

هدف‌های رفتاری: در پایان این فصل از هنرجو انتظار می‌رود:

- ۱- منحنی‌ها و دیگرام‌برداری جریان، ولتاژ و مقاومت ظاهری در مدار L-C سری و موازی را رسم کند.
- ۲- مقادیر مقاومت ظاهری، اختلاف فاز، جریان — ولتاژ و توان‌ها را در مدارهای L-C سری و موازی محاسبه کند.
- ۳- مفهوم رزنانس را شرح دهد و فرکانس رزنانس را در مدارهای L-C سری و موازی محاسبه کند.
- ۴- منحنی تغییرات امپدانس Z و جریان I، مدارهای L-C سری و موازی را در تغییرات فرکانس رسم کند.
- ۵- معادلات زمانی ولتاژ و جریان عناصر در مدارهای L-C سری و موازی را به‌دست آورد.

۱-۵- مقدمه

همکار گرامی در این فصل نیز برای ایجاد انگیزه بیشتر برای هنرجویان، در ابتدای شروع فصل از کاربردهای متداول مدارهای L-C برای آنها نمونه‌هایی برشمارید.

مدارات نوسان‌ساز، فرستنده‌های تلویزیونی و رادیویی و تزریق خازن در شبکه‌های با بار سلفی جهت اصلاح ضریب قدرت و استفاده از بانک‌های خازنی در این خصوص مواردی است که می‌توان به آنها اشاره نمود.

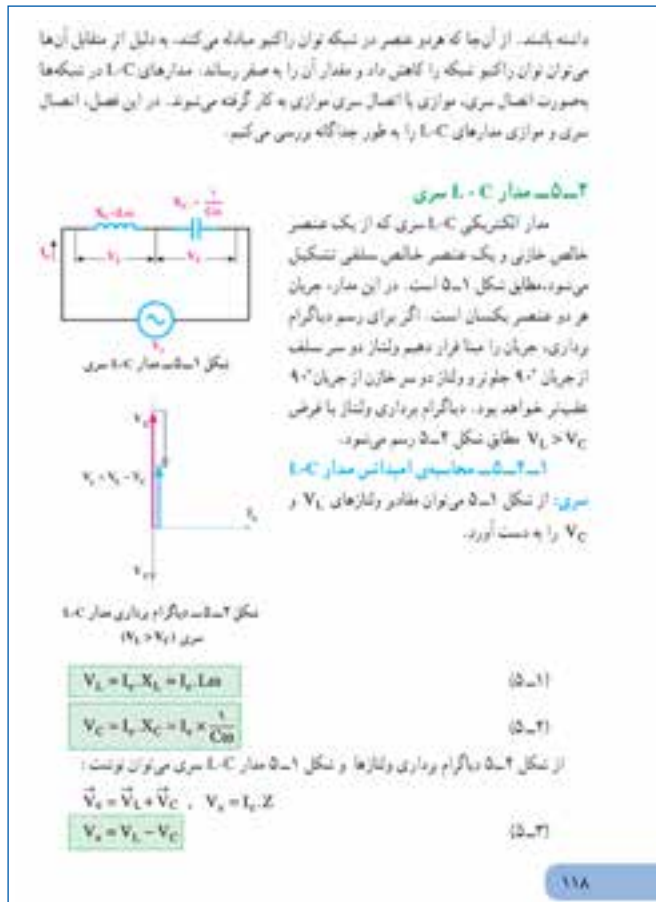
نکته بسیار مهمی که در رابطه با اتصال خازن و سلف باید آن را یادآوری کنیم این است که چه در حالت سری و چه در حالت موازی این دو المان رفتاری خلاف همدیگر دارند.

در اتصال سری بردار ولتاژها در خلاف جهت همدیگر و در حالت موازی بردار جریان‌ها مقابل همدیگر بوده و اختلاف زاویه 180° می‌سازند.

این خاصیت باعث می‌شود تا این دو عنصر الکتریکی اثر همدیگر را خنثی و تضعیف نمایند.

۲-۵- مدار L-C سری

در مدار L-C سری هر کدام از راکتانس سلفی X_L یا خازنی X_C بزرگتر باشد کیفیت سلفی یا خازنی مدار را تعیین می کند از همین مقایسه مقدار V_C یا V_L نیز مشخص می شود.



چون مثل همه مدارهای سری مبدا جریان است و در اینجا ولتاژ سلف نسبت به جریان مدار 90° پیش فاز و ولتاژ خازن 90° پس فاز است و جمعاً 180° درجه الکتریکی با همدیگر زاویه می سازند که طبق روابط خوانده شده در فصل بردارها برآیند این دو بردار با تفاضل آنها معادل است یعنی:

(در صورتی که $X_L > X_C$)

$$V_s = V_L - V_C$$

به همین دلیل مقدار امپدانس کل Z برابر است با:

$$Z = X_L - X_C$$

(الف)

مقادیر توان‌ها در مدار L-C سری : چون عنصر اکتیو (مقاومت) در این مدار نداریم پس

توان اکتیو نیز مصرف نمی‌شود و خواهیم داشت : $P_e = 0 = W$

با جایگزین کردن روابط 2-1 و 2-2 در رابطه 2-3 خواهیم داشت :

$$I_e \times Z = X_L - I_e - X_C \cdot I_e$$

$$Z = X_L - X_C \quad (2-4)$$

در صورتی که $V_e > V_L$ باشد رابطه 2-3 و 2-4 به صورت زیر می‌شود :

$$V_g = V_e - V_L$$

$$Z = X_L - X_C$$

2-4-2- محاسبه توان : همان طور که مشاهده می‌کنید، در اینجا گرام شکل 2-4 اختلاف فاز جریان و ولتاژ هم 90° خواهد بود - یعنی اگر $X_L > X_C$ باشد $\phi = 90^\circ$ و مدار پس فاز و اگر $X_L < X_C$ باشد $\phi = -90^\circ$ و مدار پیش فاز خواهد بود. پس ضریب توان مؤثر و غیر مؤثر به ترتیب $\cos \phi = 0$ و $\sin \phi = \pm 1$ است. وقتی ضریب توان مؤثر صفر شد، در مدار L-C هیچ گونه توان اکتیو مصرف نمی‌شود. بنابراین :

$$P_g = V_e I_e \cos \phi = 0 \quad (2-5)$$

برای تعیین توان راکتیو می‌توان نوشت :

وای سلف $P_{d_L} = I_e^2 X_L$

وای خازن $P_{d_C} = -I_e^2 X_C$

$$P_g = P_{d_L} + P_{d_C} = I_e^2 X_L - I_e^2 X_C$$

$$P_g = I_e^2 (X_L - X_C) \quad (2-6)$$

رابطه 2-6 را می‌توان به صورت زیر نوشت :

$$P_g = \pm V_e I_e \sin \phi = \pm V_e I_e \sin 90^\circ = \pm V_e I_e \quad \text{V.A.R} \quad (2-7)$$

نتیجه به ازای $X_L > X_C$ توان راکتیو با علامت + و به ازای $X_L < X_C$ توان راکتیو با علامت - مشخص می‌شود.

از آن جا که $P_g = V_e I_e$ است، بنابراین :

$$P_g = |P_d| = V_e I_e \quad (2-8)$$

ولی در عوض به دلیل وجود دو عنصر راکتیو سلف و خازن توان راکتیو این دو المان به صورت

زیر خواهد بود :

مصرف کننده توان راکتیو $P_{d_L} = X_L I_e^2 \rightarrow$

تولید کننده توان راکتیو $P_{d_C} = -X_C I_e^2 \rightarrow$

چون رفتار این دو المان مخالف یکدیگر است.

$$\text{کل } P_d = P_{d_L} - P_{d_C} = \pm V_e I_e \sin 90^\circ = \pm V_e I_e$$

و در نهایت توان ظاهری مدار از قدر مطلق توان راکتیو به دست می‌آید.

$$P_s = |P_d| = V_e I_e$$

(ب)

معادله زمانی ولتاژ کل: اگر $X_L > X_C$ مدار سلفی است بنابراین ولتاژ پیش فاز (به اندازه 90°) خواهد بود.

$$V = +V_m \sin(\omega t + 90^\circ)$$

و در صورتی که $X_L < X_C$ مدار خازنی و ولتاژ مدار پس فاز (به اندازه 90°) خواهد بود.

$$V = +V_m \sin(\omega t - 90^\circ)$$

مثال ۱: در یک مدار سری L-C، فرض می‌کنیم جریان مشخصی با معادله $i = I_m \sin(\omega t)$ از مدار بگذرد. ولتاژهای زمانی ولتاژ دو سر سلف به صورت $v_L(t) = X_L I_m \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$ و ولتاژ دو سر خازن به صورت $v_C = X_C I_m \sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$ خواهد بود. ولتاژ منبع همواره از جمع جبری دو ولتاژ لحظه‌ای v_L و v_C به دست می‌آید. بنابراین، ولتاژ کل را می‌توان با

$$v(t) = X_L I_m \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) + X_C I_m \sin(\omega t - \frac{\pi}{2}) \quad (2-9)$$

با توجه به این که $\sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) = \cos \alpha$ و $\sin(\alpha - \frac{\pi}{2}) = -\cos \alpha$ است، رابطه‌ی $v(t)$ به صورت زیر بیان می‌شود:

$$v = X_L I_m \cos \omega t - X_C I_m \cos \omega t$$

$$v = (X_L - X_C) I_m \cos \omega t$$

با توجه به قانون اهم، ولتاژ $v_m = (X_L - X_C) I_m$ می‌باشد. اگر $X_L > X_C$ باشد، رابطه‌ی ولتاژ $v(t)$ به صورت زیر در می‌آید:

$$v = +v_m \cos \omega t = V_m \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) \quad (2-10)$$

و در صورتی که اگر $X_L < X_C$ باشد، رابطه‌ی ولتاژ $v(t)$ به صورت زیر بیان می‌شود:

$$v = -v_m \cos \omega t = V_m \sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

مثال ۱: یک مدار C-L سری با $L = 10 \text{ mH}$ و خازن C مفروض است. اگر معادله‌ی ولتاژ $v(t) = 100 \sin(2000t)$ و معادله‌ی جریان $i(t) = 4 \sin(2000t)$ باشد، ظرفیت خازن C چقدر است؟

راهنما:

$$Z = \frac{V_m}{I_m} = \frac{100}{4} = 25 \Omega$$

$$\phi = \theta_v - \theta_i = (-90^\circ) - (-90^\circ) = 0^\circ$$

فرض بر خالص بودن سلف و خازن می‌باشد.

پس به هر چوین متذکر شویم که برای حل مسائل مربوط به L-C سری ابتدا نوع مدار را مشخص کنیم که تشخیص آن از مقایسه X_L و X_C به سادگی میسر است.

در مثال ۱ صفحه ۱۲۰ کتاب درسی چون ولتاژ مدار به اندازه 90° نسبت به جریان پس فاز است

پس مدار در مجموع خاصیت خازنی دارد و $Z = X_C - X_L$

ج)

حالت تشدید یا رزونانس در مدار L-C سری : با تغییر فرکانس، مقدار C و مقدار L مدار در وضعیتی قرار می گیرد که مقدار راکتانس سلف و خازن با همدیگر برابر می شوند یعنی $X_L = X_C$ و از آنجا خواهیم داشت $Z = |X_L - X_C| = 0 \Omega$ و جریان به بیشتر مقدار خود خواهد رسید.

۵-۱۱) حالت تشدید رزونانس در مدار L-C سری : در رابطه ۴، ابتدا ابعاد یک مدار L-C سری را به صورت $Z = L\omega = \frac{1}{C\omega}$ محاسبه کردیم. چون $\omega = 2\pi f$ است، بنابراین $Z = 2\pi fL = \frac{1}{2\pi fC}$ می شود. مقدار ابعاد Z با تغییر فرکانس (f) شبکه و مقادیر L و C تغییر می کند. از آن جا که ظرفیت خازن $C = \frac{\epsilon A}{d}$ و ابعاد یک سلف $L = \frac{\mu N^2 A}{l}$ است، با تغییر ابعادی در وضعیتی خازن، تغییر مقدار سطح مؤثر صفحات خازن یا تغییر خسرب دی الکتریک می توان ظرفیت خازن را تغییر داد. در ابعاد یک سلف تغییر دور و سطح مقطع حلقه ها و طول مؤثر پویمن (سلف) و خسرب طول مغناطیسی، مقدار L را تغییر می دهد. در هر صورت با تغییر کمیت های f و L و C می توان وضعیتی ایجاد کرد که $2\pi fL = \frac{1}{2\pi fC}$ شود. در این حالت، امدادی کمیت Z برابر صفر می شود و حداکثر جریان در مدار L-C سری جاری خواهد شد. این جریان، با جریان اتصال کوتاه مدار L-C برابر است و سلف و خازن با هم مدار را به اتصال کوتاه می کشاند. این حالت از وضعیت مدار L-C سری را که $Z = 0$ با $L\omega = \frac{1}{C\omega}$ می شود، **حالت تشدید با رزونانس** گویند. در حالت تشدید خواهیم داشت:

$$Z = L\omega = \frac{1}{C\omega} = 2\pi fL = \frac{1}{2\pi fC} = 0 \quad (5-11)$$

$$L\omega = \frac{1}{C\omega} \Rightarrow L\omega^2 C = 1 \Rightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (5-12)$$

اگر در مدار L-C سری، L و C ثابت باشند، با تغییرات فرکانس f وضعیت تشدید ایجاد می شود. به فرکانسی که وضعیت تشدید را ایجاد می کند، **فرکانس رزونانس** یا **فرکانس تشدید** می گویند و آنرا با f_r نشان می دهند. از رابطه ۵-۱۲ فرکانس تشدید به صورت روابط زیر محاسبه می شود:

$$L\omega^2 C = 1 \quad \omega = 2\pi f_r$$

$$L(2\pi f_r)^2 C = 1 \Rightarrow (2\pi f_r)^2 = \frac{1}{LC}$$

$$2\pi f_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (5-13)$$

این حالت رزونانس نامیده می شود و فرکانسی که در این فرکانس این اتصال کوتاه رخ می دهد فرکانس تشدید نامیده می شود به هنجریان حتماً یادآوری کنیم که مدار به حالت اتصال کوتاه می رود.

$$X_L = X_C \rightarrow L\omega = \frac{1}{C\omega} \rightarrow LC\omega^2 = 1 \rightarrow f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

در مثال آورده شده در صفحه ۱۲۳ (مثال ۲)، یکی از مواردی که هنجریان با آن دچار زحمت می شوند محاسبه مقدار فرکانس رزونانس (تشدید) است.

در رابطه‌ی ۱۲، C بر حسب فاراد و L بر حسب هنری و f بر حسب هرتز است.

مثال ۲: مدار L-C سری، معادل شکل ۲-۵-۱
مطروحی است. همان طور که مشاهده می‌کنید، هر سه کمیت f و C و L در مدار قابل تغییر است. مطلوب است:
الف) مقدار اندوکتانس L در صورتی که در $f = 10 \text{ kHz}$ تنظیم ایجاد کند و ظرفیت خازن برابر با $C = 10 \text{ nF}$ باشد.
ب) اندازه‌ی ظرفیت خازن C در فرکانس رزونانس $f = 10 \text{ kHz}$ در صورتی که $L = 1 \text{ mH}$ باشد.
ج) در صورتی که $L = 1 \text{ mH}$ و $C = 10 \text{ nF}$ باشد، فرکانس رزونانس چقدر است؟
راستی

الف)

$$X_C = X_L \Rightarrow \pi f L = \frac{1}{\pi f C} \Rightarrow L = \frac{1}{\pi^2 f^2 C}$$

$$L = \frac{1}{\pi^2 \times 10^4 \times 10^{-8} \times 10^{-8}} = 25 / 2 \text{ mH}$$

ب)

$$C = \frac{1}{\pi^2 f^2 L} = \frac{1}{\pi^2 \times 10^4 \times 2 \times 10^{-3}} = 25 / 2 \text{ nF}$$

ج)

$$f_r = \frac{1}{\pi \sqrt{LC}} = \frac{1}{\pi \sqrt{1 \times 10^{-3} \times 10 \times 10^{-9}}} = 25 / 2 \text{ kHz}$$

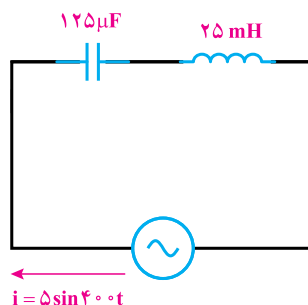
نکته: تأثیر فرکانس در امپدانس و جریان مدار L-C سری: در مدار L-C، با توجه به رابطه‌ی $Z = \pi f L = \frac{1}{\pi f C}$ اگر فرکانس $f = 0$ شود، امپدانس Z بی‌نهایت می‌شود؛ زیرا مقدار $\frac{1}{\pi f C} \rightarrow \infty$ خواهد شد. به عبارت دیگر، وقتی فرکانس را صفر است، یعنی مدار از جریان DC عبور نمی‌کند و خازن در جریان DC مانند یک دیوار عایق در برابر عبور بار را خواهد داشت. اگر امپدانس $Z = 0$ شود، هیچ نوع جریانی از مدار عبور نمی‌کند و $I = 0$ خواهد شد.

برای حل این فرکانس بهتر است ابتدا با استفاده از ماشین حساب و با رعایت نمادهای علمی برای میلی هانری و میکروفاراد (ضریب اندوکتانس و ظرفیت خازن) مقدار زیر رادیکال و جذر آن را به دست آورده سپس در مقدار 2π ضرب نمایند و در انتها با معکوس کردن مقدار با استفاده از کلید X^{-1} مقدار f_r به دست می‌آید.

مثال $2 \times \pi \times \sqrt{1} \text{ [EXP] [+/-] } 3 \times 10^{-3} \text{ [EXP] [+/-] } 6 = 6 / 28 \times 10^{-3}$

$6 / 28 \times 10^{-3} \text{ [X}^{-1}] = 159 / 23 \text{ HZ}$

۵-۲-۱- حل تمرین مشابه تمرین ۱ صفحه ۱۲۹ کتاب درسی (شکل ۵-۱)



شکل ۵-۱

هدف : نوشتن معادله ولتاژ دو سر L و C
گام ۱) ابتدا مقادیر اهمی L و C را می نویسیم.

$$X_L = L\omega = 1 \cdot \Omega$$

$$X_C = \frac{1}{C\omega} = 2 \cdot \Omega$$

گام ۲) در نظر گرفتن I_e مقادیر مؤثر ولتاژ دو سر L و C را می یابیم.

$$I_e = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

$$V_L = I_e \cdot X_L = I_e L\omega = \frac{5}{\sqrt{2}} \times 25 \times 10^{-3} \times 400 = \frac{50}{\sqrt{2}} \text{ V}$$

$$V_C = I_e \cdot X_C = I_e \times \frac{1}{C\omega} = \frac{5}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{125 \times 10^{-6} \times 400} = \frac{5 \times 10^{-4}}{\sqrt{2} \times 125 \times 4} = 50\sqrt{2} \text{ V}$$

گام ۳) نوشتن معادلات زمانی برای ولتاژ دو سر L و C
- اگر بردار جریان I_e را مبنا قرار دهیم ولتاژ دو سر سلف 90° از جریان جلوتر و ولتاژ دو سر خازن 90° از جریان عقب تر خواهد بود.

$$V_L(t) = V_{L_m} \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) = 50 \sin(400t + \frac{\pi}{2})$$

$$V_C(t) = V_{C_m} \sin(\omega t - \frac{\pi}{2}) = 100 \sin(400t - \frac{\pi}{2})$$

(ب)

هدف : نوشتن معادله ولتاژ منبع

- برای نوشتن معادله ولتاژ منبع کافی است معادلات زمانی دو سر سلف و خازن را با هم جمع کنیم.

گام ۱) جمع معادلات دو سر سلف و خازن

$$V(t) = V_L(t) + V_C(t)$$

$$V(t) = 50 \sin(400t + \frac{\pi}{2}) + 100 \sin(400t - \frac{\pi}{2})$$

گام ۲) با استفاده از روابط زیر، ۲ معادله را به معادلات مشابهی می توان تبدیل کرد.

$$\begin{cases} \sin(\alpha - \frac{\pi}{2}) = -\cos \alpha \\ \sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) = \cos \alpha \end{cases}$$

به دلیل اینکه $X_L < X_C$ می باشد، معادله ولتاژ 90° عقب تر از جریان مبنا می باشد.

$$V(t) = 50 \cos \omega t - 100 \cos \omega t = -50 \cos 400t$$

(پ)

هدف : محاسبه توان های مدار

گام ۱، تعیین ضریب توان مؤثر و غیر مؤثر

به دلیل اینکه $X_L < X_C$ می باشد $\varphi = -90^\circ$ خواهد بود.

$$X_L < X_C \rightarrow \varphi = -90^\circ \rightarrow \cos(-90^\circ) = 0$$

گام ۲، محاسبه توان ها

$$P_e = V_e \cdot I_e \cos \varphi = 0$$

توان غیر مؤثر مدار از طریق سلف و خازن ایجاد می شود.

برای محاسبه توان غیر مؤثر مدار می توان، توان غیر مؤثر سلف و خازن را به تنهایی محاسبه کرد

و در نهایت جمع کرد.

$$P_{d_L} = I_e^2 \cdot X_L = \left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2 (10) = 125 \text{ V.A}$$

$$P_{d_C} = -I_e^2 \cdot X_C = -\left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2 (20) = -250 \text{ V.A}$$

$$P_d = P_{d_L} + P_{d_C} = 125 - 250 = -125 \text{ V.A}$$

$$P_d = V_e I_e \sin \varphi = -125 \text{ (VAR)}$$

$$P_s = |P_d| = V_e \cdot I_e = 125 \text{ (V.A)}$$

(ت)

هدف : محاسبه فرکانس رزونانس

در فرکانس رزونانس مقادیر مقاومت خازنی و مقاومت سلفی با هم برابر می باشند.

$$\text{فرکانس رزونانس از رابطه } f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \text{ محاسبه می شود.}$$

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{25 \times 10^{-3} \times 125 \times 10^{-6}}} = 90 \text{ HZ}$$

(ث)

هدف : رسم دیاگرام برداری ولتاژها

$$V_{Lm} = 5^\circ V$$

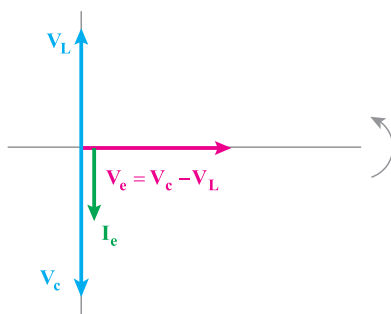
$$V_{cm} = 10^\circ V$$

گام ۱) I_e را مبنا قرار می دهیم.

ولتاژ دوسر سلف از جریان 90° جلوتر و ولتاژ دوسر خازن از جریان 90° عقب تر خواهد بود.

گام ۲) رسم دیاگرام برداری ولتاژها

V_e (ولتاژ کل) به طرف پایین می باشد به دلیل اینکه $V_C > V_L$ است. (شکل ۵-۲)

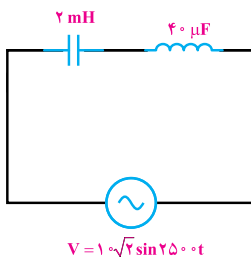


شکل ۵-۲

۵-۲-۲- حل تمرین شماره ۲ صفحه ۱۲۹ کتاب درسی (شکل ۵-۳)

الف)

هدف : محاسبه معادله زمانی جریان کل



$$V = 1\sqrt{2} \sin 2500t$$

شکل ۵-۳

گام ۱) ابتدا مقادیر اهمی L و C را می نویسیم.

$$= \frac{1}{40 \times 10^{-3} \times 2500} = 10 \Omega$$

$$X_L = L\omega = 2 \times 10^{-2} \times 2500 = 5 \Omega$$

گام ۲) با توجه به گام ۱ می‌توان اختلاف فاز را به صورت زیر مشخص کرد.

$$X_L < X_C \rightarrow \varphi = -90^\circ$$

گام ۳) محاسبه امپدانس کل مدار

$$Z = |X_L - X_C| = |5 - 10| = 5 \Omega$$

گام ۴) تعیین معادله جریان با توجه به مقادیر جریان و θ_1

$$I_m = \frac{V_m}{Z} = \frac{10\sqrt{2}}{5} = 2\sqrt{2} \text{ A}$$

$$\varphi = \theta_V - \theta_I \rightarrow -90^\circ = 0 - \theta_I \rightarrow \theta_I = 90^\circ$$

$$i(t) = 2\sqrt{2} \sin(2500t + 90^\circ)$$

(ب)

هدف : نوشتن معادله ولتاژ دو سر L و C

گام ۱) با توجه به جریان عبوری از مدار می‌توانیم ولتاژ عبوری از مدار را بیابیم.

$$V_{L_m} = I_m \cdot X_L = 2\sqrt{2} \times 5 = 10\sqrt{2} \text{ V}$$

$$V_{C_m} = I_m \cdot X_C = 2\sqrt{2} \times 10 = 20\sqrt{2} \text{ V}$$

گام ۲) نوشتن معادله ولتاژ دو سر L و C

اگر جریان مبنا قرار بگیرد، معادله ولتاژ دو سر سلف 90° جلوتر و معادله ولتاژ دو سر خازن 90° عقب‌تر است.

$$V_L(t) = V_{L_m} \sin(\omega t + 90^\circ + \frac{\pi}{4}) = 10\sqrt{2} \sin(2500t + 135^\circ)$$

$$V_C(t) = V_{C_m} \sin(\omega t + 90^\circ - \frac{\pi}{4}) = 20\sqrt{2} \sin(2500t)$$

(پ)

هدف : محاسبه توان‌های مدار

گام ۱) یافتن مقادیر ضریب توان مؤثر و غیر مؤثر

$$X_C > X_L \rightarrow \varphi = -90^\circ \rightarrow \cos(-90^\circ) = 0, \sin(-90^\circ) = -1$$

گام ۲) محاسبه تک تک توان های مدار با استفاده از روابط مربوطه

$$P_e = V_e \cdot I_e \cos \varphi = 0$$

$$P_d = V_e \cdot I_e \sin \varphi = \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \times \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \sin(-90^\circ) = -2 \cdot V \cdot A \cdot R$$

$$P_s = |P_d| = V_e I_e = 2 \cdot V \cdot A$$

(ت)

هدف : فرکانس رزونانس

در فرکانس رزونانس مقادیر مقاومت خازنی و مقاومت سلفی با هم برابر می باشند.

فرکانس رزونانس از رابطه $f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ محاسبه می شود.

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{2 \times 10^{-3} \times 40 \times 10^{-6}}} = 562/69 \text{ HZ}$$

(ث)

هدف : رسم دیاگرام برداری ولتاژها

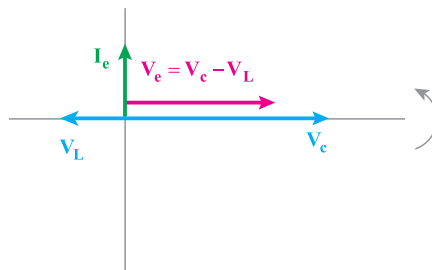
گام ۱) I_e را مبنا قرار می دهیم.

ولتاژ دو سر سلف از جریان 90° جلوتر و ولتاژ دو سر خازن از جریان 90° عقب تر خواهد بود.

گام ۲) رسم دیاگرام برداری ولتاژها

V_e (ولتاژ کل) برآیند دو ولتاژ V_L و V_C می باشد و در این تمرین $V_L < V_C$ می باشد و V_e (ولتاژ

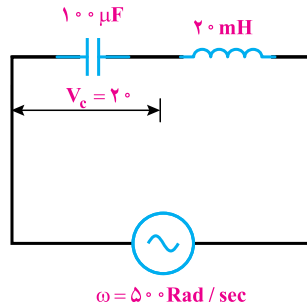
برآیند) در جهت V_C خواهد بود. (شکل ۴-۵)



شکل ۴-۵

۳-۲-۵- حل تمرین ۳ صفحه ۱۲۹ کتاب درسی (شکل ۵-۵)

هدف : نوشتن معادله ولتاژ و جریان



شکل ۵-۵

گام ۱) ابتدا مقادیر اهمی L و C را می نویسیم.

$$X_c = \frac{1}{C\omega} = \frac{1}{100 \times 10^{-6} \times 500} = 20 \Omega$$

$$X_L = L\omega = 20 \times 10^{-3} \times 500 = 10 \Omega$$

گام ۲) با توجه به گام ۱ می توان اختلاف فاز را به صورت زیر مشخص کرد.
خاصیت خازنی

$$X_L < X_C \rightarrow \phi = -9^\circ$$

$$\phi = \theta_V - \theta_I \rightarrow -9^\circ = \theta_V - 0 \rightarrow \theta_V = -9^\circ$$

گام ۳) محاسبه امپدانس کل مدار

$$Z = |X_C - X_L| = |20 - 10| = 10 \Omega$$

گام ۴) محاسبه مقدار جریان و ولتاژ کل

$$I_C = \frac{V_C}{X_C} = \frac{20}{20} = 1 \text{ A}$$

در مدار سری تمامی جریان ها با هم برابر و هم فاز می باشند.

$$I_c = I_C = I_L = 1 \text{ A}$$

$$I(t) = \sqrt{2} \sin(500t + 9^\circ)$$

جریان منبع را مبنا قرار می دهیم $\theta_I = 0^\circ$

$$i(t) = \sqrt{2} \sin(2500t)$$

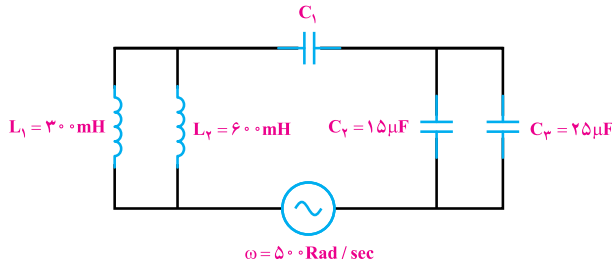
گام ۵) نوشتن معادله ولتاژ جریان

$$V_c = Z \cdot I_c = 10 \times 1 = 10 \text{ V}$$

$$V(t) = 10 \sqrt{2} \sin(500t + 9^\circ)$$

۵-۲-۴- حل تمرین ۶ صفحه ۱۳۰ کتاب درسی (شکل ۵-۶)

هدف : تعیین میزان C_1 در حالت تشدید



شکل ۵-۶

در حالت تشدید $X_L = X_C$ می باشد، پس کافی است X_C کل و یا X_L کل را بیابیم و با هم برابر قرار دهیم.

گام ۱) تعیین مقاومت معادل سلفی کل

$$X_{L_1} = L\omega = 30 \times 10^{-3} \times 50000 = 1500 \Omega$$

$$X_{L_2} = L\omega = 60 \times 10^{-3} \times 50000 = 3000 \Omega$$

$$X_L = (X_{L_1} \parallel X_{L_2}) = \frac{1500 \times 3000}{4500} = 1000 \Omega$$

گام ۲) تعیین مقاومت معادل خازنی کل

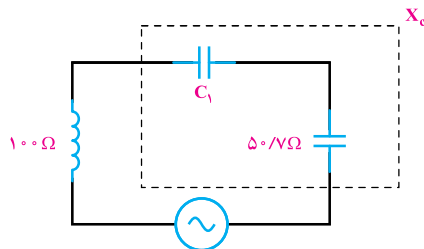
$$X_{C_1} = \frac{1}{15 \times 10^{-6} \times 50000} = \frac{10^4}{75} = 133.3 \Omega$$

$$X_{C_2} = \frac{1}{25 \times 10^{-6} \times 50000} = \frac{10^4}{25 \times 5} = 80 \Omega$$

$$X_C = (X_{C_1} \parallel X_{C_2}) = \frac{133.3 \times 80}{21.33} = 49.5 \Omega$$

گام ۳) با در نظر گرفتن $X_L = X_C$ می توان X_{C_1} را محاسبه کرد و در نهایت C_1 قابل محاسبه

است (شکل ۵-۷).



شکل ۵-۷

$$X_L = X_C$$

$$100 = X_{C1} + 50/7$$

$$X_{C1} = 100 - 50 \times 7 = 49/3 \Omega$$


$$X_{C1} = \frac{1}{C_1 \omega} \rightarrow C_1 = \frac{1}{X_{C1} \omega} = \frac{1}{500 \times 49/3}$$

۵-۳- مدار L-C موازی

برای تحلیل مدارهای L-C موازی ولتاژ را مبنا در نظر می‌گیریم و روی جریان‌ها مطالعه می‌کنیم در این جا نیز جریان‌های سلف و خازن 18° اختلاف فاز دارند.

۳-۵- مدار L-C موازی

مدار الکتریکی L-C موازی در شکل ۵-۳ نشان داده شده است. در این مدار، ولتاژ دو سر هر دو عنصر C و L با هم برابرند. جریان در داخل مقاومت سلفی (I_L) از ولتاژ منبع به اندازه 90° عقب‌تر و جریان خازنی (I_C) از ولتاژ منبع 90° جلوتر است. جریان کلی یا از جمع برداری دو جریان \vec{I}_L و \vec{I}_C به دست می‌آید. چون دو جریان \vec{I}_L و \vec{I}_C دارای یکدراست هستند و 180° برجه اختلاف فاز دارند، می‌توان جریان کلی را از رابطه $I_L - I_C = I$ یا $I_L = I + I_C$ به دست آورد. بنابراین برداری جریان‌های مدار L-C موازی در مبنا ولتاژ در شکل ۵-۳ با فرض $X_C > X_L$ رسم شده است.



شکل ۵-۳

۳-۵-۱- معادله‌های آمپدانس مدار L-C موازی از شکل‌های ۵-۳ و ۵-۴ برای معادله‌های آمپدانس می‌توان نوشت:

$$I_L = \frac{V}{X_L}, \quad I_C = \frac{V}{X_C}, \quad Z = \frac{V}{I}, \quad I = \frac{V}{Z}$$

$$I = I_C - I_L \Rightarrow \frac{V}{Z} = \frac{V}{X_C} - \frac{V}{X_L}$$

با فرض $X_C > X_L$

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L} \Rightarrow Z = \frac{X_L X_C}{X_C - X_L} \quad (5-14)$$

بر صورتی که $X_C > X_L$ باشد، در رابطه‌ی ۵-۱۴ جای X_L و X_C در معرج کسر با هم

جریان کل مدار از تفاضل جریان سلف و خازن تحصیل می‌شود. مانند مدارهای L-C سری ابتدا بهتر است نوع مدار از نظر خاصیت سلفی یا خازنی مشخص شود.

برای این کار هر کدام از مقادیر راکتانس سلفی X_L یا X_C کوچک تر بود کیفیت مدار را از نظر سلفی یا خازنی مشخص می کند به دلیل کوچک تر بودن راکتانس، جریان آن راکتانس بیشتر خواهد بود و در اتصال $L-C$ موازی جریان ها تعیین کننده کیفیت مدار هستند (بر خلاف $L-C$ سری که ولتاژ بیشتر تعیین کننده بود).

$$\text{اگر } \begin{cases} X_L < X_C \rightarrow \text{خاصیت مدار سلفی است} & (I_L > I_C) \\ X_C < X_L \rightarrow \text{خاصیت مدار خازنی است} & (I_C > I_L) \end{cases}$$

(الف)

فرکانس رزونانس در این مدار کاملاً شبیه حالت سری است فقط در حالت سری وقتی حالت تشدید داشته باشیم مدار به حالت اتصال باز (مدار باز) و در حالت موازی در فرکانس رزونانس مدار به حالت اتصال کوتاه تبدیل می شود.

(ب)

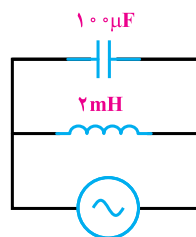
توان اکتیو در مدار $L-C$ موازی نیز صفر است ولی دو توان راکتیو P_{dL} و P_{dC} برای خازن و سلف وجود دارد.

تذکره: در مثال هایی که گفته می شود جریان یک شاخه چند برابر جریان شاخه دیگر است صریحاً به خازنی یا سلفی بودن مدار اشاره دارد (شبیه مثال ۳ صفحه ۱۲۷ کتاب درسی)

۵-۳-۱- حل تمرین شماره ۷ صفحه ۱۳۰ کتاب درسی (شکل ۸-۵)

(الف)

هدف : محاسبه معادله جریان دو شاخه



شکل ۸-۵

گام ۱) تعیین جریان ماکزیمم هر شاخه

$$X_C = \frac{1}{C\omega} = \frac{1}{100 \times 10^{-6} \times 2500} = \frac{100}{25} = 4 \Omega$$

$$X_L = L\omega = 2 \times 10^{-3} \times 2500 = 5 \Omega$$

$X_C < X_L \rightarrow$ مدار خازنی است

$$I_{C_m} = \frac{V_m}{X_C} = \frac{100}{4} = 25 A$$

$$I_{L_m} = \frac{V_m}{X_L} = \frac{100}{5} = 20 A$$

گام ۲) نوشتن معادله جریان هر شاخه

جریان در داخل مقاومت سلفی (I_L) از ولتاژ شبکه به اندازه 90° عقب‌تر و جریان خازنی (I_C) از ولتاژ 90° جلوتر است.

$$I_C(t) = I_{C_m} \sin(\omega t + \frac{\pi}{4}) = 25 \sin(2500t + 90^\circ)$$

$$I_L(t) = I_{L_m} \sin(\omega t - \frac{\pi}{4}) = 20 \sin(2500t - 90^\circ)$$

(ب)

هدف: نوشتن معادله جریان منبع

I_C در جهت I_C می‌باشد چون $I_L > I_C$.

گام ۱) چون در جریان \bar{I}_L و \bar{I}_C دارای یک راستا هستند 180° اختلاف فاز دارند، می‌توان

جریان I (جریان کل) را از تفاضل $I = I_C - I_L$ به دست آورد.

$$I_{e_m} = I_{C_m} - I_{L_m} = 25 - 20 = 5 A$$

گام ۲) نوشتن معادله جریان کل

$$I(t) = 5 \sin(2500t + 90^\circ)$$

(پ)

هدف: محاسبه توان‌های مدار

گام ۱) یافتن مقادیر ضریب توان مؤثر و غیرمؤثر

$$X_L > X_C \rightarrow \varphi = 90^\circ \rightarrow \cos(90^\circ) = 0, \sin(90^\circ) = 1$$

گام ۲) محاسبه تک‌تک توان‌های مدار با استفاده از روابط مربوطه

$$P_d = V_e \cdot I_e \sin \varphi = \frac{100}{\sqrt{2}} \times \frac{5}{\sqrt{2}} \sin(90^\circ) = 2500 \text{ V.A.R}$$

$$P_e = V_e \cdot I_e \cos \varphi = 0$$

$$P_s = |P_d| = V_e I_e = 250 \text{ V} \cdot A$$

(ت)

هدف : محاسبه فرکانس رزونانس

در فرکانس رزونانس مقادیر مقاومت خازنی و مقاومت سلفی با هم برابر می باشند.

$$\text{فرکانس رزونانس از رابطه } f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \text{ محاسبه می شود.}$$

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{2 \times 10^{-3} \times 100 \times 10^{-6}}} = 355.88 \text{ HZ}$$

(ث)

هدف : رسم دیاگرام برداری ولتاژها

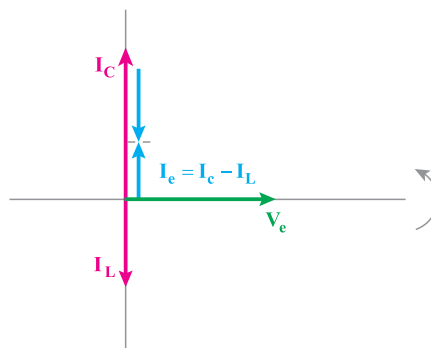
گام ۱) V_e را مبنا قرار می دهیم (در مدارات موازی)

جریان در داخل مقاومت سلفی (I_L) از ولتاژ شبکه به اندازه 90° عقب تر و جریان خازنی (I_C)

از ولتاژ 90° جلوتر است.

گام ۲) رسم دیاگرام برداری ولتاژها

جریان کل به طرف بالا می باشد، به دلیل اینکه $I_C > I_L$ است (شکل ۵-۹).

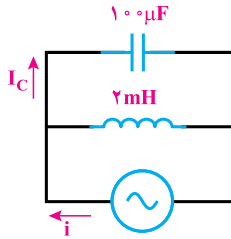


شکل ۵-۹

۲-۳-۵- حل تمرین ۹ صفحه ۱۳۱ کتاب درسی (شکل ۵-۱۰)

(الف)

هدف : تعیین معادله ولتاژ منبع



شکل ۱۰-۵

در مدارات موازی ولتاژ تمام شاخه‌ها برابر هستند.
با محاسبه ولتاژ ماکزیمم هر شاخه و با استفاده از θ_V می‌توان معادله ولتاژ منبع را بنویسیم.
گام ۱) محاسبه مقدار مقاومت سلفی و مقاومت خازنی معادل مدار

$$X_C = \frac{1}{C\omega} = \frac{1}{100 \times 10^{-6} \times 2500} = \frac{10^6}{250} = 4 \Omega$$

$$X_L = L\omega = 2 \times 10^{-3} \times 2500 = 5 \Omega$$

گام ۲) با توجه به مقدار I_C می‌توان V_{Cm} را به صورت زیر بیابیم.

$$V_{Cm} = I_{Cm} \times X_C = 4 \times 2 \sqrt{2} = 8 \sqrt{2} \text{ V}$$

گام ۳) ϕ را با در نظر گرفتن $X_C < X_L$ می‌یابیم.

$$X_C < X_L \rightarrow I_C > I_L \rightarrow \phi = 9^\circ$$

θ_I و θ_V برای معادلات ولتاژ و جریان منبع به کار می‌روند.

در مدارات موازی ولتاژ مبنا می‌باشد.

$$\phi = \theta_V - \theta_I \rightarrow 9^\circ = 0^\circ - \theta_I \rightarrow \theta_I = -9^\circ$$

گام ۴) نوشتن معادله ولتاژ منبع

$$V_{Cm} = V_{Lm} = V_{em}$$

$$V(t) = V_m \sin(\omega t + \theta_V) \rightarrow V(t) = 8\sqrt{2} \sin(2500t)$$

(ب)

هدف: تعیین معادله جریان منبع

گام ۱) جریان ماکزیمم تک تک شاخه‌ها را می‌یابیم.

$$I_{Cm} = 2 \sqrt{2} \text{ A}$$

$$I_{Lm} = \frac{V_{Lm}}{X_L} = \frac{8\sqrt{2}}{5} = 1.6\sqrt{2} \text{ A}$$

گام ۲) جریان ماکزیمم منبع، حاصل جمع برداری دو جریان به دست آمده در گام اول می باشد.

$$I_{L_m} = \sqrt{I_{C_m}^2 + I_{L_m}^2} = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (1/\sqrt{2})^2} = 3/\sqrt{2} \text{ A}$$

گام ۳) با توجه به θ_I معادله جریان منبع را می نویسیم.

$$i(t) = I_{cm} \sin(\omega t + \theta_I) = 3/\sqrt{2} \sin(2500t - 90^\circ)$$

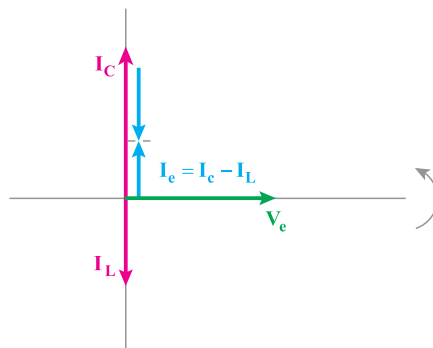
(پ)

هدف: رسم دیاگرام برداری مدار

با توجه به اینکه $X_L > X_C$ می باشد در نتیجه $I_C > I_L$ می باشد و جهت جریان منبع (I_e) به سمت

(I_C) می باشد.

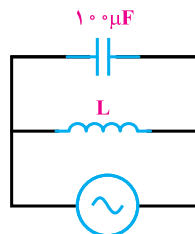
در مدارات موازی ولتاژ را مبنا قرار می دهیم. (شکل ۵-۱۱)



شکل ۵-۱۱

۵-۳-۳- حل تمرین شماره ۱۰ صفحه ۱۳۲ کتاب درسی (شکل ۵-۱۲)

هدف: یافتن L در حالت تشدید



$$\omega = 4000 \text{ Rad/sec}$$

شکل ۵-۱۲

گام ۱) $X_L = X_C$ (برای ایجاد حالت تشدید)

$$X_L = X_C$$

$$\omega = \frac{1}{C\omega} \rightarrow L = \frac{1}{C\omega^2}$$

گام ۲) فرکانس تشدید را جایگزین کرده و L را می‌یابیم.

$$L = \frac{1}{100 \times 10^{-6} \times 40000^2} = \frac{1}{1600} = 0.625 \text{ mH}$$

۴-۳-۵- حل تمرین شماره ۱۱ صفحه ۱۳۲ کتاب درسی

هدف: محاسبه C و L با توجه به معلومات مسئله

$$I_C = 5I_L, \quad V = 100 \sin 2500t, \quad i = \lambda \sin(2500t + \frac{\pi}{2})$$

گام ۱) با توجه به رابطه جریان سلف و خازن، رابطه بین مقاومت‌های سلفی و مقاومت خازنی

را می‌یابیم.

$$I_e = \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \text{ A}, \quad V_e = \frac{100}{\sqrt{2}} \text{ V}$$

$$\begin{cases} I_L = \frac{V_e}{X_L} = \frac{\frac{100}{\sqrt{2}}}{X_L} \\ I_C = \frac{V_e}{X_C} = \frac{\frac{100}{\sqrt{2}}}{X_C} \end{cases} \rightarrow I_L = 5I_C \rightarrow \frac{\frac{100}{\sqrt{2}}}{X_L} = \frac{\frac{100}{\sqrt{2}}}{X_C}$$

$$X_L = 5X_C$$

گام ۲) Z را می‌توان از دو رابطه، یکی با توجه به معادلات جریان و ولتاژ و دیگری با استفاده

از X_L و X_C یافت، در نهایت می‌توان X_L و X_C را محاسبه کرد.

$$Z = \frac{V_m}{I_m} = \frac{100}{\lambda}$$

$$Z = \frac{X_L \cdot X_C}{|X_L - X_C|} = \frac{X_L \cdot 5X_C}{|5X_C - X_L|} = \frac{5X_C^2}{4X_C} = \frac{5}{4}X_C \rightarrow \frac{100}{\lambda} = \frac{5}{4}X_C$$

$$X_C = 10 \Omega, \quad X_L = 5X_C = 50 \Omega$$

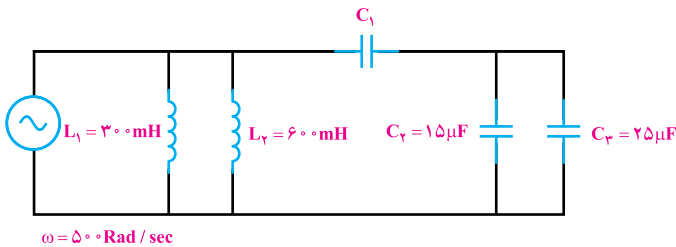
گام ۳) C و L با استفاده از مقاومت سلفی و خازنی قابل محاسبه می‌باشند.

$$X_C = \frac{1}{C\omega} \rightarrow C = \frac{1}{\omega X_C} = \frac{1}{2500 \times 10} = 40 \mu\text{F}$$

$$X_L = L\omega \rightarrow L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{50}{2500} = \frac{1}{50} = 20 \text{ mH}$$

۵-۳-۵- حل تمرین شماره ۱۲ کتاب صفحه ۱۳۲ (شکل ۵-۱۳)

هدف: تعیین میزان C_1 در حالت تشدید



شکل ۵-۱۳

در حالت تشدید $X_L = X_C$ می باشد، پس کافی است X_L کل و X_C کل را بیابیم و با هم برابر قرار

دهیم.

گام ۱) تعیین مقاومت معادل سلفی کل

$$X_{L_1} = L\omega = 30 \times 10^{-3} \times 500 = 150 \Omega$$

$$X_{L_2} = L\omega = 60 \times 10^{-3} \times 500 = 300 \Omega$$

$$X_L = (X_{L_1} \parallel X_{L_2}) = \frac{150 \times 300}{450} = 100 \Omega$$

گام ۲) تعیین مقاومت معادل خازنی کل

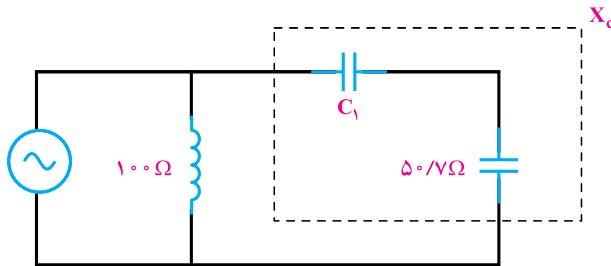
$$X_{C_1} = \frac{1}{15 \times 10^{-6} \times 500} = \frac{10^4}{75} = 133 \Omega$$

$$X_{C_2} = \frac{1}{25 \times 10^{-6} \times 500} = \frac{10^4}{25 \times 5} = 80 \Omega$$

$$X_C = (X_{C_1} \parallel X_{C_2}) = \frac{133 \times 80}{210} = 49.5 \Omega$$

گام ۳) با در نظر گرفتن $X_L = X_C$ می توان X_{C_1} را محاسبه کرد و در نهایت C_1 قابل محاسبه

است (شکل ۵-۱۴).



$$\omega = 50^\circ \text{ Rad / sec}$$

شکل ۱۴-۵

راه دیگر نیز استفاده از معادل قرار دادن ظرفیت معادل خازن‌ها برای محاسبه X_{C_1} و معادل کردن آن با X_{L_1} می‌باشد.

$$X_L = X_C$$

$$100 = X_{C_1} + 50/\sqrt{2}$$

$$X_{C_1} = 100 - 50/\sqrt{2} = 49/3 \text{ } \Omega$$

$$X_{C_1} = \frac{1}{C_1 \omega} \rightarrow C_1 = \frac{1}{X_{C_1} \omega} = \frac{1}{500 \times 49/3}$$

$$C_1 = 40 \text{ } \mu\text{F}$$

۵-۳-۶- حل تمرین ۱۴ صفحه ۱۳۲ کتاب درسی

هدف : رسم منحنی تابع تغییرات امپدانس و جریان مدار C-L در حالت سری و موازی با مشخصات زیر

$$L = 10 \text{ mH} , C = 100 \text{ } \mu\text{F} , \text{ در محدوده فرکانس } 50 \text{ HZ و } 5 \text{ KHZ}$$

گام ۱) یافتن (f_r) فرکانس تشدید

فرکانس تشدید در مدار C-L موازی و C-L سری یکسان است.

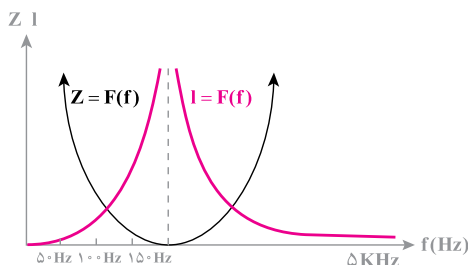
$$X_L = X_C$$

$$L\omega = \frac{1}{C\omega} \rightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{10 \times 10^{-3} \times 100 \times 10^{-6}}} = 159 \text{ HZ}$$

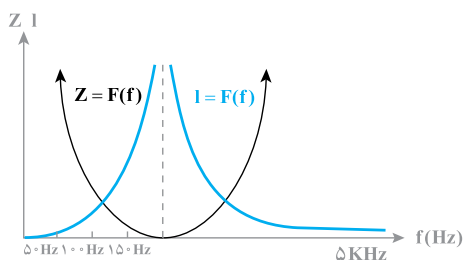
در مدارات C-L سری با توجه به اینکه $Z = 2\pi fL - \frac{1}{2\pi fC}$ اگر $f = 0$ شود، امپدانس Z بی‌نهایت

می‌شود، یعنی مدار از جریان DC تغذیه می‌کند و خازن، نقش مدار باز است.
 اگر $Z=\infty$ ، شود هیچ نوع جریانی از مدار عبور نمی‌کند و $I=0$ خواهد بود.
 وقتی فرکانس برابر f_r فرکانس تشدید و $Z=0$ شده و جریان I به مقدار ∞ می‌رسد.
 اگر $Z=\infty$ ، تغییرات بار الکتریکی در صفحات خازن خیلی شدید می‌شود و خازن
 عملاً اتصال کوتاه شده و $2\pi fL$ به مقدار خیلی زیاد (∞) میل کرده و مدار C-L سری
 را عملاً باز می‌کند، در کل $Z=\infty$ و $I=0$ می‌شود.
 گام ۲) منحنی تغییرات $I=F(f)$ و $Z=F(f)$ در مدار سری به صورت زیر خواهد بود (شکل ۵-۱۵).



شکل ۵-۱۵

در مدارات C-L سری با توجه به اینکه $Z = 2\pi fL - \frac{1}{2\pi fC}$ و اگر $f=0$ شود، امپدانس Z صفر می‌شود و در این حالت از مدار جریان I_{SC} عبور خواهد کرد.
 در این حالت $X_L = X_C$ شده، و مدار باز می‌شود و $I=0$ می‌باشد.
 خازن به علت تغییرات شدید بار اتصال کوتاه شده و مدار را اتصال کوتاه می‌کند و $Z=0$ می‌شود
 و مجدداً جریان مدار به جریان I_{SC} می‌رسد.
 منحنی تغییرات $I=F(f)$ و $Z=F(f)$ در مدار موازی به صورت زیر خواهد بود (شکل ۵-۱۶).



شکل ۵-۱۶