

پیشگفتار

حکایتی درباره یکی از ریاضیدان‌های مشهور می‌گویند که خالی از لطف نیست: روزی قرار بود که این ریاضیدان در حضور جمع تحصیلکرده‌ای سخنرانی کند. او در شروع صحبت یک عبارت ریاضی روی تخته نوشت و گفت: «در واقع این عبارت بدیهی است». ریاضیدان دوباره به عبارت نوشته شده نگاه کرد و گفت: «حداقل من فکر می‌کنم که بدیهی است». اما همچنان که شکّ او قوی‌تر می‌شد گفت: «بیخشید» و کاغذ و مدادی برگرفت و سالن سخنرانی را ترک کرد. بعد از بیست دقیقه او خندان به سالن بازگشت و پیروزمندانه گفت: «بله حضار محترم، این عبارت بدیهی است!»

به نظر می‌رسد که منظور این ریاضیدان از بدیهی بودن عبارت آن بود که ما می‌توانیم به‌طور شهودی درستی آن را قبول کنیم. با این حال این بذیرش کافی نیست و در نهایت، تجزیه و تحلیل منطقی، آن را تأیید و یا رد می‌کند. بنا به گفته اسکمپ^۱ (۱۹۷۱) «مطمئن بودن از چیزی یک قصه است و دانستن این که چرا آن چیز درست است قصه‌ای دیگر» و هدف ما نیز کمک به دانستن این چراهاست.

با در نظر گرفتن نقشی که ریاضیات در تربیت هر شهروند می‌تواند ایفا کند، آشنایی با قسمت‌های مختلف این علم برای نوجوانان مستعد، متفکر و توانای ما الزامی به نظر می‌رسد. نمونه‌های شهودی و تجربی زیبایی در رابطه با رشد و توسعه مطالب مطرح شده در این کتاب وجود دارند که یادگیری و فهم آن‌ها را آسان می‌کنند. اما برای بهتر فهمیدن و یادگرفتن موضوعات یاد شده، به دانش‌های پیش‌نیاز و ابزار مختلفی نیازمندیم. مهمترین آن‌ها نحوه استدلال کردن و سپس تکمیل آنچه که درباره مجموعه‌ها و بالاخره حاصلضرب دکارتی و رابطه یاد گرفته‌ایم

می‌باشد.

نیاز به دانش‌های پیش‌نیاز ما را بر آن داشت که دو فصل اول کتاب را به مفاهیم فوق‌اختصاص دهیم تا علاوه بر تعمیق یادگیری‌های قبلی، زمینه مناسب‌تری برای بهتر فهمیدن مطالب فصل‌های بعد فراهم آید.

هم‌چنین، توجه معلمان گرامی و دانش‌آموزان عزیز را به این مهم جلب می‌کنیم که تجدید نظر کتاب پس از جمع‌آوری و تجزیه و تحلیل نتایج حاصل از ۴ سال تدریس آن صورت گرفته است. از حضور شما و تمامی صاحب‌نظران گرامی خواهشمندیم که با پیشنهادها و انتقادهای سازنده خویش ما را در تصحیح، توسعه و تکمیل آن یاری دهند.

مؤلفان



فصل ۱

استدلال ریاضی

۱-۱- درک شهودی^۱

طی قرن‌های متمادی، مردم باور کرده بودند که زمین صاف است و ستاره‌ها به دور آن در گردش هستند. آن‌ها نظریهٔ گرد بودن زمین و چرخش آن به دور خورشید را رد می‌کردند. اگر چه امروزه این نظریه حتی برای خردسالان نیز امری کم و بیش واضح است، لیکن با شهودِ مردم آن زمان مطابقت نداشت.

شهود می‌تواند یک دانش غریزی یا احساس بدون استدلال باشد.

وقتی که از شهود خود استفاده می‌کنیم، هیچ‌گاه نمی‌توانیم با اطمینان صد درصد بگوییم که نتیجه‌گیری ما درست است. با این حال در بسیاری مواقع، درک شهودی به ما کمک می‌کند که مطالب ریاضی را بهتر بفهمیم و حدس‌های بهتری برای اثبات قسمت‌های مختلف بزنیم. چنین حدس‌هایی کم و بیش محتمل و به صورت استدلال موقت، رضایتی در ما به وجود می‌آورند که با اشتیاق بیشتری برای دستیابی به یک استدلال حتمی تلاش کنیم. معمولاً استدلال موقت بر مبنای تمثیل و استقرا می‌باشد که در قسمت‌های بعد با محدودیت‌های آن‌ها آشنا می‌شویم.

۱-۲- استدلال تمثیلی یا قیاسی^۲

در اکثر کارهای روزمره - از نتیجه‌گیری‌های سطحی تا موفقیت‌های عمدهٔ علمی و یا کارهای هنری - از تمثیل یا قیاس استفاده می‌کنیم. قیاس که در واقع همان یافتن نوعی مشابهت بین مفاهیم گوناگون می‌باشد، در تمام سطوح مختلف قابل استفاده است. انواع تمثیل با توجه به محدودیت‌هایی که دارند، می‌توانند در ایجاد یک زمینهٔ شهودی برای درک بسیاری از مفاهیم و اثبات‌های ریاضی

۱- Intuitive

۲- Analogy

کمک مؤثری باشند و نباید اهمیت آن‌ها را نادیده گرفت. به مثال زیر توجه کنید :

مثال ۱: از تمثيل برای درک بهتر این حقيقت که حاصلضرب عدد منفي در عدد منفي، عددي

مثبت است استفاده می‌کنیم :

وارد شدن آب به مخزن را عملی مثبت (+) و خروج آب از آن را عملی منفي (-) در نظر

می‌گیریم. در نمایش فیلم نیز، جلو بردن فیلم را عملی مثبت (+) و عقب بردن آن را عملی منفي (-)

به حساب می‌آوریم. حال اگر فیلمی نمایش داده شود که در آن، آب در حال خروج از یک مخزن است

(-) و فیلم را به عقب برگردانیم (-)، آب دوباره به مخزن باز می‌گردد (+)! یعنی حاصل دو عمل

منفي (خروج آب و عقب بردن فیلم)، عمل مثبت بازگشت آب به مخزن شده است.

همان‌طور که می‌دانید، مثال بالا به هیچ‌عنوان یک اثبات ریاضی نیست، اما تمثيل خوبی است

تا ما را برای اثبات دقیق آماده کند.

تمرین ۱- با توجه به داستان زیر، توضیح دهید که طوطی چه تمثیلی به کار برد و علت خنده

مردم چه بود؟

خوش‌نوایی سبز گویا طوطی
نکته‌گفتی با همه سوداگران
در نوای طوطیان حاذق بدی
شیشه‌های روغن گل را بریخت
بر دکان بنشست فارغ خواجه‌وش
بر سرش زد گشت طوطی کل ز ضرب
مرد بقال از ندامت آه کرد
کآفتاب نعمتم شد زیر میغ
چون زدم من بر سر آن خوش‌زبان
تا بیابد نطق مرغ خویش را
بر دکان بنشسته بُد نومیدوار
تا که باشد کاندرا آید او بگفت
با سر بی‌موجو پشت طاس و طشت
بانگ بر درویش زد که هی فلان
تو مگر از شیشه روغن ریختی

بود بقالی و وی را طوطی
در دکان بودی نگهبان دکان
در خطاب آدمی ناطق بدی
جست از سوی دکان سویی گریخت
از سوی خانه بیامد خواجه‌اش
دید پر روغن دکان و جامه چرب
روزکی چندی سخن کوتاه کرد
ریش برمی‌کند و می‌گفت ای دریغ
دست من بشکسته بودی آن‌زمان
هدیه‌ها می‌داد هر درویش را
بعد سه روز و سه شب حیران و زار
می‌نمود آن مرغ را هرگون شگفت
جولقی سر برهنه می‌گذشت
طوطی اندر گفت آمد در زمان
از چه‌ای کل با کلان آمیختی

از قیاسش خنده آمد خلق را کو چو خود پنداشت صاحب دل را
 کار پاکان را قیاس از خود مگیر گرچه ماند در نبشتن شیر و شیر
 جمله عالم زین سبب گمراه شد کم کسی ز ابدال حق آگاه شد

۱-۳- استدلال استقرایی^۱

اگر وارد قریه‌ای شوید و اولین فردی که به او برخورد می‌کنید دارای چشمانی آبی باشد چه می‌گویید؟ حال اگر به گردش در کوچه پس کوچه‌های قریه بپردازید و متوجه شوید که رنگ چشمان تمام افرادی که با آن‌ها در آن قریه مواجه شده‌اید آبی است، ممکن است نتیجه بگیرید که رنگ چشمان تمامی افراد قریه آبی است.

در سفر به قریه، شواهد متعددی را جمع‌آوری کردیم، متوجه یکسان بودن نتایج شدیم و براساس آن‌ها، نتیجه‌گیری کلی را انجام دادیم. عالمان تجربی نیز با روشی مشابه مشاهدات خود را نظم داده و با توجه به نظم حاکم بر آن‌ها، قوانین عمومی طبیعت را کشف می‌کنند. در علوم تجربی به این نوع استدلال، روش تجربی یا علمی و در ریاضی به آن استدلال استقرایی گفته می‌شود.

استدلال استقرایی روش نتیجه‌گیری کلی بر مبنای مجموعه محدودی از مشاهدات است.

مثال ۲: فرض کنید که اعداد متوالی فرد را با هم جمع می‌کنیم. برای این کار از ۱ شروع

می‌کنیم:

$$1 + 3 = 4$$

$$1 + 3 + 5 = 9$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 16$$

با توجه به مشاهدات بالا نتیجه می‌گیریم تمام حاصل جمع‌ها مربع کامل هستند.

حال با ادامه الگوی بالا، نتیجه به دست آمده را کنترل می‌کنیم.

از این یافته‌ها چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟ آیا می‌توان ادعا کرد که همیشه حاصل جمع اعداد

فرد متوالی یک مربع کامل است؟

۱-۴- محدودیت استدلال استقرایی

مشاهده ۱- آب آنقدر می‌جوشد تا آن‌که چیزی از آن باقی نماند.

مشاهده ۲- برف آنقدر می‌جوشد تا آن‌که چیزی از آن باقی نماند.

مشاهده ۳- یخ آنقدر می‌جوشد تا آن‌که چیزی از آن باقی نماند.

نتیجه: هر چیزی آنقدر می‌جوشد تا آن‌که چیزی از آن باقی نماند.



در شکل بالا مرد غارنشین با مشاهده و جمع‌آوری اطلاعات و دیدن الگویی که تکرار می‌شد نتیجه‌گیری کرد که «هر چیزی آنقدر می‌جوشد تا آن‌که چیزی از آن باقی نماند!»

همان‌طور که می‌بینید، شکل بالا ضعف اساسی چنین استدلالی را به ما نشان می‌دهد زیرا که همیشه این احتمال وجود دارد که شواهد بیشتری کشف بشوند تا نادرستی نتیجه‌گیری کلی، بر مبنای مجموعه محدودی از مشاهدات را نشان دهند.

تمرین ۲- محاسبات تعیین شده را انجام دهید تا اعدادی را که در معادلات زیر صدق می‌کنند

پیدا کنید:

$$۱) \quad 1 \times 8 + 1 = \square$$

$$۲) \quad 12 \times 8 + 2 = \square$$

$$۳) \quad 123 \times 8 + 3 = \square$$

$$۴) \quad 1234 \times 8 + 4 = \square$$

الف) آیا فکر می‌کنید این الگو تا بینهایت ادامه داشته باشد؟

ب) بدون محاسبه و با توجه به الگوی بالا، اعدادی را که در معادلات زیر صدق می‌کنند حدس

بزنید :

$$5) \quad 12345 \times 8 + 5 = \square$$

$$6) \quad 123456 \times 8 + 6 = \square$$

پ) نتایج قسمت ب) را محاسبه کنید تا مشخص شود که آیا حدس شما درست بوده است یا

خیر؟

سعی کنید آنچه را شهودی به نظر می‌رسد، به طور رسمی و دقیق اثبات کنید و آنچه را که به طور رسمی و دقیق اثبات کرده‌اید به طور شهودی درک کنید. این یک ورزش مغزی جالب است.

جورج پولیا، ۱۹۴۵

۱-۵- استقرای ریاضی^۲

ممکن است به طور تصادفی مشاهده کرده باشید که: $1 + 8 + 27 + 64 = 100$. با تشخیص

مربع‌ها و مکعب‌های اعداد، شاید بتوانیم به مشاهده خود شکل جالب‌تری بدهیم:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 10^2$$

چطور این اتفاق افتاد؟ آیا همیشه مجموع مکعب‌های متوالی، مربع یک عدد است؟ برای پاسخ

به کنجکاوای خود، می‌توانیم موارد مشخص دیگری را نیز بررسی کنیم و برای تکامل و یگانگی حالت

$n=1$ ، یعنی حالتی که فقط یک عدد مکعب شده وجود دارد، را نیز اضافه می‌کنیم:

مربع مجموع	مجموع مکعب‌ها	مکعب‌های اعداد متوالی
1^2	۱	1^3
3^2	۹	$1^3 + 2^3$
6^2	۳۶	$1^3 + 2^3 + 3^3$
10^2	۱۰۰	$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3$
15^2	۲۲۵	$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3$

۱- George Polya

۲- برگرفته از کتاب How to solve it? اثر جورج پولیا.

با جمع آوری مشاهدات فوق و استفاده از استدلال استقرایی می بینیم که :
مجموع مکعب های اعداد متوالی برابر است با مربع مجموع آن ها. اما چنین نتیجه گیری ای
کامل نیست. به همین دلیل است که در ریاضی استقرا را نه فقط با مشاهدات بلکه به کمک اثبات
دقیق نیز محک می زنیم. حال برای اثبات دقیق به طریق زیر عمل می کنیم :

شاید بدانیم که $1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ (اثبات کنید!) می خواهیم تحقیق کنیم و بینیم

که اگر مجموع مکعب های n عدد متوالی برابر با مربع مجموع آن ها باشد

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 \quad (1)$$

آیا این ادعا برای $n+1$ عدد متوالی نیز درست است؟ یعنی آیا رابطه

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 = \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2} \right]^2 \quad (2)$$

نیز برقرار است؟

با یک کنترل ساده، رابطه زیر را با کم کردن (1) از (2) به دست می آوریم :

$$(n+1)^3 = \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2} \right]^2 - \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 \quad (3)$$

از جمله مشترک $\left(\frac{n+1}{2} \right)^2$ فاکتور می گیریم :

$$(n+1)^3 = \left(\frac{n+1}{2} \right)^2 [(n+2)^2 - n^2] \quad (4)$$

$$= \frac{(n+1)^2}{4} [n^2 + 4n + 4 - n^2] \quad (5)$$

$$= \frac{(n+1)^2}{4} [4n + 4] \quad (6)$$

$$= \frac{(n+1)^2}{4} (n+1) \times 4 \quad (7)$$

$$= (n+1)^3 \quad (8)$$

رابطه تجربی ما امتحان حیاتی را گذراند، یعنی درستی تساوی (3) را نتیجه گرفتیم که معادل

تساوی (۲) است، یعنی

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 = \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2} \right]^2 \quad (9)$$

در بررسی این موضوع، درستی ادعا را در حالت‌های خاص از $n=1$ تا $n=5$ مشاهده کردیم. سپس با فرضی که این ادعا برای n امین حالت درست است، نشان دادیم که برای $(n+1)$ امین حالت نیز چنین ادعایی درست است. حال با اطمینان خاطر می‌گوییم:

مجموع مکعب‌های n عدد متوالی، برابر با مربع مجموع آن‌هاست.

مطلب فوق نمونه خوبی برای گذار از استدلال استقرایی (تجربی) به استقرای ریاضی است.

برای بهتر فهمیدن استقرای ریاضی به مثال زیر توجه کنید:

مثال ۳: برای هر عدد صحیح و مثبت n ثابت کنید که:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n} \quad (1)$$

حل: اگر $n=1$ ، آنگاه:

$$\frac{1}{2^1} = \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2^1} \quad (2)$$

می‌بینیم که در این حالت، تساوی (۱) درست است.

اگر $n=2$ ، آنگاه

$$\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} = \frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{2^2} \quad (3)$$

که مجدداً تساوی (۱) را نشان می‌دهد. این تساوی را می‌توانیم با جمع (۲) و $\frac{1}{2^2}$ به دست آوریم:

$$\left(1 - \frac{1}{2^1}\right) + \frac{1}{2^2} = \frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{2^2}$$

ادامه این بررسی برای تمام اعداد عملی نیست، پس چه کار کنیم؟

یک قدم دیگر هم جلو می‌رویم و با استفاده از نتایج به دست آمده برای دو جمله اول، حالت

$n=3$ را نیز بررسی می‌کنیم:

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}\right) + \frac{1}{2^3} = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) + \frac{1}{2^3} = \frac{7}{8} = 1 - \frac{1}{2^3} \quad (4)$$

در نتیجه درستی رابطه برای حالت $n=3$ را نیز نتیجه گرفتیم.

حال اگر در حالت کلی، درستی رابطه را برای $n = k$ فرض کنیم، یعنی داشته باشیم

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^k}$$

و بتوانیم از این فرض، درستی رابطه را برای $n = k + 1$ یعنی

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^k} \right) + \frac{1}{2^{k+1}} = 1 - \frac{1}{2^{k+1}} \quad (5)$$

نتیجه بگیریم، آنگاه می‌توانیم ادعا کنیم که تساوی (۱) در هر حالتی درست است.

در طرف اول تساوی (۵) به جای مقدار داخل پرانتز، معادل آن یعنی $\left(1 - \frac{1}{2^k}\right)$ را از

تساوی (۱) جایگزین می‌کنیم

$$\left(1 - \frac{1}{2^k}\right) + \frac{1}{2^{k+1}} \quad (6)$$

$$= 1 - \frac{2}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}} \quad (7)$$

$$= 1 - \frac{1}{2^{k+1}} \quad (8)$$

از درستی رابطه در حالت $n = k$ ، درستی آن در حالت $n = k + 1$ نیز ثابت شد. این گونه اثبات را، اثبات به وسیله استقرای ریاضی یا اثبات به وسیله اصل استقرا می‌نامیم که از اهمیت ویژه‌ای در ریاضیات برخوردار است. اصل استقرا برای اثبات رابطه‌هایی نظیر رابطه بالا مورد استفاده قرار می‌گیرد.

اصل استقرا

فرض کنید $P(n)$ حکمی درباره عدد طبیعی n باشد. اگر $P(1)$ درست باشد و از درستی $P(k)$ ، درستی $P(k+1)$ نتیجه شود، در این صورت $P(n)$ برای هر عدد طبیعی n نیز درست است.

در نتیجه بنا بر اصل استقرا، برای هر عدد طبیعی n ، تساوی (۱) در مثال قبل، درست است.

برای استفاده از اصل استقرا گام‌های زیر را برداشتیم:

گام ۱: درستی حکم را برای $n = 1$ نشان دادیم.

گام ۲: ثابت کردیم که اگر حکم برای $n = k$ درست باشد، آنگاه برای $n = k + 1$ نیز درست

است.

مثال ۴: با استفاده از اصل استقرا ثابت کنید که برای هر عدد طبیعی n ، $4^{2n} - 1$ بر ۵ بخش پذیر است.

حل: با دانستن این که $P_n = 4^{2n} - 1$ بر ۵ بخش پذیر است، گام اول را برمی داریم.

گام ۱: درستی حکم را برای $n = 1$ نشان می دهیم:

$$P_1 = 4^{2(1)} - 1 = 15 = 5 \times 3 \quad (1)$$

که بر ۵ بخش پذیر است پس $P(1)$ درست است.

گام ۲: می خواهیم ثابت کنیم که اگر حکم برای $P(k)$ درست باشد، در نتیجه برای $P(k+1)$

نیز درست است.

فرض کنیم:

$$P_k = 4^{2k} - 1 = 5r \quad (2)$$

که بر ۵ بخش پذیر است. حال باید بخش پذیر بودن

$$P_{k+1} = 4^{2(k+1)} - 1 \quad (3)$$

بر ۵ را نشان دهیم. برای این کار، طرفین تساوی (۲) را در 4^2 ضرب می کنیم یعنی

$$4^2(4^{2k} - 1) = 4^2(5r)$$

از ساده کردن (۳)، تساوی (۴) به دست می آید:

$$4^{2k+2} - 4^2 = 4^2(5r) \quad (4)$$

با اضافه کردن ۱۵ به طرفین تساوی خواهیم داشت:

$$4^{2(k+1)} - 1 = 15 + 4^2(5r) \quad (5)$$

$$= 15 + 16(5r) \quad (6)$$

$$= 5(3 + 16r) \quad (7)$$

تساوی (۷) بخش پذیر بودن $P(k+1)$ بر ۵ را نشان می دهد. یعنی از $P(k)$ ، درستی $P(k+1)$ را نتیجه گرفتیم. در این صورت بنا بر اصل استقرا، $P(n)$ برای هر عدد صحیح و مثبت n نیز درست است.

در حالت کلی، از گام های ۱ و ۲ نتایج زیر را به دست می آوریم:

$P(1)$ ، $P(2)$ را نتیجه می دهد.

$P(2)$ ، $P(3)$ را نتیجه می دهد.

$P(3)$ ، $P(4)$ را نتیجه می دهد.

و الی آخر که این توجیه کننده درست بودن حکم $P(n)$ برای هر عدد طبیعی n است.

۱-۶- استقرای تعمیم یافته

در مثال‌هایی که تاکنون دیدیم، استقرای ریاضی را از $n=1$ شروع کردیم، یعنی درستی حکم مورد نظر را برای $n=1$ نشان دادیم. اما گاهی لازم است که اولین مرحله استقرا را از یک عدد طبیعی $n > 1$ آغاز کنیم. به مثال زیر توجه کنید:

مثال ۵: ثابت کنید عدد طبیعی مناسبی مانند $m > 1$ وجود دارد به طوری که برای هر عدد طبیعی n ($n \geq m$) داریم

$$n! > 3^n \quad (1)$$

حل: ابتدا با اندکی جستجو، تحقیق می‌کنیم که n چه اندازه باید بزرگ باشد؟

n	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
$n!$	۱	۲	۶	۲۴	۱۲۰	۷۲۰	۵۰۴۰	۴۰۳۲۰
3^n	۳	۹	۲۷	۸۱	۲۴۳	۷۲۹	۲۱۸۷	۶۵۶۱

می‌بینیم که برای n های طبیعی کوچکتر از ۷، اصلاً چنین حکمی درست نیست. اما برای $n=7$ ، رابطه $n! > 3^n$ درست است و به نظر می‌رسد که برای n های بزرگتر از ۷ نیز حکم درست باشد. حال فرض می‌کنیم برای $k \geq 7$ حکم درست باشد یعنی: $k! > 3^k$. آنگاه درستی حکم زیر را تحقیق می‌کنیم:

$$(k+1)! > 3^{k+1} \quad (2)$$

برای نشان دادن (۲) طرفین $k! > 3^k$ را در $(k+1)$ ضرب می‌کنیم:

$$(k+1)k! > (k+1)3^k \quad (3)$$

و چون $k \geq 7$ فرض شده است، پس:

$$(k+1)k! > 7 \times 3^k \quad (4)$$

با این حال می‌بینیم که طرفین نامساوی (۴) چنین خاصیتی را دارد که:

$$7 \times 3^k > 3 \times 3^k = 3^{k+1} \quad (5)$$

پس:

$$7 \times 3^k > 3^{k+1} \quad (6)$$

در نتیجه طبق (۴) و (۶):

$$(k+1)k! > 3^{k+1} \quad (7)$$

اما طبق تعریف:

$$(k+1)k! = (k+1)! \quad (8)$$

که معادل آن را در (۷) قرار می‌دهیم در نتیجه:

$$(k+1)! > 3^{k+1} \quad (9)$$

بدین ترتیب برای $k \geq 7$ ، نشان دادیم که اگر $k! > 3^k$ ، آنگاه $3^{k+1} > (k+1)!$. حال با اطمینان می‌توانیم بگوییم که برای هر $n \geq 7$ داریم $n! > 3^n$.
در این مثال مشاهده شد m مناسب 7 است که به روش جستجو آن‌را به دست آوردیم.
چنین شیوه استدلالی را روش استقرای تعمیم یافته می‌گویند.

اصل استقرای تعمیم یافته

فرض کنید $P(n)$ حکمی درباره عدد طبیعی n باشد. اگر $P(m)$ برای $m > 1$ درست باشد و از درستی $P(k)$ برای هر عدد طبیعی $k \geq m$ درستی $P(k+1)$ نتیجه شود، آنگاه $P(n)$ برای هر عدد طبیعی $n \geq m$ درست است. (دقت کنید که در هر مسأله‌ای باید m مناسب را پیدا کرد.)

برای استفاده از اصل استقرای تعمیم یافته، گام‌های زیر را برمی‌داریم:

گام ۱: m مناسب را به دست می‌آوریم،

گام ۲: درستی حکم را برای $n = m$ نشان می‌دهیم،

گام ۳: ثابت می‌کنیم که اگر حکم برای $n = k \geq m$ درست باشد، آنگاه حکم برای $n = k+1$

نیز درست است.

آنگاه نتیجه می‌شود که حکم برای هر عدد طبیعی $n \geq m$ درست است.

تمرین



۱- برای هر عدد طبیعی n ثابت کنید:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{(الف)}$$

$$2 + 6 + 10 + \dots + (4n-2) = 2n^2 \quad \text{(ب)}$$

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2 \quad \text{(پ)}$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + n < \frac{1}{8}(2n+1)^2 \quad \text{(ت)}$$

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \quad \text{(ث)}$$

۲- اگر $r \neq 1$ ، برای هر عدد طبیعی n ثابت کنید :

$$1 + r + r^2 + \dots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

۳- در هر یک از بندهای زیر ابتدا عدد طبیعی مناسب m را بیابید و سپس حکم را برای هر

عدد طبیعی n ($n \geq m$) ثابت کنید.

(الف) $2^n > n^2$

(ب) $2^n < n!$

(پ) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2^n - 1} < \frac{n}{2}$

۴- مجموع جملات زیر را حدس بزنید و ادعای خود را با استقرای ریاضی ثابت کنید :

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$$

۵- با استفاده از اصل استقرا ثابت کنید :

(الف) تعداد قطرهای هر n ضلعی محدب برابر است با $\frac{n(n-3)}{2}$.

(ب) مجموع زاویه‌های داخلی هر n ضلعی محدب برابر است با $(2n-4) \times 90^\circ$.

۶- ثابت کنید به ازای هر عدد طبیعی n ، $1 - 8^n$ بر ۷ بخش پذیر است.

۷- اگر $a \geq -1$ و $n \in \mathbb{N}$ ، آنگاه به کمک استقرای ریاضی درستی رابطه زیر را ثابت کنید :

$$(1+a)^n \geq 1+na$$

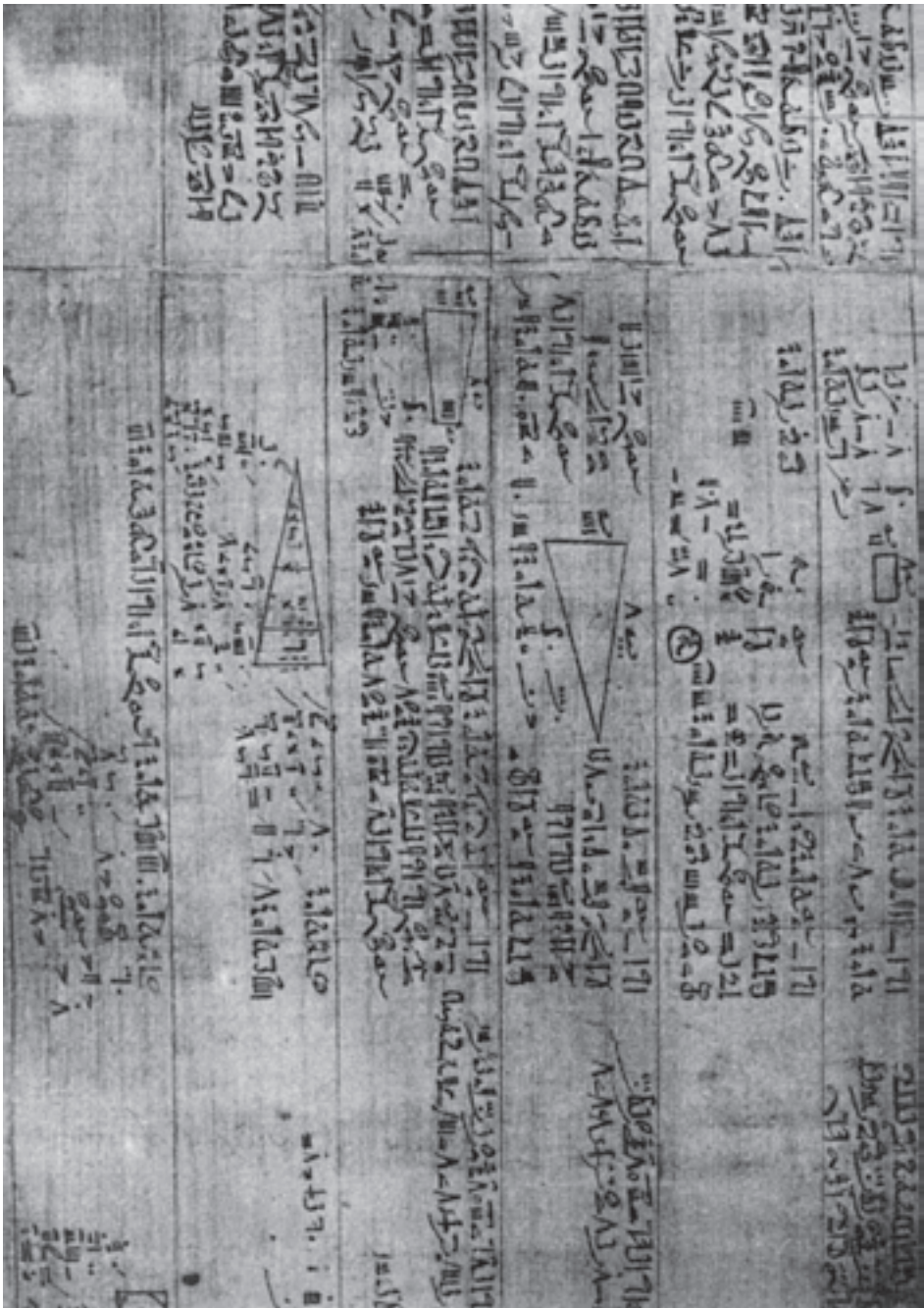
۸- نامساوی مثلث برای هر دو عدد حقیقی a و b به صورت $|a+b| \leq |a| + |b|$ برقرار

است. با استفاده از استقرا ثابت کنید که برای هر n عدد حقیقی x_1, x_2, \dots, x_n داریم :

$$|x_1 + x_2 + \dots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$$

مجله ریاضی

از زمان‌های قدیم، ایده‌های استقرا وجود داشته، از آن استفاده می‌شده است. با این حال، اثبات به کمک استقرا از اوایل قرن شانزدهم میلادی متداول شده است و توسط بعضی از ریاضیدانان اروپایی مورد استفاده قرار گرفته است. در قرن هفدهم فرما ریاضیدان مشهور، استفاده از استقرا را با تنوع بیشتری مطرح ساخت. ولی اصطلاح «استقرای ریاضی» در اوایل قرن نوزدهم توسط دُمرگان، ریاضیدان انگلیسی، به کار رفت و روش استقرا در اثبات‌های ریاضی به‌طور مدون مورد استفاده قرار گرفت.



در طول تاریخ، مردم از علامت‌ها و نشانه‌های مختلفی برای نمایش اعداد استفاده کرده‌اند. بعضی از این نشانه‌ها در پاپیروس رایند دیده می‌شوند. ریاضیدان‌ها هنوز به مطالعه و یادگیری بیشتر در مورد اعداد مشغولند.

۱-۷- استدلال استنتاجی^۱

در مقدمهٔ پاپیروس رایند که شاید قدیمی‌ترین تاریخ موجود ریاضی باشد (۱۶۵۰ سال قبل از میلاد) چنین آمده است:

«به جرأت می‌توان گفت که بارزترین مشخصهٔ شعور انسان که نشان‌دهندهٔ درجهٔ تمدن هر ملت است، همان قدرت استدلال کردن است و به‌طور کلی این قدرت به بهترین وجهی می‌تواند در مهارت‌های ریاضی افراد آن ملت به نمایش گذاشته شود.»

یکی از مسایلی که در تاریخ ریاضی مصر - پاپیروس رایند - موجود است یک سرگرمی به‌صورت بازی با اعداد است. با توجه به دستورالعمل‌های مسأله، عددی انتخاب می‌شود و سپس چندین کار دیگر روی آن انجام می‌شود. در پایان بدون در نظر گرفتن عدد انتخابی، نتیجه همیشه یکسان است!

مثال ۱: این مثال از نوع سرگرمی با اعداد است. هر مرحله از این بازی در سمت راست و نتایج هر مرحله برای ۴ عدد انتخابی و تصادفی در سمت چپ جدول زیر نشان داده شده است.

۳۵	۱۲	۷	۴	یک عدد انتخاب کنید
۴۰	۱۷	۱۲	۹	به آن ۵ را اضافه کنید
۸۰	۳۴	۲۴	۱۸	نتیجه را دو برابر کنید
۷۶	۳۰	۲۰	۱۴	از آن ۴ را کم کنید
۳۸	۱۵	۱۰	۷	حاصل را بر ۲ تقسیم کنید
۳	۳	۳	۳	عددی را که از ابتدا انتخاب کرده بودید از این نتیجه تقسیم کم کنید

بررسی بالا ما را مطمئن می‌سازد که نتیجه همیشه برابر با ۳ است.

اگرچه با استدلال استقرایی می‌توان استدلال کرد که این نتیجه شاید برای همهٔ اعداد درست باشد، اما به هر حال برای اثبات کلی این مطلب، یعنی، تبدیل شاید به باید، به استدلال استنتاجی نیازمندیم.

مثال ۲: همان مثال قبلی را با اندکی تغییر بررسی می‌کنیم و به جای انتخاب یک یا چند عدد

^۱ - Deductive reasoning

مشخص در موقع شروع از علامتگذاری استفاده می‌کنیم. در طول بازی، مربع کوچک معرف عدد انتخابی اولیه است و برای هر بار افزودن یا کاستن اعداد جدید، از یک دایره کوچک استفاده می‌کنیم.

<input type="checkbox"/>	عدد انتخابی
<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	عدد انتخابی به اضافه ۵
<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	دو برابر نتیجه قبل
<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	کم کردن ۴ واحد
<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	نصف نتیجه قبل
<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	کم کردن عدد اولیه

به این ترتیب ثابت کردیم که نتیجه همیشه ۳ است. حال به وضوح می‌بینیم که عدد انتخابی اولیه هر چه که باشد، باز هم نتیجه ۳ است!

شاید مربع‌ها و دایره‌ها نمادهای جالبی برای استفاده همیشگی نباشند. در ریاضیات معمولاً از حروف برای نشان دادن اعداد دلخواه استفاده می‌کنیم.

مثال ۳: حال مثال قبلی را با نماد جبری، یعنی با استفاده از حرف برای عدد انتخابی اولیه، دوباره بررسی می‌کنیم:

n	عدد انتخابی
$n + 5$	عدد انتخابی به اضافه ۵
$2n + 10$	دو برابر نتیجه قبل
$2n + 6$	کم کردن ۴ واحد
$n + 3$	نصف نتیجه قبل
3	کم کردن عدد اولیه

نکته‌ای که در هر سه مثال به چشم می‌خورد این است که نتایجی را بر مبنای عباراتی که درستی آن‌ها را قبول کرده‌ایم به دست آوردیم. یعنی از استدلال استنتاجی استفاده کردیم.

استدلال استنتاجی روش نتیجه‌گیری با استفاده از حقایق است که درستی آن‌ها را پذیرفته‌ایم.

مثال‌های فراوانی از دنیای اطراف ما وجود دارند که نشان‌دهنده استفاده از استدلال استنتاجی در زندگی روزمره هستند.

مثال ۴: رستورانی برای جلب مشتری و فروش بیشتر، اعلام کرده است که بین ساعت‌های ۱۲ ظهر تا ۲ بعدازظهر اگر کسی در آن رستوران غذایی سفارش داد و آماده شدن غذا بیش از ۱۰ دقیقه به طول انجامید، غذا را مجانی به مشتری بدهد. زمانی که خانواده بهارلو به این رستوران رفتند، عبارت‌های زیر درست بودند:

الف) ساعت بین ۱۲ ظهر و ۲ بعدازظهر بود.

ب) آماده شدن غذا بیش از ۱۰ دقیقه به طول انجامید.

خانواده بهارلو نتیجه گرفتند که غذایشان مجانی خواهد بود که نتیجه‌گیری درستی بود!

این مثال نیز نمونه‌ای از استدلال استنتاجی است.

مثال ۵: فرض کنید که دو عدد فرد را با هم جمع می‌کنیم. توضیح دهید که چرا مجموع آن‌ها همیشه زوج است؟

حل: فرض کنید $2m+1$ و $2n+1$ نشان‌دهنده دو عدد فرد باشند که m و n اعداد طبیعی هستند. در نتیجه مجموع آن‌ها چنین است:

$$(2m+1) + (2n+1) = 2m + 2n + 2 = 2(m+n+1)$$

به دلیل وجود ضریب ۲ در این مجموع، نتیجه می‌گیریم که مجموع دو عدد فرد همیشه زوج است. ثابت کردیم که مجموع دو عدد فرد همیشه یک عدد زوج است، حتی برای اعدادی که آن‌ها را جمع نکرده‌ایم! این امر نشان‌دهنده قدرت استدلال استنتاجی است.

وقتی از استدلال استنتاجی استفاده می‌کنیم، مطمئن هستیم که نتیجه همیشه درست است.

هدف از مثال‌های فوق، ایجاد زمینه‌ای مناسب برای آشنایی با مفهوم استدلال استنتاجی بود. بیشتر این مثال‌ها نمونه‌هایی از قضایای کلی هستند.

قضایای کلی احکامی هستند که همیشه برقرار می‌باشند.

اکثر قضیه‌های مهم ریاضی قضایای کلی هستند. به عنوان مثال، اهمیت قضیه فیثاغورث در این نیست که در یک مثلث قائم‌الزاویه صدق می‌کند، بلکه این قضیه برای همه مثلث‌های قائم‌الزاویه صحیح است، و یا اهمیت اتحاد $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ در این است که x هر زاویه‌ای که باشد، این تساوی برقرار است.

۸-۱- مثال نقض

استدلال استنتاجی به ما اطمینان می‌دهد که نتیجه به دست آمده حتماً درست است. این جامعیت، یکی از نشانه‌های اقتدار و زیبایی این نوع استدلال است. گاهی اتفاق می‌افتد که با مثالی، عمومیت نتیجه‌ای که حدس می‌زنیم نقض می‌شود.

مثال ۶: بسیاری از اعداد طبیعی را می‌توان به صورت حاصل جمع اعداد متوالی نوشت.

به نمونه‌های زیر توجه کنید :

$$9 = 2 + 3 + 4$$

$$15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$$

$$22 = 4 + 5 + 6 + 7$$

$$39 = 12 + 13 + 14$$

$$74 = 17 + 18 + 19 + 20$$

حال این سؤال مطرح می‌شود که آیا هر عدد طبیعی را می‌توان به صورت مجموع اعداد متوالی

نوشت؟

حل: برای درست فهمیدن مسأله، باید به دو سؤال اساسی پاسخ گوئیم. اول آن که آیا مثال‌ها برای حل مسأله کافی هستند؟ و دوم این که آیا امکان دارد که تمام اعداد طبیعی را برای بررسی داشتن چنین کیفیتتی کنترل کرد؟

یکی از راه‌های خوب آن است که سعی کنیم یک عدد طبیعی بیابیم که چنین کیفیتتی را نداشته باشد. از هر عددی که بخواهیم شروع می‌کنیم و به جستجو ادامه می‌دهیم.

الف) $12 = 3 + 4 + 5$

ب) $17 = 8 + 9$

پ) $26 = 5 + 6 + 7 + 8$

ت) $30 = 9 + 10 + 11$

ث) $40 = 6 + 7 + 8 + 9 + 10$

ج) $100 = 18 + 19 + 20 + 21 + 22$

چ) $130 = 31 + 32 + 33 + 34$

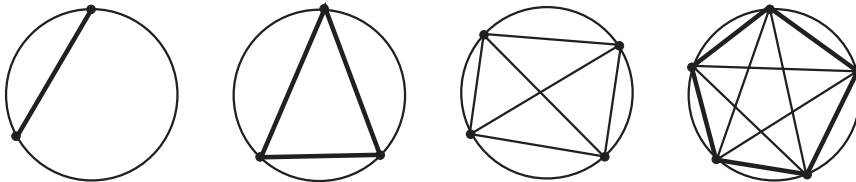
ح) $6 = 1 + 2 + 3$

خ) $7 = 3 + 4$

د) $8 = ?$

می بینیم که عدد ۸ را نمی توان به صورت مجموع اعداد متوالی نوشت. عدد ۸ مثال نقضی است که نشان می دهد هر عدد طبیعی را نمی توان به صورت اعداد متوالی نوشت.

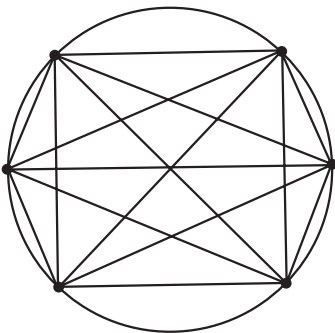
مثال ۷: اگر دو نقطه اختیاری بر روی پیرامون دایره را به وسیله یک پاره خط به هم وصل کنیم، دایره به دو ناحیه تقسیم می شود. با اتصال سه نقطه اختیاری بر روی دایره، دایره به ۴ ناحیه تقسیم می شود. شکل زیر این موضوع را برای ۲، ۳، ۴ و ۵ نقطه اختیاری بر روی دایره نشان می دهد:



۵	۴	۳	۲	تعداد نقطه ها
۱۶	۸	۴	۲	تعداد ناحیه ها

نتیجه احتمالی: اگر تعداد نقاط ۶ باشد، تعداد ناحیه ها ۳۲ است.

حل: ۶ نقطه بر روی دایره ای اختیار می کنیم و آن ها را به وسیله پاره خط هایی به هم وصل می کنیم. با توجه به شکل روبرو، می بینیم که تعداد ناحیه ها به صورت ۲، ۴، ۸، ۱۶، ... افزایش می یابند. با استدلال استقرایی، به نظر می رسد که پاره خط هایی که ۶ نقطه را به هم متصل می کنند، دایره را به ۳۲ ناحیه تقسیم می کنند. اما با توجه به شکل روبرو مشاهده می شود که این نتیجه احتمالی نادرست است. با شمردن تعداد ناحیه ها، می بینیم که تعداد آن ها ۳۰ است.



این مثال، معرف مراحل است که نشان دهنده نادرستی حدس ما است. اگرحتی یک مثال پیدا شود که حدس ما را نادرست کند، گوئیم که با مثال نقض نادرستی حدس ثابت شده است.

به مثالی که نشان دهد نتیجه گیری کلی غلط است، مثال نقض می گویند.

مثال ۸: برای هر دو عدد گنگ x و y می‌خواهیم ببینیم آیا $x+y$ نیز گنگ است یا خیر؟
حل: کافی است نشان دهیم که x و y ای پیدا می‌شوند که گنگ باشند اما مجموع آن‌ها، یعنی $x+y$ ، گنگ نباشد. برای این کار اگر دو عدد گنگ $x = 2 + \sqrt{2}$ و $y = 2 - \sqrt{2}$ را انتخاب کنیم، می‌بینیم

$$\begin{aligned} x+y &= (2 + \sqrt{2}) + (2 - \sqrt{2}) \\ &= 2+2=4 \end{aligned}$$

که یک عدد گویا است. پس این مثال، نتیجه‌گیری کلی را نقض کرد. یعنی مجموع دو عدد گنگ همیشه یک عدد گنگ نیست.

۱-۹- قضایای شرطی

بیشتر شما با ضرب المثل‌های فارسی که معمولاً هدفشان آگاه کردن مردم از پیامدهای کارهای بخصوصی است آشنا هستید. «نابرده رنج گنج میسر نمی‌شود»، «کارها نیکو شود اما به صبر» و «سرخیز باش تا کامروا باشی» از این نوع ضرب المثل‌ها هستند، یعنی اگر به ترتیب شرط «رنج بردن»، «صبوری» و «سرخیزی» وجود داشته باشد، آنگاه «رسیدن به گنج»، «نیکویی در کارها» و «کامروایی» میسر می‌شود.

همان‌طور که دقت کرده‌اید، در سرتاسر ریاضی که تا به حال یاد گرفته‌اید، به دفعات با جملات شرطی از قبیل «اگر $x > 5$ آنگاه $2x > 10$ » که به ازای تمام مقادیر حقیقی x برقرار هستند روبرو شده‌اید. این نوع جملات را **قضایای شرطی** می‌نامند.

قسمت شرطی چنین جمله‌هایی (در مثال بالا $x > 5$) را **فرض قضیه** و نتیجه جمله را (در مثال بالا $2x > 10$) **حکم قضیه** می‌نامند.

مثال ۹: «هر نقطه دلخواه روی عمود منصف یک پاره خط، از دو سر آن پاره خط به یک فاصله است» مثالی از یک قضیه شرطی است که در آن M معرف نقطه دلخواه بر عمود منصف پاره خط AB است و

فرض: نقطه M بر عمود منصف پاره خط AB است.

$$\text{حکم: } MA = MB$$

حال به مثال زیر و ویژگی آن توجه کنید:

مثال ۱۰: اگر نقطه M از دو سر پاره خط AB به یک فاصله باشد یعنی $MA=MB$ ، آنگاه M

بر عمود منصف پاره خط AB قرار دارد.

دیده می‌شود که جای فرض و حکم در این مثال، با فرض و حکم مثال بالا عوض شده است.

جای فرض و حکم در عکس قضیه شرطی با هم عوض می‌شوند.

نکته: باید توجه داشت که همیشه عکس قضیه، یک قضیه نیست.

مثال ۱۱: اگر $x > 0$ ، آنگاه $x^2 > 0$

این مثال یک قضیه است که در آن:

فرض: $x > 0$

حکم: $x^2 > 0$

حال عکس این قضیه را در نظر بگیرید

«اگر $x^2 > 0$ ، آنگاه $x > 0$ » که در اینجا

فرض: $x^2 > 0$

حکم: $x > 0$

اما این یک قضیه کلی نیست، زیرا به ازای x های منفی - در حالی که فرض درست است -

حکم درست نیست. مثلاً $x^2 = (-1)^2 = 1 > 0$ اما $x = -1 < 0$.

۱-۰-۱ اثبات بازگشتی

از دانش‌آموزان کلاسی خواسته شده بود که قضیه زیر را اثبات کنند:

قضیه: ثابت کنید که به ازای هر دو عدد حقیقی و مثبت x و y ، نابرابری زیر همیشه برقرار

است.

$$\frac{1}{4}(x+y) \geq \sqrt{xy} \quad (1)$$

نحوه استدلال یکی از دانش‌آموزان چنین بود:

او طرفین (۱) را به توان ۲ رساند:

$$x^2 + 2xy + y^2 \geq 4xy \quad (2)$$

سپس $4xy$ را از طرفین (۲) کم کرد و آن را بدین صورت نوشت:

$$x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \quad (3)$$

$$(x-y)^2 \geq 0 \quad (4)$$

و نتیجه گرفت که چون همیشه $(x-y)^2$ مثبت یا صفر است، پس (۴) برقرار و حکم ثابت است. این گونه استدلال ویژه این دانش آموز نیست و در بین سایر دانش آموزان نیز کم و بیش مرسوم است. آن‌ها به جای اثبات حکم، آن حکم را درست فرض کرده و به یک نتیجه بدیهی یا دانسته شده - یعنی از حکم به فرض - می‌رسند. این شیوه، اثبات نیست بلکه ایده خوبی برای اثبات به دانش آموزان می‌دهد و همچنان که در ابتدای این فصل نیز گفته شد، استفاده از چنین روش‌های شهودی برای فهمیدن استدلال واقعی مفید است. با این حال باید دقت داشته باشیم که استدلال شهودی - هرچند طبیعی و مفید - اگرچه می‌تواند مارا به طرف اثبات ریاضی راهبری کند اما یک اثبات ریاضی نیست.

حال به بررسی مجدد اثبات فوق می‌پردازیم. می‌بینیم که در واقع این دانش آموز عکس قضیه فوق را ثابت کرده بود، یعنی با فرض درستی

$$\frac{1}{4}(x+y) \geq \sqrt{xy} \quad (۱)$$

به درستی (۴)، یعنی $(x-y)^2 \geq 0$ ، رسیده بود. در حالی که فرض قضیه این بود که x و y اعداد حقیقی و مثبت هستند، پس در مورد آن‌ها (۴) برقرار است و هدف، اثبات حکم یعنی اثبات درستی نامساوی (۱) است:

$$\frac{1}{4}(x+y) \geq \sqrt{xy}$$

با این توضیحات، دوباره به اثبات ریاضی این قضیه می‌پردازیم.

اثبات: چون $(x-y)^2$ همیشه بزرگتر و یا مساوی صفر است، نامساوی (۳) یعنی $x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$ از آن نتیجه می‌شود.

با افزودن $4xy$ به طرفین نامساوی (۳)، نامساوی (۲) به دست می‌آید، یعنی:

$$x^2 + 2xy + y^2 \geq 4xy \quad (۲)$$

نامساوی (۲) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$(x+y)^2 \geq 4xy$$

چون x و y هر دو مثبت هستند، در نتیجه:

$$\sqrt{(x+y)^2} \geq \sqrt{4xy}$$

و یا:

$$(x+y) \geq 2\sqrt{xy}$$

که با تقسیم طرفین بر ۲ داریم :

$$\frac{1}{2}(x+y) \geq \sqrt{xy}$$



گاهی برای اثبات بعضی از قضیه‌ها - به خصوص در مورد تساوی‌ها، نامساوی‌ها و تساوی مجموعه‌ها - با استفاده از درستی حکم به یک رابطهٔ بدیهی و یا فرض قضیه می‌رسیم. در چنین حالتی، برای تکمیل اثبات می‌بایستی نشان دهیم که تمام مراحل انجام شده بازگشت‌پذیر هستند وگرنه درستی اثبات تأیید نمی‌شود.

گاهی برای ارزیابی ذکاوت و دقت افراد، اثبات‌هایی ارائه می‌شود که در آن‌ها درستی تساوی‌های غیر ممکن را با ایجاد شبهه در فرد نشان می‌دهند! و سپس از آن‌ها علت را جویا می‌شوند؟! در واقع، در این گونه اثبات‌ها، حکم را فرض در نظر گرفته، روی آن عملیاتی انجام داده و ظاهراً گاهی (اکثر اشتباهات) در اثبات قضیه‌ها و حل مسائل ریاضی حکم را فرض در نظر گرفته، روی آن عملیات انجام داده، ظاهراً به نتیجه می‌رسیم! به مثال زیر توجه کنید :

مثال ۱۲: ثابت کنید $۲ = ۶$!

اثبات:

$$۲ = ۶ \quad (۱)$$

با توجه به خاصیت جابه‌جایی تساوی

$$۶ = ۲ \quad (۲)$$

سپس از جمع دو رابطهٔ (۱) و (۲) خواهیم داشت!

$$\underline{\quad\quad\quad} \quad (۳)$$
$$۸ = ۸$$

اما با توجه به مطالبی که یاد گرفتیم، می‌دانیم که تنها در صورتی این اثبات درست است که برگشت‌پذیر باشد، یعنی بتوانیم از (۳) به (۲) و سپس به (۱) برسیم. درحالی که با یک نگاه درمی‌یابیم که چنین امری محال است یعنی از (۳) که $۸ = ۸$ است نمی‌توانیم به تساوی (۲) که $۶ = ۲$ و سپس به تساوی (۱) که $۲ = ۶$ است برسیم. در نتیجه عدم برگشت‌پذیری ادعای فوق نشان می‌دهد که اثبات مذکور نادرست و فقط ایجاد شبهه بوده است! در واقع در اثبات فوق، حکم را فرض در نظر گرفته، روی آن عملیاتی انجام داده و ظاهراً به نتیجه رسیدیم.

تمرین: اثبات مثال ۱۲ را با اثبات دانش‌آموز در بخش ۱-۱ مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای

می‌گیرید؟

«همه می‌دانند که اگر کسی جواب معماً^۱ را به شما گفته باشد، حل آن ساده خواهد بود. به سادگی می‌توان گفت که این عمل یک آزمون حافظه است. فقط در صورتی می‌توانید ادعا کنید یک ریاضیدان هستید که معماًهایی را که قبلاً هرگز مطالعه نکرده‌اید حل کنید. این یک آزمون استدلال کردن است.»

سایر^۲



- ۱- با استفاده از استدلال استنتاجی، نتایج زیر را کامل کنید.
 - الف) اگر باران بیارد، زمین مرطوب می‌شود. الان باران می‌بارد. نتیجه: زمین است.
 - ب) خطوط موازی هیچگاه یکدیگر را قطع نمی‌کنند. خطوط L_1 و L_2 موازی هستند. نتیجه: L_1 و L_2
- ۲- آیا نتایج زیر از عبارات داده شده حاصل می‌شوند؟ جواب خود را توضیح دهید.
 - الف) تمام دانش‌آموزانی که ریاضی یاد می‌گیرند می‌توانند محاسبه کنند. حمید دانش‌آموزی است که ریاضی یاد می‌گیرد. نتیجه: حمید می‌تواند محاسبه کند.
 - ب) بعضی از دانش‌آموزان با طرز کار کامپیوتر آشنا هستند. نرگس دانش‌آموز است. نتیجه: نرگس با طرز کار کامپیوتر آشنا است.
 - پ) مثلث متساوی‌الساقین دارای حداقل دو ضلع مساوی است. مثلث متساوی‌الاضلاع دارای سه ضلع مساوی است. نتیجه: هر مثلث متساوی‌الاضلاع، یک مثلث متساوی‌الساقین است.
- ۳- نشان دهید که چرا مجموع دو عدد زوج همیشه زوج است؟
- ۴- علی، احمد، کامران، داوود و ابراهیم عضو تیم بسکتبال مدرسه خود هستند.

با توجه به شرایط زیر، آن‌ها را برحسب افزایش قد مرتب کنید :

(الف) حداقل دو نفر از آن‌ها از علی کوتاهتر می‌باشند،
 (ب) داوود از کامران کوتاهتر است،
 (پ) احمد کوتاهترین پسر نیست،
 (ت) داوود از علی بلندتر است.

۵- کدام یک از عبارات زیر درست و کدام یک غلط (نادرست) است. در صورت غلط بودن یک مثال نقض پیدا کنید.

(الف) اگر ۱ با هر عدد فردی جمع شود، نتیجه همیشه یک عدد زوج است.
 (ب) توان دوم یک عدد همیشه از آن بزرگتر است.
 (پ) مجموع دو زاویه حاده کمتر از 180° است.
 (ت) همیشه ارتفاع یک مثلث داخل آن قرار می‌گیرد.
 (ث) هر مستطیلی یک مربع است.
 (ج) هر مربعی یک مستطیل است.
 ۶- نمونه‌های زیر را در نظر بگیرید :

$$6 = 1^2 + 1^2 + 2^2$$

$$14 = 1^2 + 2^2 + 3^2$$

$$24 = 2^2 + 2^2 + 4^2$$

$$59 = 1^2 + 3^2 + 7^2$$

$$61 = 3^2 + 4^2 + 6^2$$

$$89 = 2^2 + 2^2 + 9^2$$

نتیجه احتمالی آن است که : هر عدد طبیعی را می‌توان به صورت مجموع سه مربع کامل نوشت. با ارائه یک مثال نقض نشان دهید که نتیجه‌گیری فوق غلط است.

۷- کدام یک از احکام زیر درست هستند؟

(الف) اگر x گنگ و y گویا باشد، آنگاه $(x+y)$ گویا است.

(ب) اگر x و y هر دو گویا باشند، آنگاه $x+y$ گویا است.

احکام درست را اثبات کنید و برای رد احکام نادرست مثال‌های نقض بیاورید.

۸- بعضی از احکام زیر قضایای کلی هستند. قضایای کلی را اثبات کرده و برای نادرستی

باقی احکام مثال نقض بیاورید :

الف) حاصلضرب هر دو عدد حقیقی کوچکتر یا مساوی نصف مجموع مربع‌های آن‌هاست.

ب) مربع هیچ عدد صحیح صفر نیست.

پ) هر دو زاویه مساوی، متقابل به رأس هستند.

ت) اگر $x > 1$ ، آنگاه $x > 2$.

ث) اگر $x > 2$ ، آنگاه $x > 1$.

ج) اگر $(x-1)^2 = 0$ ، آنگاه $x=1$.

چ) اگر $ab=0$ ، آنگاه $a=0$ و $b=0$.

۱-۱۱- برهان خلف (اثبات غیرمستقیم)

گاهی اوقات برای اثبات یک قضیه، ابتدا فرض می‌کنیم که حکم قضیه درست نباشد. آنگاه با استفاده از روش استنتاج به یک تناقض می‌رسیم.

مثال ۱: نشان دهید که با فرض صحیح بودن n ، اگر n^2 زوج باشد، n نیز زوج است.

حل: به جای اثبات زوج بودن n ، می‌توانیم نشان دهیم که n نمی‌تواند فرد باشد.

ابتدا فرض می‌کنیم n فرد باشد یعنی $n = 2k + 1$ که در اینجا k یک عدد صحیح است. در نتیجه

داریم:

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4(k^2 + k) + 1$$

و این نشان‌دهنده آن است که n^2 فرد است.

می‌بینیم که این یک تناقض است. زیرا فرض مسأله بر این بود که n^2 زوج باشد. یعنی n^2

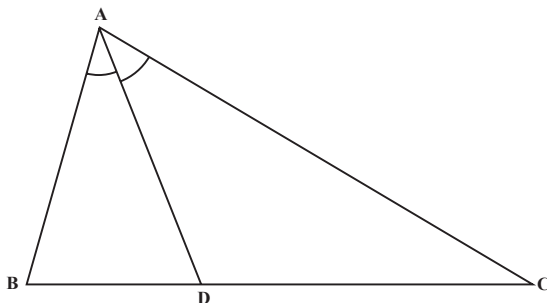
نمی‌تواند هم زوج (طبق فرض مسأله) و هم فرد (طبق نتیجه‌ای که به دست آورده‌ایم) باشد، بنابراین

به یک تناقض می‌رسیم. تنها توجیه این تناقض آن است که فرض فرد بودن n نادرست است، پس n

باید زوج باشد.

مثال ۲: فرض کنید AD نیمساز زاویه A در مثلث ABC باشد. اگر $BD \neq CD$ ثابت کنید

$AB \neq AC$



حل: اثبات را از طریق برهان خلف انجام می‌دهیم. فرض کنید نتیجه مطلوب یعنی $AB \neq AC$ درست نباشد یعنی $AB=AC$. بنابراین مثلث ABC متساوی‌الساقین است. می‌دانیم در مثلث متساوی‌الساقین نیمساز AD میانه نیز هست. بنابراین $BD = DC$ که این با فرض مسأله یعنی $BD \neq CD$ در تضاد است. بنابراین فرض درست نبودن $AB \neq AC$ رد می‌شود. یعنی $AB \neq AC$. روش استدلالی مورد استفاده در دو مثال قبل را **برهان خلف** یا اثبات غیرمستقیم می‌نامند که در تمام ریاضیات کاربرد دارد.

برهان خلف

برای استفاده از برهان خلف (اثبات غیرمستقیم) گام‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

گام ۱: فرض می‌کنیم نتیجه مطلوب درست نباشد.

گام ۲: نشان می‌دهیم که این فرض نتیجه‌ای به دست می‌دهد که حقایق دانسته شده را نقض می‌کند.

گام ۳: حال که به یک تناقض رسیده‌ایم، معلوم می‌شود که فرضی که در گام اول کرده بودیم نادرست است. بنابراین نتیجه مطلوب باید درست باشد.

مثال ۳: نشان دهید که $\sqrt{2}$ گنگ است.

اثبات: فرض کنیم نتیجه مطلوب درست نباشد یعنی $\sqrt{2}$ گنگ نبوده، گویا باشد (گام ۱). حال با توجه به تعریف گویا بودن یک عدد، $\sqrt{2}$ را به صورت کسر $\frac{p}{q}$ می‌نویسیم که در آن p و q اعداد صحیح (متعلق به \mathbb{Z}) و کسر $\frac{p}{q}$ به ساده‌ترین صورت خود است. یعنی p و q نسبت به هم اول هستند یعنی $(p, q) = 1$ و

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \quad (1)$$

طرفین (۱) را به توان دو می‌رسانیم:

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \quad (2)$$

سپس با ضرب طرفین (۲) در q^2 خواهیم داشت:

$$2q^2 = p^2 \quad (3)$$

از (۳) نتیجه می‌شود که p^2 عددی زوج است. حال طبق مثال ۱، می‌دانیم که با فرض صحیح بودن p ، اگر p^2 زوج باشد، p نیز زوج است یعنی:

$$p = 2k \quad (4)$$

در نتیجه:

$$p^2 = 4k^2 \quad (5)$$

در (۵) به جای p^2 ، معادل آن را از (۳) که همان $2q^2$ باشد جایگزین می‌کنیم:

$$2q^2 = 4k^2 \quad (6)$$

پس از تقسیم طرفین بر ۲ داریم:

$$q^2 = 2k^2 \quad (7)$$

از (۷) نتیجه می‌گیریم که q^2 زوج بوده، باز طبق مثال ۱، q نیز زوج است و این خلاف فرض است. زیرا در این صورت p و q هر دو مضارب ۲ هستند و نمی‌توانند نسبت به هم اول باشند (گام ۲). در نتیجه فرض گویا بودن $\sqrt{2}$ نادرست بوده پس $\sqrt{2}$ می‌بایستی گنگ باشد.



تمرین

با استفاده از روش استدلالی برهان خلف، احکام زیر را ثابت کنید:

- ۱- اگر n عددی صحیح و n^2 فرد باشد، نشان دهید n نیز فرد است.
- ۲- اگر n^2 مضربی از ۳ باشد، نشان دهید که n نیز مضربی از ۳ است.
- ۳- اگر n^2 مضربی از 10 باشد، نشان دهید که n نیز مضربی از 10 است.
- ۴- از یک نقطه خارج یک خط نمی‌توان بیش از یک خط بر آن عمود کرد.
- ۵- ثابت کنید $\sqrt{3}$ گنگ است.
- ۶- اگر سه خط راست d ، d' و d'' دوه‌دو متمایز باشند و $d \parallel d'$ (بخوانید d موازی d') و $d' \parallel d''$ ، آنگاه $d \parallel d''$.
- ۷- ثابت کنید $(\sqrt{2} - \sqrt{3})$ گنگ است.
- ۸- ثابت کنید اگر x گویا و y گنگ باشد، آنگاه $(x+y)$ گنگ است.
- ۹- اگر $2, 3, 5, \dots, P$ تمام اعداد اول کوچکتر یا مساوی P باشند، ثابت کنید که $N = (2 \times 3 \times 5 \times \dots \times P) + 1$ یا اول است و یا عامل اول بزرگتر از P دارد.

اگر مطالب یک موضوع درسی یکدیگر را نقض کنند، آن درس گیج کننده می شود. با این حال در استدلال استنتاجی ... گاهی وقت ها اگر سعی کنیم و عامدانه به تناقض برسیم مفید خواهد بود!

هارولد ژاکوبز، ۱۹۷۴

۱۲-۱- اصل لانه کبوتر

سیاری از بدیهیات دنیای اطراف و زندگی روزمره ما، قانونمندی ریاضی دارند و درعین سادگی و ظرافت، دارای کاربردهای گوناگون و متنوع هستند. به عنوان مثال، واضح است که اگر ۵ کبوتر به طرف ۴ لانه پرواز کنند و بخواهند داخل لانه ها بشوند، حداقل یکی از لانه ها شامل دو کبوتر خواهد بود! همچنین اگر ۹ نفر در یک میهمانی حضور داشته باشند، حداقل روز تولد دو و یا چند نفر از آن ها در یک روز هفته می باشد. مثال هایی از این قبیل برای همه ما آشناست. اصل لانه کبوتر توجه کننده دو مثال بالا و یکی از همین بدیهیات است که با این حال بعضی از مسایل پیچیده ریاضی را قابل حل می کند. این اصل، بخصوص در مواقعی که می خواهیم رخداد موقعیت خاصی را بررسی کنیم، مورد استفاده قرار می گیرد.

اصل لانه کبوتر

اگر m کبوتر، n لانه کبوتر را اشغال کنند و تعداد کبوترها بیش از تعداد لانه کبوترها باشد ($m > n$)، آنگاه طبق اصل لانه کبوتر حداقل یک لانه کبوتر وجود خواهد داشت که دست کم دو و یا بیشتر از دو کبوتر در آن قرار داشته باشند.

مثال ۱: S یک زیرمجموعه ۳۷ عضوی از اعداد طبیعی است. اگر اعضای S را بر عدد ۳۶ تقسیم کنیم، حداقل دو عضو از این مجموعه دارای باقیمانده یکسانی بر ۳۶ هستند. حل: می دانیم که تقسیم هر عدد طبیعی n بر ۳۶ به صورت $n = 36q + r$ است که q خارج قسمت، r باقیمانده و $0 \leq r < 36$ است. بنابراین مجموعه باقیمانده ها، یعنی $\{0, 1, 2, \dots, 35\}$ ، دارای ۳۶ عضو است. مشابهت این مثال با لانه کبوتر چنین است که اگر اعضای S (۳۷ عضو) را تعداد کبوترها و تعداد باقیمانده ها (۳۶) را لانه کبوترها در نظر بگیریم، آن وقت درمی یابیم که حداقل یکی از لانه ها

پذیرای دو و یا تعداد بیشتری کبوتر می باشد! یعنی :

حداقل دو عضو از مجموعه S دارای باقیمانده یکسانی بر ۳۶ خواهند بود.

تمرین: S یک زیرمجموعه ۷۰ عضوی از اعداد طبیعی است. اگر اعضای S را بر ۲۵ تقسیم

کنیم، نشان دهید که دست کم سه عضو S دارای یک باقیمانده اند.

مثال ۲: پنج نقطه داخل مربعی به ضلع ۱ مفروض اند. ثابت کنید حداقل فاصله دو نقطه از این

پنج نقطه کمتر از $\frac{\sqrt{2}}{2}$ است.



حل: با رسم محورهای تقارنی که موازی اضلاع هستند، سطح مربع را به

۴ مربع مساوی تقسیم می کنیم (مطابق شکل).

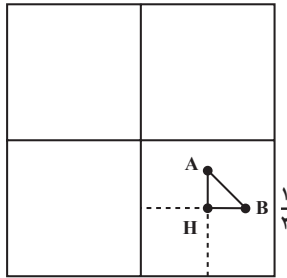
۴ مربع کوچکتر را ۴ لانه کبوتر و ۵ نقطه مفروض را ۵ کبوتر در نظر می گیریم که می خواهند به

داخل لانه ها برگردند در ضمن، نقاط روی مرز را متعلق به هر دو مربع می گیریم. بنابراین لانه کبوتر،

حداقل دو تا از نقطه ها به یکی از مربع های کوچک تعلق دارند - همان طوری که حداقل دو کبوتر، به

لانه مشترک می روند - و با استفاده از قضیه فیثاغورس درمی یابیم که فاصله آن دو نقطه کمتر از

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ است. با توجه به شکل، صحت این ادعا را نشان می دهیم



محاسبه: با توجه به اینکه طول ضلع مربع بزرگ ۱ است، در نتیجه طول ضلع مربع های کوچک

$\frac{1}{2}$ و فاصله دو نقطه A و B با استفاده از قضیه فیثاغورس به دست می آید :

$$(AB)^2 = (AH)^2 + (BH)^2$$

اما شکل معلوم می کند که طول های AH و BH از $\frac{1}{4}$ که طول ضلع مربع های کوچک است کمتر

هستند. در نتیجه :

$$(AB)^2 < \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$(AB)^2 < \frac{2}{4}$$

$$AB < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

یعنی :

و حکم ثابت است.



۱۳-۱ نفر در یک میهمانی حضور دارند. نشان دهید حداقل ۲ نفر از آن‌ها در یک ماه

متولد شده‌اند.

۲- آمار نشان می‌دهد که تعداد تارهای موی سر افراد بیش از ۳۰۰۰۰۰۰ نیست. ثابت کنید در

شهری که ۳۰۰۰۰۰۲ نفر جمعیت دارد، حداقل دو نفر از شهروندان تعداد تارهای مویشان با هم

مساوی است.

۳- مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع ۱ مفروض است. پنج نقطه را در داخل مثلث در نظر

می‌گیریم. نشان دهید حداقل دو نقطه وجود دارند که فاصله آن‌ها کمتر از $\frac{1}{4}$ است.

۴- نشان دهید هر زیرمجموعه‌ای از مجموعه $S = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ که دارای ۶ عضو باشد

حداقل دو عضو دارد که مجموع آن‌ها برابر ۱۰ است.

۵- با استفاده از پرهان خلف، اصل لانه کبوتر را که تا حال به‌طور شهودی بدیهی فرض کرده

بودیم اثبات کنید.

مجله ریاضی

نظریه مجموعه‌ها از اواخر قرن نوزدهم و اوایل قرن بیستم میلادی مطرح شد و پس از

مدتی به‌عنوان مبانی ریاضیات جایگاه ویژه‌ای پیدا کرد.

ریاضیدانان گوناگونی در تحکیم این نظریه فعالیت داشته‌اند ولی ریاضیدان آلمانی

گ. کانتور در این مورد نقشی اساسی داشت. کانتور در سن پترزبورگ (روسیه) متولد

شد، خانواده‌اش در طفولیت وی به آلمان مهاجرت کرد و در سال‌های ۱۸۷۲ الی

۱۹۱۳ استاد دانشگاه هالده در آلمان بود و در این دوران آثار عمیق خود را در نظریه

مجموعه‌ها تألیف کرد.