

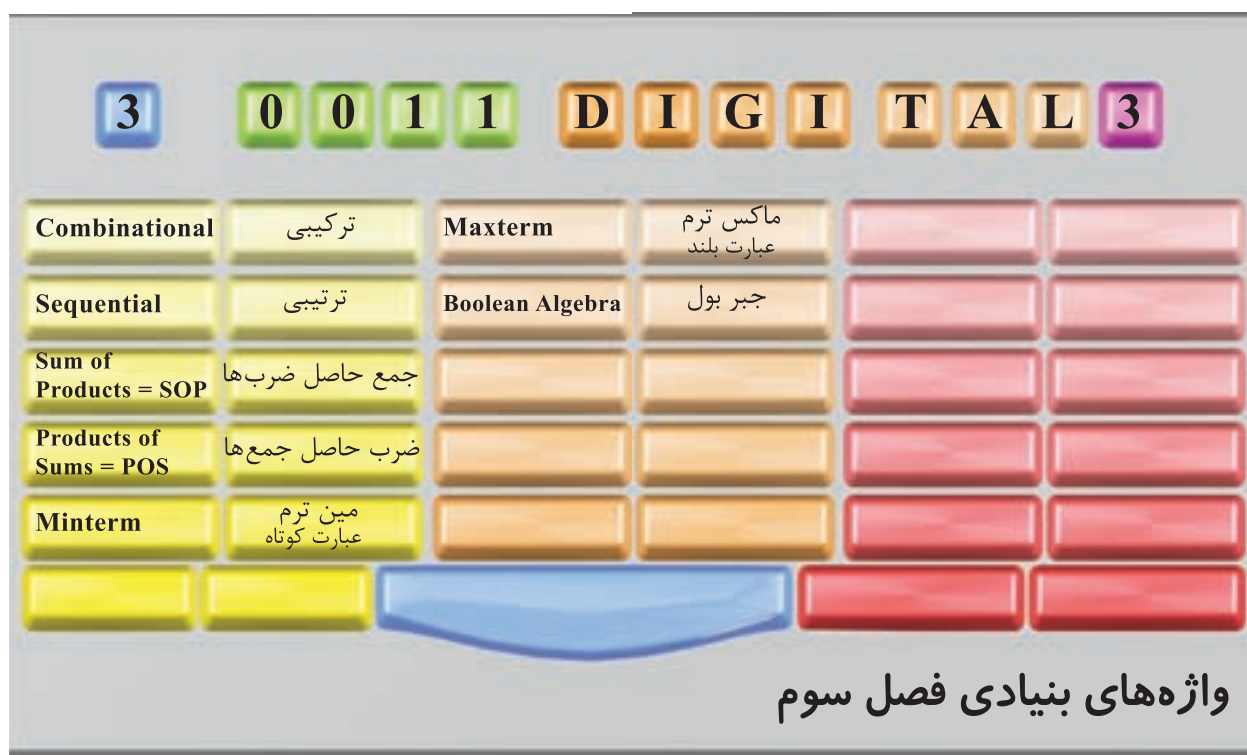
## جبر بول

**هدف کلی:** آموزش جبر بول و اتحادهای اساسی آن، توابع بولی به شکل مجموع حاصل ضربها و حاصل ضرب مجموعها، پیاده‌سازی توابع منطقی توسط دروازه‌های منطقی پایه و نقشه کارنو

کل زمان اختصاص داده شده به فصل: ۲۰ ساعت آموزشی

**هدف‌های رفتاری:** در پایان این فصل از فراگیرنده انتظار می‌رود که :

- ۱- توابع بولی را شرح دهد.
- ۲- عبارت بولی یک تابع منطقی را بنویسد.
- ۳- اتحادهای اساسی جبر بول را شرح دهد.
- ۴- توابع بولی را به کمک اتحادهای اساسی ساده کند.
- ۵- توابع بولی ساده شده را با دروازه‌های منطقی ترسیم (پیاده‌سازی) کند.
- ۶- عبارت بولی را به شکل نرمال (عادی) بنویسد.
- ۷- عبارت بولی را به شکل حاصل ضرب توضیح دهد.
- ۸- عبارت بولی را به شکل مجموع توضیح دهد.
- ۹- عبارت بولی را به شکل استاندارد مجموع حاصل ضربها شرح دهد.
- ۱۰- عبارت بولی به شکل استاندارد و حاصل ضرب مجموعها را توضیح دهد.
- ۱۱- عبارت منطقی را به شکل استاندارد مین ترم بنویسد.
- ۱۲- عبارت بولی را با استفاده از نقشه کارنو ساده کند.
- ۱۳- توابع منطقی را با گیت‌های منطقی پیاده‌سازی
- ۱۴- تعداد ورودی‌های دروازه‌های منطقی را افزایش دهد.
- ۱۵- دروازه‌های منطقی مختلف را فقط با NAND و NOR بسازد.
- ۱۶- جدول صحت را از ورودی داده‌های مساله استخراج کند.
- ۱۷- تابع منطقی را به شکل مجموع حاصل ضربها بنویسد (حداکثر چهار ورودی).
- ۱۸- مراحل طراحی مدارهای ترکیبی ساده را شرح دهد.
- ۱۹- مدارهای ساده ترکیبی را تشریح کند.
- ۲۰- یک نمونه مدار ترکیبی ساده را طراحی کند.
- ۲۱- با استفاده از نرم افزار مولتی سیم توابع بولی را با کمک گیت‌ها شبیه‌سازی کند.
- ۲۲- به سؤال‌های الگوی پرسش پاسخ دهد.
- ۲۳- کلیه هدف‌های رفتاری در حیطه عاطفی که در فصل اول آمده‌است را باید در این فصل مورد توجه قرار دهد.



## پیش‌گفتار

سپس به روابط منطقی و عملیات جبری می‌پردازیم. این عملیات برای ساده‌کردن و به دست آوردن فرم استاندارد و ساده شده مدار مورد استفاده قرار می‌گیرد. در جبر بول یک مدل ریاضی قابل استفاده مدلی است که بتواند:

۱- روابط بین خروجی‌ها و ورودی‌ها را به صورت ساده‌ترین رابطه ریاضی بیان کند.

۲- از نظر اجرای آزمایشگاهی و عمل قابل اجرا باشد.

۳- قادر به بیان عمل منطقی مدار باشد.

### ۳-۱-۱- قوانین حاکم بر جبر بول یا اتحادهای

#### اساسی

اتحادهای اساسی در ساده‌سازی توابع منطقی کاربرد دارند. در ادامه به بررسی این قوانین و اتحادها می‌پردازیم. برای اثبات این قوانین (قاعده‌ها)، از مدارهای کلیدی استفاده می‌کنیم. شرایط روشن شدن لامپ در شکل ۳-۱ را به عنوان خروجی مدار در نظر می‌گیریم و آن را

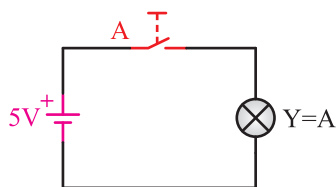
جبر بول دستگاه ریاضی مناسبی برای تجزیه و تحلیل مدارهای دیجیتالی است. در این فصل با اتحادهای اساسی جبر بول، چگونگی به دست آوردن تابع منطقی یک مدار مشخص، شکل‌های نرمال، ساده کردن توابع منطقی آشنا می‌شویم.

### ۳-۱-۲- جبر بول (Boolean algebra)

در این فصل یک مدل ریاضی را مورد بررسی قرار می‌دهیم که نحوه کار یک مدار دیجیتال را بیان می‌کند. چنین مدلی را جبر بول می‌نامیم.

این جبر روش‌های مفید و ساده‌ای را برای تجزیه و تحلیل و ترکیب مدارهای دیجیتالی، از جمله مدارهای ترکیبی (Combinational) و مدارهای ترتیبی (Sequential) ارائه می‌دهد.

برای درک بهتر جبر بول و استفاده مؤثر از آن، ابتدا روش‌های کلی مربوط به این جبر را بیان می‌کنیم،



شکل ۳-۲ مدار معادل اثر صفر در عمل جمع منطقی (OR)

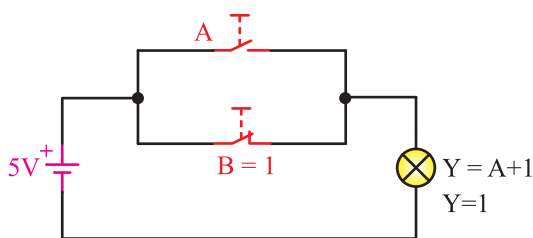
مدار معادل شکل ۳-۱ در شکل ۳-۲ آمده است. پس می‌توانیم نتیجه بگیریم که اگر صفر منطقی با هر عبارت منطقی جمع شود حاصل همان عبارت خواهد بود.

$$A + 0 = A$$



**تمرین کلاسی ۳-۱:**  $(A+B)$  را با صفر منطقی جمع کنید، حاصل آن را به دست آورید، مدار اصلی و معادل آن را ترسیم کنید.

**(ب) جمع با یک منطقی:** اگر ۱ با هر عبارت منطقی جمع شود حاصل برابر با «۱» خواهد شد. شکل ۳-۳ الف یک نمونه مدار ساده جمع شدن «۱» با عبارت منطقی را نشان می‌دهد. در این مدار کلید A با کلید B موازی شده است. کلید B یک کلید همیشه بسته (یک منطقی) است. در حالتی که کلید A می‌تواند تغییر وضعیت دهد. با توجه به توضیح داده شده در مورد عضو خنثی (صفر)، در این مدار رفتار کلید A هیچ تأثیری در خروجی ندارد و خروجی همواره «۱» خواهد بود. به عبارت دیگر لامپ همیشه روشن است.

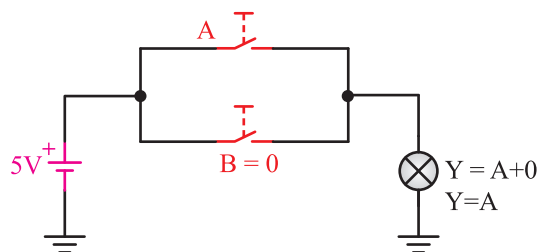


شکل ۳-۳ الف مدار اصلی جمع با یک منطقی

با  $Y$  نشان می‌دهیم.

**الف) عضو خنثی:** در عمل OR (جمع منطقی)، صفر منطقی عضو خنثی است. یعنی اگر هر عبارتی با صفر جمع شود، حاصل همان عبارت منطقی (تابع منطقی) خواهد بود. به شکل ۳-۱ که یک نمونه مدار ساده جمع با عضو خنثی است توجه کنید.

در این شکل کلید A دو وضعیت بسته (۱) و باز (۰) را می‌تواند اختیار کند.



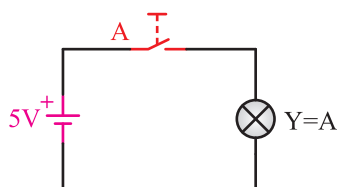
شکل ۳-۱ یک نمونه مدار اصلی جمع با عضو خنثی



**توجه:** در این قسمت، کلید در حالت بسته را «یک» و کلید در حالت باز را «صفر» فرض کرده‌ایم.

کلید B یک کلید همیشه باز است و در این مدار همواره حالت باز یا صفر را به خود می‌گیرد و نمی‌تواند تغییر وضعیت دهد. این کلید به صورت موازی با کلید A قرار دارد. در این شرایط خروجی مدار یعنی لامپ Y تابع تغییرات کلید A خواهد بود. یعنی اگر کلید A بسته شود لامپ روشن و اگر باز شود لامپ خاموش خواهد شد.

با برداشتن کلید B هیچ تغییری در مدار رخ نمی‌دهد و خروجی Y همواره تابع A خواهد بود. بنابراین بودن یا نبودن کلید B هیچ تأثیری در عملکرد خروجی مدار ندارد. شکل ۳-۲ این وضعیت را نشان می‌دهد.



شکل ۳-۴- ب) مدار معادل جمع منطقی (OR) هر عبارت با خودش



شکل ۳-۳- ب) مدار معادل اثر یک در عمل جمع منطقی (OR)

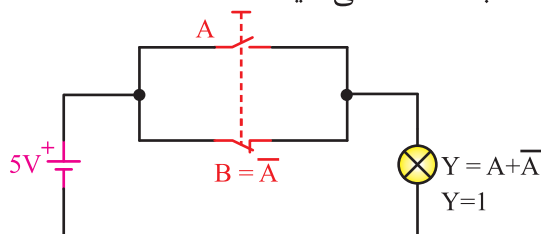
از مدارهای شکل ۳-۴ می‌توان نتیجه گرفت که:

$$A+A=A$$



**تمرین کلاسی ۳-۳:** عبارت منطقی  $B+C$  را با خودش جمع منطقی کنید. حاصل آن را به دست آورید، مدار اصلی و مدار معادل آن را ترسیم کنید.

**ت) جمع یک عبارت منطقی با معکوس آن:** هرگاه هر عبارت منطقی با معکوس خودش (NOT) جمع منطقی (OR) شود، حاصل یک می‌شود، در مدار شکل ۳-۵ الف عبارت  $A$  را با عبارت  $B$  که معکوس  $A$  است جمع کرده‌ایم. همان طور که از حالت‌های کلید  $A$  و  $B$  مشاهده می‌کنید در کلیه شرایط لامپ روشن می‌ماند. مدار معادل شکل ۳-۵ الف را در شکل ۳-۵ ب ملاحظه می‌کنید.



الف) مدار اصلی



ب) مدار معادل

شکل ۳-۵- جمع منطقی (OR) هر عبارت با معکوس خودش

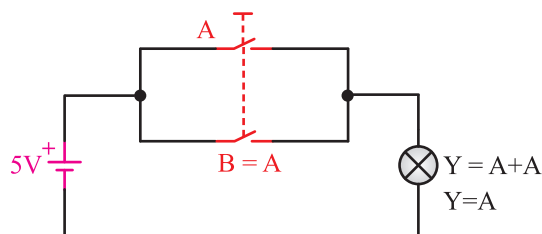
در شکل ۳-۳ ب مدار معادل شکل ۳-۳ الف را مشاهده می‌کنید. در این مدار کلید  $A$  هیچ تأثیری ندارد و خروجی همواره «یک» است، پس می‌توانیم روی خروجی بنویسیم:

$$A + 1 = 1$$



**تمرین کلاسی ۳-۲:** عبارت  $B+C$  را با یک منطقی جمع کنید، حاصل آن را به دست آورید و مدار اصلی و مدار معادل آن را ترسیم کنید.

**پ) جمع یک عبارت منطقی با خودش:** هرگاه هر عبارت منطقی با خودش جمع منطقی (OR) شود، حاصل همان عبارت است، در شکل ۳-۴ الف یک نمونه مدار مربوط به جمع هر عبارت با خودش را ملاحظه می‌کنید. برای تحلیل این مدار به توضیحات داده شده در مورد عضو خنثی توجه نمایید. در شکل ۳-۴ ب مدار معادل جمع هر عبارت با خودش را مشاهده می‌کنید.



شکل ۳-۴- الف) مدار اصلی جمع منطقی هر عبارت با خودش



از مدارهای شکل ۶-۳ می‌توان نتیجه گرفت که «یک» منطقی در ضرب منطقی (AND) بی‌تأثیر است، یعنی:

$$A + \bar{A} = 1$$



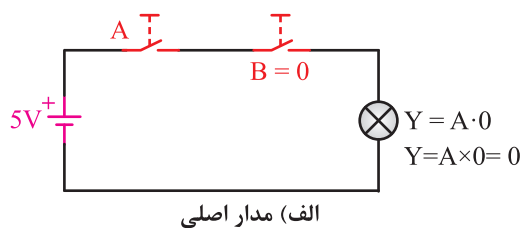
**نکته:** همان طور که در شکل های ۳-۱ تا ۳-۵  
ملاحظه کردید، عمل جمع منطقی دقیقاً مشابه گیت  
OR منطقی است.



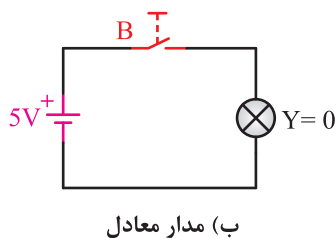
**تمرین کلاسی ۵-۳:** عبارت  $(A+B)$  را در «۱» منطقی ضرب کنید و حاصل را به دست آورید. مدار اصلی و مدار معادل آن را ترسیم کنید.

ج) ضرب عبارت منطقی در صفر: هرگاه هر عبارت منطقی در «صفر» منطقی ضرب منطقی (AND) شود حاصل صفر خواهد شد، در شکل ۷-۳ الف کلید A دو حالت بسته و باز را اختیار می‌کند و کلید B یک حالت دارد و آن حالت خاموش یا صفر منطقی است.

شکل ۷-۳ ب مدار معادل شکل ۷-۳ الف را نشان می‌دهد.



الف) مدار اصلی



(ب) مدار معادل

شکل ۷-۳- تأثیر صفر منطقی در عمل ضرب منطقی (AND)

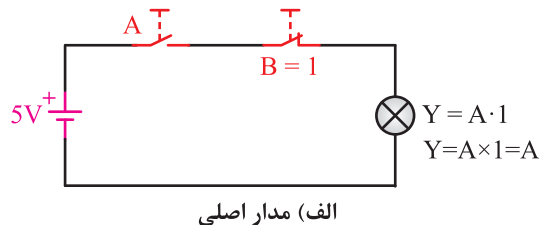
از مدارهای شکل ۷-۳ به این نتیجه می‌رسیم که هرگاه صفر منطقی در عبارتی ضرب منطقی (AND) شود، حاصل صفر خواهد شد. بنابراین:

$$A_{\bullet} \diamond = \diamond$$

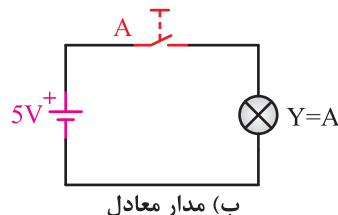


**تمرین کلاسی ۳-۴:** عبارت منطقی C+D را با  $\bar{C}$  جمع منطقی کنید و حاصل آن را به دست آورید. مدار اصلی و مدار معادل آن را ترسیم کنید.

ث) ضرب منطقی عبارت منطقی در یک: هرگاه هر عبارت منطقی در «یک» ضرب منطقی (AND) شود، حاصل همان عبارت است (در عمل ضرب منطقی «یک» عضو خنثی محسوب می‌شود). در شکل ۳-۶ الف کلید A در حالت صفر قرار دارد و کلید B فقط در یک حالت قرار دارد و نمی‌تواند تغییر کند. بنابراین عامل اثرگذار روی مدار فقط کلید A است. شکل ۳-۶ ب مدار معادل شکل ۳-۶ الف را نشان می‌دهد.



(الف) مدار اصلی،

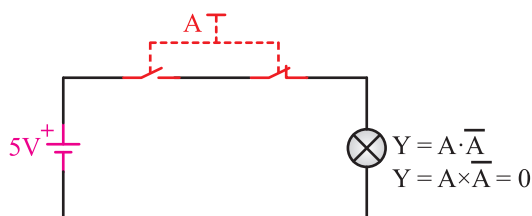


(ب) مدار معادل

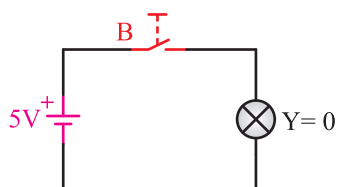
شکل ۶-۳- تأثیر یک منطقی در عمل ضرب منطقی (AND)

ح) ضرب عبارت منطقی در معکوس آن: هرگاه هر عبارت منطقی در معکوس خودش ضرب منطقی (AND) شود، حاصل صفر خواهد شد. در شکل ۳-۹ الف مدار اصلی و در شکل ۳-۹ ب مدار معادل آن را ملاحظه می‌کنید.

کلید B یک کلید یک حالت معادل صفر است.



الف) مدار اصلی



ب) مدار معادل

شکل ۳-۹ تأثیر ضرب منطقی (AND) بین هر عبارت منطقی و معکوس آن

از مدارهای شکل ۳-۹ می‌توان به نتیجه زیر رسید.

$$A \cdot \bar{A} = 0$$



تمرین کلاسی ۳-۸: عبارت  $A+B$  را در  $(\bar{A} + \bar{B})$  ضرب کنید و حاصل را به دست آورید. مدار اصلی و مدار معادل آن را ترسیم کنید.

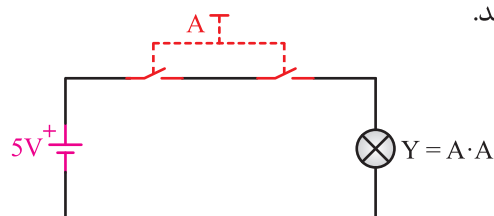
خ) توزیع پذیری AND در OR: هرگاه یک عبارت منطقی در پرانتزی ضرب منطقی (AND) شود، در تک تک عبارت‌های داخل پرانتز ضرب منطقی می‌شود، در شکل ۳-۱۰ الف ضرب منطقی تابع  $(B+C)$  را در تابع A ملاحظه می‌کنید. در شکل ۳-۱۰ ب مدار



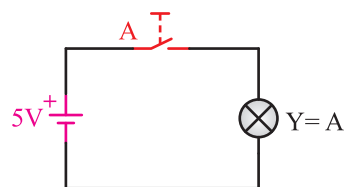
تمرین کلاسی ۳-۶: عبارت  $(C+D)$  را در «صفر» منطقی ضرب کنید، حاصل عبارت را به دست آورید. مدار اصلی و مدار معادل آن را ترسیم کنید.

سؤال: آیا در عمل ضرب ریاضی نیز نتایج موارد ث و ج صادق است؟ توضیح دهید.

چ) ضرب یک عبارت منطقی در خودش: هرگاه هر عبارت منطقی در خودش ضرب منطقی (AND) شود حاصل همان عبارت خواهد بود. در شکل ۳-۸ الف مدار اصلی و در شکل ۳-۸ ب مدار معادل آن را مشاهده می‌کنید.



الف) مدار اصلی



ب) مدار معادل

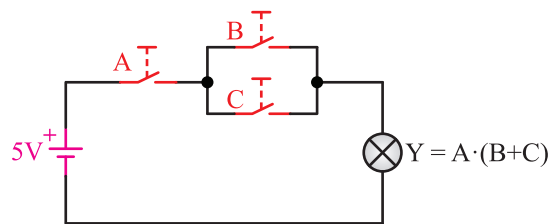
شکل ۳-۸ تأثیر عمل ضرب منطقی (AND) هر عبارت در خودش از مدارهای شکل ۳-۸ نتیجه زیر حاصل می‌شود.

$$A \cdot A = A$$

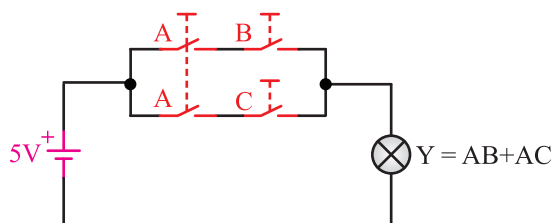


تمرین کلاسی ۳-۷: عبارت  $(A+B)$  را در خودش ضرب منطقی کنید. حاصل عبارت را به دست آورید. مدار اصلی و مدار معادل آن را ترسیم کنید.

معادل شکل ۱۰-۳ الف آمده است.



الف) مدار اصلی



ب) مدار معادل

شکل ۱۰-۳ ضرب یک عبارت منطقی در عبارت منطقی داخل پرانتز از مدارهای شکل ۱۰-۳ می‌توان به نتیجه زیر رسید.

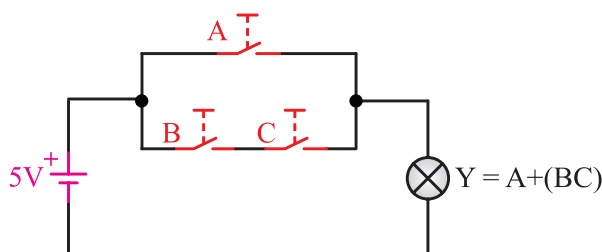
$$A \cdot (B + C) = AB + AC$$

این عمل را توزیع‌پذیری AND در OR می‌نامند. به عبارت دیگر در رابطه سمت راست اگر از عبارت A فاکتور گرفته شود، خواهیم داشت:

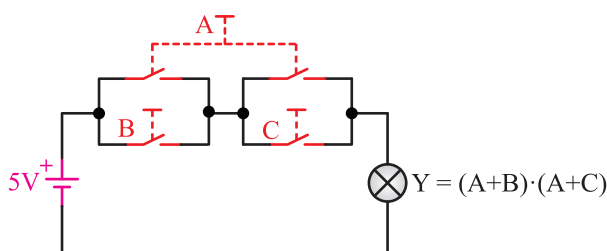
$$\underline{AB} + \underline{AC} = A (B + C)$$

یعنی پس از فاکتورگیری عبارت سمت چپ داخل کادر به دست می‌آید. عمل فاکتورگیری در ساده سازی توابع منطقی کاربرد زیادی دارد که در مباحث بعدی به آن بیشتر خواهیم پرداخت.

د) جمع منطقی یک عبارت با پرانتز: هرگاه یک عبارت منطقی با پرانتزی جمع منطقی (OR) شود با تک تک عبارت‌های داخل پرانتز جمع منطقی (OR) می‌شود. شکل ۱۱-۳ الف حاصل جمع BC را با A نشان می‌دهد. در شکل ۱۱-۳ ب مدار معادل شکل ۱۱-۳ الف را ملاحظه می‌کنید.



الف) مدار اصلی



ب) مدار معادل

شکل ۱۱-۳ حاصل جمع منطقی (OR) در پرانتز

از مدارهای شکل ۱۱-۳ نتیجه زیر حاصل می‌شود.

$$A + BC = (A + B) (A + C)$$



**تمرین کلاسی ۱۰-۳:** تابع  $AB + (CD)$  را با استفاده از قانون جمع منطقی عبارت با پرانتز جمع منطقی کنید، حاصل را به دست آورید. مدار اصلی و مدار معادل آن را ترسیم کنید.

جدول ۱-۳ قوانین جبر بول را نشان می‌دهد:



**تمرین کلاسی ۹-۳:** تابع B را در تابع  $(A + C + D)$  ضرب منطقی کنید، حاصل را به دست آورید. مدار اصلی و مدار معادل آن را ترسیم کنید.

### جدول ۳-۱- قوانین جبر بول

$A+0=A$	تأثیر عضو خنثی «صفر» در جمع منطقی
$A+1$	تأثیر «یک» منطقی در جمع منطقی
$A+A=A$	جمع منطقی یک تابع با خودش
$A+\bar{A}=1$	جمع منطقی یک تابع با معکوس خودش
$A \cdot 1=A$	تأثیر عضو خنثی «یک» در ضرب منطقی
$A \cdot 0=0$	تأثیر «صفر» منطقی در عمل ضرب منطقی
$A \cdot A=A$	ضرب یک تابع در خودش
$A \cdot \bar{A}=0$	ضرب یک تابع در معکوس خودش
$A \cdot (B+C) = AB+AC$	ضرب یک تابع در پرانتز
$A+(BC) = (A+B) \cdot (A+C)$	جمع یک تابع با پرانتز

### ۳-۲- قوانین دمورگان (Demorgan)

۳-۲-۱- طبق قانون اول دمورگان اگر پرانتزی که عمل جمع منطقی (OR) در آن صورت می‌گیرد را NOT کنیم، عمل جمع منطقی (OR) به ضرب منطقی (AND) تبدیل می‌شود و علامت NOT روی تک تک عناصر عبارت قرار می‌گیرد.

$$\overline{(A+B)} = \bar{A} \cdot \bar{B}$$

مثال ۳-۱: با استفاده از قانون اول دمورگان معادل عبارت  $C+D+E$  را بنویسید.  
حل:  $\overline{(C+D+E)} = \bar{C} \cdot \bar{D} \cdot \bar{E}$



تمرین کلاسی ۳-۱۱: معادل عبارت

$$\overline{A+B+C+D}$$

۳-۲-۲- قانون دوم دمورگان نشان می‌دهد، اگر NOT روی یک عبارتی که عمل ضرب منطقی دارد، قرار بگیرد، ضرب منطقی به جمع منطقی تبدیل می‌شود و علامت NOT روی تک تک عناصر مربوط به آن عبارت قرار می‌گیرد.

$$\overline{A \cdot B} = \bar{A} + \bar{B}$$

از قوانین دمورگان در ساده‌سازی عبارت‌های منطقی استفاده می‌شود.

مثال ۳-۲: با استفاده از قانون دوم دمورگان معادل عبارت  $C \cdot D \cdot E$  را بنویسید.

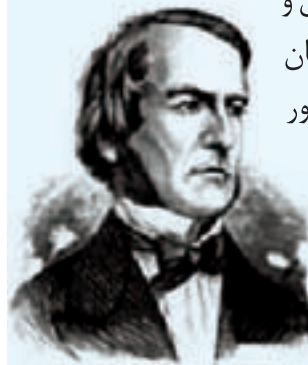
$$\overline{\overline{C \cdot D \cdot E}} = \overline{\bar{C} + \bar{D} + \bar{E}}$$

مثال ۳-۳: با استفاده از قوانین دمورگان معادل عبارت  $(A+B)(C \cdot D)$  را بنویسید.

حل:

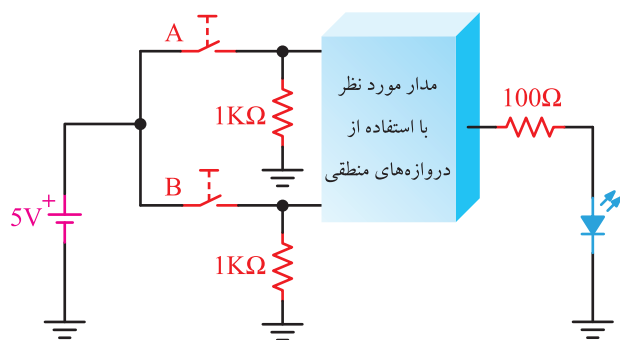
$$\overline{(A+B)(C \cdot D)} = \overline{(\bar{A} \cdot \bar{B})(\bar{C} + \bar{D})} = \overline{\bar{A} \bar{B} \bar{C} + \bar{A} \bar{B} \bar{D}}$$

### جورج بول ۱۸۶۴-۱۸۱۵



جورج بول از پدری کفاش و مادری خدمتکار در انگلستان به دنیا آمد. به منظور حمایت از خانواده به دلیل مشکلات مالی، خیلی زود تحصیلات ابتدایی را ترک کرد. در سال‌های جوانی از طریق معلمی امرار

معاش می‌کرد و در سال ۱۸۳۴ مدرسه‌ای را بنیان گذاشت. به تنهایی مطالعات ریاضیات پیشرفته را دنبال کرد و به واسطه انتشار مقالاتی در این زمینه به شهرت جهانی دست یافت. اولین مدال طلای ریاضیات را از انجمن سلطنتی لندن در سال ۱۸۴۴ دریافت کرد و به‌عنوان اولین پرفسور ریاضیات در کالج کوئین منصوب شد. او هم‌چنین لقب پدر منطق نمادین و بنیانگذار ریاضیات محض را از آن خود ساخت.



شکل ۳-۱۲ مدار الکتریکی مربوط به مثال ۳-۴

حل:

مرحله (۱) تنظیم جدول اولیه  
به جای مطرح کردن بندهای الف تا ث می‌توانیم  
صورت مثال را به شکل جدول ۳-۲ بیان کنیم.



**نکته:** در ضمن، به یاد داشته باشید که اگر خروجی مدار در وضعیت یک منطقی قرار گیرد، دیود نوردهنده روشن و اگر در وضعیت صفر منطقی قرار گیرد، دیود خاموش می‌شود.

جدول ۳-۲ جدول مربوط به مثال ۳-۴

وضعیت کلید A	وضعیت کلید B	وضعیت دیود نور دهنده
باز	باز	روشن
باز	بسته	روشن
بسته	باز	خاموش
بسته	بسته	روشن

مرحله (۲) تنظیم جدول صحت

اگر روشن بودن دیود نوردهنده (LED) را یک منطقی و خاموش بودن آن را صفر در نظر بگیریم و همچنین باز بودن کلید را صفر منطقی و بسته بودن آن را یک منطقی منظور کنیم، جدول ۳-۳ به صورت زیر درمی‌آید.



**تمرین کلاسی ۳-۱۲:** با استفاده از قانون دوم دمورگان معادل عبارت  $\overline{ABCD}$  را بنویسید.

### آگوستوس دمورگان

(۱۸۷۱-۱۸۰۶)



دانشمندی  
انگلیسی‌الاصل، متولد  
هندوستان و نویسنده  
مقاله مشهور  
«نظریه احتمالات» در  
دائرةالمعارف متروپولیتن  
(۱۸۴۵) است. در این مقاله او به تحلیل تئوری  
تحلیلی و لاپلاس پرداخته است.  
شهرت وی عمدتاً به دلیل قوانین دمورگان در  
احتمالات است.

**مثال ۳-۴:** می‌خواهیم یک مدار را مطابق شکل ۳-۱۲ با استفاده از دروازه‌های منطقی طراحی کنیم که دارای مشخصات زیر باشد:  
الف) دو کلید ورودی و یک مقاومت خروجی متصل به یک دیود نوردهنده (LED) داشته باشد.  
ب) اگر هر دو کلید A و B باز باشند ( $A=1$  و  $B=1$ ) دیود نوردهنده (LED) روشن شود.  
پ) اگر کلید A باز و کلید B بسته باشد ( $A=1$  و  $B=0$ )، دیود نوردهنده (LED) روشن شود.  
ت) اگر کلید A بسته و کلید B باز باشد ( $A=0$  و  $B=1$ ) دیود نوردهنده (LED) خاموش باشد.  
ث) اگر هر دو کلید A و B بسته باشند ( $A=0$  و  $B=0$ ) دیود نوردهنده (LED) روشن شود.

### جدول ۳-۳- جدول صحت مربوط به مثال ۳-۴

ورودی‌ها		خروجی
A	B	Y
۰	۰	۱
۰	۱	۱
۱	۰	۰
۱	۱	۱

**نکته:** توجه کنید که هیچ‌گاه هر سه جمله به‌طور هم‌زمان نمی‌توانند برابر یک شوند، بلکه در هر لحظه به ازای یک عبارت ورودی فقط و فقط یک خروجی خواهیم داشت. چرا؟ توضیح دهید.

مجدداً به‌صورت مثال ۳-۴ و بندهای الف تا ث توجه کنید.

زمانی که  $A=0$  و  $B=0$  (هر دو کلید باز) است، دیود نور دهنده (LED) باید روشن شود ( $Y=1$ ). پس این مطلب را به‌صورت  $\bar{A}.\bar{B}$  می‌نویسیم، بنابراین اگر  $A=0$  باشد،  $\bar{A}=1$  و اگر  $B=0$  باشد،  $\bar{B}=1$  می‌شود. لذا  $\bar{A}\bar{B}=1$  است. اگر «یک» منطقی در «یک» منطقی ضرب شود حاصل مساوی یک می‌شود.

زمانی که  $A=0$  و  $B=1$  (کلید A باز و B بسته) است دیود نور دهنده (LED) باید روشن شود ( $Y=1$ ). پس باید این را به‌صورت  $\bar{A}B$  نوشت، یعنی اگر  $A=0$  باشد،  $\bar{A}=1$  می‌شود. بنابراین،  $(\bar{A}B=1)$  است.

زمانی که  $A=1$  و  $B=1$  (هر دو کلید بسته باشند) دیود نوردهنده (LED) باید روشن شود ( $Y=1$ ). پس باید مطلب را به‌صورت  $AB$  بنویسیم.

چون دیود نوردهنده (LED) باید در سه حالت روشن شود و در هر لحظه فقط یکی از حالت‌ها اتفاق می‌افتد. طبق جدول صحت، که دارای سه حالت روشن و یک حالت خاموش است، باید این سه حالت یعنی حالت‌هایی را که باید  $Y=1$  شود با یک‌دیگر OR کنیم، بدین ترتیب هنگامی که یکی از ورودی‌های OR یک شود، خروجی آن نیز یک می‌شود.

با حل این مثال توانستیم مثال ۳-۴ را به‌صورت یک رابطه جبری بیان کنیم. در این عبارت جبری، هر متغیر فقط دو مقدار (صفر یا یک منطقی) را به خود اختصاص می‌دهد. ریاضیات حاکم بر این نوع روابط

مرحله (۳) تعیین عبارت‌های خروجی مربوط به هر ردیف جدول صحت

جدول صحت ۳-۳ را می‌توان به‌صورت یک عبارت جبری نوشت. هر جایی که در جدول خروجی یک عبارت مربوط به وضعیت ورودی‌ها را می‌نویسیم. در ستون مربوط به ورودی‌ها، هر جا که ورودی صفر است معکوس ورودی را می‌نویسیم و هر جا که ورودی یک است خود ورودی را قرار می‌دهیم. جدول ۳-۴ صحت عبارت‌های منطقی مثال ۳-۴ را نشان می‌دهد.

### جدول ۳-۴- جدول صحت مثال ۳-۴

ورودی‌ها		خروجی	
A	B	Y	
$\bar{A}$	$\bar{B}$	1	$\bar{A}.\bar{B}=1$
$\bar{A}$	B	1	$\bar{A}.B=1$
A	$\bar{B}$	0	
A	B	1	$A.B=1$

$Y = \bar{A}.\bar{B} + \bar{A}.B + A.B$

مرحله (۴) به‌دست آوردن رابطه خروجی از حاصل جمع عبارت‌های خروجی جدول که حاصل آن یک است، عبارت خروجی اصلی یا Y به‌دست می‌آید.

مرحله (۵) تشریح مراحل

$$Y = \bar{A}.\bar{B} + \bar{A}.B + A.B$$

مفهوم عبارت (۱) این است که زمانی  $Y=1$  می‌شود که  $\bar{A}\bar{B}=1$  یا  $\bar{A}B=1$  یا  $AB=1$  شود در غیر این صورت،  $Y=0$  خواهد بود.



مرحله (۶) طراحی مدار با استفاده از گیت‌های منطقی طراحی مدار موردنظر را مطابق شکل ۱۳-۳ مرحله به مرحله بررسی می‌کنیم. چون تابع اصلی به صورت زیر است:

$$Y = \overline{A}\overline{B} + \overline{A}B + AB$$

$\overline{A}\overline{B}$   
 $\overline{A}B$   
 $AB$



$Y = (\overline{A}\overline{B} + \overline{A}B + AB)$

The diagram shows a blue AND gate with inputs  $\bar{A}$  and  $\bar{B}$ . Its output is  $\bar{A}\bar{B}$ . This output is connected to the top input of a red OR gate. The other two inputs of the OR gate are  $\bar{A}B$  and  $AB$ . The output of the OR gate is labeled  $Y$ .

The diagram shows a circuit for a 3-input OR gate. It uses two 2-input AND gates and one 2-input OR gate. The inputs are A and B. The first AND gate takes A and  $\bar{A}$  as inputs, producing output  $\bar{A}\bar{B}$ . The second AND gate takes  $\bar{A}B$  as inputs, producing output  $\bar{A}B$ . The third AND gate takes AB as inputs, producing output AB. The outputs of these three AND gates are connected to the inputs of a 2-input OR gate, which produces the final output Y.

شکل ۱۴-۳ مدار کامل را نشان می دهد.

مرحله (۶) ساده کردن تابع خروجی

طبق قوانینی که در جبر بول آموختیم، رابطه خروجی

مدار را مورد بررسی قرار می دهیم و ساده می کنیم.

$$Y = \overline{\overline{A}}\overline{B} + \overline{A}\overline{B} + AB$$

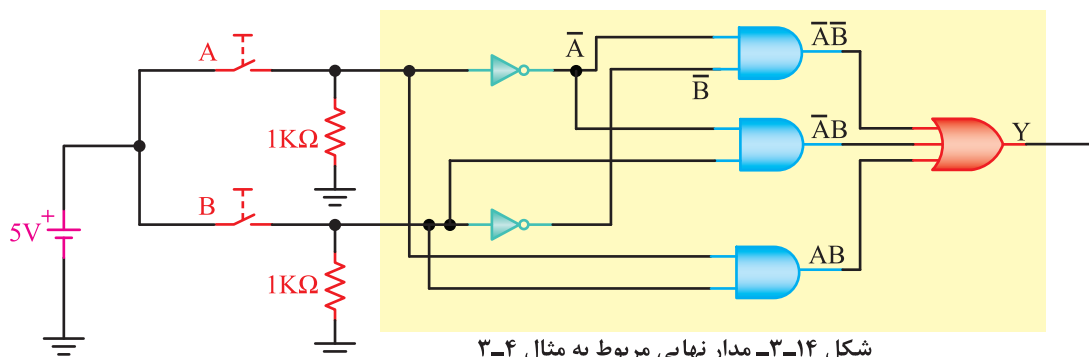
با توجه به توزیع پذیری می‌توانیم از متغیر مشترک در

جملہ ہا فاکتور گیری کنیم.

$$Y = \overline{A}(\overline{B} + B) + AB$$

از  $\bar{A}$  جمله اول و دوم فاکتور می‌گیریم و در پرانتز به عبارت  $\bar{B} + B$  می‌رسیم، طبق یکی از قوانین جبر بول حاصل  $\bar{B} + B = 1$  می‌شود بنابراین این تابع را ساده می‌کنیم:

$$Y = \overline{A}(1) + AB$$



شکل ۱۴-۳- مدار نهایی مربوط به مثال ۴-۳

با مقایسه شکل‌های ۳-۱۴ و ۳-۱۵ به ویژگی‌های قوانین جبر بول پی‌می‌بریم. در شکل ۳-۱۴ باید از ۶ دروازه منطقی برای طراحی مدار استفاده کنیم در صورتی که در مدار شکل ۳-۱۵ فقط دو دروازه منطقی به کار رفته است.

به عبارت دیگر به جای ۶ گیت پیچیده فقط از دو گیت منطقی ساده استفاده کرده‌ایم که این امر باعث کاهش توان مصرفی مدار و صرفه‌جویی در تعداد گیت‌ها می‌شود.

**مثال ۳-۵:** عبارت‌های جبر بول جدول صحت ۳-۵ را بنویسید.

جدول ۳-۵- جدول مربوط به مثال ۳-۵

A	B	Y
۰	۰	۱
۰	۱	۱
۱	۰	۰
۱	۱	۰

**پاسخ:** مرحله ۱ نوشتن توابع هر دوردیف جدول که خروجی آن یک است.

جدول ۳-۶- پاسخ مثال ۳-۵

A	B	Y
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	0

همان‌طور که از جدول صحت پیداست، خروجی  $Y$  زمانی در وضعیت یک منطقی قرار می‌گیرد که  $\bar{A}\bar{B}=1$  یا  $\bar{A}B=1$  شود.

مرحله ۲ نوشتن تابع خروجی رابطه  $Y$  (خروجی مدار) از حاصل جمع سطرهایی که خروجی آن «یک» است به دست می‌آید. پس می‌توان

**تمرین کلاسی ۳-۱۳:**  $\bar{B} + B = 1$  کدام قانون است آن را تعریف کنید.

قانون دیگر جبر بول می‌گویید که اگر عبارتی در «یک» منطقی ضرب (AND) شود حاصل خود عبارت خواهد شد. از این قانون نیز برای ساده سازی استفاده می‌کنیم.

$$Y = (\bar{A})(1) + AB$$

و چون  $\bar{A} \times 1 = \bar{A}$  است پس می‌توان نوشت:

$$Y = \bar{A} + AB$$

طبق قانون دیگری در جبر بول داریم که اگر تابعی با یک تابع حاصل ضرب جمع شود. تابع در هر یک از توابع مربوط به حاصل ضرب جمع می‌شود پس می‌توانیم بنویسیم:

$$Y = \bar{A} + AB = (\bar{A} + A)(\bar{A} + B)$$

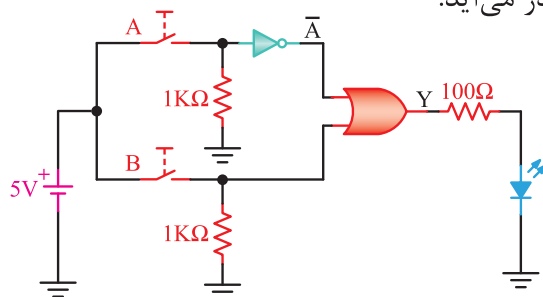
براساس قانون  $\bar{A} + A = 1$  پرانتز اول یک خواهد شد. لذا تابع به صورت زیر درمی‌آید:

$$Y = 1.(\bar{A} + B)$$

طبق قانون حاصل ضرب با عضو خنثی (یک) در یک تابع داریم:

$$Y = \bar{A} + B$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود، حاصل به دست آمده برای رابطه خروجی بسیار ساده است، حال اگر برای این رابطه مداری طراحی کنیم مدار به صورت شکل ۳-۱۵ در می‌آید.



شکل ۳-۱۵- مدار مربوط به ساده‌سازی مدار مثال ۳-۴

رابطه خروجی را به صورت زیر نوشت:

$$Y = \overline{A}B + A\overline{B}$$



**تمرین کلاسی ۳-۱۴:** براساس رابطه خروجی

مثال ۳-۵ مدار طراحی کنید: سپس رابطه خروجی را ساده کنید و مدار دیگری بر اساس رابطه ساده شده عبارت خروجی رسم کنید، این دو مدار را با هم مقایسه کنید.

**مثال ۳-۶:** درباره عبارت جبر بول زیر اظهارنظر کنید.

$$Y = A\overline{B} + AB$$

**پاسخ:** رابطه فوق سیستمی را نشان می‌دهد که دارای دو متغیر ورودی (A و B) و یک متغیر خروجی (Y) است. متغیر خروجی زمانی در وضعیت یک منطقی قرار می‌گیرد که  $B=0$  و  $A=1$  باشد یا  $A=1$  و  $B=1$  شود. در غیر این صورت، خروجی آن در وضعیت صفر منطقی قرار می‌گیرد.

**مثال ۳-۷:** جدول صحت رابطه  $Y = A\overline{B} + \overline{A}B$  را رسم کنید.

**پاسخ:** چون این سیستم دارای دو متغیر است، پس چهار حالت مختلف وجود دارد و خروجی زمانی که  $B=0$  و  $A=1$  یا  $A=1$  و  $B=1$  است، در وضعیت یک منطقی قرار می‌گیرد. بنابراین می‌توانیم براساس حالات فوق جدول صحت ۳-۷ را بنویسیم.

**جدول ۳-۷ جدول مربوط به مثال ۳-۷**

A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

در سایر حالت‌ها خروجی در وضعیت صفر منطقی قرار می‌گیرد.



**تمرین کلاسی ۳-۱۵:** رابطه مثال ۳-۷ را با کدام دروازه منطقی می‌توان طراحی کرد؟



**نکته:** به ستون‌های ورودی توجه کنید ردیف اول صفر باینری، ردیف دوم یک باینری، ردیف سوم دو باینری و ردیف چهارم سه باینری را نشان می‌دهد. از این الگو برای تمامی جدول‌ها استفاده کنید.

**مثال ۳-۸:** مدار را طرح کنید که جدول صحت ۳-۸ در مورد آن صدق کند.

**جدول ۳-۸- جدول مربوط به مثال ۳-۸**

A	B	C	Y
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

**پاسخ:** مرحله (۱) نوشتن روابط خروجی هریک از ردیف‌های جدول

جدول صحت ۳-۸ مربوط به یک سیستم مدار منطقی است. این سیستم سه متغیر ورودی (A، B و C) و یک متغیر خروجی (Y) دارد.

باتوجه به جدول خروجی این سیستم مدار منطقی

برای ساده کردن رابطه خروجی مثال ۳-۸ مراحل زیر را انجام می دهیم:

ابتدا هر یک از جمله ها را شماره گذاری می کنیم.

$$Y = \overline{A}\overline{B}\overline{C} + \overline{A}\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}BC + A\overline{B}\overline{C}$$

۱      ۲      ۳      ۴      ۵

از جمله های ۱ و ۳ از  $\overline{B}\overline{C}$  آن ها و از جمله های ۴ و ۵ از  $AC$  آن ها فاکتورگیری می کنیم، هم چنین می توان در جمله های ۲ و ۵ از  $BC$  آن ها فاکتور بگیریم.

$$Y = \underbrace{\overline{B}\overline{C}(\overline{A} + A)}_{\text{۳ و ۱}} + \underbrace{AC(\overline{B} + B)}_{\text{۴ و ۵}} + \underbrace{BC(\overline{A} + A)}_{\text{۵ و ۲}}$$



**نکته:** یک جمله می تواند چند بار در فاکتورگیری شرکت داشته باشد. زیر هر تابع که با خودش جمع شود خود تابع خواهد بود، بنابراین تکرار توابع تأثیری در نتایج ندارد.

داخل تمام پرانتزها طبق جبربول برابر یک می شود و نتیجه ضرب (AND) آنها در عبارت قبل از پرانتز مساوی با خود عبارت خواهد شد.

$$Y = \overline{B}\overline{C} + AC + BC$$

بار دیگر نیز می توانیم مدار را ساده تر کنیم در رابطه جدید مجدداً هر یک از جمله ها را شماره گذاری می کنیم.

$$Y = \overline{B}\overline{C} + AC + BC$$

۱      ۲      ۳

جمله های ۱ و ۳ با هم رابطه دروازه منطقی XNOR را دارد.

در نتیجه داریم:

$$Y = AC + (\overline{B} \oplus \overline{C})$$

**یادآوری:** رابطه گیت XNOR برای ورودی B و C به صورت مقابل است:

$$Y = \overline{B \oplus C} = \overline{B}\overline{C} + BC$$

زمانی در وضعیت یک منطقی قرار می گیرد که  $A=0$  و  $C=0$  و  $B=0$  یا  $A=0$  و  $C=1$  و  $B=1$  یا  $A=1$  و  $C=0$  و  $B=1$  یا  $A=1$  و  $C=1$  و  $B=0$  باشد. جدول صحت فوق را مجدداً رسم می کنیم و رابطه مربوط به هر ردیف که خروجی آن یک است را می نویسیم.

جدول ۳-۹- جدول پاسخ مثال ۳-۸

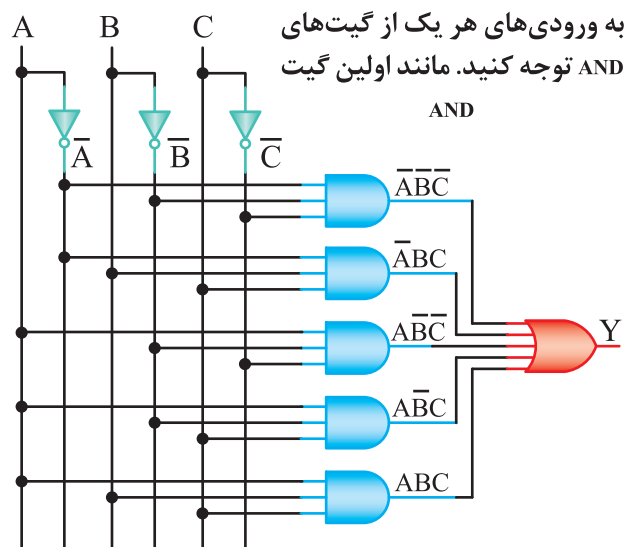
A	B	C	Y
0	0	0	1 → $\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}$
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1 → $\overline{A}\cdot B\cdot C$
1	0	0	1 → $A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}$
1	0	1	1 → $A\cdot\overline{B}\cdot C$
1	1	0	0
1	1	1	1 → $A\cdot B\cdot C$

مرحله ۲ با توجه به رابطه خروجی هایی که تعداد آنها یک است تابع خروجی را به صورت حاصل جمع می نویسیم.

$$Y = \overline{A}\overline{B}\overline{C} + \overline{A}\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}BC + ABC$$

مرحله ۳ طراحی مدار

چون خروجی در پنج حالت یک شده است، پس رابطه آن شامل پنج عبارت می شود. مداری که تابع بالا را اجرا می کند در شکل ۳-۱۶ دیده می شود.



شکل ۳-۱۶- مدار منطقی مربوط به مثال ۳-۸

### ۳-۳- ساده سازی توابع جبر بول

#### ۳-۳-۱- اصول ساده سازی توابع جبر بول: ساده سازی

توابع جبر بول، براساس فاکتورگیری از متغیرهای مشترک توابع و حذف تدریجی متغیرهاست. در این قسمت برای درک بهتر مفاهیم توابع جبر بول با توجه به روابط و مدل ریاضی آن مورد بررسی قرار می دهیم.

به مثال ۳-۹ توجه کنید.

**مثال ۳-۹:** تابع  $Y = A\bar{B} + \bar{A}\bar{B}$  را ساده کنید.

چون  $\bar{B}$  در هر دو جمله ظاهر شده است، از  $\bar{B}$  فاکتور می گیریم (طبق قانون توزیع پذیری بول)

$$Y = A\bar{B} + \bar{A}\bar{B} = \bar{B}(A + \bar{A})$$

از طرفی طبق قانون جمع یک عبارت با معکوس خودش:

$$A + \bar{A} = 1$$

$$Y = \bar{B}.1$$

طبق قانون ضرب یک تابع در یک منطقی می توانیم بنویسیم:

$$Y = \bar{B}$$

**مثال ۳-۱۰:** تابع  $Y = \bar{A}\bar{B} + \bar{A}B + AB$  را ساده کنید.

$$Y = \bar{A}\bar{B} + \bar{A}B + AB = \bar{A}\bar{B} + B(\bar{A} + A) = \bar{A}\bar{B} + B$$

از طرفی براساس قانون جمع یک عبارت با معکوس خودش و ضرب یک تابع در یک منطقی

$$Y = (B + A)(B + \bar{B}) = (B + A)(1) = A + B$$

**مثال ۳-۱۱:** تابع

$Y = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + A\bar{B}\bar{C} + AB\bar{C} + A\bar{B}C$  را ساده کنید.

$$Y = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + A\bar{B}\bar{C} + AB\bar{C} + A\bar{B}C$$

جمله اول	جمله دوم	جمله سوم	جمله چهارم	جمله پنجم
-------------	-------------	-------------	---------------	--------------

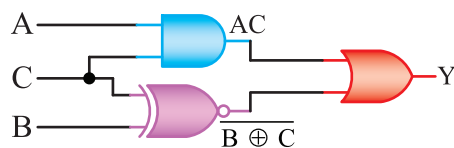
تابع را شماره گذاری می کنیم.

از عوامل مشترک فاکتورگیری می کنیم.

$$Y = \bar{A}\bar{B}(\bar{C} + C) + AB(\bar{C} + C) + A\bar{B}C$$

از جمله اول و دوم	از جمله سوم و چهارم
----------------------	------------------------

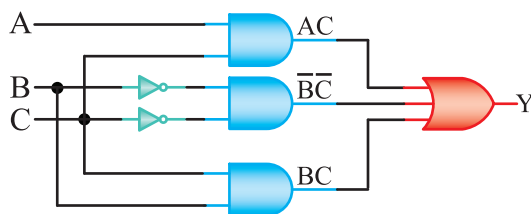
در شکل ۳-۱۷ مدار این رابطه را مشاهده می کنید.



شکل ۳-۱۷- مدار ساده شده مثال ۳-۸

با مقایسه مدارها در شکل ۳-۱۶ و ۳-۱۷ در می یابیم که در مدار شکل ۳-۱۶ از ۹ دروازه منطقی استفاده شده در صورتی که در مدار شکل ۳-۱۷ سه دروازه منطقی به کار رفته است.

اگر مدار رابطه  $Y = \bar{B}\bar{C} + AC + BC$  را قبل از ساده شدن طراحی کنیم، مدار شکل ۳-۱۸ را خواهیم داشت، در این مدار به جای ۹ دروازه منطقی از ۶ دروازه منطقی استفاده شده است.



شکل ۳-۱۸- مدار مثال ۳-۸

**تمرین کلاسی ۳-۱۶:** آیا می توانید رابطه خروجی مدار ۳-۱۸ را بنویسید؟

**تمرین کلاسی ۳-۱۷:** چگونه از رابطه جدول اصلی به رابطه شکل ۳-۱۸ رسیده ایم؟ با توجه به مراحل اجرای درس، شرح دهید.

عبارت‌های داخل پرانتز طبق قانون جمع یک عبارت را معکوس خودش یک می‌شود.

$$Y = \overline{A}\overline{B} + AB + A\overline{B}C$$

$$Y = \overline{A}\overline{B} + \underline{(AB + A\overline{B})(AB + C)}$$

طبق قانون جمع منطقی  
یک عبارت با پرانتز

$$= \overline{A}\overline{B} + \left[ A(\overline{B+B}) \right] (AB+C)$$

$$Y = \overline{A}\overline{B} + \underline{A(AB + C)} = \overline{A}\overline{B} + \underline{AAB} + AC$$

طبق قانون ضرب یک  
عبارت در خودش  
طبق قانون توزیع پذیری  
OR در AND

$$= \overline{A}\overline{B} + AB + AC$$

مثال ۳-۱۲: تابع

$$Y = \overline{A}\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}B\overline{C}$$

را ساده کنید.

$$Y = \overline{A}\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}B\overline{C}$$

ابتدا تابع را شماره گذاری می‌کنیم.

از عوامل مشترک فاکتورگیری می‌کنیم.

$$Y = \overline{B}C(\overline{A} + A) + \overline{A}\overline{B}(\overline{C} + C) + \overline{A}\overline{B}(C + \overline{C})$$

از جمله‌های ۴ و ۶ از جمله‌های ۳ و ۵ از جمله‌های ۱ و ۲

مقادیر  $A + \overline{A}$  و  $C + \overline{C}$  را برابر یک در نظر می‌گیریم و رابطه را ساده می‌کنیم.

$$Y = \overline{B}C + \overline{A}\overline{B} + A\overline{B}$$

مجدداً تابع را شماره گذاری می‌کنیم.

$$Y = \overline{B}C + \overline{A}\overline{B} + A\overline{B}$$

از جملات ۲ و ۳ فاکتورگیری می‌کنیم.

$$Y = \overline{B}C + \overline{B}(\overline{A} + A) = \overline{B}C + \overline{B}$$

از جمله ۲ و ۳

مطابق قانون توزیع پذیری AND در OR خواهیم داشت:

$$Y = (B + \overline{B})(\overline{B} + C)$$

مقدار  $B + \overline{B} = 1$  است پس می‌توانیم بنویسیم:

$$Y = \overline{B} + C$$

با توجه به مثال‌های ۳-۹ تا ۳-۱۲ در می‌یابیم که ساده‌سازی توابع به صورت فاکتورگیری‌های متعدد و حذف متغیرها صورت می‌پذیرد.

البته در بسیاری از موارد ممکن است فقط قسمتی از تابع ساده شود یا تابع اصلاً ساده نشود.

مثال ۳-۱۳: تابع  $Y = \overline{A}\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}C$  را ساده کنید.

$$Y = \overline{A}\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}C$$

ابتدا جملات را شماره گذاری می‌کنیم. از عوامل مشترک فاکتورگیری می‌کنیم و عبارات مساوی یک را حذف می‌کنیم.

$$Y = \overline{B}C(\overline{A} + A) + A\overline{B}C = \overline{B}C + A\overline{B}C$$

$$Y = \overline{B}C + A\overline{B}C$$

مثال ۳-۱۴: تابع  $Y = \overline{A}\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}C$  را ساده کنید.

این تابع ساده نمی‌شود؛ زیرا از هیچ کدام از جمله‌های آن نمی‌توانیم فاکتور بگیریم.

۳-۳-۲- فرم استاندارد توابع بول: یک تابع بول را در صورتی فرم استاندارد بول می‌گویند که در هر جمله آن همه متغیرها از جمله خود متغیر یا NOT آن ظاهر شده باشد.

برای مثال، تابع

$$Y = \overline{A}BC + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\overline{B}C + A\overline{B}C + A\overline{B}\overline{C}$$

یک تابع استاندارد بول است؛ زیرا در همه جملات آن هر سه متغیر A, B و C به صورت متغیر اصلی یا NOT شده ظاهر شده‌اند.

تابع  $Y = \overline{A}BC + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\overline{B}C + A\overline{B}C$  یک تابع استاندارد بول نیست؛ زیرا در جمله چهارم آن متغیر A یا NOT آن ظاهر نشده است. با استفاده از قوانین



جمله‌های اول و پنجم یکی هستند. طبق قانون جبر بول ( $A+A=A$ ) می‌توانیم به جای  $ABC+ABC$  فقط  $ABC$  را بنویسیم.

$$Y = ABC + A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}BC$$



مثال ۱۶-۳: تابع  $\overline{A}\overline{B} + \overline{A}C + BC$  را ساده کنید.  
ابتدا تابع را به فرم استاندارد درمی آوریم:

$$Y = \overline{A}\overline{B}(C + \overline{C}) + \overline{A}C(B + \overline{B}) + BC(A + \overline{A})$$

$$Y = \overline{A}\overline{B}C + \overline{A}\overline{B}\overline{C} + \overline{A}BC + \overline{A}B\overline{C} + ABC + \overline{A}BC$$

جمله‌های سوم و ششم و جمله‌های اول و چهارم تکراری است. پس طبق قانون جبرول یکی از آنها را حذف می‌کنیم.

$$Y = \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}BC + ABC$$
$$Y = \overline{A}\overline{B}(C + \overline{C}) + BC(\overline{A} + A) = \overline{A}\overline{B} + BC$$



الف)  $F = AB + \overline{B}C$   
ب)  $F = A\overline{B} + AC + \overline{B}C$

۳-۳-۳-تعریف عبارت منطقی حاصل ضرب:

متغیرها یا مکمل‌های آنها را که با عمل ضرب به هم مربوط می‌شوند، را یک جمله حاصل ضرب می‌گوییم.

نمونه‌هایی از جمله حاصل ضرب به شرح زیر است:

$$Y_1 = ABC \text{ ي } Y_2 = \overline{A}BC \text{ ي } Y_3 = \overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}, \dots$$

۴-۳-۳- تعریف عبارت منطقی مجموع: متغیرها  
با مکمل‌های آنها را که با عمل جمع به هم مربوط

حبر بول برای استاندارد کردن جمله چهارم کافی است به صورت زیر عمل کنیم و هر یک از عباراتی را که در تابع وجود ندارد در یک ضرب کنیم و به جای یک تابع  $(\bar{A} + A)$  یا  $(\bar{B} + B)$  یا  $(\bar{C} + C)$  را قرار دهیم.

$$\overline{BC} = \overline{BC}(A + \overline{A}) = A\overline{BC} + \overline{A}\overline{BC}$$

در این قسمت برای استاندارد کردن تابع، عکس ساده سازی عمل کرده‌ایم. لذا در تابع اصلی به جای  $\overline{BC}$ ، معادل منطقی آن یعنی  $\overline{A}BC + A\overline{B}C$  را قرار می‌دهیم.

$Y = ABC\bar{C} + \bar{A}\bar{B}\bar{C} + ABC + A\bar{B}C + \bar{A}\bar{B}C$   
 به‌طور کلی برای استانداردسازی توابع بول نکات زیر را رعایت می‌کنیم.



۱- در تمام جملات باید همه متغیرها یا NOT آنها وجود داشته باشد.

۲- در هر یک از جملات به ترتیب از متغیر با ارزش تا متغیر کم ارزش را قرار می‌دهیم.

**مثال ۱۵-۳:** تابع زیر را به صورت تابع استاندارد بول درآوريد.

$$Y=A+BC$$

هریک از عباراتی را که در آن متغیر موردنظر وجود ندارد را در «یک» منطقی ضرب می‌کنیم سپس تابع را گسترش می‌دهیم.

$$Y = A.1 + BC.1 = A(B + \bar{B}) + BC(A + \bar{A})$$

$$Y = AB + \bar{A}\bar{B} + ABC + \bar{A}BC$$

ضرب یک را ادامه می دهیم.

$$Y = AB.1 + \bar{A}\bar{B}.1 + ABC + \bar{A}BC$$

$$Y = AB(C + \bar{C}) + A\bar{B}(C + \bar{C}) + ABC + \bar{A}BC$$

$$Y = \underset{1}{\overleftrightarrow{ABC}} + \underset{2}{\overleftrightarrow{ABC}} + \underset{3}{\overleftrightarrow{ABC}} + \underset{4}{\overleftrightarrow{ABC}} + \underset{5}{\overleftrightarrow{ABC}} + \underset{6}{\overleftrightarrow{ABC}}$$

خروجی تابع در سطرهای ۱، ۲، ۴ و ۷ یک است. رابطه خروجی را بنا به شماره سطرها چنین می‌نویسیم:

$$Y = \sum_m (m_1, m_2, m_4, m_7)$$

یا به این صورت نشان داد.  $Y = \sum_m (1, 2, 4, 7)$

معنای این رابطه، یعنی خروجی تابعی از حاصل جمع سطرهای ۱، ۲، ۴ و ۷ است. علامت  $\Sigma$  (سیگما) به معنای حاصل جمع است.

مثال ۳-۱۷: تابع خروجی  $Y = \sum_m (1, 3, 5, 6)$  را بنویسید.

حل: تابع خروجی در سطرهای ۱، ۳، ۵ و ۶ یک است.

$$Y = \underbrace{\bar{A}\bar{B}C}_{\text{سطر ۱}} + \underbrace{\bar{A}B\bar{C}}_{\text{سطر ۳}} + \underbrace{A\bar{B}\bar{C}}_{\text{سطر ۵}} + \underbrace{ABC}_{\text{سطر ۶}}$$



**تمرین کلاسی ۳-۱۹:** جدول صحت رابطه  $Y = \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + ABC$  را رسم کنید و خروجی را به صورت ساده شده بنویسید.



**تمرین کلاسی ۳-۲۰:**

جدول صحت  $Y = \sum_m (0, 1, 3, 4)$  را رسم کنید و رابطه خروجی را بنویسید.

### ۳-۳-۶ عبارت حاصل ضرب حاصل جمع‌ها

(Products of sums) یا ماکس ترم (maxterm):

اگر در هر عبارت حاصل ضرب مجموع‌ها به همان تعداد متغیری که در تابع وجود دارد، متغیرها یا مکمل‌های (NOT) آنها وجود داشته باشد، آن را ماکس ترم می‌گوییم. مثلاً عبارت  $Y$  یک عبارت ماکس ترم است که در آن:

$$Y = (\bar{A} + B + \bar{C})(A + \bar{B} + \bar{C})(A + \bar{B} + C)$$

معمولاً یک عبارت ماکس ترم را می‌توان به صورت زیر هم نشان داد.

می‌شوند را یک جمله مجموع می‌گوییم. نمونه‌هایی از جمله مجموع به شرح زیر است:

$$Y = A + B + \bar{C} + D + \dots$$

$$Y = \bar{A} + \bar{B} + C + \dots$$

از عبارت‌های منطقی حاصل ضرب و مجموع در مبحث مین ترم و ماکس ترم استفاده می‌کنیم که در ادامه به توضیح هریک از آنها می‌پردازیم.

### ۳-۳-۵ تعریف عبارت مجموع حاصل ضرب‌ها

(Sums of Products) یا مین ترم (minterm):

اگر در هر عبارت مجموع حاصل ضرب‌ها، به همان تعداد متغیری که در تابع وجود دارد، متغیرها یا مکمل‌های (NOT) آنها وجود داشته باشد، آن عبارت را مین ترم می‌گوییم. به طور مثال یکی از مین ترم‌های تابع  $Y$  با سه ورودی متغیر  $A$ ،  $B$  و  $C$  را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$Y = \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + A\bar{B}\bar{C} + ABC$$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید در هریک از جملات تابع  $Y$ ، هر سه ورودی  $A$ ،  $B$  و  $C$  یا معکوس آنها وجود دارد. جدول ۳-۱۰ جدول صحت تابع خروجی  $Y$  با سه ورودی است.

در این جدول با توجه به تعداد ورودی‌ها هشت حالت داریم. هریک از سطرهای جدول را شماره‌گذاری می‌کنیم تا بتوانیم عبارت مین ترم را با توجه به آدرس سطرها نیز بنویسیم.

جدول ۳-۱۰ جدول صحت تابع  $Y$  با سه ورودی

شماره سطر جدول	ورودی‌ها			خروجی
	A	B	C	Y
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	1
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	0
7	1	1	1	1

$$\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C$$

$$\bar{A} \cdot B \cdot \bar{C}$$

$$A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}$$

$$A \cdot B \cdot C$$



### جدول ۳-۱۳- جدول صحت تمرین کلاسی ۳-۲۲

ورودی‌ها			خروجی
A	B	C	Y
۰	۰	۰	۰
۰	۰	۱	۱
۰	۱	۰	۰
۰	۱	۱	۰
۱	۰	۰	۱
۱	۰	۱	۱
۱	۱	۰	۰
۱	۱	۱	۱

با توجه به قواعدی که در بالا ذکر شده است به راحتی می‌توان برای هر جدولی از مدارهای منطقی یک تابع منطقی نوشت اگر تابع منطقی بر اساس مقادیر «۱» برای خروجی نوشته شود باید به صورت عبارت حاصل جمع حاصل ضرب‌ها نوشته شود، و اگر جمله‌ها بر اساس مقادیر «۰» خروجی نوشته شود، باید به صورت عبارت حاصل ضرب حاصل جمع‌ها باشد.



#### تمرین کلاسی ۳-۲۱: جدول صحت

$Y = \Pi_M(1,3,6)$  را رسم کنید و رابطه خروجی را

بنویسید.



#### جهت هنجاریان علاقه‌مند: رابطه خروجی

تابع به صورت  $Y = \overline{A}BC + A\overline{B}C + ABC$  است. رابطه ماکس ترم این خروجی را بنویسید.



#### نکته:

۱- در نوشتن مین ترم هر جدول باید جواب یک خروجی بررسی شود و به جای خود متغیر، یک و به جای متمم آن صفر قرار دهیم.

در نوشتن ماکس ترم باید جواب صفر خروجی بررسی شود و به جای خود متغیر صفر و به جای متمم آن یک قرار دهیم.

۲- هرچه در مین ترم باشد در ماکس ترم آن نیست و بالعکس.

### ۳-۴- ساده‌سازی توابع با استفاده از نقشه کارنو

همان‌طور که قبلاً گفته شد، اساس ساده‌سازی توابع بول بر مبنای فاکتورگیری و حذف متغیرهاست. اگر در دو جمله یک تابع استاندارد بول فقط یک متغیر تغییر کند، آن متغیر را می‌توان حذف نمود: مثلاً در دو جمله  $ABC + \overline{A}BC$ ، فقط متغیر  $A$  تغییر کرده است. پس این متغیر را می‌توان حذف کرد؛ زیرا داریم:

$$Y = ABC + \overline{A}BC = AB(C + \overline{C}) = AB.1 = AB$$

اساس کار نقشه کارنو نیز بر مبنای فاکتورگیری و حذف متغیرها برای ساده‌تر شدن مدار منطقی است. در حقیقت، در نقشه کارنو جملاتی را که باید از آنها فاکتور



#### تمرین کلاسی ۳-۲۲: جدول صحت خروجی

$Y$  را در جدول ۳-۱۳ مشاهده می‌کنید. مین ترم و ماکس ترم خروجی را بنویسید.

گرفت، به سرعت مشخص می‌شوند و عمل فاکتورگیری تقریباً به صورت گرافیکی انجام می‌پذیرد.  
**مثال ۳-۱۹:** تابع زیر را ساده کنید.

$$F = \bar{A}\bar{B} + \bar{A}B + AB$$

ابتدا جدول صحت تابع فوق را مانند جدول ۳-۱۴ رسم می‌کنیم.

**جدول ۳-۱۴ - جدول صحت مثال ۳-۱۹**

A	B	F
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$\bar{A}\bar{B}$

$\bar{A}B$

$A \cdot B$

این جدول صحت چهار حالت دارد (۲<sup>۲</sup>). در هر ردیف جدول، حالت‌های ورودی و خروجی به ازای آن ورودی‌ها نشان داده شده است. این جدول را می‌توان به فرم دیگری نیز نشان داد؛ به طوری که مفهوم همین جدول صحت را دربرداشته باشد. جدول ۳-۱۵ فرم تغییر یافته جدول صحت است که در این جا به دلیل داشتن دو متغیر به صورت ۲<sup>۲</sup> یعنی ۴ خانه‌ای (سلول) رسم شده است.

**جدول ۳-۱۵ - فرم تغییر یافته جدول صحت مربوط به مثال ۳-۱۹**

A	B	F
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

این جدول جدید به جدول کارنو یا نقشه کارنو<sup>۱</sup> (Karnaugh map) مشهور است. کارنو براساس ریاضیات تدوین شده توسط بول، دانشمند انگلیسی، جدول

۱- در کتاب مدارهای منطقی تالیف موریس مانو و کتاب توخیم همه جا از نقشه کارنو استفاده شده است.

یا نقشه کارنو را طراحی کرد.

نقشه کارنو دارای ویژگی‌هایی به شرح زیر است:  
 الف) هر خانه آن مربوط به یک حالت ورودی یا به عبارت دیگر یک جمله از تابع استاندارد بول است.  
 ب) در دو خانه مجاور در جهت افقی یا عمودی همواره دو جمله‌ای قرار می‌گیرند که فقط در یک متغیر با هم اختلاف دارند.

همان‌طور که در قسمت اول این مبحث (۳-۴) دیدیم اگر در دو جمله یک تابع استاندارد بول فقط یک متغیر تغییر کند، آن متغیر حذف می‌شود.  
 مثلاً در ستون اول جدول کارنو از سمت چپ عبارت  $\bar{A}\bar{B} + \bar{A}B$  را داریم. چون  $\bar{A}$  بین دو عبارت مشترک است، متغیرهای B و  $\bar{B}$  حذف می‌شوند و جواب  $\bar{A}$  خواهد شد.

$$\bar{A}\bar{B} + \bar{A}B = \bar{A}(\bar{B} + B) = \bar{A}.1 = \bar{A}$$

در نقشه کارنو چون از هر خانه به خانه مجاور فقط یک متغیر تغییر می‌کند، فوراً می‌توان تشخیص داد که از کدام جملات (که به ازای یک شدن آنها تابع یک می‌شود) باید فاکتور گرفت.  
 نقشه کارنو مثال ۳-۱۹ را در این جا دوباره رسم می‌کنیم.

قسمت یک‌ها را طبق جدول ۳-۱۶ انتخاب می‌کنیم و دور آنها حلقه رسم می‌کنیم.

**جدول ۳-۱۶ - نقشه کارنو مثال ۳-۱۹**

A	0	1
B	0	1
	1	1
	1	1

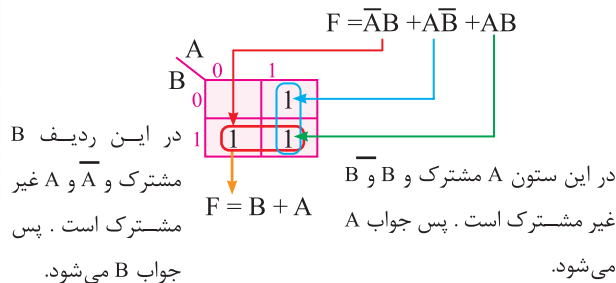
$$\bar{A}\bar{B} + \bar{A}B = \bar{A}(B + \bar{B}) = \bar{A}$$

این دو جمله که به ازای آنها تابع یک می‌شود، در دو خانه مجاور قرار گرفته‌اند؛ بنابراین، آنها فقط در یک متغیر اختلاف دارند.

$$\bar{A}\bar{B} + \bar{A}B = \bar{A}[\bar{B} + B] = \bar{A}$$

ستون اول سمت چپ جدول ۳-۱۶ را مجدداً مطالعه

### جدول ۳-۱۷- نقشه کارنوی مثال ۳-۲۰



مشخصات جدول کارنو را به صورت های دیگری نیز نشان می دهند.

جدول ۳-۱۸ شماره هر خانه را با توجه به ردیف جدول صحت نشان می دهد.

### جدول ۳-۱۸- جدول صحت دو متغیره و نقشه کارنوی آن

شماره سطر	A	B	Y
0	0	0	0
1	0	1	1
2	1	0	1
3	1	1	1

نقشه کارنو برای توابع سه متغیره باید دارای  $2^3=8$  خانه باشد. به عبارت دیگر، سه متغیره می تواند هشت حالت مختلف را ایجاد کنند.

جدول ۳-۱۹ جدول صحت یک تابع سه متغیره همراه با جدول کارنوی مربوط به آن با ذکر شماره سطر در جدول صحت و شماره خانه نظیر آن در جدول کارنو را نشان می دهد.

### جدول ۳-۱۹- جدول صحت و نقشه کارنو یک تابع سه متغیره

شماره سطر	A	B	C	F
0	0	0	0	
1	0	0	1	
2	0	1	0	
3	0	1	1	
4	1	0	0	
5	1	0	1	
6	1	1	0	
7	1	1	1	

می کنیم. همان طور که مشاهده شد در این ستون به دلیل غیرمشترک بودن  $\bar{B}$  و B جواب  $\bar{A}$  است.

یعنی با یک نگاه می فهمیم که پاسخ آن ستون چیست. در مورد ردیف پایین نیز با یک نگاه در می یابیم که  $\bar{A}$  و A غیر مشترک است پس پاسخ این ردیف نیز B خواهد بود.

مقدار تابع خروجی از مجموع حاصل ردیف پایین و ستون سمت چپ به دست می آید.

$$F = \bar{A} + B$$

می توانیم مسئله را به شکل دیگری بیان کنیم و آن این که بگوییم هنگامی که از یک خانه به خانه مجاور (در حلقه محصور شده یک ها) می رویم، متغیری که تغییر می کند، حذف می شود و سایر متغیرها به جای خود باقی می مانند در ستون سمت چپ متغیر  $\bar{A}$  در هر دو خانه ثابت مانده است.

به عبارت دیگر، وقتی از خانه  $\bar{A}\bar{B}$  به خانه AB می رویم، مقدار A تغییر می کند و به همین دلیل حذف می شود. پس جواب نهایی مسئله در آن ستون به صورت B است.

اگر خوب توجه کنید، می بینید که هنگام ساده سازی، جمله  $\bar{A}\bar{B}$  دو بار نوشته شده است یا در نقشه کارنو دور آن دو بار خط کشیده شده است؛ یعنی، تابع  $F = \bar{A}\bar{B} + \bar{A}\bar{B} + AB + \bar{A}\bar{B}$  به صورت  $F = \bar{A}\bar{B} + \bar{A}\bar{B} + AB + \bar{A}\bar{B}$  نوشته شده است. طبق قانون جبر بول ( $A+A=A$ ) این کار اشکال منطقی ندارد و تغییری در جواب مسئله ایجاد نمی کند.

یعنی، این بار به جای  $\bar{A}\bar{B}$  نوشته ایم:  $\bar{A}\bar{B} + \bar{A}\bar{B}$ ؛ زیرا اگر  $\bar{A}\bar{B} = 0$  باشد،  $0+0=0$  و اگر  $\bar{A}\bar{B} = 1$  باشد  $1+1=1$  OR است. پس حاصل  $\bar{A}\bar{B} + \bar{A}\bar{B}$  با خود  $\bar{A}\bar{B}$  یکی است.

### مثال ۳-۲۰: تابع $F = \bar{A}\bar{B} + \bar{A}\bar{B} + AB$ را با استفاده از نقشه کارنو ساده کنید.

چون این تابع فقط دو متغیره دارد، پس جدول کارنو دارای چهار  $(2^2=4)$  (تعداد متغیرها) خانه است. جدول ۳-۱۷ نقشه کارنوی این مثال را نشان می دهد.



تصویری و در ذهن خود انجام می‌دهیم. بدین ترتیب، هنگامی که از یک خانه به خانه مجاور می‌رویم، متغیری را که تغییر می‌کند حذف می‌کنیم و متغیرهایی را که در حلقه محصور شده بدون تغییر می‌مانند، به صورت AND می‌نویسیم. مثلاً در جدول ۲۲-۳ در حلقه (۱) وقتی از یک خانه به خانه مجاور می‌رویم، B تغییر می‌کند و لذا حذف می‌شود. در این دو خانه  $\bar{A}$  و  $\bar{C}$  تغییر نکرده‌اند، بنابراین، دو متغیر یاد شده را به صورت  $\bar{A}\bar{C}$  AND نمایش می‌دهیم.

**جدول ۲۰-۳. جدول کارنوی هشت خانه‌ای**

Diagram illustrating the Karnaugh map for the function  $F(A, B, C) = A + B + C$ . The map is a 2x4 grid with columns labeled  $AB$  (00, 01, 11, 10) and rows labeled  $C$  (0, 1). The cells contain the minterms:  $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ ,  $\bar{A}\bar{B}C$ ,  $\bar{A}B\bar{C}$ ,  $\bar{A}BC$ ,  $A\bar{B}\bar{C}$ ,  $A\bar{B}C$ ,  $AB\bar{C}$ , and  $ABC$ . The map is simplified to  $F = A + B + C$  by grouping the top two rows ( $\bar{A}\bar{B}$ ), the bottom two rows ( $AB$ ), and the two middle columns ( $A\bar{C}$  and  $A'B$ ).

اگر به نقشه کارنو خوب دقت کنید، می‌بینید که از هر خانه به خانه مجاور در جهت افقی یا عمودی فقط یک متغیر حملات تغییر می‌کند.

مثال ۲۱-۳: تابع  $F = \overline{A}B\overline{C} + ABC + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}C$

به کمک نقشه کارنو ساده کنید.

تابع  $F$  زمانی یک است که یکی از چهار جمله داده شده یک باشد. توجه داشته باشید که هیچ گاه امکان ندارد دو جمله به طور هم زمان یک شوند. در نقشه کارنو با توجه به جدول  $20-3$  در خانه‌ای که یک بودن جمله  $F=1$  باعث می‌شود در جدول  $21-3$  عدد یک را قرار می‌دهیم و تابع خروجی را مشخص می‌کنیم.

جدول ۳-۲۱- نقشه کارنوی مثال ۳-۲۱

Karnaugh map for the function  $F(A, B, C) = A'B'C + A'BC' + AB'C + ABC$ . The map shows four 1s at the corners, indicating the prime implicants  $A'B'C$ ,  $A'BC'$ ,  $AB'C$ , and  $ABC$ . The simplified expression is  $F = A'B'C + A'BC' + AB'C + ABC$ .

همان طور که قبلاً نیز گفته شد، اساس ساده‌سازی توابع جبر بول، فاکتورگیری و حذف متغیرهاست. نقشه کارنو شیوه‌ای جدید برای ساده‌سازی ارائه نمی‌دهد بلکه جملاتی را که باید از آنها فاکتور گرفت، به نحوی مرتب (Sort) می‌کند. لذا دور جملاتی را که باید فاکتور بگیریم، خط می‌کشیم و عمل فاکتورگیری را معمولاً به صورت

**جدول ۲۳-۳۔ حلقہ دوم نقشہ کارنو مثال ۲۱-۳**

ABC  $\overline{A}\overline{B}C$

1	1
---	---

ABC  $\overline{A}\overline{B}C$

B و  $\overline{B}$  حذف می شود.

بدین ترتیب، تابع ساده شده به صورت زیر در می آید.

$$F = \overline{A}\overline{C} + AC = \overline{A} \oplus \overline{C}$$

مشترکات حلقه (۱)

مشترکات حلقه (۲)



### تمرین کلاسی ۳-۲۳: تابع

$$F = \overline{A}\overline{B}\overline{C} + \overline{A}\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}BC$$

را به کمک جدول کارنو ساده کنید.



### تمرین کلاسی ۳-۲۴: تابع مین ترم F را به کمک

جدول کارنو ساده کنید.

$$F = \sum_m (m_1, m_2, m_5, m_6, m_7)$$



### تمرین کلاسی ۳-۲۵: عبارت خروجی تابع F

جدول کارنو ۳-۲۴ را بنویسید و در صورت ساده شدن آن را به ساده ترین شکل بنویسید.

### جدول ۳-۲۴- جدول کارنوی تمرین کلاسی ۳-۲۵

AB \ C	00	01	11	10
0	1	0	0	1
1	1	0	1	1

توجه داشته باشید که با توجه به تعداد متغیرها فقط دور دو عدد (۱) یا چهار عدد (۱) یا هشت عدد (۱) می توان خط کشید و آنها را ساده کرد؛ زیرا فاکتورگیری فقط از دو یا چهار یا هشت جمله امکان پذیر است و تنها در این شرایط است که متغیرها حذف می شوند. به عبارت دیگر تعداد اعداد یک که در جدول کارنو

دسته بندی می شوند باید توانی از ۲ باشند.

برای مثال، اگر سه جمله  $\overline{A}BC + ABC + A\overline{B}C$  را داشته باشیم، هریک از این جملات نسبت به جمله قبلی فقط در یک متغیر اختلاف دارد، اگر بخواهیم فاکتورگیری را انجام دهیم، به صورت زیر عمل می کنیم.

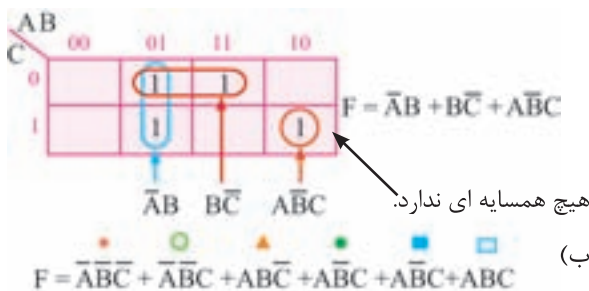
$$F = \overline{A}BC + ABC + A\overline{B}C = BC(\overline{A} + A) + A\overline{B}C \Rightarrow$$

$$F = BC + A\overline{B}C$$

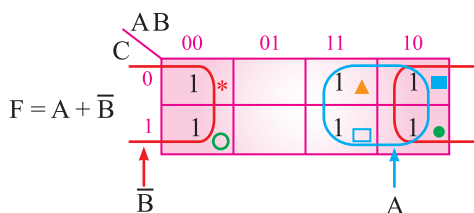
از دو جمله  $BC + A\overline{B}C$  دیگر نمی توان فاکتورگیری کرد. پس هیچ گاه دور سه یا ۵ عدد یک خط نکشید. فقط دور دو عدد یک که در مجاورت یکدیگر باشند (جمله های آنها فقط در یک متغیر اختلاف داشته باشد) یا چهار عدد یک که همه در مجاورت یکدیگر قرار گرفته باشند، می توان خط کشید. در جدول های ۳-۲۵ تا ۳-۲۸ نمونه هایی از این نوع نشان داده شده است.

$$f = \overline{A}\overline{B}\overline{C} + \overline{A}\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}BC \quad (\text{الف})$$

### جدول ۳-۲۵- ساده سازی توابع سه متغیره



### جدول ۳-۲۶- ساده سازی توابع سه متغیره







### مورس کارنو

متولد ۴ اکتبر ۱۹۲۴  
در شهر نیویورک،  
فیزیکدان آمریکایی  
که نقشه کارنوی او در  
جبر بول مشهور است. او

مطالعات خود را با فیزیک و ریاضیات در کالج شهر  
نیویورک آغاز کرد. پس از رفتن به دانشگاه ییل در  
سال ۱۹۴۹، موفق به کسب درجه دکترا در رشته  
فیزیک در سال ۱۹۵۲ شد.

کارنو در آزمایشگاه‌های بل، جدول کارنو، کدگذاری  
PCM و نیز کدگذاری مدارهای مغناطیسی را گسترش  
داد. کارنو در سال ۱۹۷۶ به عنوان رئیس انجمن IEEE  
(انجمن بین‌المللی استانداردهای مهندسی  
الکترونیک) انتخاب شد.

**مثال ۳-۲۵:** مداری طرح کنید که دارای چهار کلید  
ورودی (چهار متغیر ورودی) باشد و دیود LED که  
در خروجی آن وصل شده است، مطابق جدول ۳-۳۴  
متناسب با قطع و وصل کلیدهای ورودی، روشن و  
خاموش شود.

**مثال ۳-۲۳:** تابع زیر را ساده کنید.

$$F = \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D} + \bar{A}\bar{B}\bar{C}D + A\bar{B}\bar{C}\bar{D} + A\bar{B}\bar{C}D +$$

$$\bar{A}\bar{B}C\bar{D} + \bar{A}B\bar{C}\bar{D} + \bar{A}B\bar{C}D + A\bar{B}C\bar{D}$$

جدول ۳-۳۱- نقشه کارنوی مربوط به مثال ۳-۲۳

AB \ CD	00	01	11	10
00	1		1	
01		1	1	1
11				1
10	1		1	

$$F = \bar{A}\bar{B}D + AB\bar{D} + B\bar{C}D + \bar{A}\bar{B}D$$

**مثال ۳-۲۴:** تابع زیر را ساده کنید.

$$F(A,B,C,D) = \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D} + \bar{A}\bar{B}\bar{C}D + \bar{A}\bar{B}C\bar{D} +$$

$$\bar{A}\bar{B}CD + \bar{A}B\bar{C}\bar{D} + \bar{A}B\bar{C}D + A\bar{B}\bar{C}\bar{D} + A\bar{B}C\bar{D} +$$

$$A\bar{B}C\bar{D} + A\bar{B}CD$$

جدول ۳-۳۲- نقشه کارنوی مربوط به مثال ۳-۲۴

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1		1
01	1	1	1	1
11			1	
10	1		1	1

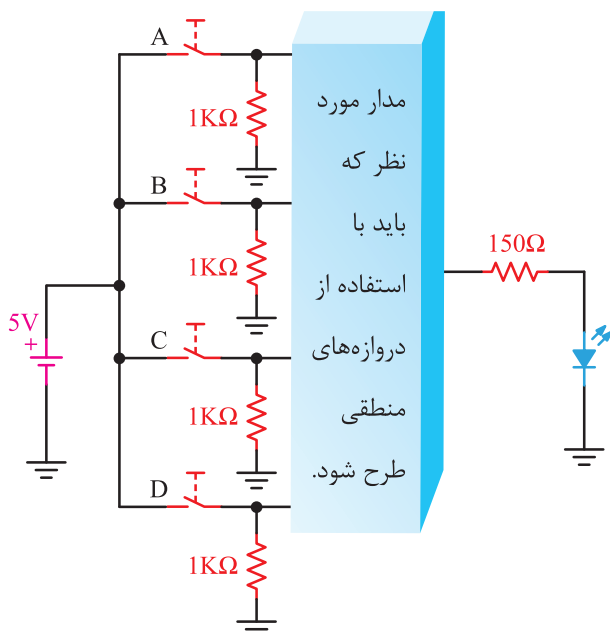
$$F = \bar{B}\bar{D} + ABC + \bar{A}\bar{C} + \bar{C}D$$

**نکته:** در جدول کارنو هیچ‌گاه به صورت مورب  
نمی‌توان از یک‌ها فاکتورگیری کرد، جدول ۳-۳۳ این  
حالت را نشان می‌دهد.

جدول ۳-۳۳- خانه‌های مشترک مورب

AB \ C	00	01	11	10
0	1	0	0	1
1	0	1	1	0





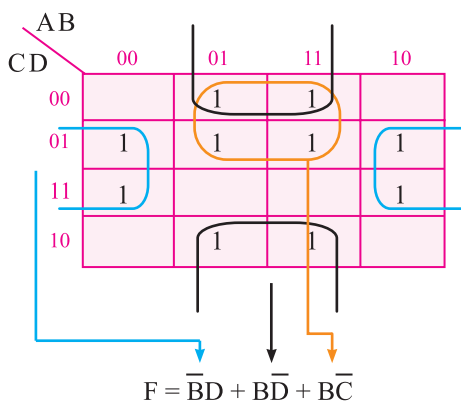
شکل ۳-۱۹- مدار الکتریکی مربوط به مثال ۳-۲۵

با توجه به جدول و در نظر گرفتن حالت فعال یا روشن شدن دیود LED، رابطه خروجی به صورت زیر در می‌آید.

$$F = \overline{A}\overline{B}\overline{C}D + \overline{A}\overline{B}C\overline{D} + \overline{A}B\overline{C}D + \overline{A}B\overline{C}\overline{D} + \overline{A}BCD + \overline{A}BC\overline{D} + A\overline{B}\overline{C}D + A\overline{B}C\overline{D} + AB\overline{C}D + ABC\overline{D} + ABCD$$

جدول ۳-۳۵ را رسم می‌کنیم و تابع ساده شده خروجی آن را به دست می‌آوریم.

جدول ۳-۳۵- نقشه کارنوی مربوط به مثال ۳-۲۵



با توجه به تابع خروجی F می‌توانیم مدار مورد نظر را ترسیم کنیم.

جدول ۳-۳۴- جدول صحت مربوط به مثال ۳-۲۵

A	B	C	D	F	LED
0	0	0	0	0	LED خاموش
0	0	0	1	1	LED روشن
0	0	1	0	0	LED خاموش
0	0	1	1	1	LED روشن
0	1	0	0	1	LED روشن
0	1	0	1	1	LED روشن
0	1	1	0	1	LED روشن
0	1	1	1	0	LED خاموش
1	0	0	0	0	LED خاموش
1	0	0	1	1	LED روشن
1	0	1	0	0	LED خاموش
1	0	1	1	1	LED روشن
1	1	0	0	1	LED روشن
1	1	0	1	1	LED روشن
1	1	1	0	1	LED روشن
1	1	1	1	0	LED خاموش

برای مثال، اگر هر چهار کلید باز باشند، دیود LED خاموش شود یا اگر تنها کلید D بسته و سایر کلیدها باز باشند، دیود LED روشن شود. سایر حالات روشن و خاموش تابع F را در جدول ملاحظه می‌کنید.

برای طراحی چنین مداری، می‌توان از رابطه خروجی استفاده کرد و عمل فاکتورگیری بین متغیرها را انجام داد، تا به عبارت ساده‌ای رسید. یا از نقشه کارنو و دسته‌بندی یک‌های نقشه به ساده کردن مدار پرداخت. در این مثال از نقشه کارنو استفاده شده است. شما می‌توانید با فاکتورگیری بین متغیرهای رابطه خروجی نیز به این مرحله برسید. این فاکتورگیری را برای مثال ۳-۲۵ تجربه کنید.

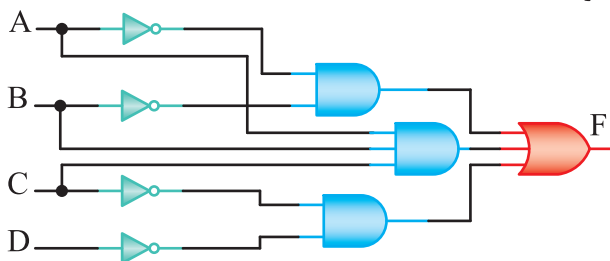
شکل ۳-۱۹ مدار الکتریکی مثال ۳-۲۵ را به صورت بلوکی نشان می‌دهد.

۳- برای نقشه کارنوی ۳۶-۳ رابطه خروجی را نوشته و پس از ساده‌سازی مدار آن را طراحی کنید.

۴- تابع  $F$  را با استفاده از جدول کارنو ساده نمایید و مدار آن را رسم کنید.

$$F(A,B,C) = \sum_m (0,1,3,6)$$

۵- نقشه کارنو و رابطه خروجی مدار شکل ۲۱-۳ را بنویسید.



شکل ۲۱-۳ مربوط به سؤال ۵

۶- تابع را با استفاده از جدول کارنو به ساده‌ترین شکل بنویسید.

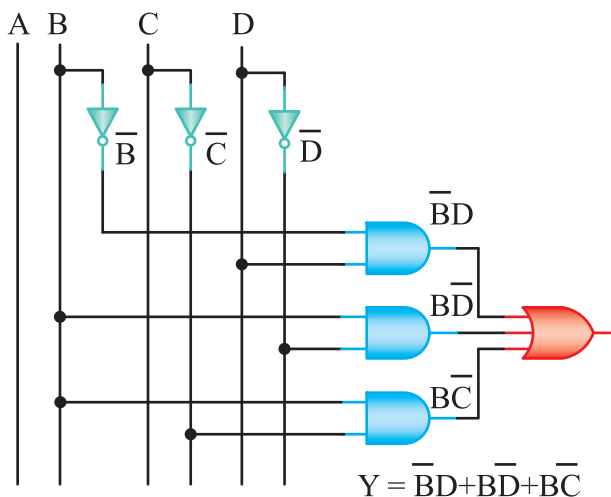
$$F(A,B,C,D) = \sum_m (1,3,6,10,11,13)$$

### ۳-۶- افزایش ظرفیت ورودی‌های دروازه‌های منطقی

هرچند که در عمل دروازه‌های منطقی تا هشت ورودی نیز ساخته می‌شوند ولی گاهی به بیش از هشت ورودی نیاز داریم یا به دروازه‌های منطقی با ورودی حتی کمتر از هشت نیازمندیم ولی در دسترس نیستند در هر یک از این شرایط، می‌توان با استفاده از دروازه‌های منطقی موجود یک دروازه منطقی با تعداد ورودی‌های دلخواه ساخت. در این قسمت به شرح روش افزایش تعداد ورودی‌های بعضی از دروازه‌های منطقی می‌پردازیم.

#### ۱-۳-۶- افزایش تعداد ورودی‌های دروازه

**منطقی AND:** فرض کنید یک سری دروازه‌های منطقی AND با دو ورودی در دسترس داریم و در عمل، به یک دروازه AND با سه ورودی نیازمندیم. مدار شکل ۲۲-۳ این نیاز را برآورده می‌کند.



شکل ۲۰-۳ مدار منطقی مربوط به مثال ۲۵-۳

در شکل ۲۰-۳ مدار منطقی که براساس ساده‌سازی از روی جدول کارنو ۳۵-۳ به دست آمده است را مشاهده می‌کنید. همان‌طور که ملاحظه می‌کنید کلید  $A$  هیچ‌گونه تأثیری در رفتار خروجی مدار ندارد، در این مورد توضیح دهید.

### ۳-۵- الگوی پرشش

۱- آیا مدار دیگری برای مثال ۲۵-۳ می‌توان طراحی کرد؟ در صورت مثبت بودن جواب آن را طراحی کنید.

۲- با توجه به جدول صحت ۳۶-۳ نقشه کارنوی مربوطه را رسم کنید.

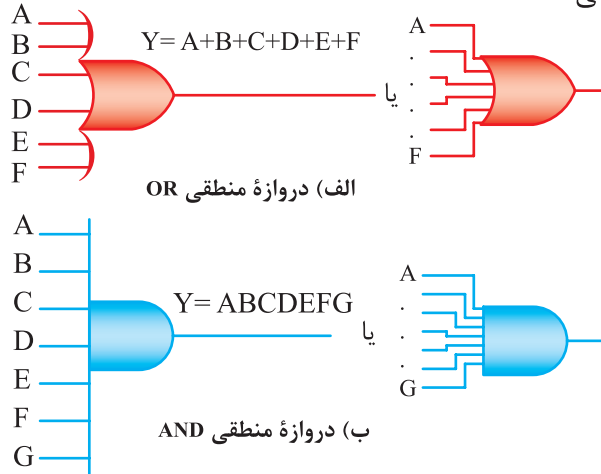
جدول ۳۶-۳ مربوط به سؤال ۲

A	B	C	F	LED
0	0	0	0	
0	0	1	1	
0	1	0	0	
0	1	1	1	
1	0	0	1	
1	0	1	0	
1	1	0	1	
1	1	1	1	



به همین روش می‌توان دروازه منطقی OR با هر تعداد ورودی ایجاد کرد.

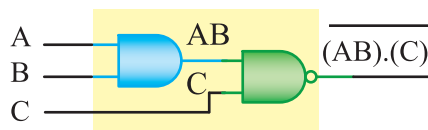
اگر تعداد ورودی‌های یک دروازه منطقی زیاد شوند، معمولاً نماد آن دروازه منطقی را در مقایسه با دروازه منطقی معمولی بزرگ‌تر رسم نمی‌کنند بلکه آن را به اندازه استاندارد به صورت شکل ۳-۲۶ الف و ب رسم می‌کنند.



شکل ۳-۲۶ نمادهای دروازه‌های منطقی AND و OR با ورودی‌های زیاد

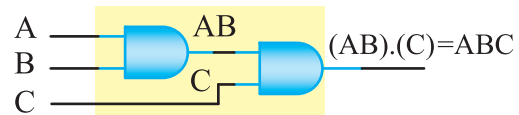
### ۳-۶-۳ افزایش تعداد ورودی‌های دروازه منطقی

**NAND:** با استفاده از دروازه‌های منطقی AND و NAND می‌توان یک دروازه منطقی NAND را با هر تعداد ورودی ساخت. شکل ۳-۲۷ یک دروازه منطقی NAND با سه ورودی را با استفاده از یک دروازه منطقی AND و یک دروازه منطقی NAND نشان می‌دهد.



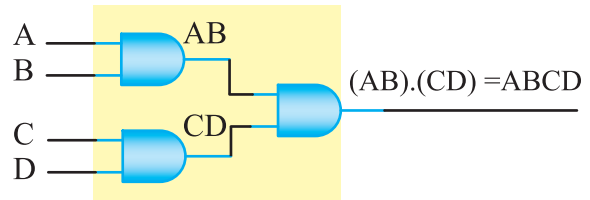
شکل ۳-۲۷ دروازه منطقی NAND با سه ورودی با استفاده از دروازه منطقی AND و NAND

شکل ۳-۲۸ یک دروازه منطقی NAND با چهار ورودی را نشان می‌دهد. در این مدار از یک دروازه منطقی NAND با دو ورودی و دو دروازه منطقی AND استفاده شده است.



شکل ۳-۲۲ نحوه ساخت دروازه AND با سه ورودی با استفاده از دو دروازه AND با دو ورودی

شکل ۳-۲۳ معادل دروازه منطقی AND با چهار ورودی را با استفاده از سه دروازه منطقی AND با دو ورودی نشان می‌دهد.

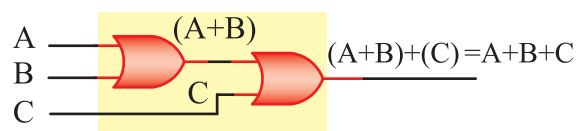


شکل ۳-۲۳ معادل دروازه منطقی AND با چهار ورودی با استفاده از سه دروازه AND با دو ورودی

به همین شیوه می‌توان یک دروازه منطقی با هر تعداد ورودی ساخت.

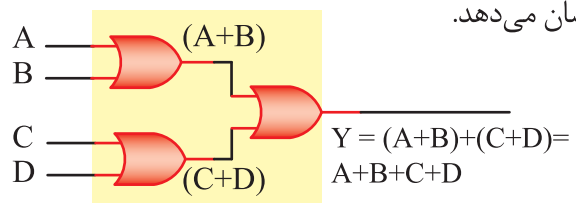
### ۳-۶-۲ افزایش تعداد ورودی‌های دروازه منطقی

**OR:** برای افزایش تعداد ورودی‌های دروازه منطقی OR، می‌توانیم از تعداد بیش‌تری دروازه منطقی OR با تعداد ورودی کمتر استفاده کنیم. برای مثال، شکل ۳-۲۴ معادل یک دروازه منطقی OR با سه ورودی را با استفاده از دو دروازه منطقی OR با دو ورودی نشان می‌دهد.



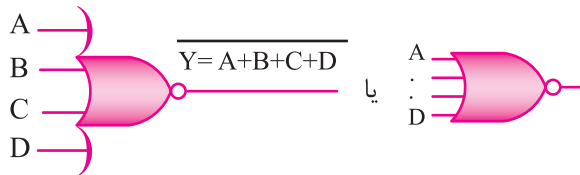
شکل ۳-۲۴ نحوه ساخت دروازه منطقی OR با سه ورودی با استفاده از دو دروازه منطقی OR با دو ورودی

شکل ۳-۲۵ معادل یک دروازه منطقی OR با چهار ورودی را با استفاده از سه دروازه منطقی OR با دو ورودی نشان می‌دهد.



شکل ۳-۲۵ نحوه ساخت دروازه منطقی OR با چهار ورودی با استفاده از سه دروازه منطقی OR با دو ورودی

به همین روش، می‌توان دروازه منطقی NOR را با هر تعداد ورودی ساخت. شکل ۳-۳۲ نمادهای دروازه منطقی NOR با چهار ورودی (یا بیش تر) را نشان می‌دهد.

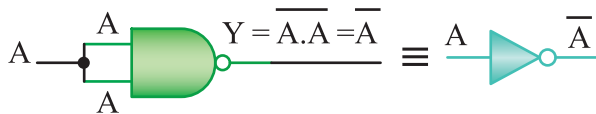


شکل ۳-۳۲ نمادهای دروازه منطقی NOR با چهار ورودی

### ۳-۷ ساخت دروازه‌های منطقی مختلف با استفاده از گیت NAND

در مدارهای منطقی، دروازه منطقی NAND به‌عنوان دروازه منطقی پایه محسوب می‌شود. بنابراین، با استفاده از این دروازه منطقی می‌توان سایر دروازه‌های منطقی را ساخت. در این قسمت نحوه ساخت سایر دروازه‌های منطقی به کمک دروازه منطقی NAND، مورد بررسی قرار می‌گیرد.

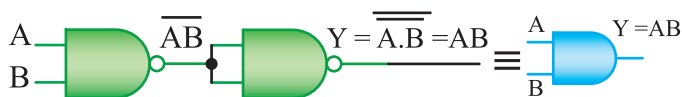
**۳-۷-۱ ایجاد دروازه منطقی NOT (نه):** اگر تمامی ورودی‌های دروازه منطقی NAND را به یکدیگر وصل کنیم، یک دروازه منطقی NOT حاصل می‌شود، شکل ۳-۳۳ دروازه منطقی NOT را با استفاده از گیت NAND نشان می‌دهد.



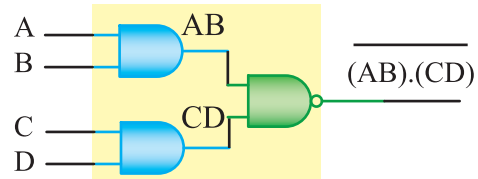
شکل ۳-۳۳ ساخت دروازه منطقی NOT با استفاده از NAND

**۳-۷-۲ ساخت دروازه منطقی AND:** به کمک دو عدد دروازه منطقی NAND می‌توان یک دروازه منطقی AND ساخت.

شکل ۳-۳۴ ساخت دروازه منطقی AND را با کمک NAND نشان می‌دهد.

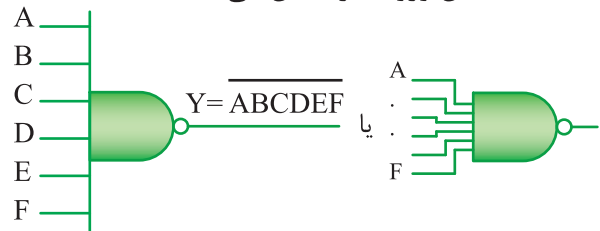


شکل ۳-۳۴ ساخت دروازه منطقی AND با استفاده از NAND



شکل ۳-۲۸ دروازه منطقی NAND با چهار ورودی با استفاده از دروازه‌های منطقی AND و NAND با دو ورودی

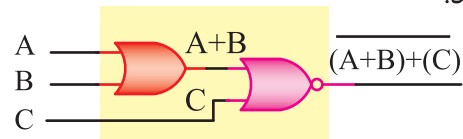
به همین روش، می‌توان دروازه منطقی NAND با هر تعداد ورودی ساخت. شکل ۳-۲۹ نمادهای دروازه منطقی NAND با شش ورودی را نشان می‌دهد.



شکل ۳-۲۹ نمادهای دروازه منطقی NAND با ورودی‌های زیاد

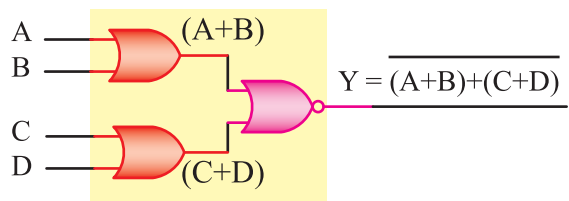
### ۳-۶-۴ افزایش تعداد ورودی‌های دروازه منطقی NOR

با استفاده از دروازه‌های منطقی OR و NOR می‌توان یک دروازه منطقی NOR با هر تعداد ورودی ساخت. شکل ۳-۳۰ یک دروازه منطقی NOR با سه ورودی را که با استفاده از یک دروازه منطقی OR و یک دروازه منطقی NOR ساخته شده است، نشان می‌دهد.

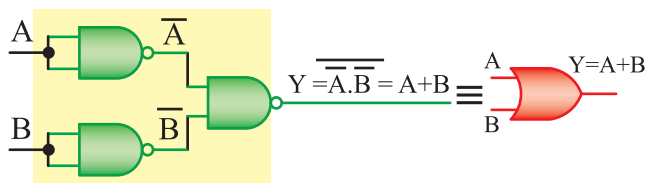


شکل ۳-۳۰ دروازه منطقی NOR با سه ورودی که با استفاده از دروازه‌های منطقی OR و NOR ساخته شده است.

شکل ۳-۳۱ یک دروازه منطقی NOR با چهار ورودی را که با استفاده از دروازه‌های منطقی OR و NOR با دو ورودی ساخته شده‌اند را نشان می‌دهد.



شکل ۳-۳۱ ایجاد دروازه منطقی NOR با چهار ورودی با استفاده از دروازه‌های منطقی OR و NOR با دو ورودی



شکل ۳-۳۶ ساخت دروازه منطقی OR با استفاده از NAND

### ۳-۷-۴ دروازه منطقی NOR با استفاده از

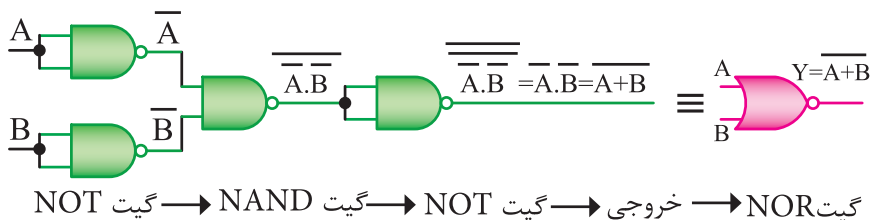
قوانین (قضیه‌های) دمورگان می‌توانیم بنویسیم

$$Y = \overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B} = \overline{A \cdot B}$$

یعنی اگر دو گیت NOT را با هم AND کنیم،

سپس آنها را دو بار NOT کنیم، حاصل گیت NOR

خواهد بود، شکل ۳-۳۷ ساخت دروازه منطقی NOR را نشان می‌دهد.



شکل ۳-۳۷ ساخت دروازه منطقی NOR با استفاده از NAND

برای رابطه  $\overline{AB}$  نیز مشابه بالا عمل می‌کنیم.

$$\overline{AB} = \overline{AB + 0} = \overline{AB} + \overline{A \cdot 0} = \overline{AB} + \overline{A \cdot 0}$$

طبق رابطه دمورگان داریم:

$$A(\overline{B} + \overline{A}) = A(\overline{AB}) \quad (3)$$

مقادیر رابطه (۲) و (۳) را در رابطه (۱) جایگزین می‌کنیم.

$$\overline{AB} + \overline{AB} = B(\overline{AB}) + A(\overline{AB})$$

این تابع را دو بار نفی می‌کنیم.

$$\overline{\overline{AB} + \overline{AB}} = \overline{B(\overline{AB}) + A(\overline{AB})}$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود با استفاده از قانون

دمورگان نتیجه نهایی به دست می‌آید و تابع با استفاده

از گیت NAND مشابه شکل ۳-۳۸ خواهد شد.

### ۳-۷-۳ تولید دروازه منطقی OR: می‌دانیم

که  $\overline{\overline{A}} = A$  (می‌خوانیم A نات نات) است، زیرا طبق شکل ۳-۳۵ از معکوس هر متغیر NOT شده خود متغیر به وجود می‌آید.



شکل ۳-۳۵ معکوس هر متغیر NOT شده مساوی خود متغیر است.

طبق قضیه دمورگان داریم:

$$Y = A + B = \overline{\overline{A + B}} = \overline{\overline{A} \cdot \overline{B}}$$

در شکل ۳-۳۶ ایجاد دروازه منطقی OR را با استفاده

از قضیه دمورگان مشاهده می‌کنید.

### ۳-۷-۵ دروازه منطقی OR انحصاری XOR: با

توجه به رابطه منطقی XOR، آن را به صورت جملات NAND

درمی‌آوریم؛ زیرا باید با دروازه منطقی NAND ساخته شود.

$$Y = A \oplus B = \overline{A}B + A\overline{B} \quad \text{تابع گیت XOR}$$

برای این که تابع با گیت‌های NAND اجرا شود تابع

را به صورت زیر تغییر می‌نویسیم:

$$Y = \overline{AB} + \overline{AB} \quad (1)$$

می‌دانیم صفر در جمع یک عضو خنثی است

$$\overline{AB} = \overline{AB} + 0$$

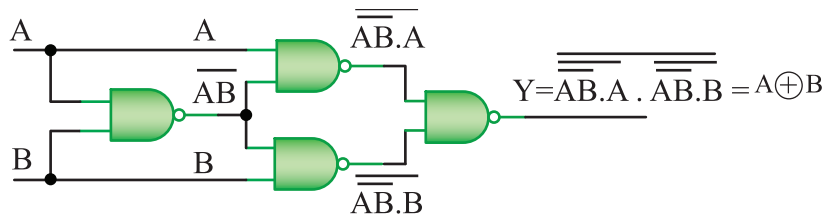
به جای صفر مقدار می‌گذاریم و از عامل مشترک

فاکتور می‌گیریم.

$$\overline{AB} + 0 = \overline{AB} + B\overline{B} = B(\overline{A} + \overline{B})$$

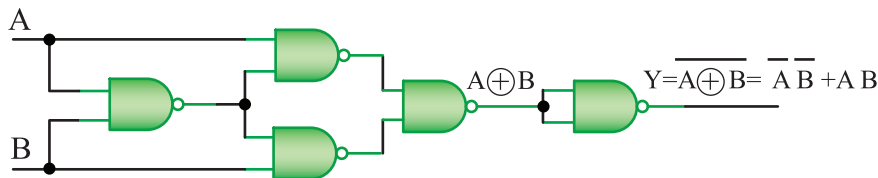
طبق رابطه دمورگان داریم:

$$B(\overline{A} + \overline{B}) = B(\overline{AB}) \quad (2)$$



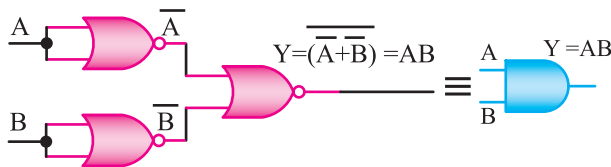
شکل ۳-۳۸ ساخت دروازه منطقی OR انحصاری با استفاده از NAND

۳-۷-۶ دروازه منطقی NOR انحصاری (XNOR): را که با استفاده از گیت NAND ساخته شده است NOT برای ساخت این دروازه منطقی با استفاده از دروازه‌های منطقی NAND، کافی است خروجی دروازه منطقی XOR



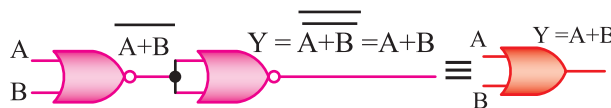
شکل ۳-۳۹ ساخت دروازه منطقی NOR انحصاری با استفاده از NAND

AND مطابق شکل ۳-۴۱ ساخت:



شکل ۳-۴۱ ساخت دروازه منطقی AND با استفاده از NOR

تحلیل این مدار بر عهده هنرجویان واگذار می‌شود.  
۳-۸-۳ تولید دروازه منطقی OR: با کمک دو عدد دروازه منطقی NOR می‌توان یک دروازه منطقی OR مطابق شکل ۳-۴۲ ساخت. زیرا اگر هر تابع دو بار NOT شود خود تابع به‌دست می‌آید.



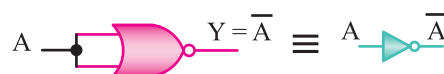
شکل ۳-۴۲ ساخت دروازه منطقی OR با استفاده از NOR

۳-۸-۴ دروازه منطقی NAND: در شکل ۳-۴۳ چگونگی ساخت دروازه منطقی NAND را با استفاده از دروازه منطقی NOR مشاهده می‌کنید.

### ۳-۸ ساخت دروازه‌های منطقی مختلف با استفاده از گیت NOR

در مدارهای منطقی دروازه منطقی NOR، نیز دروازه منطقی پایه محسوب می‌شود. بنابراین، با این دروازه منطقی می‌توان سایر دروازه‌های منطقی را ساخت. در این قسمت نحوه ساخت سایر دروازه‌های منطقی به کمک دروازه منطقی NOR را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۳-۸-۱ ساخت دروازه منطقی NOT (نه): اگر تمامی ورودی‌های دروازه منطقی NOR را به یکدیگر وصل کنیم، یک دروازه منطقی NOT به‌دست می‌آید. شکل ۳-۴۰ این گیت را نشان می‌دهد.



شکل ۳-۴۰ ساخت دروازه منطقی NOT با استفاده از NOR

۳-۸-۲ ایجاد دروازه منطقی AND: به کمک سه عدد دروازه منطقی NOR می‌توان یک دروازه منطقی

人人

جدول ۳-۳۷ - جدول صحت مثال ۳-۲۶

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

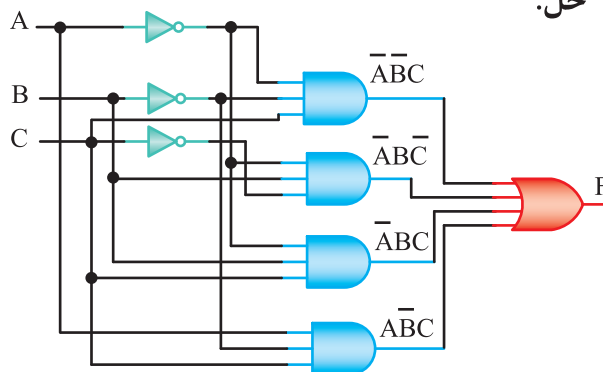
**حل:** با توجه به جدول ۳-۳۷ جمله مربوط به سطری که خروجی «یک» است، را می‌نویسیم.

$$F = \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}BC + A\bar{B}\bar{C}$$

برای اجرای تابع به مجموعه‌ای از دروازه‌های منطقی AND نیاز داریم. خروجی هرکدام از این دروازه‌ها متناظر با یک جمله حاصل ضرب است و سرانجام، باید خروجی همه این دروازه‌ها را با یکدیگر OR کنیم.

**مثال ۳-۲۷:** مدار تابع خروجی مثال ۳-۲۶ را با استفاده از گیت‌های منطقی طراحی کنید.

**حل:**



شکل ۳-۴۶ - مدار مثال ۳-۲۷

البته فراموش نکنید که برای کاهش تعداد دروازه‌ها، می‌توانیم در صورت امکان ابتدا تابع را به روش جبری یا با استفاده از جدول کارنو ساده کنیم و سپس تابع ساده شده را با دروازه‌های AND و OR کم‌تری اجرا کنیم.

**مثال ۳-۲۸:** تابع خروجی مدار مثال ۳-۲۷ را ساده کنید و سپس مدار تابع ساده شده را ترسیم کنید.

**حل:**

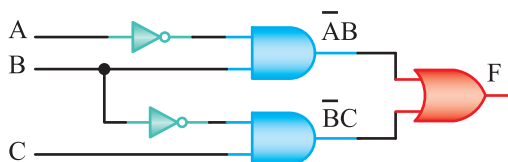
$$F = \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}BC + A\bar{B}\bar{C}$$

از جمله‌های اول و چهارم عامل مشترک  $\bar{B}C$  و از جمله‌های دوم و سوم عامل مشترک  $\bar{A}B$  را فاکتورگیری می‌کنیم.

$$F = \bar{B}C(\bar{A} + A) + \bar{A}B(\bar{C} + C)$$

$$F = \bar{B}C + \bar{A}B$$

مدار خروجی  $F$  را طراحی و رسم می‌کنیم.



شکل ۳-۴۷ - مدار ساده‌شده مثال ۳-۲۸

برای بیان تابع به صورت حاصل ضرب مجموعه‌ها باید جمله مجموعه متناظر با هر حالت «۰» تابع را بنویسیم. سپس کلیه جملات را در یکدیگر ضرب می‌کنیم. البته در صورت امکان باید تابع  $F$  ساده شده و در نهایت تابع ساده‌شده را به صورت AND-OR به اجرا در آوریم.

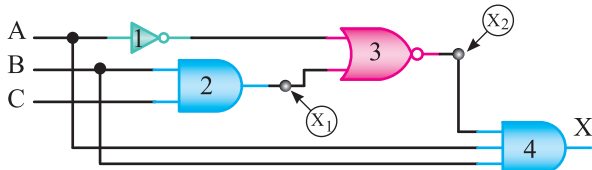
در این فصل، ابتدا روش آنالیز و طرح مدارهای ترکیبی را به صورت عام بیان می‌کنیم و سپس به تفکیک و با تفصیل بیشتر به بررسی مدارهای ترکیبی با کاربری عمومی می‌پردازیم.



**تمرین کلاسی ۳-۲۸:** تابع خروجی مثال ۳-۲۶ را با استفاده از جدول کارنو ساده کنید و با مدار به‌دست آمده در مثال ۳-۲۸ مقایسه کنید.

«جدول صحت» مدار را تشکیل دهیم.

**مثال ۳-۲۹:** در مدار شکل ۳-۴۹ نخست تابع خروجی  $X$  را بر حسب متغیرهای  $A, B$  و  $C$  به صورت مجموع حاصل ضرب‌ها به دست آورید و سپس جدول صحت مدار را رسم کنید.



شکل ۳-۴۹ مدار مربوط به مثال ۳-۲۹

**حل:**

مطابق شکل ورودی‌های دروازه AND شماره ۴، متغیرهای  $A, B$  و تابع  $x_4$  است. بنابراین، خروجی  $X$  برابر است با:

$$X = ABx_4$$

از طرفی ورودی‌های دروازه NOR شماره ۳، متغیر  $\bar{A}$  و تابع  $x_3$  است. بنابراین خروجی این دروازه برابر است با:

$$x_3 = \overline{(\bar{A} + x_1)} = Ax_1$$

چون  $x_1 = BC$  است، در نتیجه داریم:

$$x = ABx_4$$

↓

$$= AB \quad Ax_1 = AB \quad \bar{x}_1$$

↓

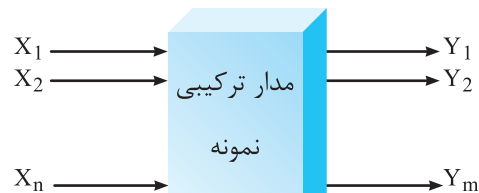
$$= AB \quad \overline{BC} = AB \quad (\bar{B} + \bar{C}) = ABC$$

یعنی، خروجی مدار فوق فقط در حالتی که  $A=1$ ،  $B=1$  و  $C=0$  باشد برابر با «۱» می شود (مین ترم سطر شماره ۶). جدول صحت مدار را در جدول ۳-۳۸ مشاهده می کنید.



**تمرین کلاسی ۳-۲۹:** تابع ماکس ترم خروجی مثال ۳-۲۶ را بنویسید و پس از ساده کردن تابع خروجی با استفاده از جدول کارنو مدار آن را طراحی و ترسیم کنید.

**۳-۹-۲- تعریف مدار ترکیبی:** مدار ترکیبی به مداری اطلاق می شود که وضعیت خروجی های آن در هر لحظه منحصرأ به وضعیت ورودی های آن، در همان لحظه بستگی دارد. در چنین مداری، هیچ خروجی ای به هیچ ورودی ای از مدار برگشت داده نمی شود. در شکل ۳-۴۸ بلوک دیاگرام یک مدار ترکیبی نشان داده شده است. یادآوری می شود که در فصل چهارم در ارتباط با مدارهای ترکیبی ویژه کاربردی به طور مفصل بحث خواهد شد.



شکل ۳-۴۸ بلوک دیاگرام یک مدار ترکیبی

**۳-۹-۳- آنالیز مدارهای ترکیبی:** برای بررسی رفتار یک مدار ترکیبی، باید پاسخ مدار را به همه حالت های ورودی آن به دست آوریم. می دانید که اگر مداری  $n$  ورودی مختلف داشته باشد دارای  $2^n$  حالت متفاوت است. برای به دست آوردن پاسخ کلی مدار، نخست باید تابع منطقی هر یک از خروجی های آن را بر حسب متغیرهای ورودی در فرم مجموع حاصل ضرب ها یا حاصل ضرب مجموع ها به دست آوریم.

سپس به روش جبری یا به کمک جدول کارنو صورت نرمال تابع را مشخص کنیم و در نهایت به کمک آن

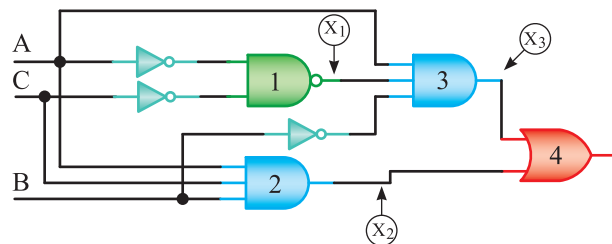


جدول ۳-۳۸- جدول صحت مربوط به مثال ۳-۲۹

A	B	C	X
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

مثال ۳-۳۰: مدار شکل ۳-۵۰ را تجزیه و تحلیل کنید.

سپس آن را در فرم NAND-NAND (همه گیت‌ها NAND باشند) اجرا کنید.



شکل ۳-۵۰- مدار مربوط به مثال ۳-۳۰

حل: با توجه به شکل ۳-۵۰ مدار مقادیر  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$  را با توجه به ورودی‌ها و گیت‌های موجود به دست می‌آوریم.

$$X_1 = \overline{A \cdot C} = \overline{A + C}$$

و

$$X_2 = \overline{A \cdot B} = \overline{A(A+C)B} = \overline{AB + ABC}$$

یا

$$X_2 = \overline{AB(1+C)} = \overline{AB}$$

و

$$X_3 = ABC$$

پس از تعیین مقادیر  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$  می‌توانیم تابع خروجی Z را به دست آوریم:

$$Z = X_1 + X_2$$

یا

$$Z = ABC + \overline{AB}$$

جمله  $ABC$  یک جمله نرمال است ولی جمله  $\overline{AB}$  را باید به صورت نرمال بیان کنیم، برای نرمال کردن  $\overline{AB}$

از اتحادها استفاده می‌کنیم.

$$\overline{AB} = \overline{AB} \times 1$$

$$\overline{AB} = \overline{AB}(\overline{C} + C)$$

$$\overline{AB} = \overline{AB}\overline{C} + \overline{AB}C$$

مقادیر معادل  $\overline{AB}$  را در تابع Z قرار می‌دهیم:

$$Z = ABC + \overline{AB}\overline{C} + \overline{AB}C$$

مطابق جدول صحت شماره سطر هر یک از جمله‌های

تابع Z را مشخص می‌کنیم.

$$Z = \overline{AB}\overline{C} + \overline{AB}C + ABC$$

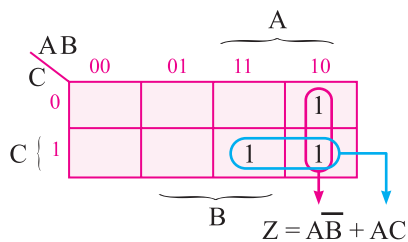
سطر ۵    سطر ۴    سطر ۷

در نتیجه می‌توانیم تابع Z را به صورت زیر هم بنویسیم.

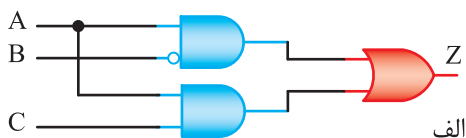
$$Z = \sum_m (m_7, m_4, m_5)$$

برای اجرای این تابع با دروازه‌های منطقی NAND، ابتدا باید آن را ساده کنیم. با استفاده از جدول کارنو، نتیجه می‌شود:

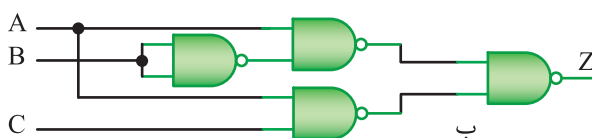
جدول ۳-۳۹- جدول کارنو مربوط به مثال ۳-۳۰



و ساده‌ترین مدار این تابع به شکل ۳-۵۱- الف یا معادل NAND-NAND آن، شکل ۳-۵۱- ب قابل اجراست.



الف



ب

شکل ۳-۵۱- مدارهای مربوط به مثال ۳-۳۰

برای حل مسئله باید مقادیر  $x_1$ ،  $x_2$ ،  $x_3$  و  $x_4$  را به دست آوریم تا توابع  $Y$  و  $Z$  قابل دسترسی باشد.

$$X_1 = A \oplus B, Y = x_1 \oplus C$$

$$Y = A \oplus B \oplus C$$

$$Y = \overline{A}\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}\overline{C} + ABC \quad (\text{چرا؟})$$

$$Y = \sum m(1, 2, 4, 7)$$

$$Z = x_2 + x_4$$

که چون  $x_2 = AB$  و  $x_4 = Cx_3$  است، خواهیم داشت:

$$Z = AB + Cx_3$$

اگر در تابع فوق به جای  $x_3$  معادل آن یعنی  $x_3 = A+B$  را جایگزین کنیم، مقدار  $Z$  برابر است با:

$$Z = AB + C(A+B) = AB + AC + BC$$

و در نهایت پس از نرمال کردن تابع خواهیم داشت:

$$Z = \overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C} + ABC$$

(تابع نرمال را اثبات کنید).

که در این تابع جملات ۳، ۵، ۶ و ۷ وجود دارد.

$$Y = \sum m(3, 5, 6, 7)$$

حاصل عملیات فوق را در جدول صحت ۳-۴۰ مشاهده می کنید.

جدول ۳-۴۰ - جدول صحت مربوط به مثال ۳-۳۱

شماره های سطر	A	B	C	Y	Z
0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	1	0
2	0	1	0	1	0
3	0	1	1	0	1
4	1	0	0	1	0
5	1	0	1	0	1
6	1	1	0	0	1
7	1	1	1	1	1



**جهت دانش آموزان علاقه مند:** آیا می توانید با

توجه به جمله های استاندارد یک تابع منطقی شماره سطر مربوط به هر جمله را بنویسید. تحقیق و تلاش کنید و نتیجه را به کلاس ارائه نمایید.

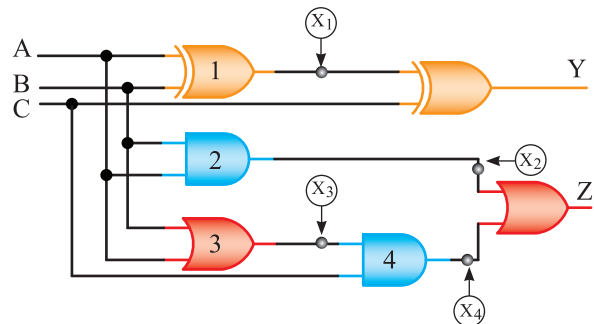


**جهت دانش آموزان علاقه مند:** آیا می دانید بین

شماره سطر جدول صحت یک تابع منطقی و اعداد باینری چه رابطه ای است؟ تحقیق کنید و نتیجه را به کلاس ارائه نمایید.

ممکن است یک مدار ترکیبی بیش از یک خروجی داشته باشد. برای به دست آوردن جدول صحت این گونه مدارها باید تابع منطقی هر یک از خروجی ها را، مستقل از بقیه به دست آوریم. سپس با توجه به توابع منطقی به دست آمده، جدول صحت مدار را رسم کنیم.

**مثال ۳-۳۱:** در شکل ۳-۵۲ هر یک از توابع  $Y$  و  $Z$  را بر حسب متغیرهای  $A$ ،  $B$  و  $C$  در فرم مجموع حاصل ضربها به دست آورید، سپس جدول صحت مدار را رسم کنید.



شکل ۳-۵۲ - مدار مثال ۳-۳۱

**حل:** با توجه به شکل ۳-۵۲ می توانیم بنویسیم:

**الف)** جدول صحت مدار را براساس عملکرد تعریف شده برای مدار به دست آوریم. اگر این گام را که گامی اساسی برای طراحی یک مدار ترکیبی است، درست برداریم دنبال کردن مراحل بعدی تا اجرای سخت‌افزاری مدار از یک روند منطقی کاملاً روشن و معین تبعیت می‌کند.

**ب)** به کمک جدول صحت مدار هر یک از توابع خروجی آن را در فرم مجموع حاصل ضرب‌ها (یا حاصل ضرب مجموع‌ها) بیان می‌کنیم.

**پ)** هر یک از توابع فوق را به روش جبری یا با استفاده از جدول کارنو ساده می‌کنیم.

**ت)** هر یک از توابع ساده شده را به صورت یک ترکیب OR-AND یا NAND-NAND اجرا می‌کنیم.

**مثال ۳-۳۲:** مداری با سه ورودی A، B، C و یک خروجی Y طرح کنید که در حالت‌هایی که اکثریت نسبی ورودی‌ها یک باشد، خروجی آن یک شود. مدار را در ساده‌ترین فرم مجموع حاصل ضرب‌ها اجرا کنید.

**حل:** با توجه به صورت مسئله، خروجی مدار در حالت‌هایی که دست‌کم دو ورودی آن در حالت یک باشد، یک می‌شود؛ بنابراین، جدول صحت آن به صورت جدول ۳-۴۲ بیان می‌گردد.

جدول ۳-۴۲ - جدول صحت مربوط به مثال ۳-۳۲

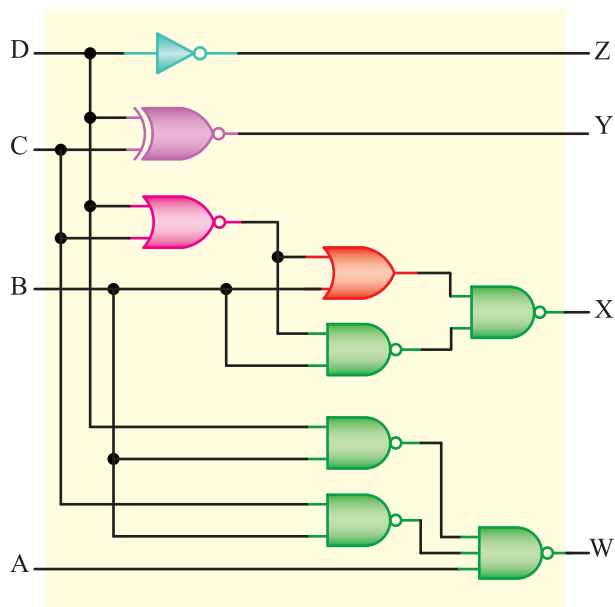
شماره‌های سطر	A	B	C	Y
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1



**تمرین کلاسی ۳-۳۰:** جدول صحت مدار شکل ۳-۵۳ را برای حالت‌های داده شده در جدول ۳-۴۱ تکمیل کنید.

جدول ۳-۴۱ - جدول صحت تمرین کلاسی ۳-۳۰

شماره‌های سطر	A	B	C	D	W	X	Y	Z
0	0	0	0	0	.	.	.	.
1	0	0	0	1	.	.	.	.
2	0	0	1	0	.	.	.	.
3	0	0	1	1	.	.	.	.
4	0	1	0	0	.	.	.	.
5	0	1	0	1	.	.	.	.
6	0	1	1	0	.	.	.	.
7	0	1	1	1	.	.	.	.
8	1	0	0	0	.	.	.	.
9	1	0	0	1	.	.	.	.



شکل ۳-۵۳ - مدار مربوط به تمرین کلاسی

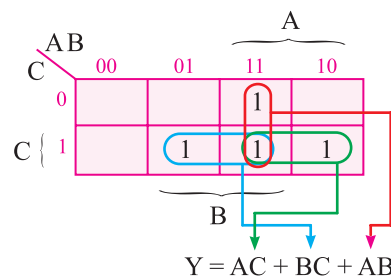
**۳-۹-۴ - طراحی مدارهای ترکیبی ساده:** برای طراحی یک مدار ترکیبی، باید به ترتیب زیر عمل کنیم.

مسئول اتاق و کلید دوم توسط کسی که می‌خواهد وارد اتاق شود تغییر می‌کند. مداری طراحی کنید که اگر وضعیت این دو کلید با یکدیگر اختلاف دارند، مسئول اتاق با خبر شود.

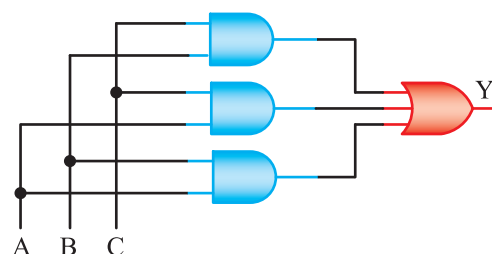
$$Y = \sum_m (3, 5, 6, 7)$$

که فرم ساده‌شده آن با توجه به نقشه کارنو ۳-۴۳ شامل جمله  $AB$ ,  $AC$  و  $BC$  است.

**مثال ۳-۳:** سه نفر به نام‌های A, B و C در یک آزمایشگاه کار می‌کنند. به لحاظ شرایط امنیتی، این سه باید تحت شرایط خاصی وارد شوند. برای این منظور هریک دارای کلید خاصی می‌باشند و درب اتاق آزمایشگاه هنگامی باز می‌شود که شرایط لازم زیر برقرار باشد. مداری طراحی نمایید که به وسیله آن شرایط زیر کنترل شده و در صورت مجاز بودن درب باز شود.



و مدار آن شامل سه دروازه AND با دو ورودی و یک دروازه OR با سه ورودی مطابق شکل ۳-۵۴ است.



شکل ۵۴-۳- مدار مربوط به مثال ۳۲-۳

جدول ۳-۴۵۔ جدول صحت مثال ۳-۳۳

A	B	C	Y	
0	0	0	0	شرط پ
0	0	1	1	شرط الف $\bar{A}\bar{B}C$
0	1	0	1	شرط الف $\bar{A}B\bar{C}$
0	1	1	0	قسمت دوم شرط ب
1	0	0	1	شرط الف $A\bar{B}\bar{C}$
1	0	1	1	قسمت اول شرط ب $A\bar{B}C$
1	1	0	1	قسمت اول شرط ب $AB\bar{C}$
1	1	1	1	قسمت دوم شرط ب $ABC$

تابع خروجی را می نویسیم.

$$F = \overline{A}\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}\overline{C} + A\overline{B}C + ABC$$

### ۱۰-۳- الگوی پرسش

### ۱-مداری طراحی کنید که :

الف) دارای سه ورودی A , B و C باشد.

ب) چنان چه  $C=0$  باشد A در خروجی ظاهر شود.

پ) چنان چه  $C=1$  باشد B در خروجی ظاهر شود.

ابتدا جدول صحت و رابطه خروجی را به دست آورید. سپس مدار را با توجه به رابطه خروجی طراحی کنید.

**۲- در درون اتاق کلیدی نصب شده است و در بیرون آن نیز کلیدی دیگر قرار دارد. وضعیت کلید اول توسط**



**جهت هنجاریان علاقه‌مند:** برای کنترل چراغ راهنمایی یک چهار راه از یک مرکز فرماندهی دستور تغییر رنگ چراغ‌ها داده می‌شود. این دستور توسط دو کلید فرمان و چند رشته سیم به چهار راه می‌رسد. هدف طراحی مداری است که توسط آن سیگنال‌های رسیده به چراغ راهنمایی، چراغ‌ها را به ترتیب زیر روشن یا خاموش نماید.

از عوامل مشترک فاکتورگیری می‌کنیم.

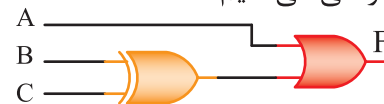
$$F = \overline{BC}(\overline{A} \times A) + \overline{BC}(\overline{A} \times A) + A\overline{B}(\overline{C} \times C) + A\overline{B}(\overline{C} \times C)$$

$$F = \overline{BC} + \overline{BC} + A\overline{B} + A\overline{B}$$

جمله‌های ۱ و ۲ گیت XOR را تشکیل می‌دهند و از جمله‌های ۳ و ۴ از عامل A فاکتورگیری می‌کنیم.

$$F = B \oplus C + A(\overline{B} \times B) = B \oplus C + A$$

مدار را طراحی می‌کنیم.



شکل ۳-۵۵- مدار مربوط به مثال ۳-۳۳

\* چراغ A هنگامی سبز یا زرد است که چراغ B جهت راهنمایی برای حل تمرین جدول صحت قرمز باشد.  
 \* چراغ B هنگامی سبز یا زرد است که چراغ A مدار شش خروجی (چراغ راهنمایی) داریم (جدول قرمز باشد).

جدول صحت ۳-۳۴- جدول صحت مدار چراغ راهنمایی

کلیدهای فرمان		چراغ‌های سمت A			چراغ‌های سمت B		
X	Y	A <sub>R</sub>	A <sub>Y</sub>	A <sub>G</sub>	B <sub>R</sub>	B <sub>Y</sub>	B <sub>G</sub>
0	0	1	0	0	0	0	1
0	1	1	0	0	0	1	0
1	0	0	1	0	1	0	0
1	1	0	0	1	1	0	0

A<sub>R</sub>: چراغ قرمز سمت A  
 A<sub>Y</sub>: چراغ زرد سمت A  
 A<sub>G</sub>: چراغ سبز سمت A  
 B<sub>R</sub>: چراغ قرمز سمت B  
 B<sub>Y</sub>: چراغ زرد سمت B  
 B<sub>G</sub>: چراغ سبز سمت B

توجه داشته باشید که چراغ‌های قرمز سمت A و سمت B هیچگاه با هم روشن نیستند.

جدول صحت مدارها را رسم کنید و پس از مشخص کردن وضعیت خروجی، مدار را با آزمایشگاه مجازی، شبیه‌سازی کنید.


### ۳-۱۱- استفاده از نرم‌افزار

با استفاده از نرم‌افزار مولتی سیم، مدارهای شکل ۳-۵۶ الف و ب را ببینید و پس از راه‌اندازی، صحت آن را تجربه کنید. برای اجرای نرم‌افزاری، ابتدا باید



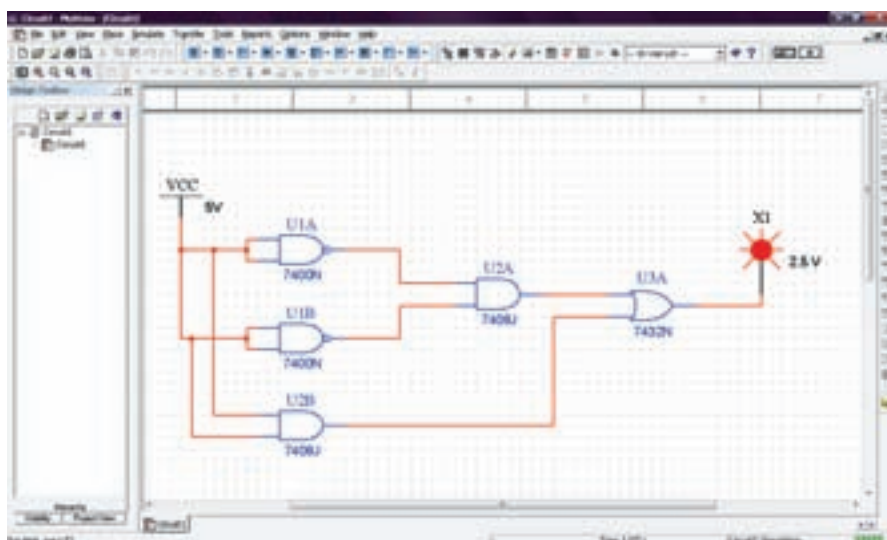
**نکته ۳:** برای استفاده از لامپ یا LED در خروجی مدار باید یک سر لامپ یا کاتد LED را به زمین منطقی اتصال دهید.



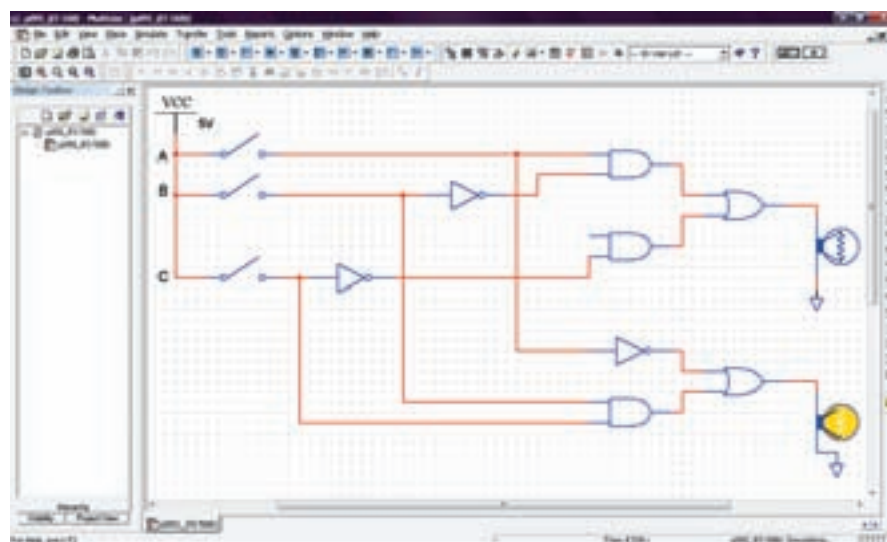
**نکته ۱:** برای مدارهای منطقی باید از زمین DGND که نمادی به شکل  دارد استفاده کنید.



**نکته ۲:** برای استفاده از پروپ خروجی که در مدار الف استفاده شده است نیازی به اتصال زمین ندارید.



(الف)



(ب)

شکل ۵۶-۳ مدارهای منطقی با استفاده از نرم افزار مولتی سیم

## ۱۲-۳- الگوی پرسش

۱- توابع زیر را به کمک روابط جبر بول ساده کنید.

(الف)

$$F(A,B,C) = \overline{A}BC + A\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + ABC + A\overline{B}\overline{C}$$

ب)  $F(A,B,C,D) = \overline{A}BCD + \overline{A}B\overline{C}D + ABCD$

پ)  $F(A,B,C,D) = \overline{A}BCD + \overline{A}B\overline{C}D + \overline{A}B\overline{C}\overline{D} + \overline{A}BC\overline{D} + \overline{A}B\overline{C}D + \overline{A}B\overline{C}\overline{D} + \overline{A}BC\overline{D} + \overline{A}B\overline{C}\overline{D}$

۲- توابع زیر را به کمک نقشه کارنو ساده کنید.

(الف)  $F(A,B,C) = \Sigma_m(0,1,5,6,7)$

ب)  $F(A,B,C,D) = \Sigma_m(0,2,5,7,9,11,12,14,15)$

پ)  $F(A,B,C,D) = \Sigma_m(2,5,6,7,9,10,11,15)$

۳- تابع زیر را به کمک نقشه کارنو ساده کنید.

(الف)  $F(A,B,C) = \Pi_M(0,2,4,6)$

ب)  $F(A,B,C,D) = \Pi_M(0,1,4,7,9,11,13,14)$

۴- تابع زیر را به فرم استاندارد بول (عبارت‌های

مین ترم) در آورید.

$$F(A,B,C,D) = A\overline{B}C + A\overline{D} + ABC$$

۵- تابع زیر را به فرم استاندارد بول (عبارت‌های

ماکس ترم) در آورید.

$$F(A,B,C) = AB + \overline{C}$$

۶- توابع زیر را ابتدا ساده کنید و سپس به کمک

دروازه‌های منطقی رسم نمایید.

(الف)  $F(A,B,C) = \Sigma_m(0,1,2,3,5,7)$

ب)  $F(A,B,C,D) = \Sigma_m(2,4,6,8,10,12,13,14)$

۷- تابع زیر را بعد از ساده نمودن به کمک دروازه

منطقی NAND رسم کنید.

$$F(A,B,C) = \Sigma_m(1,2,3,5,7)$$

۸- ساده‌ترین عبارت استخراجی از نقشه‌های کارنوی

جدول ۳-۴۶ الف، ب، پ و ت را بنویسید.

جدول ۳-۴۶- نقشه کارنوی الگوی پرسش

AB \ C	00	01	11	10
0	1	1		1
1		1	1	1

الف

AB \ C	00	01	11	10
0	1			1
1	1		1	1

ب

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1		1
01	1	1	1	1
11	1		1	1
10	1			1

پ

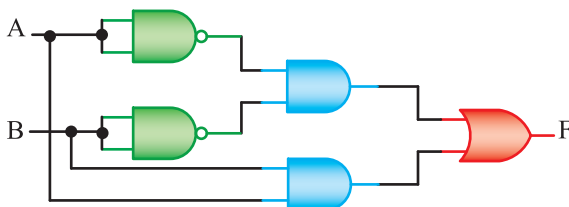
AB \ CD	00	01	11	10
00	1			1
01	1	1		
11		1	1	
10		1	1	

ت

۹- در مدار شکل ۳-۵۷ پس از به دست آوردن رابطه

خروجی و ساده کردن آن، چه مدار ساده‌ای را می‌توان

جایگزین کرد؟



شکل ۳-۵۷- مدار مربوط به سؤال ۹





### جهت هنرجویان علاقه مند

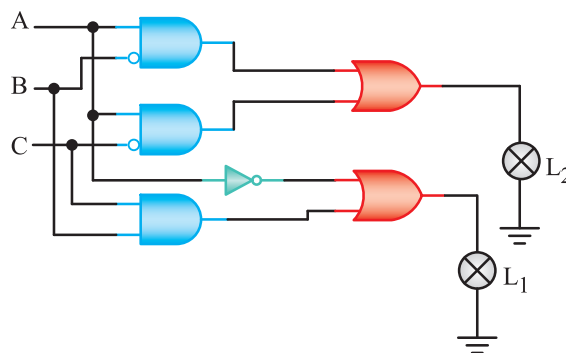
#### ۱۳- مکمل تابع

$$F(A,B,C) = \sum_m (0,3,6,7)$$

را به صورت میان ترم بدست آورید و نتیجه را ساده کنید.

۱۴- یک مدار برای نتایج یک مسابقه با سه نفر شرکت کننده طراحی کرده ایم که در آن نتیجه بازی فقط به شرط حداقل دو جواب صحیح از سه جواب داده شده، امتیاز یک دارد. تابع منطقی حاصل از این خروجی مدار را با استفاده از جدول درستی بنویسید.

۱۰- در مدار شکل ۳-۵۸ به ازاء کدام حالت ورودی ها لامپ  $L_1$  خاموش و لامپ  $L_2$  روشن می شود؟



شکل ۳-۵۸- مدار مربوط به سؤال ۱۰

۱۱- در مدار شکل ۳-۵۹ شرایط زیر برقرار است.

الف)  $Z_1$  موقعی یک است که  $C=0$  و  $A=B=1$  یا  $B=0$  و  $A=C=1$  باشد.

ب)  $Z_2$  موقعی یک است که  $C=1$  و  $B=1$  و  $A=0$  یا  $C=1$  و  $B=0$  و  $A=1$  باشد.

پ) در بقیه حالت ها  $Z_1=Z_2=0$  است.



شکل ۳-۵۹- مدار سؤال ۱۱

مدار منطقی این مدار ترکیبی را رسم کنید.

۱۲- مداری طراحی کنید که وقتی به ورودی آن از صفر تا ۱۵ داده می شود، در قبال اعدادی که بر چهار بخش پذیر هستند خروجی (۱) شود. نقشه کارنوی مدار فوق را رسم کنید.