاسباتی : برای آنکه محاسبه انتگرال‌های معین را با استفاده از قضیه اساسی تسهیل کنیم نِماد محاسباتی زیر را معرفی می‌کنیم. $F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$

بنابراین اگر $F(x)$ را با نِماد $\int f(x)dx$ نشان دهیم. $\int_a^b f(x)dx = (\int f(x)dx)\Big|_a^b$

$\int f(x)dx$ را **انتگرال نامعین** یا اختصاراً انتگرال f نیز می‌نامیم. هر تابع اولیه را که برای محاسبه انتگرال معین به‌کار گیریم تأثیری در مقدار انتگرال معین نخواهد داشت زیرا مقدار ثابت در محاسبه حذف خواهد شد.

زیرا فرض کنیم به جای $F(x)$ از $G(x)=F(x)+C$ استفاده کنیم :

$$(F(x)+C)\Big|_a^b = F(b)+C-(F(a)+C) = F(b)-F(a)$$

$$= F(x)\Big|_a^b$$

پس از هر تابع اولیه برای محاسبه انتگرال معین می‌توان استفاده کرد.

به چند مثال ذیل توجه کنید. آیا قبل از آنکه حل آنها را ملاحظه کنید می‌توانید خودتان به حل آنها بپردازید، کوشش کنید!

مثال : انتگرال‌های معین زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int_0^a x^2dx$ ب) $\int_{-1}^{2}(x^2-3x+2)dx$

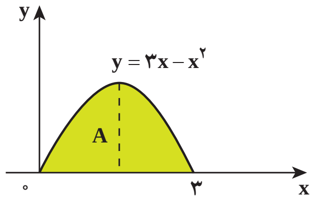
حل :

(الف)
$$\int_0^a x^2dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^a = \frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{3}0^3$$
$$= \frac{a^3}{3}$$

زیرا
$$= \frac{d}{dx}\frac{x^3}{3} = x^2$$

(ب)
$$\int_{-1}^{2}(x^2-3x+2)dx = (\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x)\Big|_{-1}^{2}$$
$$= (\frac{1}{3}(8) - \frac{3}{2}(4) + 4 - (\frac{1}{3}(-1) - \frac{3}{2}(1) + (-2))$$
$$= \frac{9}{2}$$

مثال: مساحت ناحیه‌ای از صفحه را که تحت نمودار تابع $y=۳x-x^۲$ بوده و در نقاط تقاطع با محور xها به این محور محدود می‌باشد محاسبه کنید.



حل: ابتدا لازم است نقاط تقاطع منحنی نمودار تابع را با محور xها مشخص کنیم

$$۰=۳x-x^۲=-x(۳-x)$$

ریشه‌های این معادله $x=۰$ و $x=۳$ می‌باشند (شکل فوق). پس مساحت ناحیه مورد تقاضا برابر است با:

$$A=\int_۰^۳ (۳x-x^۲)dx=(\frac{۳}{۲}x^۲-\frac{۱}{۳}x^۳)\Big|_۰^۳$$

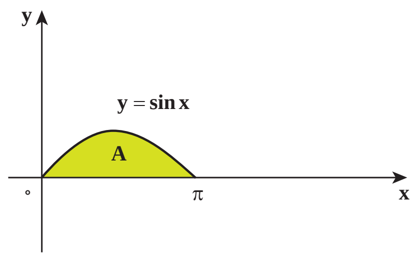
$$=\frac{۲۷}{۲}-\frac{۲۷}{۳}-(۰-۰)$$

$$=\frac{۲۷}{۶}=\frac{۹}{۲}$$ واحد سطح

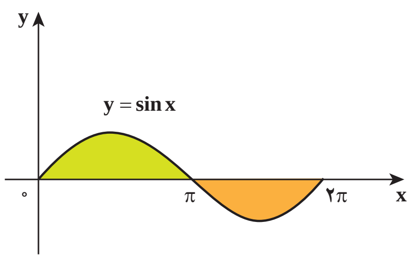
تمرین در کلاس

الف) مساحت یک طاق تحت $y=\sin x$ را محاسبه کنید. (شکل زیر)

ب) در شکل (ب) مساحت ناحیه A را با استفاده از انتگرال به‌دست آورید.



الف) یک طاق تحت نمودار تابع y=sinx



شکل (ب)

آیا حدس می‌زدید که مساحت یک طاق برابر ۲ واحد سطح باشد؟

توجه دارید که در حالی‌که انتگرال معین یک عدد است، مساحت یک کمیت هندسی است که به‌طور ضمنی با واحدهای اندازه‌گیری مربوط می‌شود، هرگاه واحدهای اندازه محورهای x و y برحسب متر باشد، واحد سطح مساحت مربوطه بر حسب متر مربع خواهد بود. در صورتی‌که واحد محورهای x و y مشخص نباشد، اندازه مساحت ناحیه را می‌بایست به‌صورت **واحد سطح** بیان کرد.

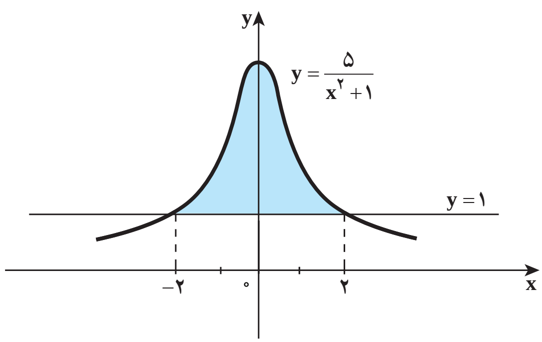
ج) مساحت ناحیه R را که بالای خط $y=۱$ و تحت نمودار $y=\frac{۵}{x^۲+۱}$ می‌باشد به‌دست آورید (شکل ...)

راهنمایی: ناحیه R مورد بحث در شکل زیر هاشور زده شده است. برای آنکه نقاط تقاطع $y=۱$ و $y=\frac{۵}{x^۲+۱}$ را بیابیم باید معادله زیر را حل کنیم.

$$۱=\frac{۵}{x^۲+۱}$$

پس $x^۲+۱=۵$ و یا $x^۲=۴$، در نتیجه طول نقاط تقاطع $x=\pm۲$ می‌باشد.

مساحت ناحیه R برابر است با مساحت زیر نمودار تابع



شکل ناحیه مورد محاسبه و به‌صورت رنگی مشخص شده است.

$y=\frac{۵}{x^۲+۱}$ و محدود به خطوط به معادله‌های $x=-۲$ و $x=۲$ منهای مساحت مستطیل به عرض ۴ و ارتفاع ۲. اکنون معادله مساحت را برحسب انتگرال نوشته و به محاسبه آن بپردازید.

هرگاه جواب $A=۱۰\tan^{-۱}(۱)-۴$ (واحد سطح) را به‌دست آورده باشید، کاملاً موفق شده‌اید.

نکته: توجه دارید که با استفاده از تقارن تابع (تابع زوج) می‌توانید حد پایین را صفر گرفته و ضریب ۲ را در انتگرال لحاظ کنید؛ قطعاً کار با صفر در محاسبه انتگرال معین ساده‌تر است از کار با ۲−

مثال: مقدار میانگین تابع $f(x)=e^{-x}+\cos x$ را بر بازه $[-\frac{\pi}{۲},۰]$ به دست آورید.

حل: طبق تعریف، عمل می‌کنیم

$$\bar{f}=\frac{۱}{۰-(-\frac{\pi}{۲})}\int_{-\frac{\pi}{۲}}^{۰}(e^{-x}+\cos x)dx$$

$$\bar{f}=\frac{۲}{\pi}(-e^{-x}+\sin x)\Big|_{-}^{۰}$$

$$=\frac{۲}{\pi}(-۱+۰+e^{\frac{\pi}{۲}}+۱)=\frac{۲}{\pi}e^{\frac{\pi}{۲}}$$

یک پرسش مهم

چون $\frac{d}{dx}(L_n|x|)=\frac{۱}{x}$ برای $x\neq۰$، آیا می‌توانیم نتیجه بگیریم که

$$\int_{-۱}^{۱}\frac{dx}{x}=Ln|x|\Big|_{-۱}^{۱}=۰-۰=۰$$

به قضیه اساسی یک بار دیگر توجه کنید و رفتار تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ را در بازه $[-۱,۱]$ درنظر بگیرید. پاسخ خود را با دلیل منطقی با دبیر خود مطرح کنید.

مثال: مشتق توابع زیر را به‌دست آورید.

الف) $F(x)=\int_{x}^{۳}e^{-t^{۲}}dt$ ب) $G(x)=x^{۲}\int e^{-t^{۲}}dt$

حل:

الف) داریم

$$F(x)=-\int_{۳}^{x}e^{-t^{۲}}dt$$

طبق قضیه اساسی

$$F'(x)=-e^{-x^{۲}}$$

ب) بنابر قاعده زنجیری داریم

$$G'(x)=۲x\int_{-۴}^{۵x}e^{-t^{۲}}dt+x^{۲}\frac{d}{dx}\int_{-۴}^{۵x}e^{-t^{۲}}dt$$

$$=۲x\int_{-۴}^{۵x}e^{-t^{۲}}dt+x^{۲}(e^{-(۵x)^{۲}})\times۵$$

$$=۲x\int_{-۴}^{۵x}e^{-t^{۲}}dt+۵x^{۲}e^{-۲۵x^{۲}}$$

مسائل

انتگرال‌های معین ۱ـ۹ را محاسبه کنید :

۱ـ $\int_{۰}^{۲}x^{۳}dx$ ۲ـ $\int_{۰}^{۴}\sqrt{x}dx$ ۳ـ $\int_{۰}^{۲\pi}(۱+\sin t)dt$

۴ـ $\int_{\frac{۱}{۲}}^{۱}\frac{dx}{x}$ ۵ـ $\int_{-۲}^{-۱}(\frac{۱}{x^{۲}}-\frac{۱}{x^{۳}})dx$ ۶ـ $\int_{۱}^{۲}(\frac{۲}{x^{۳}}-\frac{x^{۳}}{۲})dx$

۷ـ $\int_{-\frac{\pi}{۴}}^{-\frac{\pi}{۶}}\cos x dx$ ۸ـ $\int_{۰}^{\frac{۴\pi}{۳}}|\sin x|dx$ ۹ـ $\int_{-\pi}^{\pi}e^{x}dx$

بعضی انتگرال‌های مقدماتی : چنانچه ملاحظه کرده‌ایم انتگرال معین را به ساده‌ترین شکل ممکن می‌توان محاسبه کرد مشروط بر آنکه بتوانیم تابع اوّلیه (انتگرال نامعین) تابع تحت علامت انتگرال را محاسبه کنیم. در آنالیز مقدماتی روش‌هایی برای محاسبه انتگرال‌ها ارائه می‌گردد. معهذا باید اذعان کرد که عمل انتگرال‌گیری برخلاف مشتق‌گیری، همیشه کار آسانی نمی‌باشد، این امر از آنجا ناشی می‌شود که می‌توان به آسانی توابعی عرضه کرد که برای آنها نتوان تابع اوّلیه‌ای پیدا کرد. برای مثال می‌توانیم از تابع $f(x)=e^{x^۲}$ نام ببریم که نمی‌توان تابعی مانند F پیدا کرد به قسمی که $F'(x)=f(x)$

در اینجا برای تسهیل بیشتر کار، تابع اوّلیه برخی از توابع را عرضه می‌کنیم. از این به بعد از تابع اوّلیه به عنوان انتگرال نامعین یا به‌طور خلاصه انتگرال نام برده و از علامت انتگرال (S کشیده) ولی بدون حدود بالا و پایین برای انتگرال استفاده می‌کنیم و با فرض اینکه C عدد ثابتی است داریم :

۱ــ $\int ۱dx = x+c$

۲ــ $\int xdx = \frac{۱}{۲}x^۲+c$

۳ــ $\int x^۲dx = \frac{۱}{۳}x^۳+c$

۴ــ $\int \frac{۱}{x^۲}dx = -\frac{۱}{x}+c$

۵ــ $\int \sqrt{x}dx = \frac{۲}{۳}x^{\frac{۳}{۲}}+c$

۶ــ $\int x^r dx = \frac{۱}{۱+r}x^{r+۱}+c \;،\; r\neq -۱$

۷ــ $\int \frac{۱}{x}dx = L_n|x|+c$

۸ــ $\int \sin axdx = -\frac{۱}{a}\cos ax+c$

۹ــ $\int \cos axdx = \frac{۱}{a}\sin ax+c$

۱۰ــ $\int \tan axdx = \frac{-۱}{a}L_n|\cos ax|+c$

۱۱ــ $\int \cot axdx = \frac{۱}{a}L_n|\sin ax|+c$

۱۲ــ $\int e^{ax}dx = \frac{۱}{a}e^{ax}+c$

تمرین در کلاس

اکنون با استفاده از خواص خطی انتگرال و جدول انتگرال فوق بسیاری از انتگرال‌ها را می‌توانید محاسبه کنید. برای نمونه انتگرال‌های $\int(x^۵-۳x+e^{۳x}-۳)dx$ و $\int(\sin ۳x-\cos ۲x)dx$ را محاسبه کنید.

فعالیت

درستی تساوی‌های فوق را در جدول انتگرال‌ها با مشتق‌گیری از طرف دوم محقق سازید.

مسائل

۱ــ پرسش‌های مفهومی

الف) معنی انتگرال نامعین $\int f(x)dx$ را توضیح دهید.

ب) کدام‌یک از گزینه‌های زیر درست و کدام نادرست است؟

ب) ۱ــ انتگرال نامعین یک عدد و انتگرال معین یک تابع است.

ب) ۲ــ انتگرال نامعین یک تابع و انتگرال معین یک عدد است.

ب) ۳ــ انتگرال معین و انتگرال نامعین فرقی با هم ندارند و تفاوت آنها فقط در یک عدد ثابت است.

ب) ۴ــ برای محاسبه انتگرال معین، در بیشتر موارد، از انتگرال نامعین استفاده می‌کنیم. مجوز این‌کار در قضیه ... آمده است.

ج) فرض کنیم f تابعی انتگرال‌پذیر بر بازه [a,b] باشد، میانگین آن، یعنی

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

را تفسیر هندسی کنید.

د) فرض کنیم تابع f بر بازه [a,b] تعریف شده و جزء در تعداد متناهی نقطه از این بازه در سایر نقاط آن پیوسته باشد. چنین تابعی را یک تابع **قطعه‌ای پیوسته** می‌نامند. آیا f بر [a,b] انتگرال‌ناپذیر است. در صورتی که جوابتان مثبت است، مقدار انتگرال f را توضیح دهید.

۲ــ انتگرال‌های معین زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int_0^4 x\sqrt[3]{x}dx$ ب) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin 2x + \tan x)dx$

پ) $\int_0^2 |\sqrt{x}-1|\,dx$ ت) $\int_0^1 |3x-1|[3x]dx$

۳ــ انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int \sin ۴x \cos ۲x dx$ 　　 ب) $\int \frac{x^۲+\sqrt{x}+۱}{۲x^۲}dx$

پ) $\int \sqrt{(۱-\sqrt{x})^۲+۴\sqrt{x}}dx$ 　　 ت) $\int \frac{۱+e^{۲x}}{e^x}dx$

۴ــ مقدار میانگین تابع f با ضابطه $f(x)=\sqrt{\frac{۱+\cos x}{۲}}$ را بر بازه $[۰,\pi]$ حساب کنید.

۵ــ انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int \frac{(x+۲)^۳}{x}dx$ 　　 ب) $\int \frac{x^۲+۱}{\sqrt{x}}dx$

۶ــ با مشتق‌گیری از طرف دوم تساوی‌های زیر درستی آنها را محقق کنید.

الف) $a>۰$ 　 $\int \frac{۱}{\sqrt{a^۲+x^۲}}dx = \sin^{-۱}\frac{x}{a}+c$

ب) $a>۰$ 　 $\int \frac{۱}{a^۲+x^۲}dx = \frac{۱}{a}\tan^{-۱}\frac{x}{a}+c$

۷ــ فرض کنیم که f و g انتگرال‌پذیر بوده و برای هر x از بازه [a,b]، $f(x)\le g(x)$. ثابت کنید $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$. (قضیه ۵)

خواندنی

ملاحظه کردیم که در تعریف انتگرال معین افراز بازه انتگرال‌گیری و عبارت‌های $\int m_i\Delta x_i$ و یا $M_i\Delta x_i$ نقش اساسی داشتند. وقتی تعداد نقاط افراز زیاد و زیادتر می‌شود Δx_i کوچک و کوچک‌تر می‌گردد زیرا $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$. بنابراین هر یک از m_i یا M_i را می‌توان با عرض هر نقطه در بازه جزءِ $[x_{i-1}, x_i]$ مانند l_i تقریب کرد. در نتیجه مثلاً $\sum_{i=1}^{n} m_i.\Delta x_i$ به صورت $\sum_{i=1}^{n} f(l_i).\Delta x_i$ در خواهد آمد. از طرف دیگر وقتی n به ∞ میل می‌کند $\Delta x_i \to 0$، پس سیگمای مورد بحث ما که در حد به $\int_a^b f(x)dx$ میل می‌کند. شامل تعداد بسیار زیاد جمله به‌صورت $f(l_i)\,\Delta x_i$ است که در آنها Δx_i فوق‌العاده کوچک‌اند (زیرا حد آنها صفر است). اما عرض‌ها یعنی $f(l_i)$ها محدودند پس $f(l_i)\,\Delta x_i$ نیز فوق‌العاده کوچک‌اند. ریاضیدانانی که در آغاز انتگرال را کشف کردند. بدان، بدین‌گونه می‌نگریستند :

مجموعی با بی‌نهایت جمله از جملات بی‌نهایت کوچک : در واقع نیوتن و لایبنیتز که هر دو واضعان حساب مشتقات و حساب انتگرال (حسابان) به شمار می‌روند، این حساب را با حساب بی‌نهایت کوچک‌ها و عبارت‌هایی از این دست سامان دادند.

به دلیل مشکلات و نابسامانی‌هایی که در حساب دیفرانسیل و انتگرال با مفاهیم بی‌نهایت کوچک‌ها بروز کرد، ریاضیدانان بعد از نیوتن و لایبنیتز کوشیدند تا این نابسامانی‌ها را از آنالیز بزدایند. سرانجام پس از حدود یکصد سال از کشف حساب دیفرانسیل و انتگرال، ریاضیدان آلمانی به نام کارل و ایراشتراس توانست حسابان را به شکل امروزی با استفاده از مفهوم حد سامان دهد.

درواقع خیلی پیش از نیوتن ولایبنیتز حدود سال ۱۰۴۱ میلادی ابن الهیثم (Ibn al– Haitam) یک ریاضیدان مسلمان به کشف حساب بی‌نهایت کوچک‌ها نایل شده بود و متعاقب وی ابوسهل کوهی و ثابت بن قره در مطالعه و بررسی‌های مربوط به محاسبه حجم سهوی با انتگرال $\int_0^a t^4 dt$ درگیر شدند.

مراجع

۱ــ زنگنه؛ حمیدرضا؛ نادری؛ امیر؛ حساب دیفرانسیل و انتگرال توابع یک متغیره انتشارات دانشگاه صنعتی اصفهان

۲ــ مدقالچی، علیرضا؛ آنالیز ریاضی ۱، انتشارات دانشگاه پیام نور تهران ۱۳۸۶

۳ــ جیمز استوارت، حساب دیفرانسیل و انتگرال، انتشارات فاطمی چاپ اوّل ۱۳۸۸

۴ــ رولاند ای لارسن، رابرت پی هوستتلر، حساب دیفرانسیل و انتگرال جلد اوّل، ترجمه ــ علی اکبر عالم زاده ــ نشر اتحاد

۵ــ سیاوش شهشهانی، حساب دیفرانسیل و انتگرال (جلد اوّل) انتشارات فاطمی چاپ اوّل ۱۳۸۶

6ـ Adams, Robert A. Calculus, A complete Course, Pearson Education Canada Inc, Toronto,2003

7ـ Anton, Howard; Bivens, Irl; Davis, Stephen; Calculus, 9th edition, Wiley (Asia) Pte Ltd, 2010.