

با قرار دادن مقدار x در تابع موج، نتیجه می‌شود:

$$u_M = 5 \times 10^{-2} \sin(4\pi t - \frac{\pi}{4})$$

تمرین ۴-۴

چشمه موجی نوسان‌هایی با بسامد 20 Hz و دامنه 5 cm در یک محیط کشسان و در راستای محور y انجام می‌دهد. اگر این نوسان‌ها در خلاف جهت محور x و با سرعت 10 m/s در این محیط منتشر شوند:

(الف) طول موج و عدد موج را محاسبه کنید.

(ب) تابع این موج را بنویسید.

(ب) کمترین فاصله نقطه M از چشمه موج چه اندازه باشد تا با چشمه موج در فاز مخالف قرار گیرد.

فاصله دو نقطه محیط از یکدیگر: محیطی را در نظر بگیرید که در آن موجی در حال انتشار است. معادله نوسان دو نقطه A و B از این محیط که در یک جهت انتشار موج و به فاصله x_B از مبدأ مختصات واقع‌اند، با توجه به رابطه ۱۲-۴، به صورت زیر است:

$$u_A = A \sin(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x_A)$$

$$u_B = A \sin(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x_B)$$

$$|\Delta\phi| = \frac{2\pi}{\lambda} |x_B - x_A|$$

اختلاف فاز این دو نقطه برابر است با:

اگر « $x_B - x_A$ » را با Δx نشان دهیم، داریم:

$$|\Delta\phi| = \frac{2\pi}{\lambda} |\Delta x| = k |\Delta x| \quad (12-4)$$

از رابطه ۱۲-۴ با معلوم بودن اختلاف فاز دو نقطه محیط که در یک جهت انتشار موج‌اند، می‌توان فاصله دو نقطه را از یکدیگر (یعنی Δx) محاسبه کرد.

۱۱۲

پاسخ: الف) $\lambda = 5 \text{ m}$ و $k = 4\pi$

$$u_y = 5 \times 10^{-2} \sin(4\pi t - 4\pi x)$$

(ب) با توجه به نتیجه تمرین ۴-۳، در صورتی دو نقطه محیط در فاز مخالف‌اند که اختلاف فاز آن مضرب فردی از π باشد. به ازای اولین مضرب فرد، داریم:

$$|\Delta\phi| = \frac{\pi}{2}$$

چون چشمه موج در $x = 0$ فرض شده است، داریم:

$$\phi_1 = 4\pi t$$

همچنین فاز موج در نقطه M عبارت است از:

$$\phi_2 = 4\pi t - 4\pi x_M$$

به این ترتیب داریم:

$$x_M = \frac{1}{4} \text{ m}$$

تمرین پیشنهادی

تابع موجی در SI به صورت زیر است:

$$u_y = 0.05 \sin\left[\frac{\pi}{4}(4t - 10x) - \frac{\pi}{4}\right]$$

الف) دامنه، طول موج، بسامد و سرعت موج را پیدا کنید.

ب) نقش موج را در لحظه $t = \frac{1}{10} \text{ s}$ رسم کنید.

پ) در نقطه‌ای به فاصله $x = 0.5 \text{ m}$ از چشمه موج، سرعت و شتاب ذره نوسان کننده را در لحظه $t = 0.05 \text{ s}$ به دست آورید.

پاسخ: الف) $\lambda = 4 \text{ m}$ ، $f = 10 \text{ Hz}$ ، $A = 0.05 \text{ m}$ ، $v = 4 \text{ m/s}$

ب) به ازای $t = \frac{1}{10} \text{ s}$ ، تابع موج به صورت

$$u_y = -0.05 \sin 5\pi x$$

موج را در این لحظه نشان می‌دهد.

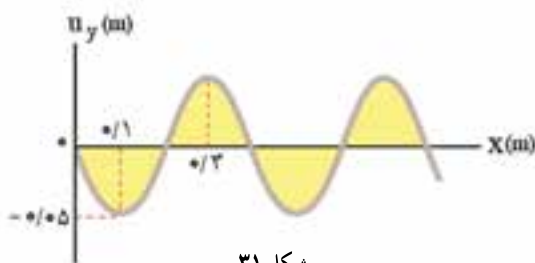
پ) معادله نوسانی ذره در فاصله $x = 0.5 \text{ m}$

عبارت است از:

$$u_y = 0.05 \sin(2\pi t - \frac{2}{7}5\pi)$$

سرعت و شتاب این ذره نوسانی در لحظه $t = 0.05 \text{ s}$ برابر است با:

$$u_y \approx 2/22 \text{ m/s} \quad , \quad a_y \approx -138 \text{ m/s}^2$$



شکل ۳۱

رابطه ۱۵-۴ نشان می‌دهد که اختلاف فاز دو نقطه محیط که به فاصله $\Delta x = 1\text{m}$ از یکدیگر و در یک جهت انتشار موج‌اند، برابر است با :

$$\Delta \phi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta x = k \Delta x \quad (15-4)$$

رابطه ۱۶-۴ را می‌توان تعریفی برای عدد موج دانست و گفت : عدد موج برابر اختلاف فاز دو نقطه محیط است که به فاصله یک متر از یکدیگر قرار دارند.

مثال ۵-۴

موجی در یک محیط، در حال انتشار است. معادله نوسانی نقطه‌های A و B از این محیط، در SI، بصورت $u_A = 0.02 \sin(5\pi t - \pi/4)$ و $u_B = 0.02 \sin(5\pi t - \pi/2)$ است. اگر موج از نقطه A به نقطه B برود، کمترین فاصله دو نقطه را از یکدیگر به دست آورید. سرعت انتشار موج 2m/s است.

پاسخ

ابتدا بسامد نوسان‌ها و سپس طول موج را محاسبه می‌کنیم :

$$\omega = 2\pi f$$

$$2\pi f = 5\pi$$

$$f = 2.5\text{Hz}$$

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{2}{2.5} = 0.8\text{m} = 80\text{cm}$$

اکنون اندازه اختلاف فاز دو نقطه را محاسبه می‌کنیم :

$$\Delta \phi = |\phi_B - \phi_A|$$

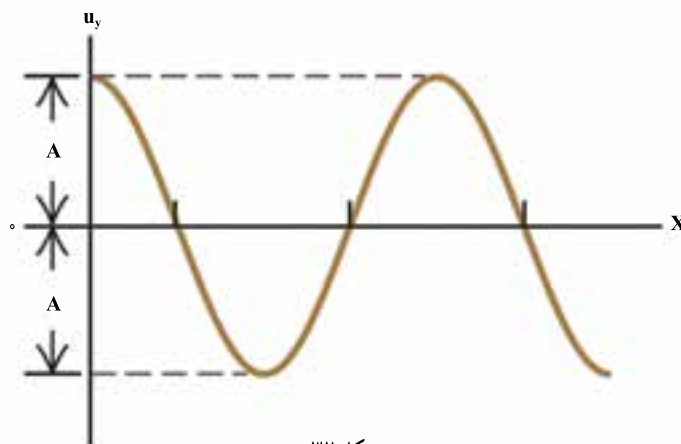
$$\Delta \phi = \pi/2 - \pi/4 = \pi/4 \text{ rad}$$

$$\frac{2\pi}{\lambda} \Delta x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \Delta x = \frac{\lambda}{8} = 10\text{cm}$$

$$\Delta x = AB = 10\text{cm}$$

۱۱۲

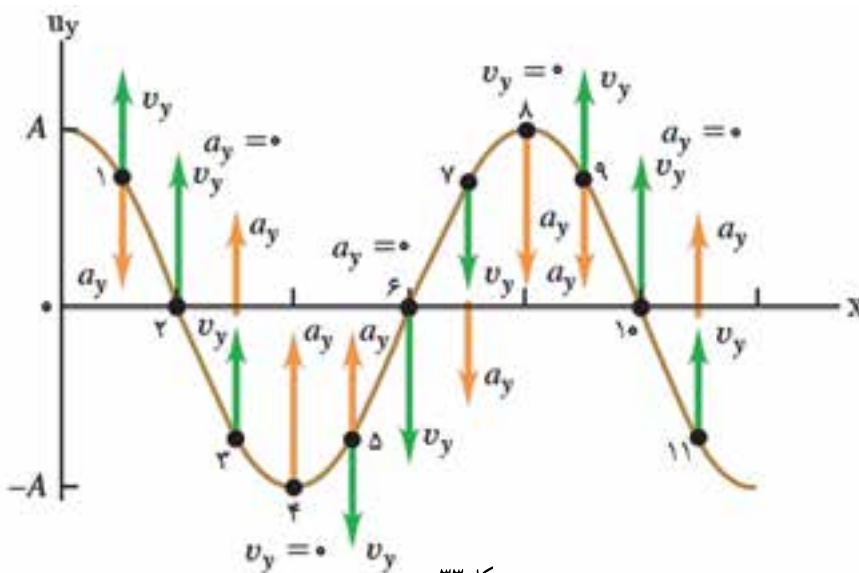
شکل ۳۲ نقش موجی را در یک لحظه معین t نشان می‌دهد. چند نقطه نوسانی دلخواه روی این نقش موج در نظر بگیرید و وضعیت بردارهای سرعت و شتاب آنها را مشخص کنید.



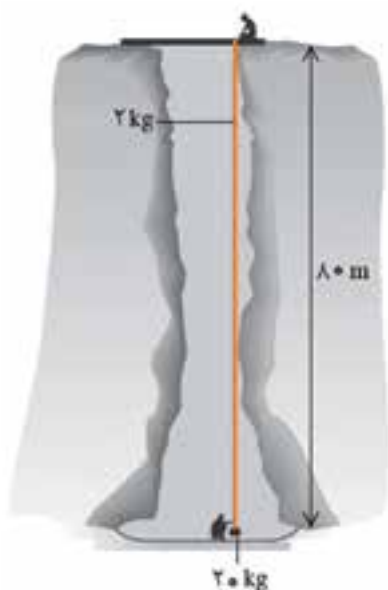
شکل ۳۲

پاسخ : وقتی موجی سینوسی در یک محیط کشسان (مثلاً یک طناب دراز کشیده) منتشر می‌شود، ذره‌های تشکیل دهنده آن را به‌طور هماهنگ ساده به نوسان وامی‌دارد.

در شکل ۳۳ وضعیت بردارهای سرعت و شتاب برای ۱۱ ذره نوسانی از محیط نشان داده شده است. توجه کنید که شتاب a_y در هر نقطه روی طناب با جابه‌جایی u_y در آن نقطه متناسب است. جایی که انحنای طناب روبه بالاست شتاب رو به بالا و جایی که انحنای طناب روبه پایین است، شتاب روبه پایین قرار دارد. در نقطه‌های ۶، ۲ و ۱۰ شتاب ذره‌های در حال نوسان و در نقطه‌های ۴ و ۸ سرعت ذره در حال نوسان صفر است.



شکل ۳۳



شکل ۳۴

یک سر یک طناب نایلونی به تیری ثابت در بالای یک چاه معدن عمودی به عمق 8 m وصل شده است (شکل ۳۴). طناب توسط جعبه‌ای محتوی مواد معدنی به جرم 2 kg که به انتهای پایین آن بسته شده است کشیده می‌شود. جرم طناب 2 kg است. زمین شناسی که در ته معدن است با تکان دادن عرضی طناب به همکاری در بالای چاه علامت می‌دهد. از آنجا که جرم طناب در مقایسه با جرم جعبه محتوی مواد معدنی کوچک است، فرض کنید که کشش طناب در همه جای طناب یکسان است.

الف) سرعت موج عرضی در طناب چقدر است؟

ب) اگر ذره‌های طناب حرکت هماهنگ ساده عرضی با بسامد 2 Hz انجام دهند، چند چرخه موج در طول طناب وجود دارد؟

حل: الف) کشش طناب ناشی از جعبه محتوی مواد معدنی برابر است با:

$$F = mg = (2\text{ kg})(9.8\text{ m/s}^2) = 19.6\text{ N}$$

و جرم یکای طول طناب برابر است با:

$$\mu = \frac{2\text{ kg}}{8\text{ m}} = 0.25\text{ kg/m}$$

به این ترتیب بزرگی سرعت موج برابر است با:

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{19.6\text{ N}}{0.25\text{ kg/m}}} = 88.5\text{ m/s}$$

ب) طول موج برابر است با:

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{88.5\text{ m/s}}{2\text{ Hz}} = 44.3\text{ m}$$

طول طناب 8 m و در نتیجه تعداد چرخه‌های موج در طناب برابر است با:

$$\frac{8\text{ m}}{44.3\text{ m/cycle}} = 0.18 \text{ چرخه}$$

توجه کنید که اگر وزن طناب را منظور می‌کردیم، کشش در بالای طناب بزرگ‌تر از پایین آن خواهد بود. بنابراین وقتی موجی در طناب حرکت می‌کند، سرعت موج و طول موج افزایش می‌یابند. توجه به این اثر در این کتاب موردنظر نیست.

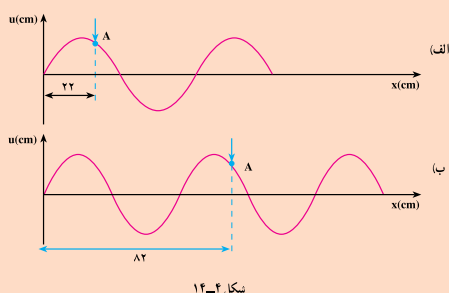
فعالیت ۴-۴

با استدلال توضیح دهید که چرا در مثال ۵-۴، Δx کمترین فاصله دو نقطه از محیط است که در یک جهت انتشار موج واقع اند.

تمرین ۵-۴

شکل‌های ۱۴-۴ الف و ب، نمودار یک موج را در دو لحظه t_1 و t_2 نشان می‌دهد که در امتداد محور x منتشر می‌شود. علامت پیکان، یک نقطه از موج را در این دو لحظه نشان می‌دهد. با فرض اینکه محور قائم لزوماً محور y نیست، مطلوب است:

الف) این موج طولی است یا عرضی و عدد موج آن چه اندازه است؟
ب) اگر بسامد نوسان‌ها ۲۵ Hz باشد، $\Delta t = t_2 - t_1$ چند ثانیه است؟



شکل ۱۴-۴

۱۱۵

پاسخ: انتظار می‌رود دانش‌آموزان با توجه به این که پیش از انجام این فعالیت دیدند (تمرین ۳-۴) که اگر $\Delta\phi$ مضرب زوجی از π باشد دو نقطه هم‌فاز و چنانچه مضرب فردی از $\frac{\pi}{2}$ باشد در فاز مخالف‌اند بتوانند به این پرسش پاسخ دهند.
به ازای اولین حالتی که دو نقطه در فاز مخالف‌اند داریم:

$\Delta\phi = 0.5\pi \text{ rad}$ در حالیکه در مثال ۵-۴ اختلاف فاز دو نقطه A و B از این مقدار کمتر و برابر $0.3\pi \text{ rad}$ است.

تمرین ۵-۴

الف) اگر امتداد نوسان ذره‌های محیط کشسان را در امتداد محور y فرض کنیم در این صورت نمودار تابع $u_y(x,t)$ ، نشان دهنده یک موج عرضی است. در صورتی که امتداد نوسان‌های ذره‌های محیط کشسان در راستای محور x باشد، در این صورت نمودار تابع $u_x(x,t)$ ، نشان دهنده یک موج طولی است.

با توجه به نمودار شکل ۱۴-۴، طول موج برابر است با، $\lambda = 82 \text{ cm} - 22 \text{ cm} = 60 \text{ cm} = 0.6 \text{ m}$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0.6 \text{ m}} = \frac{1}{3} \pi \text{ rad/m}$$

به این ترتیب عدد موج برابر خواهد شد با:

ب) چون اینجا، موج در بازه زمانی Δt درست به اندازه یک طول موج پیش‌روی کرده است، لذا Δt برابر دوره

$$\Delta t = T = \frac{1}{f} = \frac{1}{25 \text{ Hz}} = 0.04 \text{ s}$$

موج است. به این ترتیب داریم: