فصل پنجم

دستگاه مختصات (Coordinate System)

هدف‌های رفتاری: پس از پایان این فصل از فراگیر انتظار می‌رود :

۱ــ محورهای مختصات را تعریف کند و دستگاه مختصات دوبعدی را شرح دهد.

۲ــ دستگاه مختصات قطبی دوبعدی را توضیح دهد.

۳ــ دستگاه مختصات سه‌بعدی را تعریف کرده، مختصات دکارتی در فضا را شرح دهد.

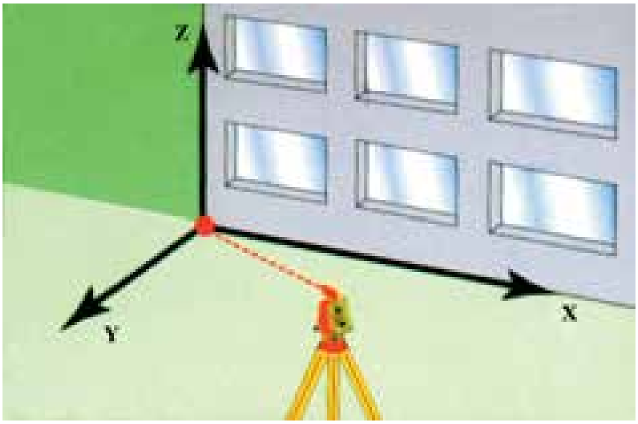
۴ــ دستگاه مختصات استوانه‌ای یا نیم‌قطبی را شرح دهد.

۵ ــ روابط تبدیل مختصات استوانه‌ای را به مختصات قائم‌الزاویه و به‌عکس، با ذکر مثال، شرح دهد.

۶ــ مختصات کروی را توضیح دهد.

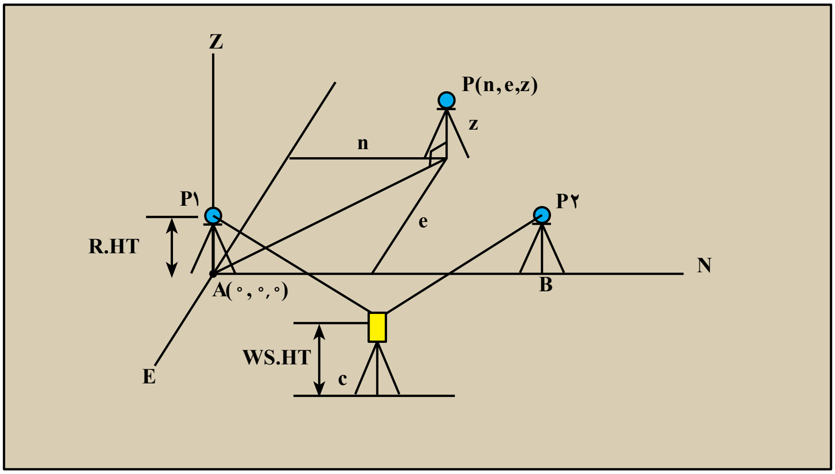
۷ــ روابط تبدیل مختصات کروی را به قائم‌الزاویه و به‌عکس، شرح دهد.

۸ــ مثال‌های ارائه شده در این فصل را فرابگیرد.



x ,y , z = o

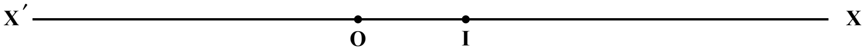
شکل ۵ــ۱



شکل ۵ــ۲

۵ــ۱ــ تعریف محور (Axis)

یک خط جهت‌دار را که روی آن نقطه‌ای به نام مبدأ و طولی به نام واحد اندازه‌گیری تعیین شده باشد «محور» می‌نامند. جهت محور را از طرف چپ به راست «مثبت» و از طرف راست به چپ «منفی» درنظر می‌گیرند. معمولاً محور را با $x'ox$ یا $y'oy$ مطابق این شکل نشان می‌دهند.



شکل ۵ــ۳

هر عدد حقیقی را با یک نقطه از محور و هر نقطه از محور را با یک عدد حقیقی متناظر می‌کنیم. مبدأ O متناظر با عدد صفر و نقطه‌ی I متناظر با عدد یک است. در شکل ۵ــ۴ پاره‌خط OA را با درنظر گرفتن جهت مثبت محور «بردار» می‌نامیم و آن را با $\overrightarrow{OA}$ نشان می‌دهیم. O را مبدأ و A را انتهای این بردار می‌خوانیم. طول پاره‌خط OA را بدون درنظر گرفتن جهت آن طول آن بردار نامیده، با $|\overrightarrow{OA}|$ نشان می‌دهند.

اگر A نقطه‌ای دل‌خواه روی محور باشد بنا به تعریف طول (مختص) نقطه‌ی A که آن را با x_A نشان می‌دهیم و به آن «اندازه‌ی جبری $\overrightarrow{OA}$» نیز می‌گوییم:

$$\overline{OA} = x_A$$

شکل ۵ــ۴

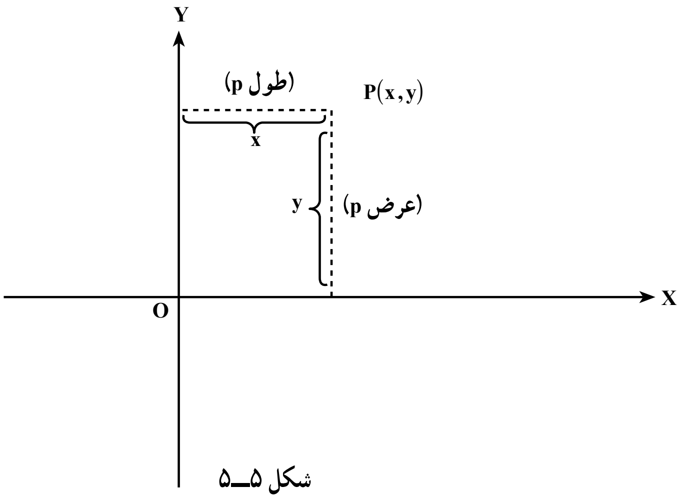
۵ــ۲ــ دستگاه مختصات دو بعدی

مجموعه‌ی تمام زوج‌های مرتب از اعداد حقیقی را صفحه‌ی اعداد و هر زوج مرتب (x,y) را یک نقطه از این صفحه می‌نامیم. صفحه‌ی اعداد را با علامت R^2 نشان می‌دهند.

همان‌گونه که R^1 را با نقاط روی یک محور (فضای یک‌بعدی) مشخص می‌کنیم، می‌توانیم R^2 را با نقاط واقع در یک صفحه‌ی هندسی (فضای دوبعدی) مشخص کنیم. روشی که برای R^2 به‌کار می‌بریم منسوب به «رنه دکارت» ریاضی‌دان فرانسوی است که ابداع تحلیلی در سال **۱۶۲۷** نیز کار اوست.

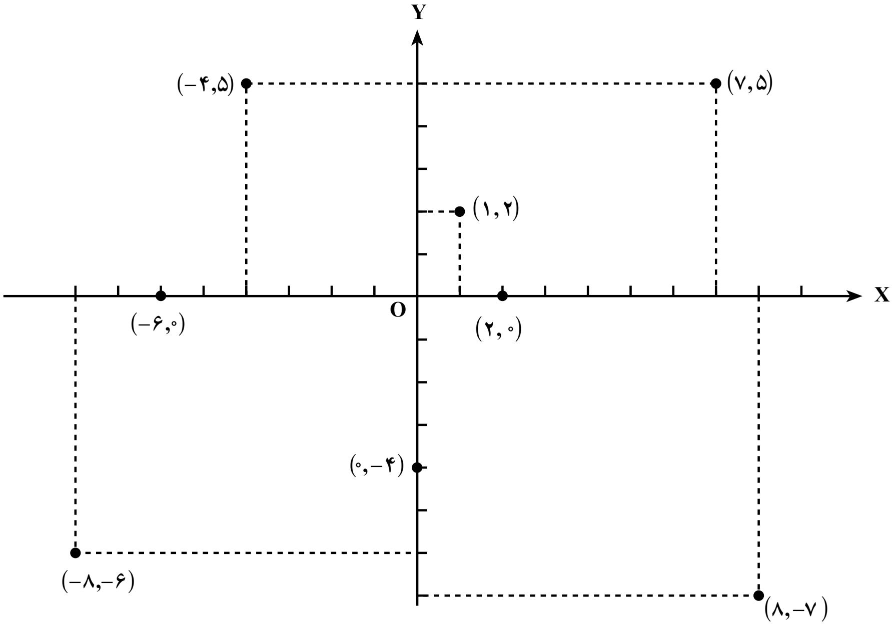
تعریف دستگاه دوبعدی دکارتی (قائم‌الزاویه) (Cartesian): یک خط افقی در صفحه‌ی هندسی انتخاب می‌کنیم. آن را محور xها می‌نامیم. خطی قائم نیز به‌نام محور yها انتخاب می‌کنیم که عمود بر محور xها باشد. نقطه‌ی برخورد محور xها و محور yها را مبدأ مختصات می‌نامیم و با حرف O نشان می‌دهیم. واحدی برای طول انتخاب می‌کنیم. (معمولاً واحد طول برای هر دو عدد یکسان انتخاب می‌شود.)

فرض می‌کنیم جهت مثبت روی محور xها در طرف راست مبدأ و جهت مثبت روی محور yها در طرف بالای مبدأ باشد (مطابق شکل ۵ــ۵). به زوج مرتب (x,y) از اعداد حقیقی نقطه‌ای مانند P روی صفحه هندسی نسبت می‌دهیم که دارای این مشخصات است : فاصله‌ی P از محور yها برابر x است که اگر P در طرف راست محور yها واقع شده باشد x مثبت و اگر در طرف چپ باشد x منفی است. x را طول (مختص x) نقطه‌ی P می‌نامیم. فاصله‌ی P از محور xها برابر y است که اگر P بالای محور xها باشد y مثبت و اگر P پایین محور xها باشد y منفی خواهد بود. y را عرض



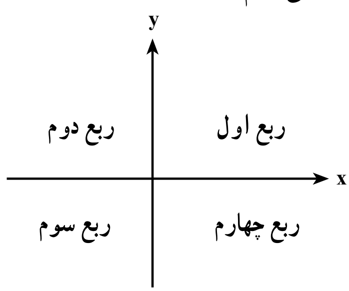
شکل ۵ــ۵

(مختص y) نقطه‌ی P می‌نامیم. بدین‌ترتیب، طول و عرض یک نقطه را «مختصات دکارتی قائم آن نقطه» می‌گویند. در شکل ۵ــ۶ یک دستگاه مختصات دکارتی قائم و چند نقطه را در آن می‌بینید.



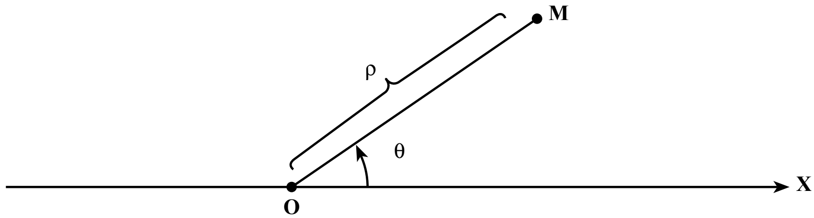
شکل ۵ــ۶

محور xها و محور yها صفحه‌ی اعداد را به چهار قسمت تقسیم می‌کنند که هر قسمت را یک «ربع» می‌خوانیم. ربع اول ربعی است که در آن طول و عرض نقاط هر دو مثبت هستند ؛ یعنی، ربع بالای xها و سمت راست محور yها، به همین ترتیب ربع‌های دیگر را در جهت عکس گردش عقربه‌های ساعت شماره‌گذاری می‌کنیم :



تعریف دستگاه مختصات قطبی(Polar) دو بعدی: مختصات هر نقطه در این دستگاه به‌وسیله‌ی دو پارامتر یکی طول و دیگری زاویه مشخص می‌شود (شکل ۵ــ۷). محور ثابتی را مانند

x′ox درنظر می‌گیریم ؛ برای تعیین مختصات قطبی نقطه‌ی M طول $OM = \rho$ را درنظر گرفته دیگر زاویه‌ی θ (زاویه‌ای که OM با محور Ox در جهت خلاف عقربه ساعت می‌سازد) منظور می‌کنیم ؛ بنابراین مختصات قطبی $M(\rho,\theta)$ نمایش داده می‌شود. (نقطه O مبدأ مختصات قطبی است).



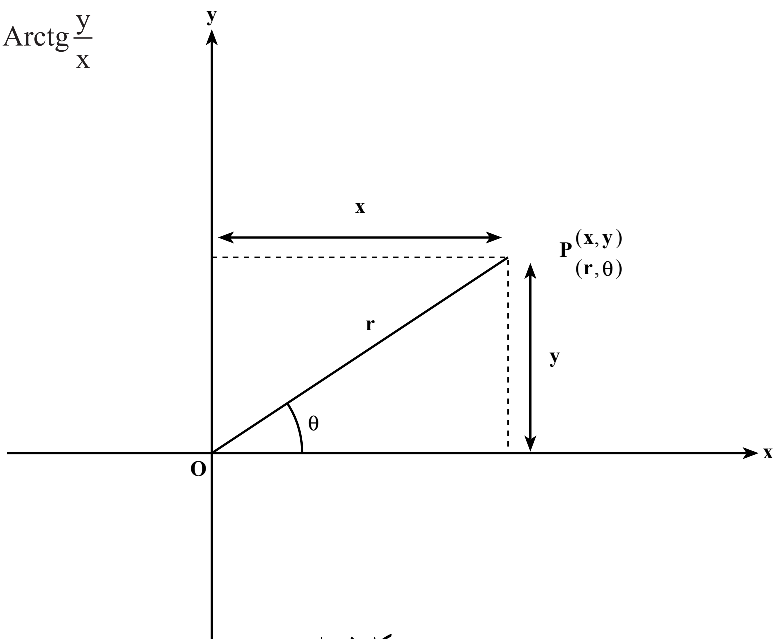
شکل ۵ـ۷

۵ـ۳ـ تبدیل مختصات قائم‌الزاویه به مختصات قطبی

اگر مختصات قائم‌الزاویه نقطه‌ی p(x,y) معلوم باشد با توجه به تعریف مختصات کروی و ملاحظه‌ی شکل ۵ـ۸ از روابط زیر استفاده می‌کنیم :

$$r^۲ = x^۲ + y^۲$$

$$\theta = \mathrm{Arctg}\frac{y}{x}$$



شکل ۵ـ۸

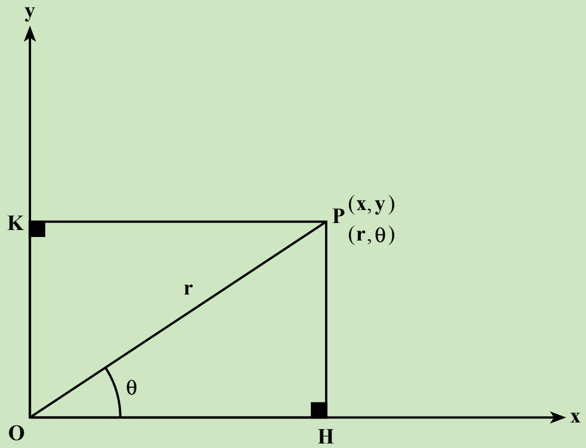
درصورتی که (r,θ) مختصات قطبی نقطه‌ی p معلوم باشد و بخواهیم مختصات قائم‌الزاویه‌ی آن را به‌دست آوریم مطابق شکل صفحه‌ی قبل (شکل ۵ــ۸) از فرمول‌های زیر استفاده می‌کنیم :

$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$

مثال ۵ــ۱: مختصات قائم‌الزاویه نقطه $A(1,\sqrt{3})$ معلوم است مطلوبست محاسبه‌ی مختصات قطبی نقطه A.

راهکار کلی: در شکل زیر با توجه به این‌که مختصات قائم‌الزاویه نقطه P یعنی (x,y) معلوم است می‌خواهیم مختصات قطبی آن (r,θ) را به‌دست آوریم.



شکل ۵ــ۹

رابطه تانژانت را در مثلث قائم‌الزاویه $\overset{\Delta}{OPH}$ می‌نویسیم

رابطه ۱ $\quad \mathrm{tg}\theta = \dfrac{PH}{OH} = \dfrac{y}{x} \Rightarrow \boxed{\theta = \mathrm{Arc\ tg}\dfrac{y}{x}}$

و رابطه فیثاغورث را نیز در این مثلث می‌نویسیم $OP^2 = PH^2 + OH^2$ و مقادیر x و y و r را در آن قرار می‌دهیم به‌طوری که

$$OP = r \ , \ pH = y \ , \ OH = x$$

رابطه ۲ $\quad r^2 = x^2 + y^2$ نتیجه می‌شود

دو رابطه ۱ و ۲ تشکیل یک دستگاه دو معادله دو مجهول را می‌دهد که با حل آن می‌توانیم

مختصات را به هم تبدیل کنیم.

$$\begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 \\ \theta = \text{Arc tg}\,\dfrac{y}{x} \end{cases}$$

روش حل: در مسئله فوق مختصات نقطه $A(1,\sqrt{3})$ یعنی $(y=\sqrt{3}, x=1)$ می‌باشد اگر پارامترهای r و θ را از دستگاه تبدیل مختصات به‌دست آوریم مسئله حل می‌شود.

$$\begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 \\ \theta = \text{Arc tg}\,\dfrac{y}{x} \end{cases}$$

مختصات قطبی

$$\begin{cases} r^2 = (1)^2 + (\sqrt{3})^2 \\ \theta = \text{Arc}\ \ \text{tg}\,\dfrac{\sqrt{3}}{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r^2 = 4 \Rightarrow r = 2 \\ \theta = 60^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = 2 \\ \theta = 60^\circ \end{cases} \Rightarrow P(2,60^\circ)$$

بحث و بررسی: به‌وسیله‌ی فرمول فوق و دستگاه تبدیل مختصات می‌توان مختصات دوبعدی قطبی و قائم‌الزاویه را به هم تبدیل کرد و در نقشه‌برداری برای پیاده‌کردن نقاط بیش‌تر از روش قطبی (طول و زاویه) استفاده می‌کنیم.

مطالعه‌ی آزاد

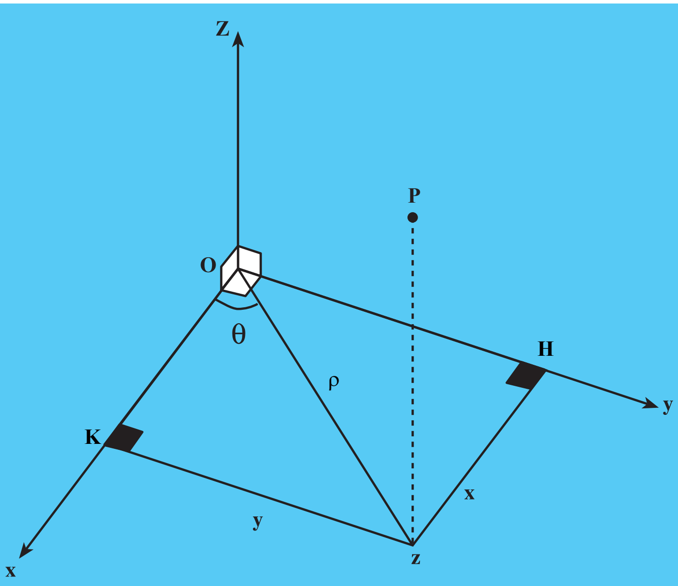
مثال ۵ــ۲: مختصات قائم‌الزاویه‌ی نقطه‌ی P عبارت است از $P(1,\sqrt{3},5)$ مختصات استوانه‌ای نقطه‌ی P را حساب کنید.

راهکار کلی: طبق تعریف مختصات استوانه‌ای نقطه‌ی P در فضا را روی صفحه xoy تصویر می‌کنیم که تصویر آن نقطه z می‌شود حال از نقطه z دو عمود بر محورهای ox و oy رسم می‌کنیم پارامترهای زیر مشخص می‌شود.

$$Oz = \rho\ ,\ zH = x\ ,\ zK = y\ ,\ x\hat{o}z = \hat{\theta}$$

در حقیقت اگر مختصات استوانه‌ای را در صفحه xoy تصویر کنیم تبدیل به مختصات قطبی در صفحه به‌اضافه ارتفاع Z یعنی طول $\overline{pz}$ می‌باشد و فرمول مختصات قطبی را در صفحه داریم اگر ارتفاع Z یعنی طول $\overline{pz}$ به آن اضافه کنیم مختصات استوانه‌ای به‌دست می‌آید.

$$\begin{cases} x = \rho\sin\theta \\ y = \rho\cos\theta \end{cases}$$



شکل ۵ــ۱۰

$$\begin{cases} x^۲+y^۲=\rho^۲ \\ \theta=\mathrm{Arctg}\dfrac{y}{x} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^۲+y^۲=\rho^۲ \\ \theta=\mathrm{Arctg}\dfrac{y}{x} \\ Z=z \end{cases}$$

مختصات قطبی **مختصات استوانه‌ای**

روش حل: مفروضات مسئله عبارت‌اند از $x=۱$ و $y=\sqrt{۳}$ و $z=۵$ که آن‌ها را در فرمول زیر قرار می‌دهیم.

$$\begin{cases} x^۲+y^۲=\rho^۲ \\ \theta=\mathrm{Arc\,tg}\dfrac{y}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (۱)^۲+(\sqrt{۳})^۲=\rho^۲ \\ \theta=\mathrm{Arc\,tg}\sqrt{۳} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho^۲=۴ \\ \theta=۶۰^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho=۲ \\ \theta=۶۰ \end{cases} \xRightarrow[\text{ارتفاع}]{\text{به‌اضافه‌ی}} \begin{cases} \rho=۲ \\ \theta=۶۰ \\ z=۵ \end{cases}$$

مختصات استوانه‌ای $\Rightarrow p(۲,۶۰^\circ,۵)$

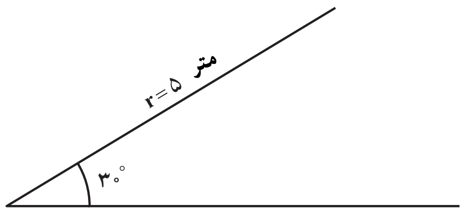
بحث و بررسی: با نوشتن فرمول‌های مربوط به مختصات استوانه‌ای (قطبی + ارتفاع) که به آن نیم‌قطبی نیز می‌گویند می‌توان مسائل مربوط به آن‌را حل کرد.

خودآزمایی

۱ــ ابتدا محورهای مختصات دوبعدی را رسم کنید، سپس نقطه‌ی A، مختصات $(۲,۳)$ و نقطه‌ی B با مختصات $(-۳,۴)$ و نقطه‌ی C، مختصات $(-۲,-۵)$ را در صفحه مشخص کنید.

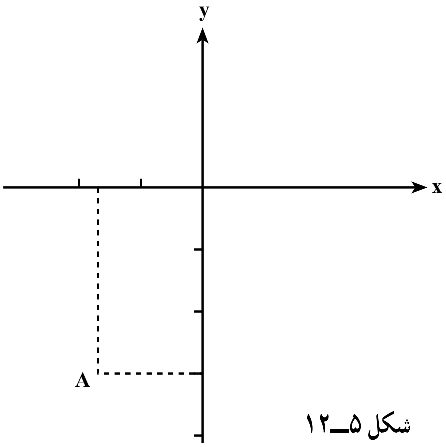
۲ــ مختصات قطبی نقطه‌ی $M(۵,۳۰^\circ)$ مطابق شکل ۵ــ۱۱ معلوم است. مختصات قائم‌الزاویه آن را به‌دست آورید:

$M(۵,۳۰^\circ)$



شکل ۵ــ۱۱

۳ــ مختصات قائم‌الزاویه‌ی نقطه‌ی $A(-\sqrt{۳},-۳)$ است. مختصات قطبی آن را به‌دست آورید (شکل ۵ــ۱۲).



شکل ۵ــ۱۲

۴ــ مختصات قطبی نقطه‌ی $M=(۸,۳۰^\circ)$ معلوم است. مختصات دکارتی (قائم‌الزاویه) آن را به‌دست آورید.

کار گروهی دانش‌آموزان

با نظارت و کمک معلمان عزیز مانند فصول قبل فعالیت آموزش و ارزیابی اعضاء توسط گروه انجام شود.

فصل ششم

محاسبه‌ی مساحت (Area)

هدف‌های رفتاری: پس از پایان این فصل از فراگیر انتظار می‌رود :

۱ــ روش‌های مختلف محاسبه‌ی مساحت مثلث را توضیح دهد.

۲ــ فرمول‌های محاسبه‌ی مساحت چهارضلعی‌ها (مربع، مستطیل، متوازی‌الاضلاع، لوزی و ذوزنقه) را بیان کند.

۳ــ روش‌های تعیین مساحت چهارضلعی‌های غیرمشخص را توضیح دهد.

۴ــ روش تعیین مساحت چندضلعی‌ها را به روش دستور «هرون» شرح دهد.

۵ــ فرمول‌های محاسبه‌ی مساحت دایره، قطاع و قطعه را با ذکر یک مثال در ۳ شکل بیان کند.

۶ــ فرمول محاسبه‌ی مساحت بیضی را با ذکر یک مثال و رسم شکل توضیح دهد.

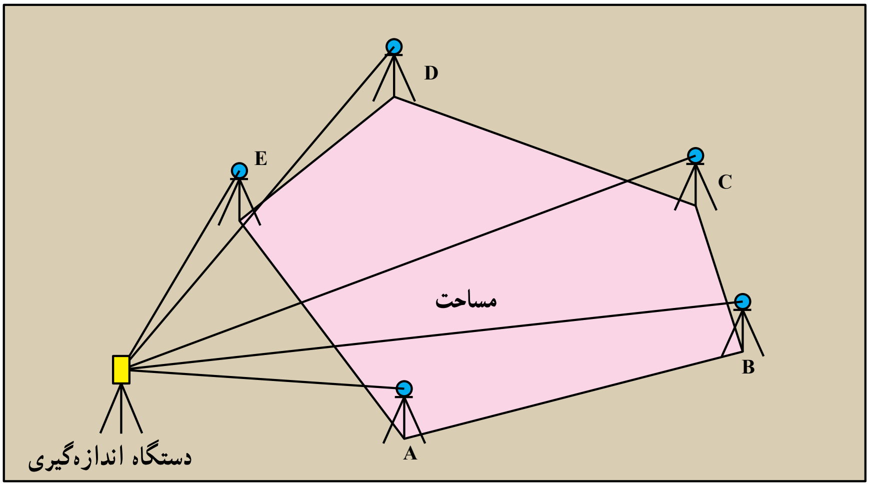
۷ــ روش محاسبه‌ی سطح محصور با استفاده از ذوزنقه‌های هم‌ارتفاع را شرح دهد.

۸ــ محاسبه‌ی مساحت به روش «گوس» را شرح دهد.

۹ــ محاسبه‌ی مساحت به روش ذوزنقه‌های هم‌ارتفاع را شرح دهد.

۱۰ــ محاسبه‌ی مساحت به‌روش سیمپسون را شرح دهد.

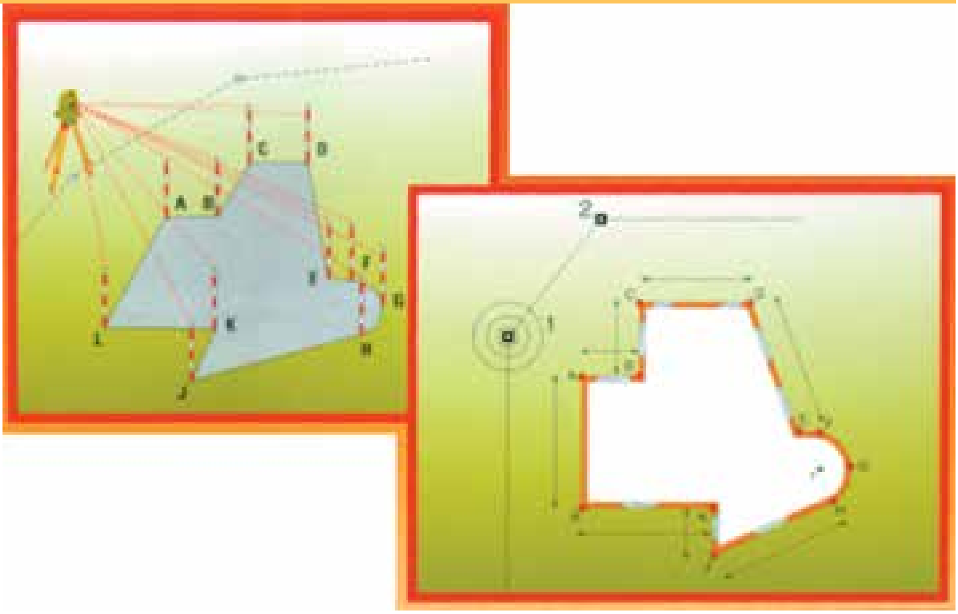
۱۱ــ مثال‌های حل‌شده در این فصل را فرا بگیرد.



شکل ۶ــ۱

آیا می‌دانید

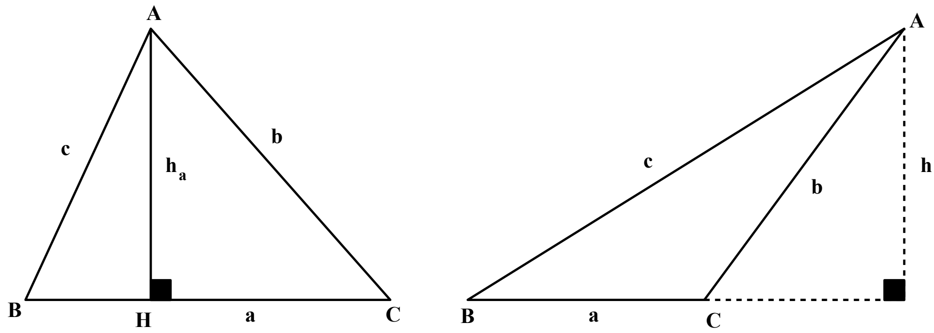
محاسبه‌ی مساحت مثلث: به دلیل نیاز بشر برای حل اختلاف مالکیت‌ها و تعیین حد و مرز زمین‌های حاصل‌خیز کشاورزی و آبرفتی مخصوصاً بعد از سیلاب‌ها و تقسیم عادلانه‌ی آن علم مساحی و اندازه‌گیری ابعاد و مساحت زمین بسیار مورد توجه دانشمندان بوده است.



شکل ۶ــ۲ــ اندازه‌گیری‌های لازم جهت محاسبه‌ی مساحت

۶ــ۱ــ محاسبه‌ی مساحت اشکال هندسی

محاسبه‌ی مساحت مثلث: در شکل ۶ــ۳ سه‌ضلعی ABC را در نظر گرفته اضلاع روبه‌روی هر زاویه با حروفی نظیر a، b، c و ارتفاع وارد بر هر ضلع را با h_a ، h_b و h_c نشان می‌دهیم :



شکل ۶ــ۳

الف) مساحت مثلث برابر است با حاصل‌ضرب قاعده در نصف ارتفاع وارد بر آن ضلع :

$$S = \frac{۱}{۲} a.h_a = \frac{۱}{۲} b.h_b = \frac{۱}{۲} c.h_c$$

ب) مساحت مثلث برابر است با نصف حاصل‌ضرب دو ضلع در سینوس زاویه‌ی بین آن دو ضلع :

$$S = \frac{۱}{۲} ab \sin C = \frac{۱}{۲} ac \sin B = \frac{۱}{۲} bc \sin A$$

ج) دستور Heron : محاسبه‌ی مساحت مثلث برحسب سه ضلع آن

اگر a ، b و c اندازه‌های سه ضلع مثلث باشند، محیط مثلث یعنی : $a + b + c$ را با ۲P نمایش می‌دهند و S مساحت مثلث را از دستور :

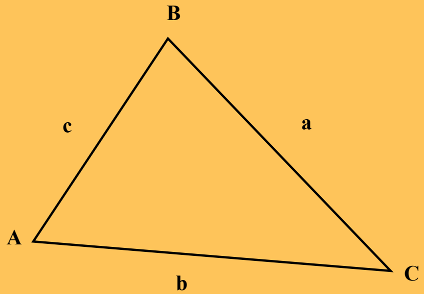
$$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$$

به‌دست می‌آورند. این رابطه به مشابه‌ی دستور Heron در تعیین مساحت اراضی کاربرد فراوان دارد.

آیا می‌دانید

برای محاسبه‌ی مساحت در حالتی که سه ضلع آن معلوم است ابوالوفابوزجانی دانشمند مسلمان ایرانی درقرن چهارم هــ‌ـق فرمول آن را به شکل زیر بیان کرده است.

$$S=\sqrt{\left[\left(\frac{c+b}{۲}\right)^{۲}-\left(\frac{a}{۲}\right)^{۲}\right]\left[\left(\frac{a}{۲}\right)^{۲}-\left(\frac{c-b}{۲}\right)^{۲}\right]}$$



تذکر: این فرمول در حقیقت با تغییراتی که روی آن انجام می‌شود فرمول محاسبه مساحت به روش هرون (دانشمند یونانی) به‌دست می‌آید.

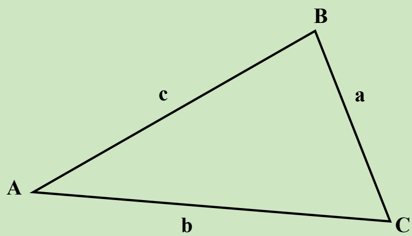
$$S=\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$$

مثال ۶ــ۱: زمینی است به شکل مثلث که اضلاع آن به‌ترتیب برابر ۷۰ ، ۵۰ و ۶۰ متر می‌باشد مساحت آن‌را به‌دست آورید.

راهکار کلی: برای حل این نوع مسائل که سه ضلع مثلث معلوم باشد بخواهیم مساحت آن‌را به‌دست آوریم بهترین راه استفاده از فرمول بوزجانی یا (هرون) می‌باشد.

$$S=\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$$ که P نصف محیط است

$$P=\frac{a+b+c}{۲}$$



شکل ۶ــ۴

روش حل: اضلاع مثلث را داریم به‌طوری‌که متر $a=۷۰$ و متر $b=۵۰$ و متر $c=۶۰$

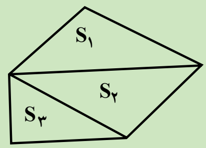
نصف محیط $P=\dfrac{a+b+c}{۲}=\dfrac{۷۰+۵۰+۶۰}{۲}=\dfrac{۱۸۰}{۲}=۹۰$

$$S=\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}=\sqrt{۹۰(۹۰-۷۰)(۹۰-۵۰)(۹۰-۶۰)}=$$

مترمربع $\sqrt{۹۰(۲۰)(۴۰)(۳۰)}=۱۴۶۹/۶۹$

بحث و بررسی: با توجه به محاسبه مساحت مثلث با دانستن اضلاع آن از فرمول فوق می‌توان آن‌را تعمیم داد برای تمام چندضلعی‌ها به این صورت که آن‌ها را به مثلث‌های مختلف تفکیک کنیم و مساحت هر مثلث را به همین روش به‌دست آورده سپس مساحت‌ها را با هم جمع کنیم تا مساحت کل به‌دست آید.

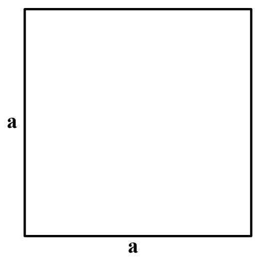
$$S=S_۱+S_۲+S_۳$$



شکل ۶ــ۵

مساحت مربع: برابر حاصل‌ضرب یک ضلع در خود است (شکل ۶ــ۶).

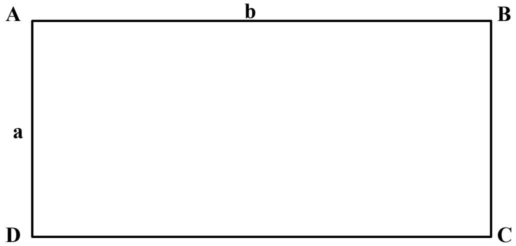
$$S=a^۲$$



شکل ۶ــ۶

مساحت مستطیل: برابر حاصل‌ضرب طول در عرض است (شکل ۶ ــ۷).

$$S=a.b$$



شکل ۶ــ۷

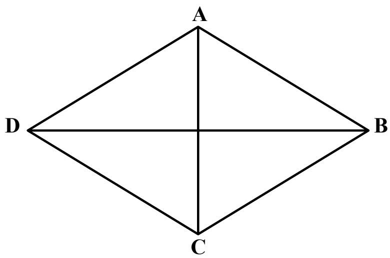
مساحت متوازی‌الاضلاع: برابر است با حاصل‌ضرب هر ضلع در ارتفاع وارد بر آن (مطابق شکل ۶ــ۸). در متوازی‌الاضلاعِ ABCD که BH ارتفاع وارد بر ضلع CD است :

$$S = CD \times BH$$

$$S = CD \times BC \times \sin\alpha$$

شکل ۶ــ۸

مساحت لوزی: برابر است با نصف حاصل‌ضرب دو قطر : $S = \frac{AC \times BD}{۲}$ (شکل ۶ــ۹).

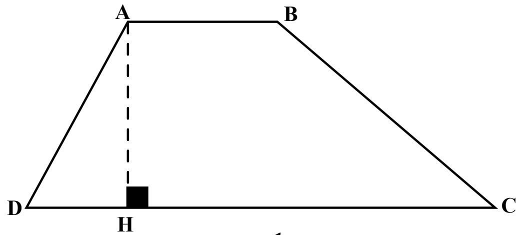


شکل ۶ــ۹

مساحت ذوزنقه: برابر است با حاصل‌ضرب مجموع دو قاعده در نصف ارتفاع. مطابق شکل ۶ــ۱۰ در ذوزنقه‌ی ABCD قاعده‌های AB و CD و ارتفاع AH مشخص است. مساحت ذوزنقه

برابر است با :

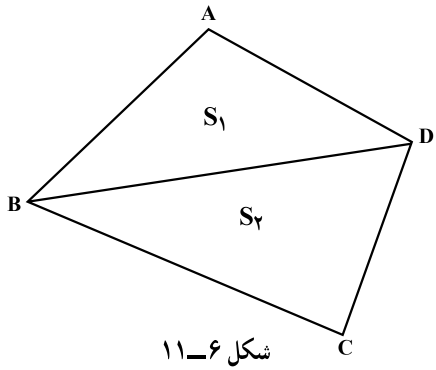
$$S=\frac{AB+CD}{۲}\times AH$$



شکل ۶ــ۱۰

محاسبه‌ی مساحت چهارضلعی‌های غیرمشخص: برای محاسبه‌ی مساحت ابتدا آن‌را به دو مثلث تقسیم کرده، اضلاع آن دو مثلث را اندازه می‌گیریم. مساحت هر مثلث را براساس دستور «هرون» به‌دست می‌آوریم و با هم جمع می‌کنیم (مطابق شکل ۶ــ۱۱) :

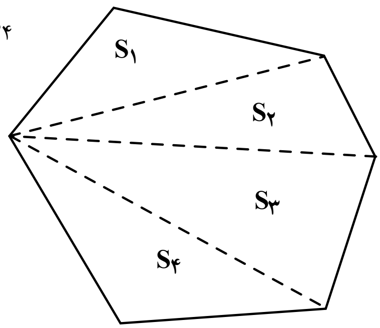
$$S=S_۱+S_۲$$



شکل ۶ــ۱۱

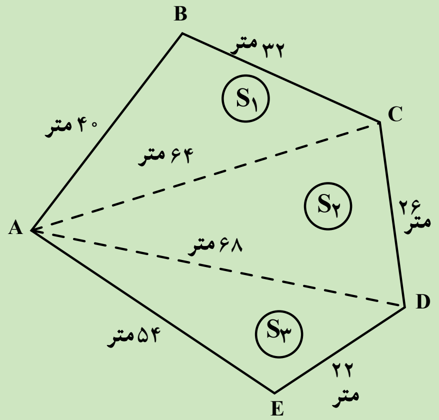
محاسبه‌ی چندضلعی‌های غیرمشخص: ابتدا مطابق شکل ۶ــ۱۲ آن‌را به چند مثلث تقسیم کرده، طول اضلاع هر مثلث را اندازه‌گیری می‌کنیم ؛ سپس مساحت هر مثلث را براساس دستور «هرون» به‌دست آورده با هم جمع می‌کنیم :

$$S=S_۱+S_۲+S_۳+S_۴$$



شکل ۶ــ۱۲

مثال ۶ــ۲: زمین به شکل چندضلعی مقابل که اندازه اضلاع و دو قطر آن داده شده است مطلوبست محاسبه مساحت چندضلعی.



شکل ۶ــ۱۳

راهکار کلی: برای محاسبه مساحت چندضلعی فوق آن‌را به‌صورت سه مثلث تفکیک‌شده به مساحت‌های $S_۱$، $S_۲$ و $S_۳$ در نظر می‌گیریم و طبق فرمول بوزجانی ــ هرون $S=\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$ مساحت هرکدام را محاسبه و سپس مساحت کل را به‌دست می‌آوریم $S=S_۱+S_۲+S_۳$

روش حل: مساحت‌های $S_۱$ و $S_۲$ و $S_۳$ را طبق فرمول به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم.

$$P_۱=\frac{a_۱+b_۱+c_۱}{۲}=\frac{۴۰+۳۲+۶۴}{۲}=۶۸$$

$a_۱=۴۰$ متر $\quad b_۱=۳۲$ متر $\quad c_۱=۶۴$ متر

$S_۱=\sqrt{۶۸(۶۸-۴۰)(۶۸-۳۲)(۶۸-۶۴)}=\sqrt{۶۸(۲۸)(۳۶)(۴)}=۵۲۳/۶۲$ متر مربع

$\boxed{S_۱=۵۲۳/۶۲}$ متر مربع

$$P_۲=\frac{a_۲+b_۲+c_۲}{۲}=\frac{۶۴+۲۶+۶۸}{۲}=۷۹$$

$a_۲=۶۴$ متر $\quad b_۲=۲۶$ متر $\quad c_۲=۶۸$ متر

$S_۲=\sqrt{۷۹(۷۹-۶۴)(۷۹-۲۶)(۷۹-۶۸)}=\sqrt{۷۹(۱۵)(۵۳)(۱۱)}=۸۳۱/۱۸$ متر مربع

$\boxed{S_۲=۸۳۱/۱۸}$ متر مربع

$P_۳ . \frac{a_۳ . b_۳ . c_۳}{۲} . \frac{۶۸ . ۲۲ . ۵۴}{۲} . ۷۲ \quad a_۳ . ۶۸ \quad b_۳ . ۲۲ \quad c_۳ . ۵۴$

$S_۳ . \sqrt{۷۲(۷۲ . ۶۸)(۷۲ . ۲۲)(۷۲ . ۵۴)} . \sqrt{۷۲ . ۴ . ۵۰ . ۱۸} . ۵۰۹/۱۲$ متر مربع

$\boxed{S_۳ . ۵۰۹/۱۲ \text{ مترمربع}}$

کل $S . S_۱ . S_۲ . S_۳ . ۵۲۳/۶۲ . ۸۳۱/۱۸ . ۵۰۹/۱۲ . ۱۸۶۳/۹۲$ مترمربع

بحث و بررسی: با توجه به این‌که هر چند ضلعی را می‌توان به تعدادی مثلث تفکیک کرد و با اندازه‌گیری اضلاع و تعدادی از قطرهای آن با استفاده از فرمول فوق مساحت‌های مثلث‌ها و سپس مساحت کل چندضلعی را به‌دست آورد.

محاسبه‌ی مساحت چهارضلعی غیرمشخص (روش دوم): درصورتی که از یک چهارضلعی اندازه‌ی دو قطر و زاویه‌ی بین آن‌ها معلوم باشد مساحت چهارضلعی را می‌توان از فرمول $S . \frac{AC . BD}{۲} \sin .$ به‌دست آورد.

اثبات رابطه‌ی فوق ارتفاع‌های AH و CH. را مطابق با شکل ۶ـ۱۴ رسم می‌کنیم. بنابراین :

$S . S_{ABD} . S_{BCD}$

رابطه‌ی ۱ $\quad S . \frac{BD . AH}{۲} . \frac{BD . CH.}{۲} . \frac{BD}{۲}(AH . CH.)$

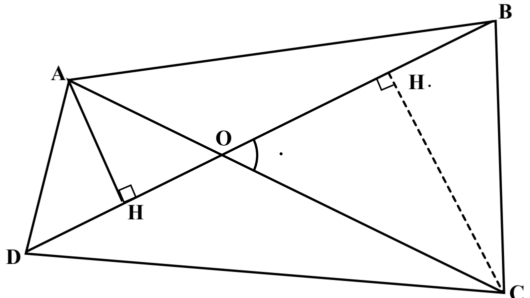
در مثلث AOH : $AH . AO\sin .$

در مثلث COH. : $CH. . CO\sin .$

مقادیر فوق را در رابطه‌ی ۱ قرار می‌دهیم که درنتیجه

$S . \frac{BD}{۲}(AO\sin . . \ CO\sin .) . \frac{BD}{۲} . AC\sin .$

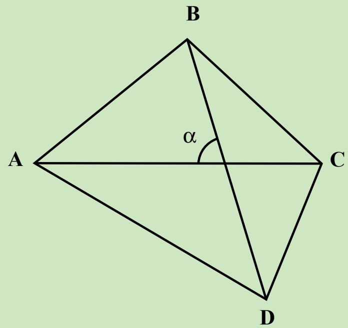
و حکم ثابت است.



شکل ۶ـ۱۴

مثال ۶ــ۳: زمینی است به شکل چهارضلعی غیرمشخص که اندازه دو قطر آن به‌ترتیب برابرند با ۱۵۴ متر و ۱۲۷ متر و زاویه بین دو قطر $۲۳°, ۴۷'$ می‌باشد مساحت چهارضلعی را به‌دست آورید.

راهکار کلی: مساحت چهارضلعی با داشتن دو قطر و زاویه بین آن‌ها ثابت شده که برابر است با حاصل‌ضرب یک قطر در نصف قطر دیگر ضربدر سینوس زاویه بین آن‌ها $S = \frac{BD}{۲} \times AC \sin\alpha$ از این فرمول برای محاسبه مساحت استفاده می‌کنیم.



شکل ۶ــ۱۵

روش حل: طبق فرض مسئله متر $AC = ۱۲۷$ و متر $BD = ۱۵۴$ و $\alpha = ۲۳°, ۴۷'$ می‌باشد مقادیر معلوم فوق را در فرمول قرار می‌دهیم

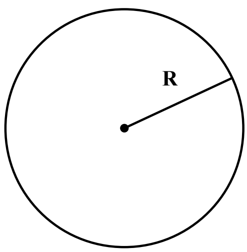
$$S = \frac{BD}{۲} \times AC \sin\alpha = \frac{۱۵۴}{۲} \times ۱۲۷ \sin(۲۳°, ۴۷') = ۳۹۴۳ / ۶۶ \text{ متر مربع}$$

$$\boxed{S = ۳۹۴۳ / ۶۶ \text{ مترمربع}}$$

بحث و بررسی: در یک چهارضلعی درصورتی که اندازه‌گیری اضلاع امکان‌پذیر نباشد و فقط بتوانیم دو قطر و زاویه بین دو قطر را اندازه‌گیری کنیم مساحت از این فرمول محاسبه می‌شود.

مساحت دایره: برابر است با مجذور شعاع در عدد پی :

$$S = \pi R^۲$$



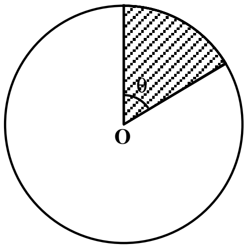
شکل ۶ــ۱۶

مساحت قطاع: می‌دانیم قطاع قسمتی از هر دایره است که محصور بین دو شعاع باشد. اگر R شعاع دایره و θ زاویه‌ی مرکزی قطاع مورد نظر برحسب درجه باشد (شکل ۶ــ۱۷).

مساحت قطاع برابر است با :

$S = \pi R^{۲} \times \frac{\theta^\circ}{۳۶۰}$ ، θ برحسب درجه

$S = \frac{R^{۲}\theta}{۲}$ ، θ برحسب رادیان

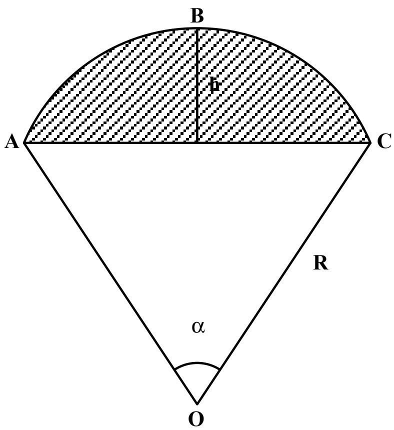


شکل ۶ــ۱۷

مساحت قطعه: قطعه، قسمتی از دایره‌ی محصور بین محیط و یک وتر دایره است (شکل ۶ــ۱۸) و مساحت آن از فرمول : $S = R^{۲}(\frac{\pi\alpha}{۳۶۰} - \frac{۱}{۲}\sin\alpha)$ به‌دست می‌آید.

اثبات: با توجه به شکل زیر

$$S_{ABC\,\text{قطعه}} = \underbrace{AOCB}_{\text{مساحت قطاع}} - \underbrace{AOC}_{\text{مساحت مثلث}} = \frac{\pi R^{۲}\alpha}{۳۶۰} - \frac{۱}{۲}R^{۲}\sin\alpha = R^{۲}(\frac{\pi\alpha}{۳۶۰} - \frac{۱}{۲}\sin\alpha)$$

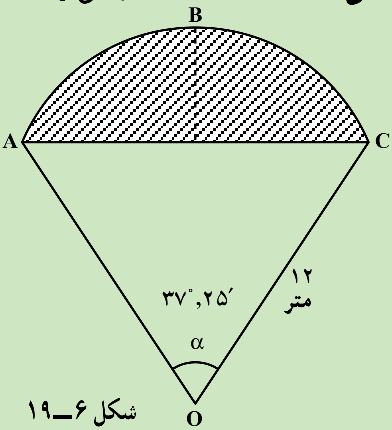


شکل ۶ــ۱۸

مثال ۶ــ۴: در دایره‌ای به شعاع ۱۲ متر قطعه مطابق شکل زیر زاویه مرکزی $\alpha = ۳۷^\circ, ۲۵'$ قرار دارد مطلوب است محاسبه مساحت قطعه.

راهکار کلی: مساحت قطعه ABC را می‌توان با توجه به شکل به‌صورت زیر نوشت.

رابطه ۱ $$\underset{\text{مساحت قطعه}}{S_{ABC}} = \underset{\text{مساحت قطاع}}{S_{AOCB}} - \underset{\text{مساحت مثلث}}{S_{AOC}}$$



شکل ۶ــ۱۹

از طرفی می‌دانیم مساحت قطاع برابر است با

رابطه ۲ $$\underset{\text{مساحت قطاع}}{S_{AOCB}} = \frac{\pi R^۲ \alpha^\circ}{۳۶۰}$$

(مساحت یک مثلث برابر است با نصف حاصل ضرب دو ضلع ضربدر سینوس زاویه بینشان)

رابطه ۳ $$\underset{\text{مساحت مثلث}}{S_{AOC}} = \frac{R \times R}{۲} \sin\alpha = \frac{R^۲}{۲} \sin\alpha$$

رابطه‌های ۲ و ۳ را در رابطه ۱ قرار می‌دهیم.

$$S_{ABC} = \frac{\pi R^۲ \alpha}{۳۶۰} - \frac{R^۲}{۲} \sin\alpha = \frac{R^۲}{۲}\left(\frac{\pi\alpha}{۱۸۰} - \sin\alpha\right)$$

$$\boxed{S_{ABC_{\text{قطعه}}} = \frac{R^۲}{۲}\left(\frac{\pi\alpha}{۱۸۰} - \sin\alpha\right)}$$ α برحسب درجه می‌باشد

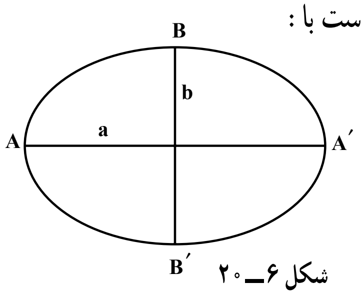
روش حل: مقادیر معلوم را در فرمول مساحت قطعه که در بالا به‌دست آمد قرار می‌دهیم.

$$S_{ABC} = \frac{(۱۲)^۲}{۲}\left[\frac{\pi(۳۷^\circ, ۲۵')}{۱۸۰} - \sin(۳۷^\circ, ۲۵')\right] = ۳/۲۷$$ مترمربع

بحث و بررسی: درصورتی که شکل زمین یا سازه به‌صورت قطعه باشد از فرمول بالا می‌توان مساحت آن را محاسبه کرد.

مساحت بیضی: اگر نصف قطر بزرگ‌تر بیضی را a و نصف قطر کوچک‌تر آن‌را b بنامیم (شکل ۶ـ ۲۰)، مساحت بیضی برابر است با :

$$S = \pi ab$$



شکل ۶ـ ۲۰

۶ـ۲ـ محاسبه‌ی مساحت با استفاده از مختصات رئوس (روش گوس)

اگر مختصات رئوس چندضلعی بسته‌ای که اضلاع آن‌را خطوط مستقیم تشکیل می‌دهد، در دست باشد، دقیق‌ترین راه محاسبه مساحت آن چندضلعی استفاده از «روش گوس» است.

برای محاسبه‌ی مساحت اشکال که به‌صورت منحنی‌های بسته‌ای هستند می‌توان از این روش استفاده کرد. مبنی بر آن‌که آن‌ها را به شکل n ضلعی درنظر بگیریم. هرچه فاصله‌ی نقاط اندازه‌گیری را کوچک‌تر کنیم دقت محاسبه‌ی مساحت بیش‌تر می‌شود.

محاسبه‌ی مساحت چهارضلعی ABCD: اگر مختصات رئوس چهارضلعی را به‌ترتیب، $D\Big/\begin{matrix}x_D\\y_D\end{matrix}$ ، $C\Big/\begin{matrix}x_C\\y_C\end{matrix}$ ، $B\Big/\begin{matrix}x_B\\y_B\end{matrix}$ و $A\Big/\begin{matrix}x_A\\y_A\end{matrix}$ درنظر بگیریم مساحت را می‌توان از این فرمول به‌دست آورد :

$$S = \frac{۱}{۲}\Big\|\left[(x_A y_B + x_B y_C + x_C y_D + x_D y_A) - (x_B y_A + x_C y_B + x_D y_C + x_A y_D)\right]\Big\|$$

از رابطه‌ی زیر نیز می‌توان برای سهولت حفظ و نوشتن فرمول فوق استفاده نمود :

$$\frac{x_A}{y_A} \times \frac{x_B}{y_B} \times \frac{x_C}{y_C} \times \frac{x_D}{y_D} \times \frac{x_A}{y_A}$$

تبصره: وسطین طرفین

به این ترتیب، مجموع حاصل‌ضرب طرفین رابطه‌ی یاد شده منهای مجموع حاصل‌ضرب وسطین با دو برابر مساحت چهارضلعی ABCD برابر خواهد بود.

تبصره: این فرمول را می‌توان برای محاسبه‌ی مساحت یک n ضلعی تعمیم داد :

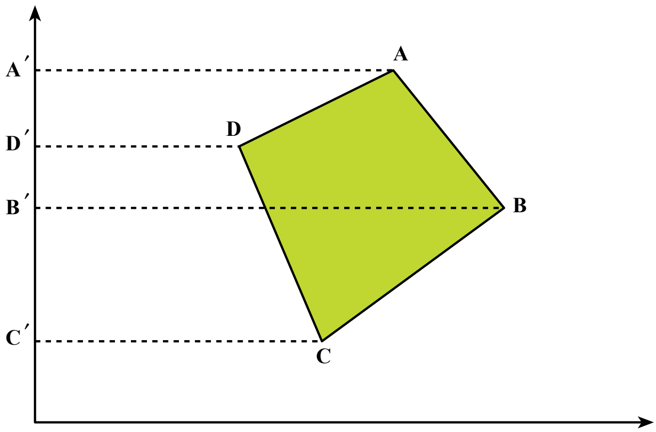
$$\frac{x_{A_۱}}{y_{A_۱}} \times \frac{x_{A_۲}}{y_{A_۲}} \times \frac{x_{A_۳}}{y_{A_۳}} \quad \text{---------} \quad \frac{x_{A_n}}{y_{A_n}} \times \frac{x_{A_۱}}{y_{A_۱}}$$

$$S = \frac{۱}{۲}\left[(x_{A_۱} y_{A_۲} + x_{A_۲} y_{A_۳} + \ldots) - (x_{A_۲} y_{A_۱} + x_{A_۳} y_{A_۲} + \ldots)\right]$$

توجه: در رابطه‌ی فوق رعایت توالی رئوس الزامی است.

اثبات فرمول مختصات

مطابق شکل ۶ــ۲۱ می‌توان مساحت ABCD را به این صورت نوشت :



شکل ۶ــ۲۱

$$S_{ABCD} = S_{ABB'A'} + S_{B'BCC'} - S_{A'ADD'} - A_{D'DCC'}$$

با توجه به این‌که مساحت هر ذوزنقه برابر است با مجموع دو قاعده در نصف ارتفاع،

بنابراین

$$S_{ABB'A'} = \frac{۱}{۲}(x_A + x_B)(y_A - y_B)$$

$$S_{B'BCC'} = \frac{۱}{۲}(x_B + x_C)(y_B - y_C)$$

$$S_{A'ADD'} = \frac{۱}{۲}(x_A + x_D)(y_A - y_D)$$

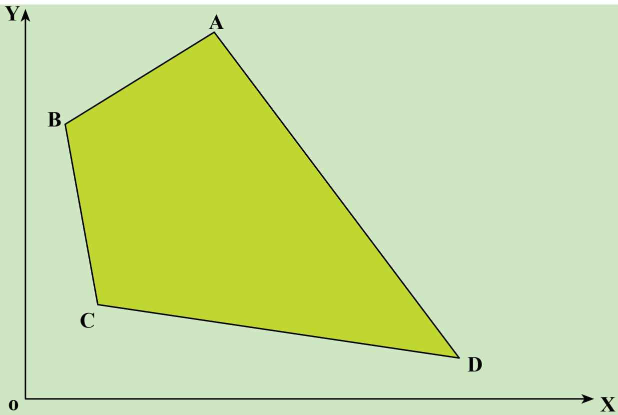
$$S_{D'DCC'} = \frac{۱}{۲}(x_D + x_C)(y_D - y_C)$$

پس از ضرب و ساده‌کردن، فرمول به این‌صورت درمی‌آید :

$$S_{ABCD} = \frac{۱}{۲}[(x_A y_B + x_B y_C + x_C y_D + x_D y_A) - (x_B y_A + x_C y_B + x_D y_C + x_A y_D)]$$

مثال ۶ــ۵: مطلوب‌است محاسبه مساحت چهارضلعی ABCD که مختصات رئوس آن معلوم و عبارت‌اند از :

متر $A \Big/ \begin{matrix} ۳۷۰/۳۵ \\ ۷۶۰/۴۷ \end{matrix}$ متر $B \Big/ \begin{matrix} ۸۹/۱۸ \\ ۵۷۰/۶۵ \end{matrix}$ متر $C \Big/ \begin{matrix} ۱۵۹/۴۲ \\ ۱۹۰/۲۵ \end{matrix}$ متر $D \Big/ \begin{matrix} ۹۰۴/۴۱ \\ ۹۰/۱۸ \end{matrix}$



شکل ۶ـ۲۲

راهکار کلی: فرمول مساحت چندضلعی با داشتن مختصات رئوس آن عبارت است از

$$S=\frac{۱}{۲}\left[(x_A y_B+x_B y_C+x_C y_D+x_D y_A)-(x_B y_A+x_C y_B+x_D y_C+x_A y_D)\right]$$

تذکر: برای نوشتن فرمول مساحت می‌توان مختصات رئوس چندضلعی را به‌صورت کسر زیر در کنار هم نوشت

$$\frac{x_A}{y_A}\quad\frac{x_B}{y_B}\quad\frac{x_C}{y_C}\quad\frac{x_D}{y_D}\quad\frac{x_A}{y_A}$$

تذکر: نقطه اول A در انتها تکرار شده

و علامت طرفین و علامت وسطین می‌باشد.

$$\text{مقدار مساحت}=\frac{۱}{۲}\left[\text{مجموع حاصل‌ضرب طرفین}-\text{مجموع حاصل‌ضرب وسطین}\right]$$

روش حل: مختصات رئوس چهارضلعی را در فرمول قرار می‌دهیم.

$$S=\frac{۱}{۲}\{[(۳۷۰/۳۵)(۵۷۰/۶۵)+(۸۹/۱۸)(۱۹۰/۲۵)+(۱۵۹/۴۲)(۹۰/۱۸)+(۹۰۴/۴۱)(۷۶۰/۴۷)]$$

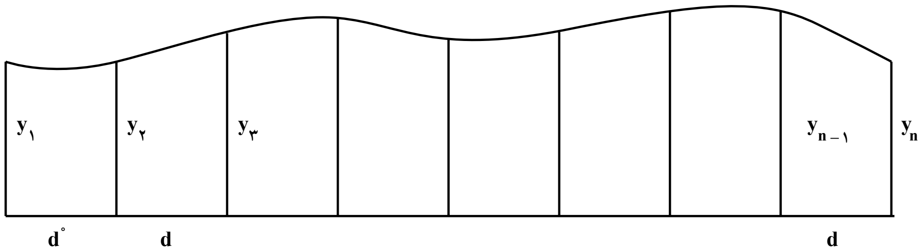
$$-[(۸۹/۱۸)(۷۶۰/۴۷)+(۱۵۹/۴۲)(۵۷۰/۶۵)+(۹۰۴/۴۱)(۱۹۰/۲۵)+(۳۷۰/۳۵)(۹۰/۱۸)]\}$$

$S=۲۸۳۱۰۲/۹۹$ متر مربع

بحث و بررسی: در تمام برداشت‌ها که مختصات رئوس پلیگون معلوم باشد می‌توان از این فرمول برای محاسبه مساحت استفاده کرد. این فرمول در محاسبه مساحت در نرم‌افزارها و دستگاه‌های اندازه‌گیری نیز استفاده می‌شود.

۶ــ۳ــ فرمول سیمپسون (Simpson)

برای استفاده از این فرمول در موقع برداشت باید ابتدا بر روی خط مبنی یک عده تقسیمات مساوی زوج (مثلاً به اندازه d) جدا کرده (مطابق شکل) سپس طول‌های عمود $y_۱$ و $y_۲$ و $y_۳$ و y_n را اندازه‌گیری کرد (n فرد).



شکل ۶ــ۲۳

این فرمول به شکل کلی زیر است :

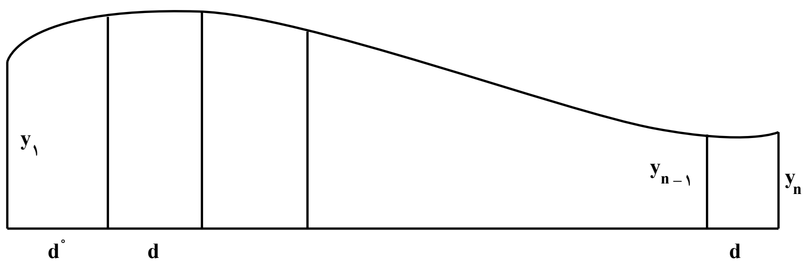
$$S=\frac{d}{۳}(y_۱+۲\sum y_i+۴\sum y_p+y_n)$$

که در آن $\sum y_i$ مجموع طول عمودهای فرد غیر از $y_۱$ و y_n و $\sum y_p$ مجموع طول عمودهای زوج و d فاصله عمودها می‌باشد.

۶ــ۴ــ فرمول ذوزنقه‌های هم ارتفاع

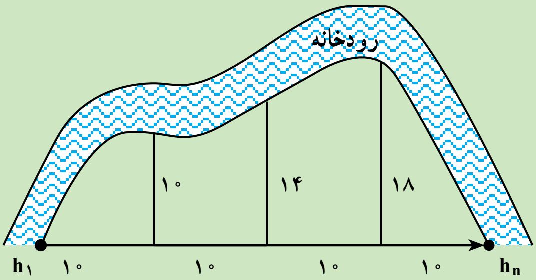
وقتی دقت زیادی مورد نظر نباشد چون با جدا کردن قسمت‌های مساوی روی خط مبنا شکل تبدیل به یک عده شکل‌های تقریباً ذوزنقه می‌شود که می‌توان مساحت هریک را از روی دستور مربوط به مساحت ذوزنقه حساب کرد. فرمول زیر نتیجه گرفته می‌شود.

$$S=d(\frac{y_۱+y_n}{۲}+y_۲+y_۳+\cdots+y_{n-۱})$$



شکل ۶ــ۲۴

مثال ۶ــ۶: به منظور تعیین مساحت قطعه زمینی در کنار رودخانه (مطابق شکل) اندازه‌های به‌دست‌آمده را می‌بینید این مساحت چند مترمربع است؟



شکل ۶ــ۲۵

راهکار کلی: این مسئله را ظاهراً می‌توان از دو روش ذوزنقه‌های هم‌ارتفاع و سیمپسون حل کرد ولی چون تعداد تقسیمات مساوی فرد در نظر گرفته شده رابطه سیمپسون را نمی‌توان به‌کار برد و از رابطه ذوزنقه‌های هم‌ارتفاع استفاده می‌کنیم.

روش حل

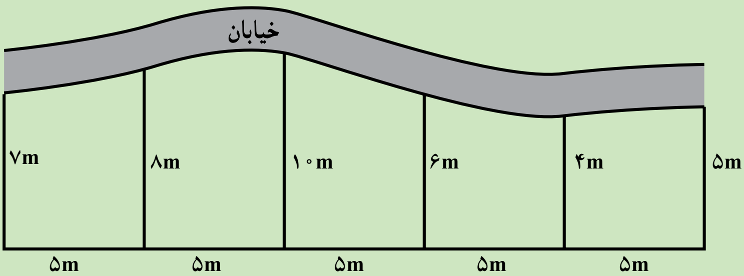
$$S = d\left(\frac{y_۱ + y_n}{۲} + y_۲ + y_۳ + y_{n-۱}\right) \Rightarrow$$

$$S = ۱۰\left(\frac{۰+۰}{۲} + ۱۰ + ۱۴ + ۱۸\right) \Rightarrow$$

$$S = ۴۲۰ m^۲$$

بحث و بررسی: همان‌طورکه در شکل بالا مشاهده می‌کنید ارتفاع $h_۱$ و h_n در قطعه‌های اول و آخر زمین صفر است بنابراین در رابطه بالا به جای آن‌ها صفر قرار می‌گیرد.

مثال ۶ــ۷: مساحت قطعه زمین زیر چند مترمربع است؟



شکل ۶ــ۲۶

راهکار کلی: چون تعداد تقسیمات مساوی زوج می‌باشد می‌توان از رابطه سیمپسون برای محاسبه مساحت این قطعه زمین استفاده کرد. پس از سمت چپ عمودها را از شماره ۱ شماره‌گذاری می‌کنیم و رابطه سیمپسون را به‌کار می‌بریم.

روش حل

$$\begin{cases} S=\frac{d}{۳}(y_۱+۲\sum y_i+۴\sum y_p+y_n) \\ \sum y_i=۱۰+۴=۱۴ \\ \sum y_p=۸+۶=۱۴ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S=\frac{۵}{۳}(۷+۲\times(۱۴)+۴(۱۴)+۵) \\ =\frac{۵}{۳}(۷+۲۸+۵۶+۵) \\ =۱۶۰m^۲ \end{cases}$$

بحث و بررسی: این مسئله را می‌توان از رابطه ذوزنقه‌های هم‌ارتفاع حل کرد. امّا روش سیمپسون دقت بیش‌تری دارد و برای محاسبه مساحت روش مناسب‌تری می‌باشد.

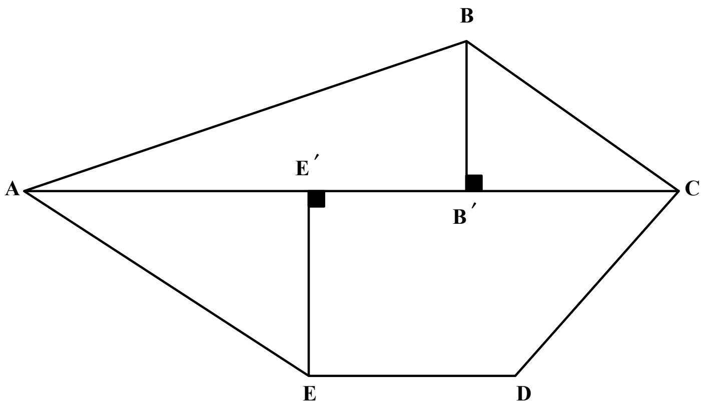
مسائل

مسأله‌ی ۱: برای اندازه‌گیری مساحت پنج‌ضلعی ABCDE آن‌را به‌صورت شکل ۶ــ۲۷ تقسیم کرده، طول‌های زیر را اندازه‌گیری کرده‌ایم. مطلوب است محاسبه‌ی مساحت زمین:

$AE'=۳۷/۴۰ \quad E'C=۴۸/۱۵$

$AB'=۵۶/۴۶,\ B'C=۲۸/۰۲,\ BB'=۲۱/۱۲, EE'=۲۹/۱۸$ و $ED=۲۷/۰۳$

(اندازه‌گیری‌ها برحسب متر است.)

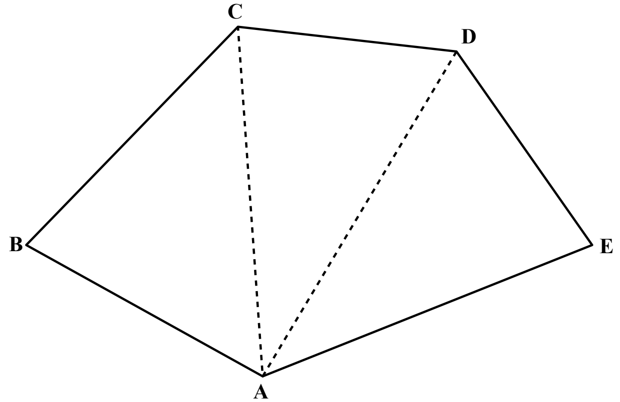


شکل ۶ــ۲۷

مسأله‌ی ۲: برای محاسبه‌ی مساحت، قطعه زمینی (مطابق شکل ۶ــ۲۸) اضلاع و دو قطر آن اندازه‌گیری شده‌اند. مساحت زمین را به‌دست آورید :

$AE = ۴۶/۰۷$, $DE = ۳۳/۹۵$, $CD = ۳۱/۰۵$, $BC = ۳۹/۸۰$, $AB = ۳۵/۱۶$

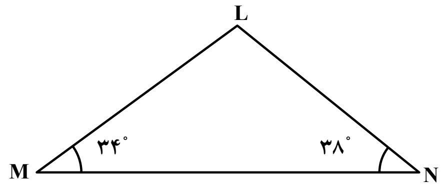
$AC = ۴۵/۲۰$ و $AD = ۴۸/۱۳$



شکل ۶ــ۲۸

مسأله‌ی ۳: به‌منظور تعیین مساحت قطعه‌زمینی به شکل مثلث MNL (شکل۶ــ۲۹) زوایای M و N و طول MN اندازه‌گیری شده و مقادیر زیر به‌دست آمده است. مساحت قطعه‌زمین را به‌دست آورید :

$MN = ۵۲/۰۹$ متر و $\angle N = ۳۸^\circ$ و $\angle M = ۳۴^\circ$



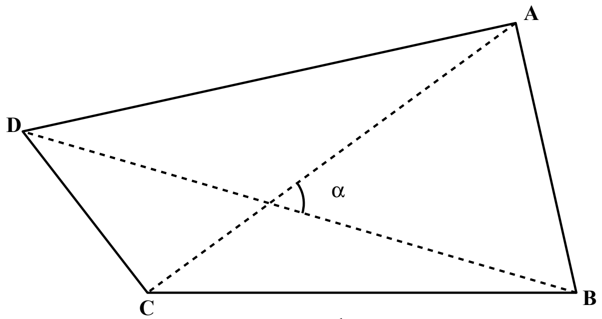
شکل ۶ــ۲۹

مسأله‌ی ۴: زمینی است به شکل چهارضلعی ABCD (شکل ۶ــ۳۰) می‌خواهیم مساحت آن را تعیین کنیم، اما به سبب وجود موانع بین بعضی اضلاع نتوانستیم به‌طور مستقیم اضلاع چهارضلعی را اندازه‌گیری کنیم و به‌جای آن دو قطر AC و BD و زاویه‌ی بین دو قطر را اندازه‌گیری کرده‌ایم. با این ترتیب، مساحت زمین را به‌دست آورید :

$AC = ۶۲/۱۵$ متر

$BD = ۷۸/۰۶$ متر

$\hat{\alpha} = ۵۴^\circ$

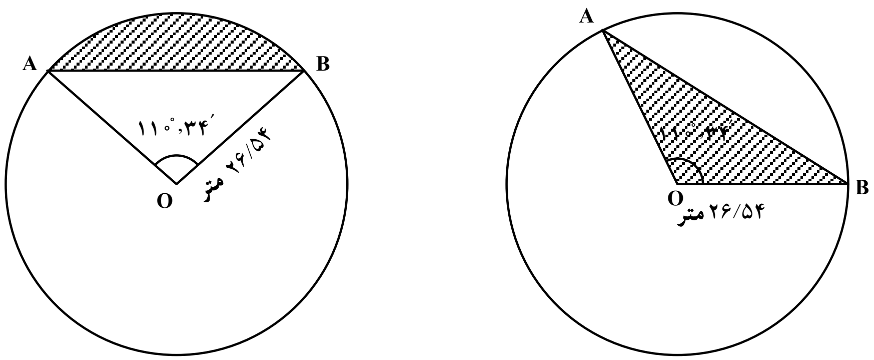


شکل ۶ـ۳۰

مسألهٔ ۵: مساحت قطعه زمین ABCDEF را که مختصات رئوس آن معلوم است به روش گوس محاسبه کنید.

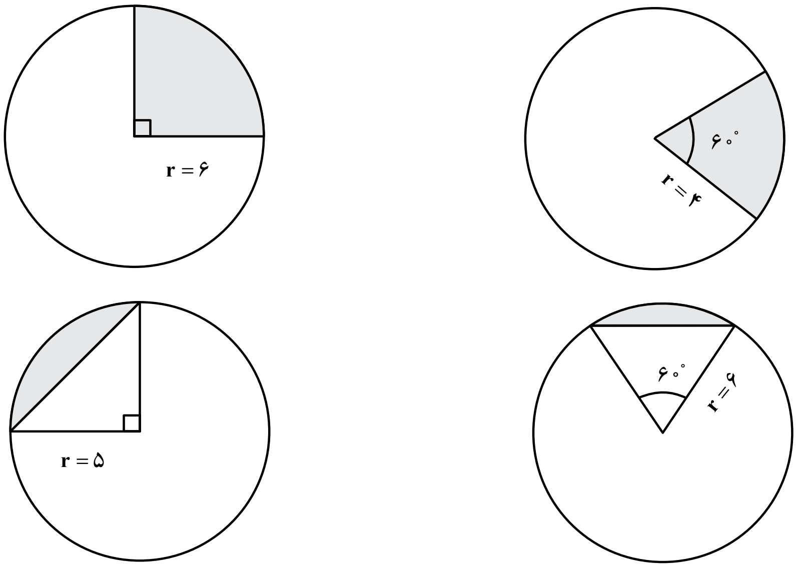
A ۱۰۰/۱۰۰ ، B ۹۸/۱۵۰ ، C ۱۲۵/۲۱۰ ، D ۲۸۷/۱۷۰ ، E ۳۰۱/۱۲۲ ، F ۱۵۳/۱۰۴

مسألهٔ ۶: دایره‌ای به شعاع **۲۶/۵۴**متر است (شکل ۶ــ۳۱). وتر AB مقابل زاویهٔ ′۱۱۰°,۳۴ است. سطح هاشور زده را محاسبه کنید.



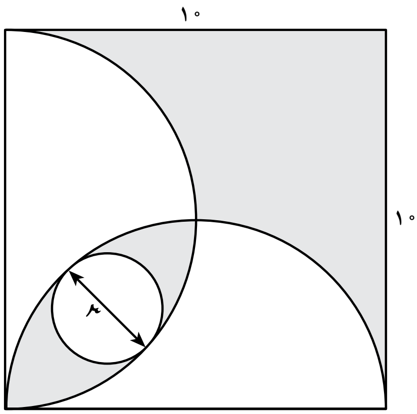
شکل ۶ـ۳۱

مسألهٔ ۷: مساحت ناحیه‌های سایه‌دار را در شکل ۶ــ۳۲ بیابید.



شکل ۶ــ۳۲

مسألهٔ ۸: مساحت ناحیهٔ سایه‌دار را در شکل ۶ــ۳۳ بیابید.



شکل ۶ــ۳۳

مسألهٔ ۹: مساحت یک باغچه به شکل بیضی که قطرهای آن به ترتیب ۱۲ و ۸ متر می‌باشد را به دست آورید.

آیا می‌دانید

زندگی‌نامه: ابوالوفامحمدبن یحیی‌بن اسماعیل بوزجانی از بزرگترین ریاضی‌دانان و منجّمان دوره‌ی اسلامی است که در سال ۳۲۸ هـ ــ ق در شهر بوزجان (نام قدیم تربت‌جام) تولد یافت و در سن بیست سالگی به عراق مهاجرت کرد و تا آخر عمر در بغداد می‌زیست و با بیرونی معاصر بود و کسوفی را با قرارداد قبلی با هم رصد کرده‌اند بوزجانی که یکی از مشاهیر علم هندسه می‌باشد دارای تألیفات بی‌شماری است از آن جمله کتاب اعمال هندسی و کتاب مجسطی بوزجانی (درباره‌ی علم مثلثات مسطحه و کروی و فرمول‌های مطرح شده) کتاب حساب بوزجانی و جواب ابوالوفا برای محاسبه مساحت مثلث به حبوبی و مسأله‌های متعدد دیگر.

منابع

۱ــ کتاب متفکران اسلام جلد دوّم ترجمه آرام فصل پنجم ص ۱۴۶

۲ــ تاریخ علوم عربی نوشته مصطفی موالدی جلد ۳ ص ۵۳ــ۵۰ عربی سال ۱۹۷۹محل انتشار دمشق

۳ــ کتاب بوزجانی‌نامه