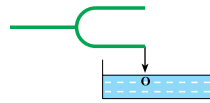
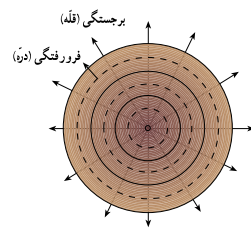


۴-۴- انتشار موج در دو و سه بُعد



شکل ۱۵-۴

اگر مطابق شکل ۱۵-۴ به کمک یک سوزنی که به انتهای یک شاخه دیابازون نصب شده است، ضربه‌هایی را در راستای قائم بر سطح آب درون تشتک وارد کنیم، موج‌های ایجاد شده به صورت دایره‌هایی به مرکز چشمه موج، در سطح آب، یعنی در دو بُعد منتشر می‌شوند.



شکل ۱۶-۴

در شکل ۱۶-۴ دو دسته دایره می‌بینید. دایره‌های تویر، برجستگی‌ها و دایره‌های خط‌چین، فرورفتگی‌ها را در سطح آب نشان می‌دهند. به این دایره‌های درحال انتشار **جبهه موج** می‌گوییم و آن را چنین تعریف می‌کنیم: **جبهه موج مکان هندسی نقطه‌هایی از محیط است که در آن نقطه‌ها تابع موج دارای فاز یکسانی است.** بنابراین، اختلاف فاز نقطه‌های واقع بر یک جبهه موج همواره برابر صفر است.

موج‌های سطح آب، نمونه‌ای از انتشار موج در دو بُعد است. موج‌هایی نیز هستند که در سه بُعد منتشر می‌شوند:

انتشار موج‌های صوتی و انتشار موج‌های الکترومغناطیسی، نمونه‌هایی از انتشار موج در سه بُعداند. اگر یک چشمه موج نقطه‌ای را در یک محیط همسانگرد سه‌بُعدی قرار دهیم (مثلاً بلندگوی کوچکی در هوای درون اتاق)، جبهه موج به صورت کره‌هایی خواهد بود که مرکز همه آنها، چشمه موج است و از چشمه موج در سه بُعد منتشر می‌شوند و شعاع آنها با انتشار موج به‌تدریج افزایش می‌یابد. به این موج‌ها، موج کروی می‌گوییم. شکل ۱۷-۴ الف قسمت‌های کوچکی از سطح موج‌ها را که از چشمه موج نقطه‌ای S گسیل می‌شوند نشان می‌دهد.

در فاصله بسیار دور از یک چشمه موج نقطه‌ای، قسمت‌های کوچکی از جبهه موج‌های کروی، همان‌گونه که در شکل ۱۷-۴ ب نشان داده شده است، به صورت صفحه‌هایی موازی یکدیگر درمی‌آیند. در این صورت به آنها **موج تخت** می‌گوییم.

۱۱۶

۴-۴- انتشار موج در دو و سه بُعد

راهنمای تدریس: تا اینجا دانش‌آموزان عمدتاً با انتشار موج در یک بُعد (در یک تار یا ریسمان کشیده) آشنا شده‌اند. از آنجا که در جهان واقعی بیشتر محیط‌های کشسان آرمانی و غیرآرمانی که موج در آنها منتشر می‌شود، دوبعدی یا سه‌بُعدی‌اند،

نشان از اهمیت این بخش است. موج‌های صوتی (شکل ۳۵)، موج‌های لرزه‌ای (شکل ۳۶)، موج‌های ایجاد شده در سطح آب (شکل ۳۷) و موج‌های الکترومغناطیسی (شکل ۳۸) تنها نمونه‌ای از موج‌های چندبُعدی هستند که می‌توان به آنها اشاره نمود.



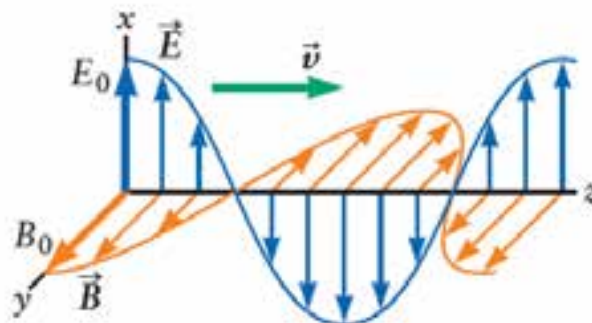
شکل ۳۵



شکل ۳۷



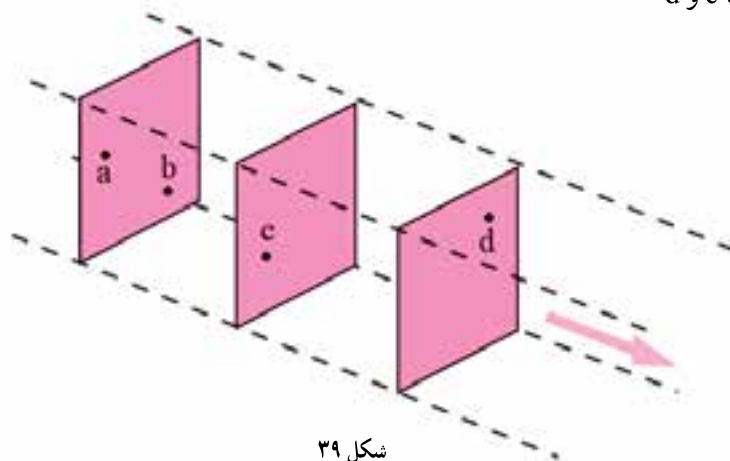
شکل ۳۶



شکل ۳۸

پرسش پیشنهادی

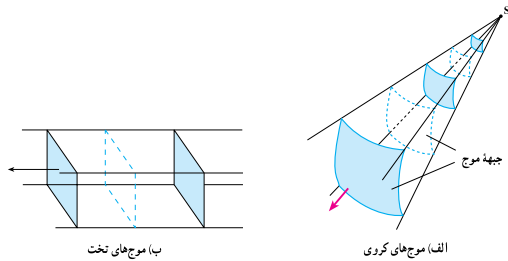
- در شکل ۳۹ چند نقطه روی جبهه های یک موج تخت نشان داده شده است.
- الف) تابع موج کدام یک از این نقاط با یکدیگر هم فازند؟
- ب) حداقل دو نقطه را نام ببرید که تابع موج آنها دارای فاز یکسانی نیست.
- پاسخ: الف) a و b
ب) a و c یا c و d



شکل ۳۹

موج حامل انرژی است

راهنمای تدریس : در این قسمت دانش آموزان باید توجه کنند که هر حرکت موجی دارای انرژی است و منشاء این انرژی نیز به نحوه تولید حرکت های موجی بازمی گردد. همان طور که دیدیم برای تولید موج، باید نیرویی بر بخشی از محیط کشسان وارد شود؛ نقطه ای که به آن نیرو وارد می شود حرکت می کند و در نتیجه بر روی محیط کار انجام می دهیم. وقتی موج منتشر می شود، هر بخش از محیط نیرویی وارد می کند و بر بخش مجاور خود کار انجام می دهد. به این روش موج می تواند انرژی را از یک ناحیه محیط کشسان به ناحیه دیگر محیط منتقل کند. همچنین باید توجه شود هنگامی که موج حرکت می کند، هم انرژی جنبشی و هم انرژی پتانسیل کشسانی را با خود انتقال می دهد. از آنجا که در این کتاب تنها به بررسی حرکت موج های سینوسی وابسته به نوسان هماهنگ ساده ذره های یک محیط کشسان می پردازیم، انرژی مکانیکی هر ذره محیط که موج به آن می رسد از رابطه ای به دست می آید که دانش آموزان پیش از این با آن آشنا شده اند.



شکل ۱۷-۴

موج حامل انرژی است : موج ها با خود انرژی را از نقطه ای به نقطه دیگر منتقل می کنند. اگر یک سر طنابی در دست شما باشد و از سر دیگر آن موجی به طرف شما منتشر شود، وقتی موج به دست شما می رسد، ضربه موج می خواهد طناب را از دست شما خارج کند. در فصل ۳ دیدیم، انرژی مکانیکی نوسانگر ساده با مجذور دامنه و مجذور بسامد نوسانگر متناسب است.

وقتی یک موج سینوسی با دامنه A و بسامد f در طناب بلند و کشیده شده ای پیش می رود، همراه با پیشروی موج، انرژی نیز در طناب پیش می رود. توان انتقال انرژی از هر نقطه طناب تابعی از زمان است و با گذشت زمان تغییر می کند. مقدار متوسط توان انتقال انرژی از هر نقطه طناب در مدت زمان یک دوره (T) از رابطه زیر به دست می آید :

$$\bar{P} = 2\pi^2 A^2 f^2 \mu v \quad (17-4)$$

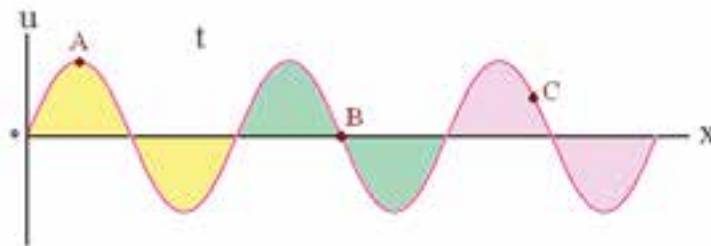
در رابطه ۱۷-۴، μ ، جرم واحد طول طناب و v سرعت انتشار موج در طناب است. اینکه مقدار متوسط توان انتقال انرژی از هر نقطه طناب با مجذور دامنه و مجذور بسامد موج متناسب است، در مورد انتشار موج سینوسی در سایر محیط ها نیز درست است (مثلاً انتشار امواج سینوسی روی سطح آب یا انتشار امواج صوتی سینوسی در هوا).

پاژتاب موج : فرض کنید موجی در یک محیط در حال انتشار است. به نظر شما وقتی این موج

۱۱۷

مثال پیشنهادی

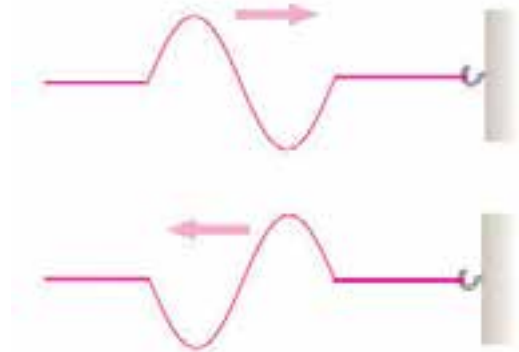
شکل ۴۰ نقش موجی را در یک لحظه معین t در یک محیط کشسان نشان می دهد. انرژی ذره A ، B و C را با یکدیگر مقایسه کنید و نوع انرژی هریک را بیان کنید.



شکل ۴۰

پاسخ : ذره A تنها انرژی پتانسیل کشسانی و ذره B تنها دارای انرژی جنبشی است. در حالی که ذره C هم دارای انرژی جنبشی و هم دارای انرژی پتانسیل است.

شکل ۴۱ نقش دو موج مختلف را در یک لحظه معین t نشان می‌دهد. اگر دامنه دو موج یکسان باشد، انرژی آنها را با یکدیگر مقایسه کنید.

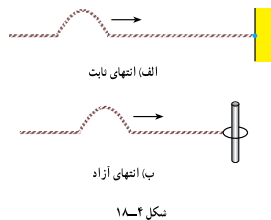


شکل ۴۱

پاسخ: انتظار می‌رود دانش‌آموزان پس از مقایسه بسامد دو موج، با توجه به رابطه انرژی مکانیکی پاسخ دهند.

به انتهای محیط، یعنی مرز این محیط با محیط دیگر، می‌رسد چه پدیده‌ای رخ می‌دهد؟ مقداری از انرژی این موج از مرز مشترک دو محیط عبور می‌کند و وارد محیط دوم می‌شود و بقیه آن از مرز مشترک بازتاب شده و به محیط اول برمی‌گردد. برای بررسی پدیده بازتاب، باید، اولاً فرض کنیم که تمام انرژی موج از مرز مشترک دو محیط بازتاب شده و به محیط اول برمی‌گردد و ثانیاً اصطکاک ناچیز است و انرژی موج هم تلف نمی‌شود. نتیجه به دست آمده در این مورد در مورد دیگر موج‌های مکانیکی، نظیر موج‌های صوتی و نیز موج‌های الکترومغناطیسی، درست است.

برای این بررسی، فرض می‌کنیم که یک تپ روی یک طناب در حال انتشار است. بازتاب (موج) از انتهای طناب به نحوه اتصال انتهای طناب بستگی دارد. انتهای طناب، ممکن است محکم به یک دیوار ثابت شده باشد. در این صورت، انتهای طناب را انتهای ثابت یا بسته می‌نامیم (شکل ۱۸-۴ الف). همچنین ممکن است، انتهای طناب به حلقه بسیار سبکی وصل شده باشد و بتواند روی میله قائمی بدون اصطکاک، بالا و پایین برود (شکل ۱۸-۴ ب). در این حالت، انتهای طناب انتهای آزاد نامیده می‌شود. بدین ترتیب، انتهای ثابت نمی‌تواند نوسان کند، در صورتی که انتهای آزاد برای نوسان آزاد است.



شکل ۱۸-۴

بازتاب از انتهای ثابت: وقتی تپ مطابق شکل ۱۸-۴ به انتهای ثابت P می‌رسد، جزء کوچکی از طناب که در مجاورت نقطه P قرار دارد، به آن نیروی رو به بالا وارد می‌کند تا نقطه P را به نوسان وادارد. نقطه P ثابت است و نمی‌تواند جابه‌جا شود، بنا به قانون سوم نیوتون، به طناب نیروی رو به

۱۱۸

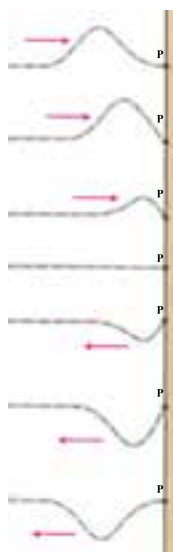
بازتاب موج

راهنمای تدریس: تا اینجا صرفاً به بررسی وضعیت آرمانی‌ای پرداختیم که موج در یک محیط کشسان به طور پیوسته در یک جهت منتشر می‌شود. از آنجا که ابعاد هر محیط کشسان، مثلاً طول یک طناب، محدود است، لذا وقتی موج به مرکز محیط خود برخورد می‌کند، همه یا بخشی از موج بازتابیده می‌شود.

برای توجه بیشتر دانش‌آموزان به این موضوع اشاره به مثال‌هایی از قبیل پژواک یک موج صوتی از یک صخره یا بازتاب تپ موج در حال حرکتی از سر طنابی که به جسمی محکم وصل شده است می‌تواند مفید باشد.

بازتاب از انتهای ثابت

راهنمای تدریس: در این قسمت حالتی را برای دانش‌آموزان بررسی می‌کنیم که انتهای طناب یا ریسمان به محل محکمی بسته شده



شکل ۱۹-۴ انتهای طناب ثابت است.

تمرین ۴-۶

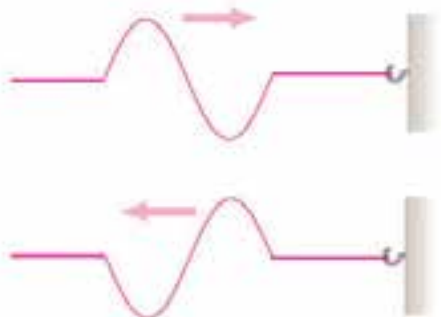
در شکل ۲۰-۴ تپ روی طنابی در حال انتشار است. شکل تپ بازتاب آن را از انتهای ثابت طناب، رسم کنید.



شکل ۲۰-۴

۱۱۹

موج که از بالا به پایین در بازه‌های زمانی مساوی گرفته شده‌اند، نشان داده شده است. تب در عکس بالا از طرف چپ شروع و به طرف راست حرکت می‌کند و از انتهای ثابت در سمت راست بازتابیده می‌شود.



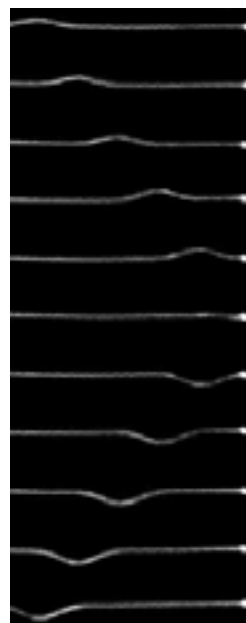
شکل ۴۲

باشد و آن را انتهای ثابت می‌نامند که نمی‌تواند حرکت کند. با توجه دادن دانش‌آموزان به شکل ۱۹-۴ کتاب درسی و یا رسم آن روی تابلو، پرسید «وقتی تب موجی به انتهای ثابت می‌رسد چه اتفاقی می‌افتد؟» انتظار می‌رود دانش‌آموزان با درکی که از قانون‌های نیوتون و مفهوم نیرو به دست آورده‌اند بتوانند به خوبی به تحلیل این پرسش بپردازند. روشن است وقتی موج به انتهای ثابت می‌رسد بر آن نیرو وارد می‌کند؛ واکنش این نیرو که توسط تکیه‌گاه به طناب وارد می‌شود، بنابر قانون سوم نیوتون در جهت مخالف است و تب بازتابنده (یا موج متحرک در جهت مخالف) را به وجود می‌آورد.

از آنجا که دیدن این پدیده برای یک تب موج امری دشوار است، شکل ۴۲ بازتاب یک تب موج واقعی را از یک انتهای ثابت نشان می‌دهد. در این تصویر، تعدادی عکس از یک تب

تمرین ۴-۵

پاسخ: در شکل ۴۳ موج فرودی و موج بازتابیده از انتهای ثابت نشان داده شده است. همان‌طور که دیده می‌شود موج بازتابیده، در خلاف جهت موج تابشی، روی طناب منتشر شده و جابه‌جایی آن نیز در جهت مخالف است.



شکل ۴۳

بازتاب از انتهای آزاد: اگر انتهای طناب آزاد باشد، وقتی تب به آن می‌رسد، طناب را در جهت خود به حرکت درمی‌آورد. در شکل ۴۴ تب تابشی، انتهای طناب را بالا می‌کشد. در این حالت همان‌طور که شکل نشان می‌دهد، انتهای طناب به قله‌ای می‌رسد که جابه‌جایی آن از وضع تعادل، دو برابر جابه‌جایی سایر نقطه‌های طناب است. در این حالت انتهای طناب، مانند چشمه‌ی موجی عمل می‌کند که در طناب، تبی در جهت تب تابشی ایجاد می‌کند که در خلاف جهت آن در طناب منتشر می‌شود. درست مانند آن که انتهای طناب را با دست گرفته و بالا و رده و به‌جای اول برگردانیم. بنابراین، در انتهای آزاد، رجستگی به‌صورت رجستگی، و فرو رفتگی به‌صورت فرو رفتگی، بازتاب می‌شود.

شکل ۴۴-۱: انتهای طناب آزاد است.

تمرین ۴-۵

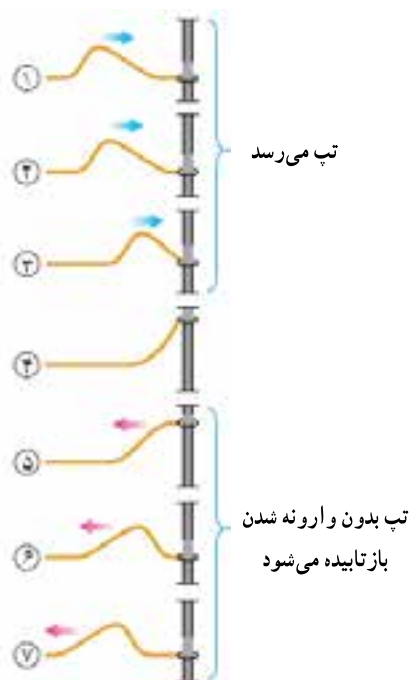
تین مانند شکل ۴۴-۱ در حالی انتشار است. شکل تب بازتابی آن را از انتهای آزاد طناب رسم کنید.

شکل ۴۴-۲

بازتاب از انتهای آزاد

راهنمای تدریس: وقتی انتهای طناب به حلقه سبکی

وصل شده باشد و این حلقه بتواند روی میله‌ای بدون اصطکاک عمود بر امتداد طناب حرکت کند، انتهای طناب را کاملاً آزاد می‌نامند (شکل ۴۴). دانش‌آموزان باید توجه کنند که نقش حلقه و میله ثابت نگه داشتن کشش است و هیچ نیرویی عرضی به طناب وارد نمی‌کنند. با رسیدن تپ یا موج به این انتهای آزاد، حلقه در امتداد میله می‌لغزد و وقتی که حلقه به بیشینه جابه‌جایی می‌رسد، طناب و حلقه به‌طور لحظه‌ای به حال سکون درمی‌آیند (شکل ۴۴ قسمت ۴). از آنجایی که طناب کشیده شده و کشش افزایش یافته است، بنابراین انتهای آزاد طناب به پایین کشیده می‌شود و دوباره یک تپ بازتاب به وجود می‌آید (شکل ۴۴ قسمت ۷). همانند انتهای ثابت، تپ بازتابیده در جهت مخالف تپ اولیه حرکت می‌کند اما جهت جابه‌جایی آن به همان صورت تپ اولیه است.



شکل ۴۴

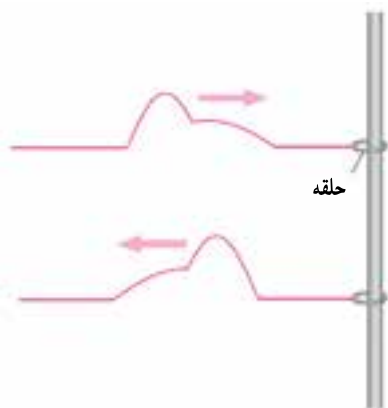
تمرین ۴-۶



شکل ۴۵

پاسخ: در شکل ۴۵ موج بازتابیده از انتهای بسته نشان داده شده است.

تمرین ۴-۷



شکل ۴۶

پاسخ: در شکل ۴۶ موج فرودی و موج بازتابیده از انتهای آزاد نشان داده شده است. همان‌طور که دیده می‌شود موج بازتابیده در خلاف جهت موج تابشی، روی طناب منتشر شده و جابه‌جایی آن در جهت موافق است.

۴-۵- اصل برهم نهی موج‌ها

نگاهی دوباره به اصل برهم نهی: ترکیب جابه‌جایی تپ‌های جداگانه در هر نقطه برای به‌دست آوردن جابه‌جایی واقعی، مثالی از اصل برهم نهی یا اصل برهم نهش است. وقتی دو موج همپوشی می‌کنند، جابه‌جایی واقعی هر نقطه طناب در هر زمان برابر است با مجموع جابه‌جایی این نقطه در صورتی که تنها موج اول حضور می‌داشت و جابه‌جایی در صورتی که تنها موج دوم حضور می‌داشت. به عبارت دیگر، تابع موج $u(x,t)$ که برآیند حرکت در این وضعیت را توصیف می‌کند با مجموع دو تابع موج برای دو موج جداگانه به‌دست می‌آید.

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t) \quad (\text{اصل برهم نهی})$$

از نظر ریاضی، این ویژگی جمع‌پذیری تابع‌های موج از شکل ریاضی تابع موج، که هر تابع موج ممکن به‌طور فیزیکی باید در آن صدق کند ناشی می‌شود. به‌ویژه تابع موج خطی است؛ یعنی تنها تابع اول $u(x,t)$ است (شامل جمله‌های $u(x,t)^2$ ، $\sqrt{u(x,t)}$ ، و غیره نیست).

به این ترتیب، اگر هر دو تابع $u_1(x,t)$ و $u_2(x,t)$ به‌طور جداگانه در تابع موج صدق کنند، جمع آنها $u_1(x,t) + u_2(x,t)$ نیز در تابع موج صدق می‌کند و بنابراین یک حرکت ممکن فیزیکی است. از آنجا که این اصل تابع خطی بودن معادله موج و ویژگی خطی ترکیب حل آنهاست، آن را اصل برهم نهی خطی نیز می‌نامند. برای بعضی از سامانه‌های فیزیکی، مانند محیطی که از قانون هوک پیروی نمی‌کند، معادله موج، خطی نیست و این اصل برای چنین سامانه‌ای برقرار نیست.

اصل برهم نهی در همه انواع موج‌ها اهمیت ویژه‌ای دارد. وقتی در حین شنیدن موسیقی، شخصی با ما صحبت می‌کند، می‌توانیم صدای حرف زدن و صدای موسیقی را از یکدیگر تشخیص دهیم. این دقیقاً به این دلیل است که موج صوتی کل که به گوش ما می‌رسد، جمع جبری موج‌هایی است که آن شخص و بلندگوهای استریوی ما تولید کرده‌اند. اگر دو موج صوتی به صورت خطی ساده باهم ترکیب نمی‌شدند، صدایی که در این وضعیت می‌شنیدیم مخلوط بد و ناموزونی می‌بود.

۴-۵- اصل برهم نهی موج‌ها

وقتی در یک مکان شلوغ و پرسر و صدا در حال حرکت هستید، صداهای مختلفی از چشمه‌های صوتی متفاوت به گوش شما می‌رسد. هرچند انسان قادر است، گوش خود را روی صدای خاصی متمرکز کند و آن را بشنود، اما صداهای مختلف همگی و با هم در هوا منتشر می‌شوند و انتشار یک صوت مانع انتشار صوت‌های دیگر نمی‌شود.

به شکل ۴-۲۳ نگاه کنید، در سطح آب دریاچه، موج‌هایی هم‌زمان در حال انتشارند. این موج‌ها، هر یک به‌طور مستقل به انتشار خود ادامه می‌دهند.



شکل ۴-۲۳

مثال‌های بالا به‌طور عملی نشان دهنده اصلی بنام اصل برهم نهی هستند. مطابق این اصل:

هر موج در حال انتشار، بدون آنکه

برای انتشار سایر موج‌ها مزاحمتی ایجاد

کند، از آنها عبور کرده و به انتشار خود ادامه

می‌دهد؛ درست مانند آنکه هیچ موج دیگری

در محیط منتشر نمی‌شود. در نقطه‌ای که دو

و یا چند موج با هم تلاقی می‌کنند، جابه‌جایی

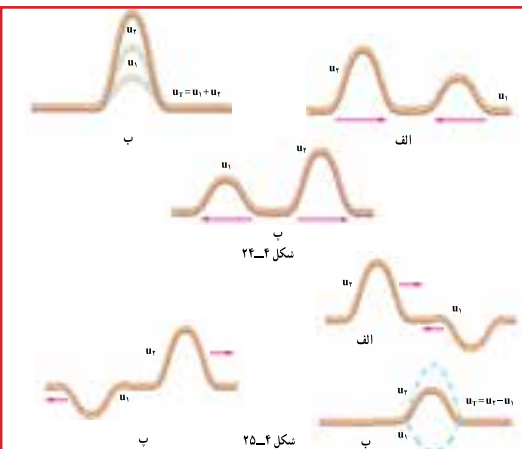
ذره‌ای از محیط که در آن نقطه است، برابر برآیند جابه‌جایی‌های حاصل از هر یک از موج‌ها است.

$$\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \dots \quad (۴-۱۸)$$

به حالت‌های مختلف شکل ۴-۲۴ نگاه کنید. در حالت (الف) دو تپ عرضی در طول طناب به‌طرف یکدیگر در حال انتشارند. این دو تپ در حالت (ب) به یکدیگر رسیده‌اند و چون جابه‌جایی حاصل از دو تپ، هم‌جهت‌اند، برآیند آنها برابر مجموع اندازه جابه‌جایی‌های حاصل از هر یک شده است. در این حالت (ب) می‌گوییم: برهم نهی موج‌ها سازنده است. در حالت (ب) دو تپ از یکدیگر عبور کرده و به انتشار خود ادامه داده‌اند.

در حالتی که جابه‌جایی‌ها در خلاف جهت یکدیگر باشند جابه‌جایی برآیند برابر تفاضل اندازه جابه‌جایی‌هایی است که هر تپ به تنهایی در جزیی از طناب که با هم به آن رسیده‌اند، ایجاد می‌کند. به حالت‌های مختلف شکل ۴-۲۵ توجه کنید. در این حالت (ب) می‌گوییم: برهم نهی موج‌ها، ویرانگر است.

۱۲۱



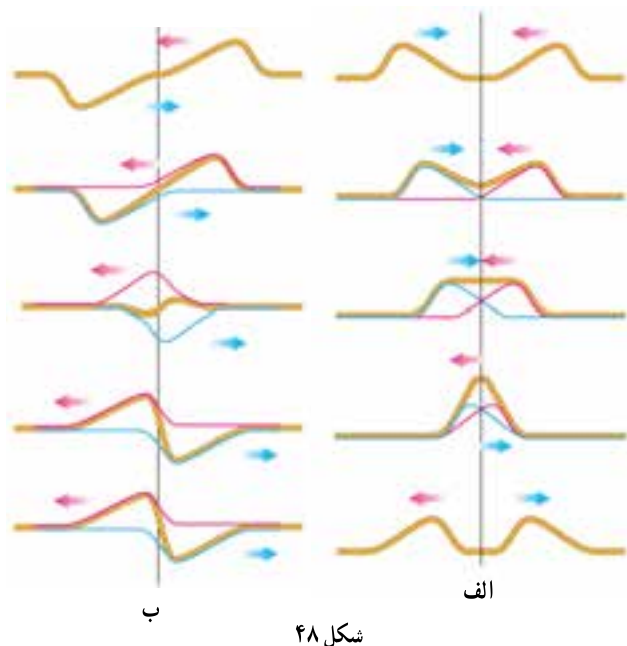
برهم نهی موج‌ها در یک بُعد: موج‌های ایستاده: فرض کنید که دو چشمه موج با دامنه و بسامد یکسان A و f یکی در ابتدا و دیگری در انتهای یک طناب کشیده شده، شروع به نوسان کرده و نوسان‌هایی هم راستا ایجاد کنند. موج‌های حاصل از این دو چشمه یکسان، به سوی یکدیگر، منتشر می‌شوند. وقتی هریک از دو موج در تمام طول طناب گسترده شده باشد، به هر جزء طناب در هر لحظه دو موج می‌رسد. بنا به اصل برهم نهی، جابه‌جایی هر جزء طناب در هر لحظه، برابر برآیند جابه‌جایی‌هایی است که هریک از دو موج در آن لحظه در آن جزء ایجاد می‌کنند. وضعیت نوسانی هر نقطه بستگی به مکان آن نقطه در طناب دارد. از برهم نهی چنین دو موجی در طناب شکل خاصی به‌وجود می‌آید که به آن موج ایستاده گفته می‌شود.

گره و شکم: به بعضی از نقطه‌های طناب در هر لحظه دو موج می‌رسد که در آن نقطه جابه‌جایی‌های یکسان اما در خلاف جهت ایجاد می‌کنند. در نتیجه برهم نهی دو موج در چنین نقطه‌هایی ویرانگر و جابه‌جایی آنها از وضع تعادل صفر است. به این نقطه‌ها که همواره ساکن می‌مانند گره می‌گویند و آنها را با N نشان می‌دهند. جای گره‌ها در طول طناب ثابت است.

۱۲۲



شکل ۴۷- الف دو تپ موج را نشان می‌دهد که هر دو رو به بالا در جهت مخالف یکدیگر در حرکت‌اند و شکل ۴۷- ب دو تپ موج دیگر را نشان می‌دهد که یکی رو به بالا و دیگری رو به پایین در جهت‌های مخالف در حرکت‌اند.



همپوشی تپ‌های موج شکل ۴۷ در شکل ۴۸ نشان داده شده است. وقتی تپ‌ها همپوشی می‌کنند جابه‌جایی طناب در هر نقطه برابر جمع جبری جابه‌جایی‌های ناشی از تپ‌های منفرد است. در این شکل، زمان از بالا به پایین افزایش می‌یابد.

تمرین پیشنهادی



شکل ۴۹ دو تپ موج با شکل‌های متفاوت را نشان می‌دهد که در جهت‌های مخالف در امتداد طنابی در حرکت‌اند. تعدادی شکل مانند شکل ۴۸ الف رسم کنید تا شکل طناب را وقتی دو تپ به یکدیگر می‌رسند، همپوشی می‌کنند، و از یکدیگر می‌گذرند نشان دهد.

تمرین پیشنهادی



شکل ۵۰ دو تپ موج را در لحظه $t = 0$ نشان می‌دهد که با سرعت 1 cm/s به طرف یکدیگر در حرکت‌اند. دو ثانیه بعد، در $t = 2 \text{ s}$ ، ارتفاع تپ برآیند (ناشی از برهم نهی دو تپ) در هریک از مکان‌های زیر چقدر است؟

الف) $x = 3 \text{ cm}$

ب) $x = 4 \text{ cm}$

پاسخ: الف) 3 cm و ب) -2 cm

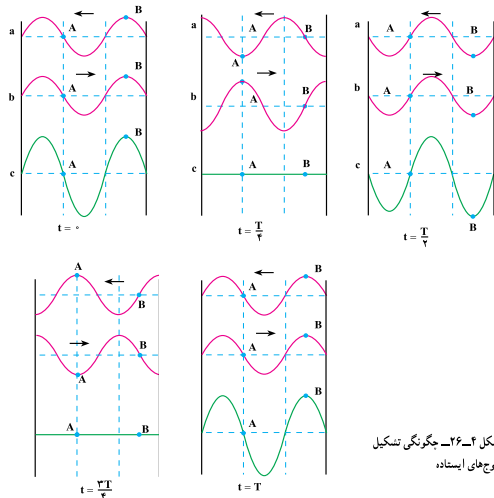
نگاهی دوباره به موج ایستاده در یک طناب:

پیش از این دربارهٔ بازتاب یک تپ موج در طناب وقتی به نقطهٔ مرزی (انتهای ثابت یا انتهای آزاد) می‌رسد بحث کردیم. اکنون می‌خواهیم نحوهٔ برهم نهی یک موج سینوسی فرودی و بازتابیده و تشکیل موج ایستاده را به کمک اصل برهم نهی بررسی کنیم. در شکل ۵۱ منحنی‌های نازک‌تر موج‌هایی را نشان می‌دهد که یکی رو به چپ و دیگری با همان سرعت، طول موج و دامنه رو به راست منتشر می‌شود. این موج‌ها در ۹ لحظه، با فاصلهٔ زمانی $\frac{1}{16}$ دوره $(\frac{T}{16})$ نشان داده شده‌اند. در هر نقطه در امتداد سیم، جابه‌جایی‌ها (مقدارهای u) را برای دو موج جداگانه باهم جمع می‌کنیم؛ نتیجه موج کل در طناب (یا سیم کشیده) است که با منحنی ضخیم‌تر نشان داده شده است.

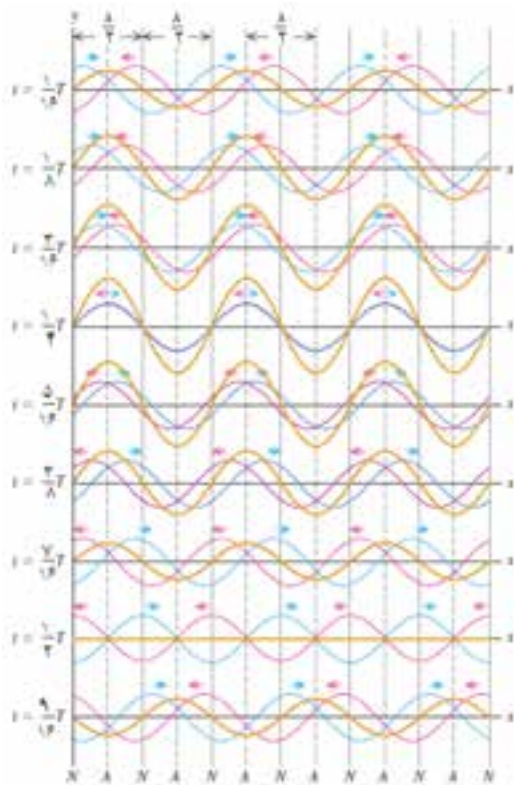
همان‌طور که در شکل دیده می‌شود در لحظه‌های معینی، مانند $t = \frac{1}{4}T$ ، نقش‌های دو موج دقیقاً با یکدیگر هم‌فازند و شکل طناب یا سیم یک منحنی سینوسی با دامنه‌ای دو برابر دامنهٔ هریک از دو موج به تنهایی است. در لحظه‌های دیگر، مانند $t = \frac{1}{2}T$ ، دو موج دقیقاً با یکدیگر در فاز متقابل اند و موج کل در آن لحظه صفر است. جابه‌جایی حاصل در مکان‌هایی که در پایین شکل ۵۱ با N مشخص شده، همواره صفر است. اینها گره‌ها هستند. در یک گره جابه‌جایی‌های دو موج فرودی و بازتابیده (منحنی‌های نازک‌تر) همواره مساوی و مخالف‌اند و یکدیگر را خنثی می‌کنند. این خنثی شدن تداخل ویرانگر نامیده می‌شود. وسط هر دو گره مجاور، نقطه‌هایی با بیشترین دامنه، پادگره‌ها یا شکم‌ها وجود دارد که با A مشخص شده‌اند. در شکم‌ها جابه‌جایی‌های دو موج همواره برابرند و جابه‌جایی حاصل بزرگ است؛ این پدیده تداخل سازنده نامیده می‌شود. از روی شکل می‌توان دید که فاصلهٔ بین گره‌های متوالی یا شکم‌های متوالی برابر نصف طول موج، یا $\lambda/2$ است.

موج‌های ایستاده، برخلاف موج‌های پیش‌رونده، انرژی را از یک انتها به انتهای دیگر منتقل نمی‌کند. دو موجی که آن را تشکیل می‌دهند. هریک در جهت‌های مخالف توان مساوی حمل می‌کنند. در اینجا شارش موضعی انرژی از هر گره به شکل مجاور و برعکس وجود دارد اما آهنگ میانگین انتقال انرژی در هر نقطه صفر است.

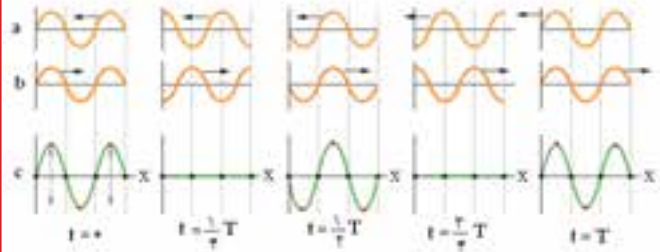
به حالت‌های مختلف شکل ۴-۲۶ توجه کنید. در این حالت‌ها و در هر یک از لحظه‌های مشخص شده، موجی را که از راست به چپ روی طناب منتشر می‌شود با a و موجی را که از چپ به راست در حال انتشار است با b و حاصل برهم نهی این دو موج را با c نشان داده و هر یک را جداگانه رسم کرده‌ایم. در واقع، حالت‌های c وضعیت طناب را هنگامی که موج‌های a و b روی آن منتشر می‌شوند، در بازه‌های زمانی $\frac{T}{4}$ (دورهٔ موج است) نشان می‌دهد.



در حالت‌های مختلف شکل ۴-۲۶ به نقطهٔ A توجه کنید. موج‌های a و b در هر لحظه به این نقطه، جابه‌جایی‌هایی هم اندازه اما در خلاف جهت می‌دهند. در نتیجه، همان‌گونه که حالت‌های c در لحظه‌های مختلف نشان می‌دهد، نقطهٔ A همواره ساکن می‌ماند. نقطهٔ A یک گره است.



پاسخ: گره‌ها با نقطه‌های سیاه رنگ و شکم‌ها با نقطه‌های قرمز رنگ در شکل ۵۲ نشان داده شده‌اند.



شکل ۵۲

پرسش ۱-۱

در شکل ۱۲-۹ گره‌های دیگری نیز وجود دارند. آن‌ها را مشخص کنید.

به بعضی نقطه‌های دیگر طناب نیز در هر لحظه دو موج می‌رسد، با این تفاوت که در این نقطه‌ها برهم نهی به گره‌ای است که باعث می‌شود موج برآید. با پیشروی دامنه تپسل کند. به این نقطه‌ها شکم، یا پانگره، می‌گویند و آن‌ها را با A نشان می‌دهند. جای شکم‌ها نیز، مانند گره‌ها، ثابت است. در حالت‌های مختلف شکل ۱۲-۹ یکی از شکم‌ها را با نام B مشخص کردیم. نقطه‌ای B در مکانی واقع شده است که برهم نهی حاصل از دو موج B و A آن را با پیشروی دامنه به تپسل و می‌دارد. نقطه‌ای B یک شکم است.

پرسش ۲-۱

آیا در حالت‌های مختلف شکل ۱۲-۹ شکم دیگری نیز وجود دارد؟ اگر پاسخ شما مثبت است، آن را مشخص کنید.

معمولاً نشان می‌دهد که وقتی در طنابی یک موج ایستاده تشکیل می‌شود، فاصله‌ی دو گره‌ی متوالی برابر فاصله‌ی دو شکم متوالی و برابر نصف طول موج است. همچنین فاصله‌ی یک گره و شکم متوالی برابر ربع طول موج است. به همین دلیل برای آن که موج ایستاده در طناب ایجاد شود باید بین طول طناب و طول موج رابطه‌ی معینی برقرار باشد. این رابطه به ساده‌ترین تپسل‌ها، سرعت انتشار موج در طناب (در نتیجه به نیروی کشش طناب و جرم واحد طول آن) و طول طناب بستگی دارد. علاوه بر این کمیت‌ها، این رابطه به ثابت و یا آزاد بودن انتهای طناب نیز بستگی دارد. در ادامه سعی می‌کنیم این رابطه را به دست آوریم.

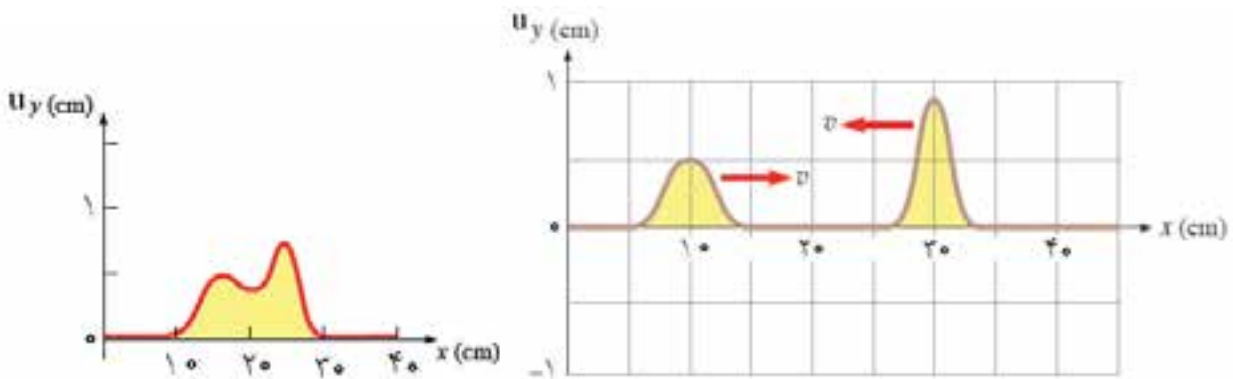
یکی از روش‌های ایجاد دو موج کاملاً یکسان، که در خلاف جهت یکدیگر در طناب کشیده شده‌اند آن است که یکسری طناب را به کمک یک دیوارپون به تپسل درآوریم. این تپسل‌ها از انتهای طناب، بازتاب شده و با موج‌های فرودی بر هم افتاده می‌شوند و موج ایستاده را بوجود می‌آورند. برای بررسی دو حالت الف: «دو سر طناب ثابت و ب: یک سر ثابت و سر دیگر آزاد» را در نظر می‌گیریم. در این بررسی‌ها، فرض شده که تعداد گره‌ها و شکم‌ها در طول طناب کمترین تعداد ممکن باشد.

۱۲۲

پرسش پیشنهادی

در شکل ۵۳ دو تپ موج در حال انتشار در یک طناب، در لحظه $t = 0$ نشان داده شده است که با سرعت 4 cm/s به طرف یکدیگر در حرکت‌اند.

شکل تپ موج برهم‌نهی را در هریک از لحظه‌های $t = 0/15 \text{ s}$ ، $t = 0/25 \text{ s}$ و $t = 0/35 \text{ s}$ رسم کنید.



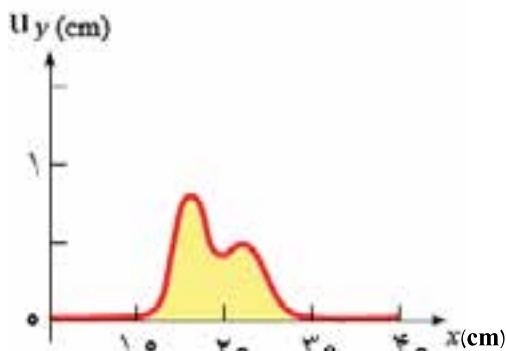
شکل ۵۳

شکل ۵۴

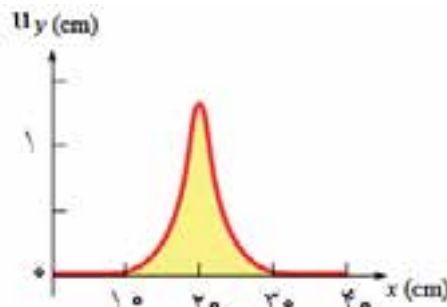
پاسخ: شکل ۵۴ مربوط به لحظه $t = 0/15 \text{ s}$

شکل ۵۵ مربوط به لحظه $t = ۰/۲۵$ s.

شکل ۵۶ مربوط به لحظه $t = ۰/۳$ s.



شکل ۵۶



شکل ۵۵

الف) دوسر طناب ثابت است.

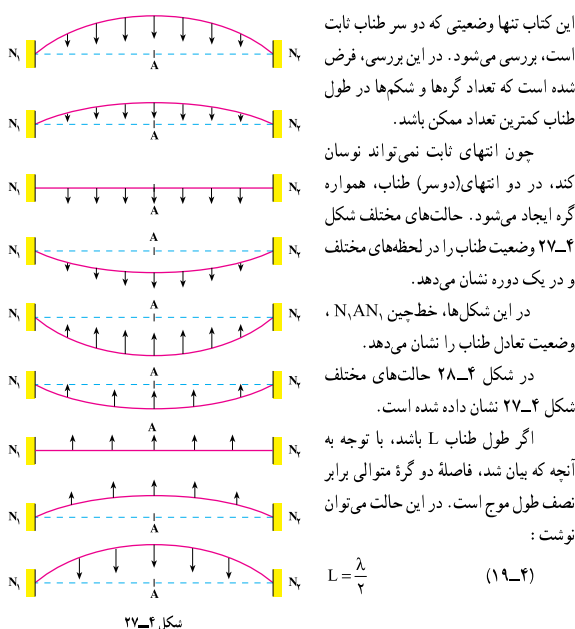
نگاهی دوباره به مفهوم حدهای طبیعی یک سیم

سیم به طول معین L را در نظر بگیرید که هر دو انتهای آن ثابت است. چنین سیم‌هایی در بسیاری از سازهای موسیقی از جمله پیانو، ویولن و گیتار یافت می‌شود. وقتی زخمه‌ای به سیم تار یا سه‌تاری زده می‌شود، موجی در سیم تولید می‌شود؛ این موج از دو انتهای سیم به طور پی‌درپی بازتابیده شده و موج ایستاده‌ای تشکیل می‌شود. این موج ایستاده در سیم، یک موج صوتی در هوا تولید می‌کند که بسامد آن با توجه به ویژگی‌های سیم تعیین می‌شود. از این موضوع در ساختن سازهایی که موسیقی گوش‌نوازی تولید می‌کنند، استفاده می‌شود.

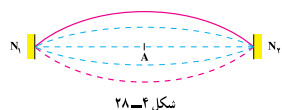
برای درک ویژگی‌های موج‌های ایستاده در سیمی که دو انتهای آن ثابت است، ابتدا رفتار یک موج سینوسی را که در چنین سیمی منتشر می‌شود بررسی می‌کنیم. موج ایستاده حاصل باید دو گره در دو انتهای سیم داشته باشد. به طوری که گره‌های مجاور نصف طول موج $(\lambda/2)$ از یکدیگر فاصله دارند، بنابراین طول سیم باید $\lambda/2$ ، یا $2(\lambda/2)$ ، یا $3(\lambda/2)$ ، یا به طور کلی مضرب درستی از نصف طول موج باشد:

$$L = n \frac{\lambda}{2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

یعنی در سیمی به طول L که از دو انتها ثابت شده است، تنها در صورتی می‌تواند موج ایستاده وجود داشته باشد که طول موج آن در رابطه بالا صدق کند.



شکل ۲۷-۴



شکل ۲۸-۴

اگر بسامد نوسان f و سرعت انتشار موج در طناب v باشد، با استفاده از رابطه ۴-۶ خواهیم داشت:

$$\lambda = \frac{v}{f} \Rightarrow 2L = \frac{v}{f}$$

۱۲۵

با حل این معادله برای λ و با نشان دادن مقدارهای ممکن

λ به صورت λ_n داریم

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

(سیم با دو انتهای ثابت) اگر طول موج با یکی از مقادیرها برابر نباشد، موج‌هایی در

این را بسامد اصلی می نامند. دیگر بسامدهای موج ایستاده عبارتند از: $f_2 = 2v/2L$ ، $f_3 = 3v/2L$ و امثال آن، همه اینها مضرب درستی از بسامد اصلی f_1 هستند، مانند $2f_1$ ، $3f_1$ ، $4f_1$ و امثال آن، و همه بسامدها را می توان به صورت زیر بیان کرد.

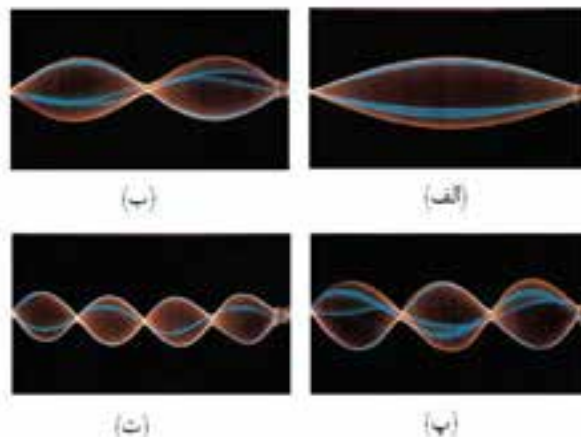
(سیم با دو انتهای ثابت)

$$f_n = n \frac{v}{2L} = nf_1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

این بسامدها هماهنگ ها و این رشته، رشته هماهنگ نامیده می شود. گاهی موسیقی دانان f_2 ، f_3 و امثال آن را صدای فرعی (فرآهنگ ها) می نامند؛ f_2 هماهنگ دوم یا صدای فرعی اول، f_3 هماهنگ سوم یا صدای فرعی دوم و به همین ترتیب. هماهنگ اول همان بسامد اصلی است.

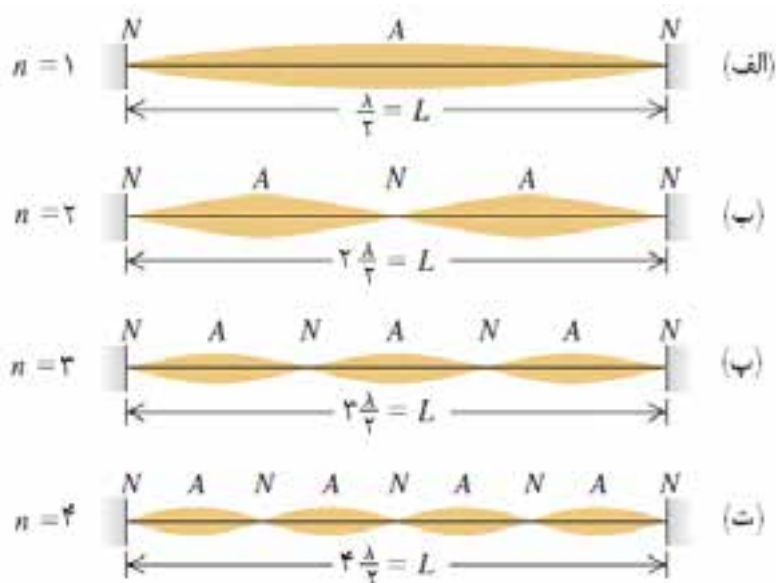
مد طبیعی یک دستگاه در حال نوسان حرکتی است که در آن همه ذره های دستگاه به طور سینوسی با بسامد یکسان حرکت کنند. برای دستگاهی که از سیمی به طول L و با دو انتهای ثابت تشکیل شده باشد، هر طول موجی که از معادله $\lambda_n = 2L/n$ به دست می آید نظیر یکی از نقش ها و بسامدهای مد طبیعی ممکن است. بی نهایت مد طبیعی، هر کدام با بسامد و نقش ارتعاش مشخصه خود وجود دارد. شکل ۵۸ نقش های چهار مد طبیعی نخست را به همراه بسامدها و طول موج های آنها نشان می دهد.

سیم ایجاد می شود. اما یک نقش موج پایدار با گره ها و شکم ها نمی تواند وجود داشته باشد و موج حاصل نمی تواند موجی ایستاده باشد. معادله بالا توسط موج های ایستاده در شکل های ۵۷ الف، ب، پ و ۵۷ ت، به ترتیب به ازای $n = 1, 2, 3, 4$ نشان داده شده است.



شکل ۵۷

متناظر با هر رشته از طول موج های موج ایستاده λ_n ، یک رشته از بسامدهای موج ایستاده ممکن f_n وجود دارد که با رابطه $f_n = v/\lambda_n$ به طول موج نظیرش مربوط است. کوچک ترین بسامد f_1 نظیر بزرگ ترین طول موج (حالت $n = 1$) است، $\lambda_1 = 2L$ ؛

$$f_1 = \frac{v}{2L} \quad (\text{سیم با دو انتهای ثابت})$$


شکل ۵۸ — چهار مد طبیعی نخست سیمی که دو انتهای آن ثابت است.

یک نوسانگر هماهنگ، که تنها یک ذره در حال نوسان دارد، فقط یک مد طبیعی و یک بسامد مشخصه دارد. سیم با دو انتهای ثابت، بی نهایت مد طبیعی دارد زیرا از تعداد بسیار زیادی نوسانی بسیار پیچیده تعداد بی نهایت مد طبیعی، گرچه با نقش های مد طبیعی پیچیده تر، نسبت به یک سیم دارند (شکل ۵۹).

(۲۰-۴)

$$f_1 = \frac{v}{2L}$$

در آلات موسیقی سیمی (زهی) مانند تار، ویلون و... ارتعاش های ایجاد شده توسط مضرب و یا آرشه و... در سیم منتشر می شود و از دو انتهای ثابت تار بازتاب می یابد که از برهم نهی آنها در طول سیم موج ایستاده تشکیل می شود. اگر یک سیم (تار مرتعش)، به گونه ای مرتعش شود که مانند شکل ۲۷-۴ یک شکم در وسط و دو گره در طرفین آن تشکیل شود، گفته می شود که تار بسامد اصلی خود را تولید کرده است. این بسامد از رابطه ۲۰-۴ به دست می آید. یک طناب (یا یک تار) را می توان به گونه ای به نوسان درآورد که تعداد گره ها و شکم های تشکیل شده در طول آن از حالت اصلی بیشتر باشد. شکل های ۲۹-۴ و ۳۰-۴ وضعیت هایی را نشان می دهد که در آنها به ترتیب دو و یا سه شکم تشکیل شده است.

شکل ۲۹-۴

شکل ۳۰-۴

با کمی دقت معلوم می شود که: وقتی روی طنابی موج ایستاده تشکیل می شود در حالی که دو انتهای آن ثابت است، طول طناب مضرب صحیحی از نصف طول موج است.

(۲۱-۴)

$$L = n \frac{\lambda_n}{2}$$

$n = 1, 2, 3, \dots$

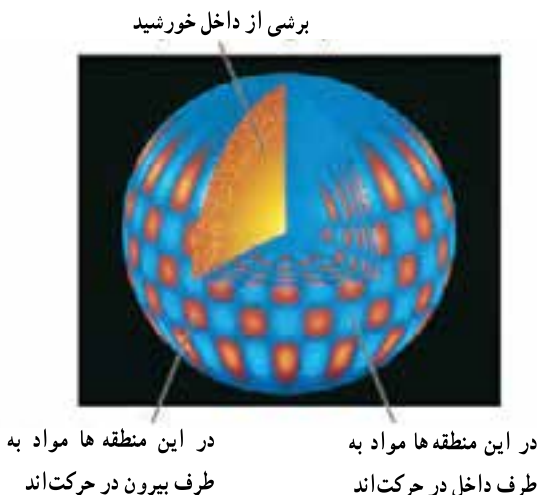
رابطه اخیر را می توان برحسب بسامد به صورت زیر نوشت:

(۲۲-۴)

$$f_n = \frac{nv}{2L} = nf_1$$

روشن است که به ازای $n = 1$ ، بسامد اصلی به دست می آید. اگر $n = 2$ باشد $(f_2 = 2f_1)$ به آن هماهنگ و یا مد دوم و به همین ترتیب سوم، چهارم و... گفته می شود.

۱۲۶



شکل ۵۹- اخترشناسان کشف کرده اند که خورشید با چندین مد طبیعی متفاوت نوسان می کند. این شبیه سازی رایانه ای یکی از این مدها را نشان می دهد

موج‌های ایستاده و سازهای زهی

همان‌طور که دیدیم بسامد اصلی یک سیم در حال ارتعاش برابر $f_1 = v/2L$ است. سرعت v موج‌ها در سیم با

معادله $v = \sqrt{F/\mu}$ معین می‌شود. با ترکیب این معادله‌ها داریم

$$f_1 = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{F}{\mu}} \quad (\text{سیم با دو انتهای ثابت})$$

این همچنین بسامد اصلی موج صوتی‌ای است که در هوای اطراف توسط سیم در حال ارتعاش ایجاد شده

است. سازهای موسیقی رایج چگونگی بستگی f_1 را به ویژگی‌های سیم نشان می‌دهند. بستگی وارون بسامد به طول L با سیم‌های بلند بخش بم (بسامد کم) پیانو یا ویولن بم و سیم‌های کوتاه‌تر بخش زیر (بسامد بالا) پیانو یا ویولن توصیف می‌شود (شکل ۶۰). زیر و بمی (ارتفاع) صدای ویولن یا گیتار معمولاً با قرار دادن انگشت‌ها در جاهای مختلف سیم و تغییر طول L بخش در حال ارتعاش سیم تغییر می‌کند. با افزایش کشش F سرعت موج v و در نتیجه بسامد (و ارتفاع) افزایش می‌یابد. همه سازهای زهی را با تغییر نیروی کشش کوک می‌کنند تا بسامد درست را ایجاد کنند؛ برای افزایش بلندی صدای ساز، سیم‌ها را سفت‌تر می‌کنند. سرانجام، با افزایش جرم بر واحد طول μ تندی و در نتیجه بسامد کاهش می‌یابد.

نت‌های پایین‌تر در گیتار هاوایی توسط سیم‌های کلفت‌تر ایجاد می‌شود، و یک دلیل پیچیدن سیم‌های بم پیانو با نوعی سیم این است که از سیم نسبتاً کوتاهی بسامد زیر موردنظر حاصل آید.

سازهای بادی مانند ساکسیفون‌ها و ترومبون‌ها نیز مدهای طبیعی دارند. همچون سازهای زهی، بسامد مدهای طبیعی، ارتفاع صوت‌های موسیقایی انجام شده توسط این سازها را تعیین می‌کنند. در ادامه فصل درخصوص این سازها و جنبه‌های بسیار دیگری از صوت بحث خواهیم کرد.



شکل ۶۰ در همه سازهای بالا، سیم‌های بلندتر نت‌های بم را تولید می‌کنند و سیم‌های کوتاه‌تر نت‌های زیر را به‌دست می‌دهند.

مثال ۱-۱

دو سر طنابی ثابت شده است. وقتی طناب را به ارتعاش درمی آوریم، در آن موج ایستاده تشکیل می شود. اگر طول طناب 60 cm و در آن ۳ گره ایجاد شده باشد: الف: طول موج و ب: بسامد نوسان طناب را به دست آورید. سرعت انتشار موج در طناب 240 m/s است.

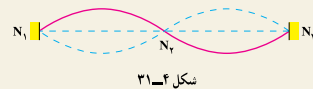
پاسخ

الف) شکل ۳۱-۴ وضعیت نوسانی طناب را نشان می دهد. با توجه به شکل، معلوم می شود که $n = 2$ است. با استفاده از رابطه ۲۱-۴ داریم:

$$L = n \frac{\lambda_n}{2}$$

$$60 = 2 \frac{\lambda_2}{2}$$

$$\lambda_2 = 60\text{ cm}$$



ب) با استفاده از رابطه $\lambda = \frac{v}{f}$ داریم:

$$60/100 = \frac{240}{f} \Rightarrow f = 400\text{ Hz}$$

همان طور که دیدیم برای آنکه در طول طناب موج ایستاده تشکیل شود، باید رابطه ۲۱-۴ برقرار شود. برای برقراری این رابطه می توان طول طناب و یا نیروی کششی طناب و در نتیجه سرعت انتشار موج در طناب را تغییر داد.

فعالیت ۵-۴

اگر در آزمایشگاه دبیرستان شما، دیپازونی یا نوسان پایدار (مانند آنچه که پیشتر توضیح داده شد)، موجود است، آزمایش زیر را انجام دهید و موج ایستاده را در طناب مشاهده کنید.

۱۲۷

تمرین پیشنهادی

گروهی برای ساخت بزرگترین ویولن بم جهان در نظر دارند سیم هایی به طول 5 m که بین نقطه هایی ثابت شوند انتخاب کنند. چگالی جرمی خطی یکی از سیم ها 4 g/m و بسامد اصلی آن 20 Hz است (کمترین بسامدی که گوش انسان می تواند بشنود). مطلوب است:

الف) کشش این سیم.

ب) بسامد و طول موج سیم در هماهنگ دوم.

پ) بسامد و طول موج سیم در هماهنگ سوم.

پاسخ: الف) $F = 1600\text{ N}$

ب) $\lambda_2 = 5\text{ m}$ و $f_2 = 40\text{ Hz}$

پ) $\lambda_3 = 3/3\text{ m}$ و $f_3 = 60\text{ Hz}$

تمرین پیشنهادی

دوسر طنابی به طول 80 cm ثابت شده و مطابق شکل ۶۱ در آن موج ایستاده تشکیل شده است. اگر سرعت انتشار موج در طناب 320 m/s باشد، طول موج و بسامد نوسان طناب را پیدا کنید.



پاسخ : $\lambda = 32\text{ cm}$ و $f = 1\text{ kHz}$

شکل ۶۱

تمرین پیشنهادی

یک سر طنابی ثابت و سر دیگر آن آزاد است (مطابق شکل ۶۲). اگر فاصله بین دو گره متوالی 40 cm باشد، مطلوب است



الف) طول طناب چقدر است؟

ب) اگر موج با سرعت 160 m/s در طناب حرکت کند،

بسامد نوسانها چقدر است؟

پاسخ : الف) $L = 2\text{ m}$ ، ب) $f = 200\text{ Hz}$

شکل ۶۲

تمرین پیشنهادی

یک سر طنابی به یک نوسانگر الکتریکی و سر دیگر آن پس از عبور از قرقه‌ای ثابت به وزنه‌ای وصل شده است. با روشن کردن نوسانگر، موج ایستاده‌ای در طناب مطابق شکل ۶۳ ایجاد می‌شود به‌طوری که فاصله هر شکم با گره مجاورش 10 cm است. اگر جرم وزنه 4 kg و جرم واحد طول طناب $1/8\text{ kg/m}$ باشد، طول موج و بسامد نوسان طناب (نوسانگر) را پیدا کنید. فرض کنید $g = 10\text{ N/kg}$ است.



شکل ۶۳

پاسخ : ابتدا به کمک رابطه $v = \sqrt{f/\mu}$ سرعت انتشار موج در طناب را به دست می‌آوریم. توجه کنید که وزنه آویزان، نیروی کشش در طناب را ایجاد می‌کند و $F = mg$ است. به این ترتیب داریم : $\lambda = 40\text{ cm}$ و $f = 50\text{ Hz}$.

تمرین پیشنهادی

شخصی که پیانو کوک می‌کند یک سیم فولادی پیاوویی را با نیروی 800 N می‌کشد. طول سیم فولادی و جرم آن به ترتیب 4 m و 800 N است.

الف) بسامد هماهنگ اصلی نوسان سیم چقدر است؟
ب) عدد بالاترین هماهنگی که می‌تواند توسط شخصی که قادر به شنیدن بسامدهای بالای 10 kHz است شنیده شود چقدر است؟

پاسخ: الف) $f_1 = 40.9\text{ Hz}$
ب) هماهنگ ۲۴ (از رابطه $n = \frac{1000\text{ Hz}}{f_1}$ استفاده کنید).

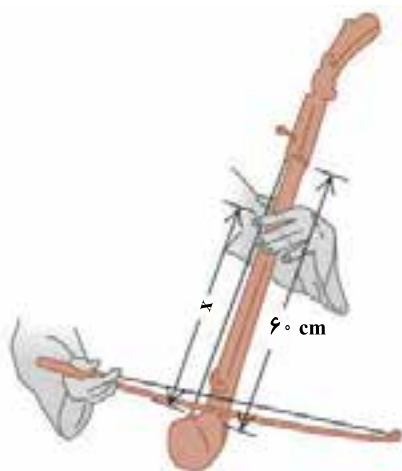
تمرین پیشنهادی

سیمی به جرم 4 g طوری کشیده شده است که فاصله بین دو نقطه اتصال 80 cm است. سیم در هماهنگ اصلی با بسامد 60 Hz و دامنه 3 cm در شکم نوسان می‌کند.

الف) سرعت انتشار موج‌های عرضی در سیم چقدر است؟
ب) کشش سیم را حساب کنید.
پ) بیشینه سرعت و شتاب عرضی ذره‌های سیم را پیدا کنید.
پاسخ: الف) چون سیم در هماهنگ اصلی نوسان می‌کند $L = \lambda/2 = 1/6\text{ m}$ و از رابطه $v = \lambda f$ داریم $v = 96\text{ m/s}$.
ب) $F = 461\text{ N}$

پ) از رابطه‌های $v_{\max} = A\omega$ و $a_{\max} = A\omega^2$ داریم: $v_{\max} = 1/13\text{ m/s}$ و $a_{\max} = 426\text{ m/s}^2$

تمرین پیشنهادی



شکل ۶۴

در ساز موسیقی خاصی، فاصله بین خرک و بالا دسته (محل سیم آزادانه نوسان می‌کند) برابر 60 cm و جرم این طول از سیم ۲ گرم است (شکل ۶۴). وقتی ساز نواخته می‌شود بسامد صدای این سیم 440 Hz است. نوازنده انگشت خود را کجا قرار دهد (چه فاصله x از خرک) تا صدایی با بسامد 587 Hz به صدا درآید. فرض کنید برای هردو بسامد سیم در هماهنگ اصلی اش نوسان می‌کند.

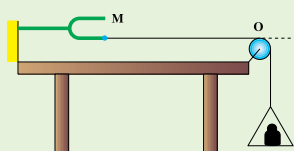
پاسخ: در حالت اول $L = \lambda/2$ و از رابطه $v = f\lambda$ داریم $v = 528\text{ m/s}$.

در حالت دوم $f = 587\text{ Hz}$ و از رابطه $v = f\lambda$ داریم $\lambda = 9\text{ m}$. به این ترتیب $L = \lambda/2 = 4.5\text{ m}$ و $x = 4.5\text{ m}$.

معمولاً این آزمایش را به جای دیپازون، توسط یک دستگاه نوسانگر الکتریکی که بسامد آن قابل تغییر است انجام می‌دهند (شکل ۶۳ را ببینید).

با تغییر بسامد نوسانگر، به شرط ثابت ماندن نیروی کشش، طناب در هماهنگ‌های مختلف به نوسان درمی‌آید. توجه کنید که با ثابت ماندن نیروی کشش F ، سرعت انتشار موج در طناب ثابت می‌ماند. با توجه به رابطه $\lambda = v/f$ ، با تغییر بسامد f ، طول موج λ تغییر می‌کند و در نتیجه طناب در هماهنگ‌های متفاوتی به نوسان درمی‌آید.

مطابق شکل ۳۲-۴ یک سر طناب نازکی را به دیپازون وصل کنید و سر دیگر آن را از روی فرقه نایبی بگذرانید و به آن کفه‌ای آویزان کنید. وزن کفه و وزنه درون آن، نیروی کشش را در طناب ایجاد می‌کند. وقتی دیپازون را به نوسان درمی‌آورید، در طناب موج ایجاد می‌شود. موج‌ها از انتهای ثابت O بازتاب می‌یابند و با موج‌های فرودی، برهم نهاده می‌شوند. با تغییر وزنه درون کفه، می‌توانید نیروی کشش طناب و در نتیجه سرعت انتشار موج را در آن تغییر دهید. با این کار، بیشترین مقدار وزنه را که به ازای آن در نقطه‌های O و M گره و در وسط آنها شکم تشکیل می‌شود، به دست آورید. با کاهش وزنه درون کفه، حالت‌هایی را به وجود آورید که تعداد گره و شکم‌ها بیشتر شوند. با جایگزین



شکل ۳۲-۴

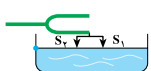
کردن دیپازونی که بسامد دیگری دارد چه تغییری در آزمایش رخ می‌دهد؟ نتیجه این آزمایش را چگونه توجیه می‌کنید؟

۴-۶- برهم نهی موج‌ها در دو بُعد - تداخل موج‌ها در سطح آب

در بخش قبل، برهم نهی دو موج کاملاً یکسان را در طناب یا تار بررسی کردیم. در این بخش به بررسی برهم نهی موج‌هایی می‌پردازیم که در دو بُعد، مثلاً در سطح آب، منتشر می‌شوند.

با یک دیپازون، دو چشمه موج S_1 و S_2 را ایجاد می‌کنیم (شکل ۳۳-۴). طول سوزن‌های S_1 و S_2 با هم برابرند.

شکل ۳۳-۴



شکل ۳۴-۴

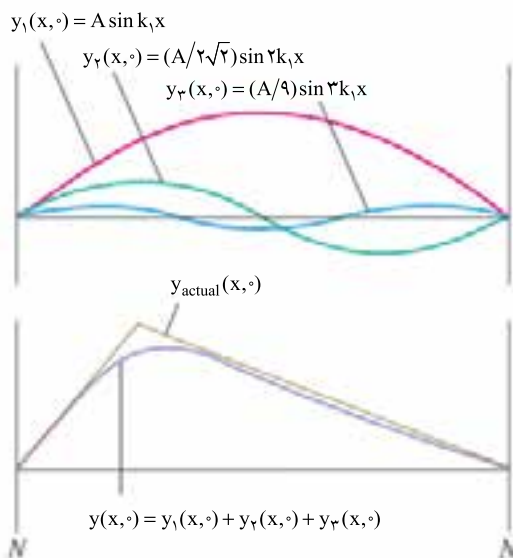
اکنون دیپازون را مطابق شکل ۳۴-۴ با سطح آب درون تشتکی در تماس قرار می‌دهیم و برای جلوگیری از بازتاب موج از روی دیواره‌های تشتک، دور تا دور دیواره را اسفنج نازکی می‌جسبانیم. در این صورت، موج‌ها وقتی به دیواره می‌رسند، توسط اسفنج، جذب می‌شوند. حال اگر

۱۲۸

دانش‌تنی ۱-۲

موج‌های ایستاده پیچیده

اگر بتوانیم سیمی را به گونه‌ای جابه‌جا کنیم که به شکل یکی از نقش‌های مد طبیعی خود درآید و سپس آن را رها کنیم، با بسامد آن مد به ارتعاش درخواهد آمد. چنین سیم در حال ارتعاشی هوای اطراف را با همان بسامد جابه‌جا می‌کند و یک موج صوتی سینوسی پیش‌رونده‌ای به وجود می‌آورد که گوش شما آن را به صورت یک طنین (ژن) خالص احساس می‌کند. اما وقتی به سیمی ضربه (مانند پیانو) یا زخمه (مانند گیتار) زده شود شکل سیم جابه‌جا شده به سادگی یکی از نقش‌های شکل ۶۵ نیست. در ارتعاش حاصل علاوه بر بسامد اصلی، فرآهنگ‌های بسیاری نیز وجود دارد. به این ترتیب این حرکت، ترکیب یا برهم‌نهی بسیاری از مدهای طبیعی است. به طور هم‌زمان چندین حرکت هماهنگ ساده با بسامدهای متفاوت حضور دارند، و جابه‌جایی هر نقطه از سیم برابر جمع (برهم‌نهی) جابه‌جایی‌های مربوط به هریک از مدهای منفرد است. صدایی که با ارتعاش سیم تولید می‌شود به همان صورت برهم‌نهی موج‌های صوتی سینوسی پیش‌رونده است که شما آن را به صورت یک طنین غنی، پیچیده و با بسامد اصلی f_1 احساس می‌کنید. موج ایستاده در سیم و موج صوتی پیش‌رونده در هوا محتوای هماهنگ مشابهی دارند (در حدی که بسامدهای بالاتر از بسامد اصلی حضور دارند). محتوای هماهنگ به چگونگی حرکت اولیه سیم بستگی دارد. اگر سیم‌های یک گیتار



شکل ۶۵- وقتی به سیم گیتاری زخمه زده (به صورت شکل مثلثی کشیده) و رها شود، موج ایستاده‌ای تشکیل می‌شود. موج ایستاده (به جز نقطه تیز بیشینه) تنها با جمع سه تابع سینوسی به خوبی نشان داده شده است. با افزودن چند تابع سینوسی دیگر می‌توان این نمایش را بهبود بخشید.

صوتی را در محل معمول (روی کاسه) زخمه بزنید یا نزدیک انتهای ثابت (خرک بالای دسته)، صداهایی با محتوای هماهنگ متفاوتی خواهید شنید.

هر حرکت ممکن سیم را می‌توان به صورت برهم نهش تعدادی از حرکت‌های مد طبیعی نشان داد. حاصل بررسی این کار برای نقش ارتعاشی معینی تحلیل هماهنگ نامیده می‌شود. جمع تابع‌های سینوسی‌ای که یک موج پیچیده را نشان می‌دهد یک رشته فوریه نامیده می‌شود. شکل مقابل نشان می‌دهد چگونه می‌توان موج ایستاده‌ای را که با زخمه زدن به سیم گیتاری به طول L و در نقطه‌ای به فاصله $L/4$ از انتهای آن تولید شده است، به صورت ترکیبی از تابع‌های سینوسی نشان داد.

۴-۶- برهم نهی موج‌ها در دو بعد - تداخل موج‌ها در سطح در آب

راهنمای تدریس: وقتی دو یا تعداد بیشتری موج در یک ناحیه از فضا با یکدیگر برهم نهی یا به عبارت دیگر همپوشانی می‌کنند تحت عنوان تداخل موج‌ها دسته‌بندی می‌شوند. همان‌طور که پیش از این دانش‌آموزان دیده‌اند، موج‌های ایستاده نمونه ساده‌ای از اثر تداخل اند: دو موج متحرک در دو جهت مخالف در یک محیط (تار یا طناب) ترکیب می‌شوند و نقش موج ایستاده‌ای را به وجود می‌آورند که گره‌ها و شکم‌ها حرکت نمی‌کنند.

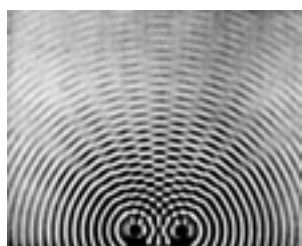
شکل ۶۶ نمونه‌ای از تداخل از نوع دیگر را نشان می‌دهد که توسط یک نوسانگر، دو چشمه موج در سطح آب ایجاد شده



شکل ۶۶

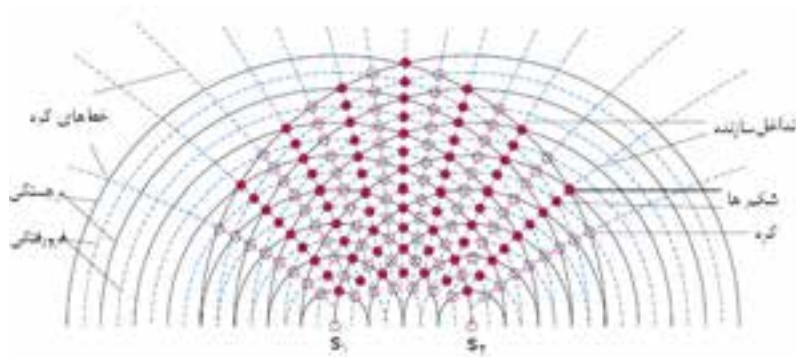
دیاپازون را به نوسان درآوریم، موج‌های دایره‌ای حاصل از هریک از دو چشمه S_1 و S_2 در سطح آب منتشر می‌شوند. در نتیجه به هر ذره آب که در سطح آب تشنگ قرار دارد، هم‌زمان دو موج می‌رسد. بنابراین وضعیت نوسانی ذره‌های آب، حاصل برهم نهی دو موجی است که با هم به هر ذره می‌رسند. در اینجا هم مانند تشکیل موج‌های ایستاده روی طناب، بعضی از ذره‌های سطح آب در هر لحظه دو موج دریافت می‌کنند که این دو موج می‌خواهند در هر ذره جابه‌جایی‌های هم‌اندازه اما در خلاف جهت یکدیگر ایجاد کنند، در نتیجه، برهم نهی دو موج در این نقاط، ویرانگر است و این ذره‌ها مانند گره‌ها، ساکن می‌مانند. مکان بعضی ذره‌ها طوری است که برهم نهی دو موجی که در هر لحظه به آنها می‌رسند، سازنده است و ذره‌های واقع در این مکان‌ها مانند شکم‌ها در موج ایستاده روی طناب، با بیشینه دامنه، نوسان می‌کنند. در طناب که محیطی یک‌بندی است، تعدادی نقطه گره و شکم به طور متوالی تشکیل می‌شود اما در اینجا که سطح آن دو بعدی است، نقطه‌های گره مشابه و نیز نقطه‌های شکم مشابه بی‌شماری وجود دارد.

شکل ۳۵-۴ تصویری را نشان می‌دهد که حاصل برهم نهی آزمایشی مشابه آزمایش یادشده بالا (به شکل ۳۴-۴ نگاه کنید). است. این پدیده را تداخل موج‌ها می‌نامیم. شرط ایجاد چنین وضعیتی، یعنی شرط ایجاد تداخل موج‌ها، آن است که دو چشمه موج، هم‌سامد و هم‌فاز باشند.



شکل ۳۵-۴

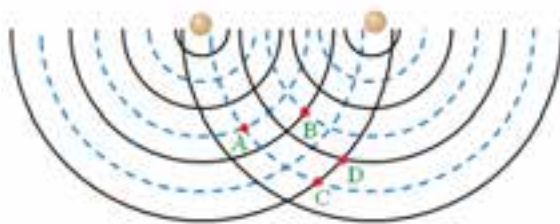
طرح داخلی تشکیل شده توسط دو چشمه موج به اختلاف فاصله هر نقطه محیط از این چشمه‌ها که به آن اختلاف راه گفته می‌شود، بستگی دارد (شکل ۳۶-۴).



شکل ۶۷

است. دانش آموزان باید توجه کنند که شرط ایجاد این نوع تداخل، آن است که دو چشمه موج، هم بسامد و هم فاز باشند. دلیل این موضوع را می‌توانید با دانش آموزان به بحث بگذارید. نقش تداخل سازنده و ویران گر موج‌ها در سطح آب با جزئیات بیشتر به‌طور طرحوار در شکل ۶۷ نشان داده شده است.

پرسش پیشنهادی



شکل ۶۸

در شکل ۶۸ در کدامیک از نقطه‌های A، B، C، D و E تداخل سازنده یا ویرانگر روی داده است؟ پاسخ خود را توضیح دهید.

پرسش پیشنهادی

الف) هنگامی که دو دسته موج به‌طور همزمان به نقطه‌ای می‌رسند در چه شرایطی:

(i) همدیگر را کاملاً خشی می‌کنند؟

(ii) موج بزرگتری به‌وجود می‌آورند؟

ب) اگر A و B دو نوک میله نوسانگر به صورت هم فاز نوسان کنند (شکل ۶۹)، در شرایط زیر چه اتفاقی

می‌افتد؟ (خط‌های سیاه نشان‌دهنده برآمدگی و خط‌چین‌های آبی نشان‌دهنده فرو رفتگی موج‌هاست).

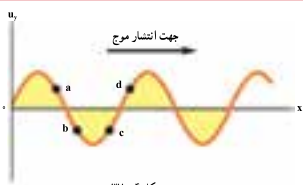


شکل ۶۹

(i) $PA = PB$ در نقطه P.

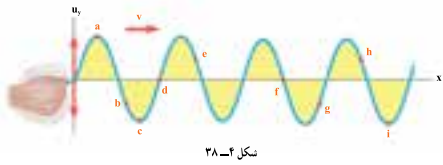
(ii) نصف طول موج $QB - QA$ در نقطه Q.

(iii) یک طول موج $RB - RA$ در نقطه R.



شکل ۳۷-۴

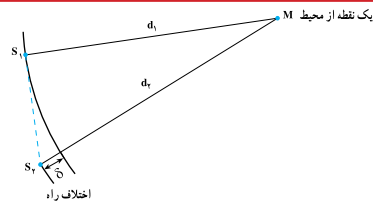
۴- شکل ۳۸-۴ موجی عرضی را نشان می‌دهد که در جهت مثبت محور x در امتداد طناب تحت کششی درحال انتشار است. روی این شکل چند نقطه از طناب با حروف مشخص شده است. (الف) نقاط هم‌فاز را بنویسید. (ب) نقاط با فاز مخالف را بنویسید. (پ) شتاب نوسانی در کدام نقطه‌ها صفر است؟ (ت) جهت سرعت نوسانی کدامیک از نقطه‌ها برخلاف جهت مثبت محور x است. (ث) دست کم یک نقطه با نام O روی شکل مشخص کنید که با سرعت بیشینه در جهت $+y$ در نوسان است.



شکل ۳۸-۴

۵- سرعت انتشار موج در طنابی به طول L با نیروی کشش F برابر v است. اگر طول طناب را نصف کنیم اما نیروی کشش را ثابت نگه داریم سرعت انتشار در آن چند برابر می‌شود؟

۱۳۱



شکل ۳۶-۴

اگر این اختلاف راه مضرب زوجی از نصف طول موج باشد، موجی که از هر دو چشمه به این نقطه می‌رسد هم‌فاز و برهم‌نهی آنها سازنده است و اگر اختلاف راه هر نقطه از محیط مضرب فردی از نصف طولی موج باشد در هر لحظه دو موج با فاز مخالف به این نقطه خواهد رسید که برهم‌نهی ویرانگری با هم خواهند داشت.

تمرین‌های فصل چهارم

۱- موج طولی و عرضی را تعریف کنید. تحقیق کنید که چه نوع موجی می‌تواند در جامد، مایع و یا گاز منتشر شود.

۲- نوسان‌های حاصل از چشمه موجی با بسامد 400 Hz با سرعت 100 m/s در یک محیط منتشر می‌شود. اگر چشمه موج دیگری با بسامد 150 Hz را جایگزین چشمه اولی کنیم، نوسان‌های آن با چه سرعتی در این محیط منتشر می‌شود؟ برای پاسخ خود دلیل بیاورید.

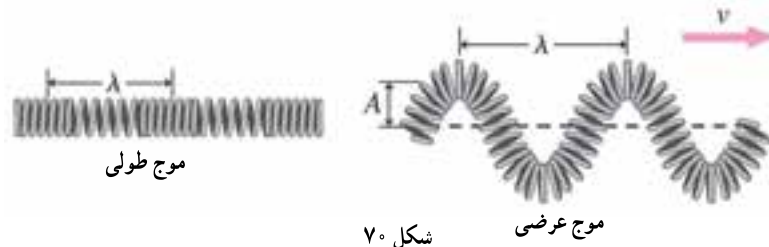
۳- شکل ۳۷-۴ نقش موجی^۱ را در یک لحظه معین t نشان می‌دهد که در جهت مثبت محور x در طول طناب تحت کششی حرکت می‌کند. چهار جزء طناب با حروف در آن نقطه‌ها مشخص شده‌اند. برای هر یک از این جزءها معین کنید که آیا در لحظه معین t ، آن جزء به بالا حرکت می‌کند یا پایین، یا به‌طور لحظه‌ای ساکن است.

۱- منظور از نقش موج، تصویر یک موج در یک لحظه مشخص است.

۱۳۰

راهنمای پاسخ‌یابی تمرین‌های فصل چهارم

۱- انتظار می‌رود دانش‌آموزان افزون بر تعریف موج‌های طولی و عرضی، تصویر مناسبی از این موج‌ها رسم کنند (مانند شکل ۷۰).



موج‌های طولی و عرضی در جامدها منتشر می‌شوند (شکل ۳۵). در مایع‌ها نیز موج‌های طولی و عرضی منتشر می‌شوند اما در گازها تنها موج‌های طولی منتشر می‌شوند.

۲- سرعت موج در هر محیط به ویژگی فیزیکی آن محیط بستگی دارد. بنابراین برای هر دو چشمه موج که با بسامد متفاوتی نوسان می‌کنند، سرعت موج یکسان و برابر 100 m/s است.

۵- با نصف شدن طول طناب، جرم واحد طول آن یعنی μ ، تغییری نمی‌کند. بنابراین با توجه به رابطه $v = \sqrt{F/\mu}$ چون، در هر دو حالت F ثابت است، سرعت انتشار تغییری نمی‌کند.

۷- جرم واحد طول سیم برابر است با :

$$\mu = (7 / 8 \text{ g} / \text{cm}^3) (0.5 \times 10^{-2} \text{ cm}^2) = 3 / 4 \times 10^{-2} \text{ g} / \text{cm} = 3 / 4 \times 10^{-3} \text{ kg} / \text{m}$$

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{156 \text{ N}}{3 / 4 \times 10^{-3} \text{ kg} / \text{m}}} = 200 \text{ m} / \text{s}$$

۶- شکل ۴-۳۹، نقش یک موج را در یک لحظه نشان می‌دهد. این شکل را در دفتر خود کپی کنید و بر روی آن موج دیگری رسم کنید که طول موج آن دو برابر و دامنه آن نصف باشد. دامنه و طول موج را روی شکل مشخص کنید.



شکل ۴-۳۹

۷- سیمی به چگالی $7/8 \text{ g/cm}^3$ و سطح مقطع 5 mm^2 بین دو نقطه با نیروی 156 N کشیده شده است. سرعت انتشار موج را در این سیم محاسبه کنید.

۸- دو موج با بسامدهای 50 Hz و 75 Hz در یک محیط منتشر می‌شوند.

(الف) سرعت انتشار موج دوم چند برابر سرعت انتشار موج اول است؟

(ب) طول موج برای موج دوم چند برابر طول موج اول است؟

۹- تابع یک موج در یک محیط، در SI، به صورت $u_y = 2 \times 10^{-2} \sin(5\pi t - \frac{\pi}{4}x)$ است.

(الف) این موج طولی است یا عرضی؟

(ب) دامنه، بسامد، طول موج و سرعت انتشار را به دست آورید.

(ب) معادله نوسان نقطه‌های واقع در $x = \pm 5 \text{ m}$ را تعیین کنید.

۱۰- چشمه موجی با بسامد 10 Hz در یک محیط که سرعت انتشار موج در آن 10 m/s است، نوسان‌های طولی ایجاد می‌کند. اگر دامنه نوسان‌ها 4 cm باشد، تابع موجی را که در راستای محور y منتشر می‌شود بنویسید.

۱۱- شکل ۴-۴۰ نمودار نقش دو موج را در لحظه معینی نشان می‌دهد که با سرعت یکسان 12 m/s به طرف راست در حرکت‌اند.

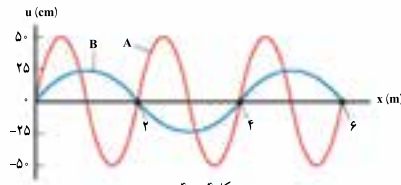
(الف) با توجه به اطلاعات روی نمودار، طول موج هر کدام از موج‌ها را پیدا کنید.

(ب) بسامد هر موج چقدر است؟

(ب) پیشینه سرعتی که هر موج به ذره‌های محیط کشسان می‌دهد تا حول وضع تعادلشان به نوسان درآیند، چقدر است؟

۱۳۲

(ت) معادله هر موج را در SI بنویسید.



شکل ۴-۴۰

۱۲- موجی در یک محیط در حال انتشار است. معادله نوسان دو نقطه A و B از این محیط به صورت زیر است:

$$u_A = 5 \sin(5\pi t - \frac{\pi}{4}x)$$

$$u_B = 5 \sin(5\pi t - \frac{\pi}{4}x)$$

فاصله این دو نقطه را از یکدیگر، به دست آورید. سرعت انتشار موج در محیط را 20 m/s فرض کنید.

۱۳- جرم یک سیم پیانو به طول 0.8 m متر برابر 6 g گرم و نیروی کشش آن 432 N است. این سیم به گونه‌ای به نوسان درمی‌آید که در طول آن، دو شکم تشکیل می‌شود؛ بسامد صوتی که ایجاد می‌شود، محاسبه کنید. بسامد اصلی این سیم چند هرتز است؟

۱۴- در سطح آب درون یک تشتک دو چشمه موج، S_1 و S_2 ، ارتعاش‌هایی با بسامد 20 Hz ایجاد می‌کنند. فاصله یک نقطه M در سطح آب از دو چشمه $d_1 = 12.5 \text{ cm}$ و $d_2 = 5 \text{ cm}$ است. اگر سرعت انتشار موجود در سطح آب 5 m/s باشد، دو موجی که با هم به این نقطه می‌رسند، نسبت به هم در چه وضعی خواهند بود؟

۱۵- نشان دهید اگر سرعت انتشار موج سینوسی در طناب برابر v باشد، انرژی موج در طولی از طناب که برابر یک طول موج است از رابطه $E = 2\pi^2 \mu v f A^2$ به دست می‌آید.

اگر دامنه موج 5 cm و بسامد آن 4 Hz ، سرعت انتشار 20 m/s و جرم واحد طول طناب 0.2 kg/m باشد، انرژی موج را در یک طول موج محاسبه کنید. ($\pi^2 = 10$)

۱۳۳

۸- (الف) سرعت انتشار موج در یک محیط، مستقل از بسامد موج است.

(ب) از رابطه $v = \lambda f$ داریم: $\lambda_1 f_1 = \lambda_2 f_2 \Rightarrow 5 \cdot \lambda_1 = 75 \lambda_2 \Rightarrow \lambda_2 = \frac{1}{15} \lambda_1$

۹- (الف) عرضی. راستای نوسان ذره‌های محیط کشسان در امتداد محور y است در حالی که موج در امتداد

محور x منتشر می‌شود.

(ب) $v = 20 \text{ m/s}$ ، $\lambda = 8 \text{ m}$ ، $A = 2 \text{ cm}$

(ب) در نقطه $x = 5 \text{ m}$ داریم: $u_y = (2 \times 10^{-2} \text{ m}) \sin(5\pi t - \frac{\pi}{4})$

و در نقطه $x = -5 \text{ m}$ داریم: $u_y = (2 \times 10^{-2} \text{ m}) \sin(5\pi t + \frac{\pi}{4})$

۱۰- چون موج طولی و در جهت محور y منتشر می‌شود معادله آن باید به صورت زیر باشد:

$$u_y = A \sin(\omega t - ky)$$

$$A = 4 \text{ cm} = 4 \times 10^{-2} \text{ m}$$

$$\lambda_B = 4 \text{ m}, \lambda_A = 2 \text{ m}$$

$$f_B = 3 \text{ Hz}, f_A = 6 \text{ Hz}$$

$$v_B = 4/3 \text{ m/s}, v_A = 18/8 \text{ m/s}$$

$$u_A = 5 \sin(12\pi t - \pi x)$$

$$u_B = 2.5 \sin(6\pi t) - 5\pi x$$

با توجه به داده‌های مسئله داریم:

(۱۱- الف)

(ب)

(پ)

(ت)

۱۲- اختلاف فاز دو نقطه برابر است با :

$$|\Delta\phi| = \left| \left(\omega \cdot \pi t - \frac{\pi}{\lambda} \right) - \left(\omega \cdot \pi t - \frac{\pi}{\lambda} \right) \right| = \frac{\pi}{24}$$

با توجه به اینکه $\omega = 5^\circ \text{rad/s}$ است، داریم :

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{5^\circ \pi \text{rad/s}}{20^\circ \text{m/s}} = \frac{\pi}{4} \text{rad/s}$$

از رابطه (۴-۱۵) کتاب درسی داریم :

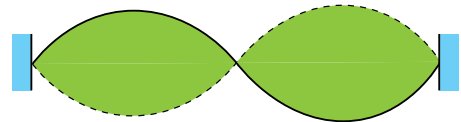
$$|\Delta\phi| = k(\Delta x)$$

$$\frac{\pi}{24} = \frac{\pi}{4} |\Delta x| \Rightarrow |\Delta x| = \frac{1}{6} \text{m}$$

۱۳- $F = 432 \text{N}$ و $L = 0.8 \text{m}$ و $m = 6 \text{g}$ سیم پیانو، یک سیم دو سر ثابت می باشد (شکل ۷۲) :

$$f_n = \frac{nv}{2L}, \quad v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}, \quad \mu = \frac{m}{L}$$

$$\mu = \frac{6 \times 10^{-3} \text{kg}}{0.8 \text{m}} = \frac{3}{4} \times 10^{-3} \text{kg/m} = 7.5 \times 10^{-4} \text{kg/m}$$



شکل ۷۲

$$v = \sqrt{\frac{432 \text{N}}{7.5 \times 10^{-4} \text{kg/m}}} = 240 \text{m/s}$$

$$f_2 = \frac{2v}{2L} = \frac{2 \times 240}{2 \times 0.8} = 300$$

با توجه به رابطه $f_n = nf_1$ می توان بسامد اصلی را به دست آورد :

$$f_2 = 2f_1 \rightarrow f_1 = \frac{f_2}{2} = 150 \text{Hz}$$

۱۴- اگر اختلاف راه دو موج از دو چشمه، مضرب زوجی از $\frac{\lambda}{2}$ باشد، دو موج هم فاز و تداخل سازنده در

نقطه M اتفاق می افتد و اگر مضرب فردی از $\frac{\lambda}{2}$ باشد، دو موج در فاز مخالف و تداخل ویرانگر اتفاق می افتد.

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{5 \text{m/s}}{2 \text{Hz}} = 0.25 \text{m} \rightarrow \frac{\lambda}{2} = 0.125 \text{m}$$

$$d_2 - d_1 = 0.50 - 0.125 = 0.375 \text{m}$$

$$\frac{d_2 - d_1}{\frac{\lambda}{2}} = \frac{0.375 \text{m}}{0.125 \text{m}} = 3$$

همانطور که دیده می شود، اختلاف راه مضرب فردی از $\frac{\lambda}{2}$ است، پس تداخل ویرانگر در نقطه M اتفاق می افتد.

۱۵- انرژی ΔL از طناب که با بسامد f ، جرم m و دامنه A در حال نوسان است. از رابطه $E = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2$

به دست می آید. پس انرژی کل در طول $L = \lambda$ از مجموع E ها محاسبه می شود :

$$E_t = \sum E = \sum \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 = \frac{1}{2} A^2 \sum (\pi f)^2 m$$

$$= \frac{1}{2} A^2 \times \pi^2 f^2 \sum m$$



شکل ۷۳

اگر جرم L متر از طناب را M فرض کنیم؛

$$E_t = \pi^2 f^2 A^2 M$$

با توجه به تعریف μ :

$$\mu = \frac{M}{L} = \frac{M}{\lambda} \Rightarrow M = \mu \lambda = \lambda = v/f \Rightarrow M = \mu v/f$$

با جایگذاری در E_t رابطه نهایی را به دست می آوریم :

$$E_t = \pi^2 f^2 A^2 M = \pi^2 f^2 A^2 \times \mu \frac{v}{f} = \pi^2 \mu v f A^2$$

$$A = 5 \text{ cm} = 0.05 \text{ m}, f = 4 \text{ Hz}, v = 2 \text{ m/s}, \mu = 0.2 \text{ kg/m}$$

$$E_t = \pi^2 \mu v f A^2 = 2 \times 10 \times 0.2 \times 4 \times (0.05)^2 = 0.8 \text{ J}$$