

مجموعه – ضرب دکارتی و رابطه

۲-۱- مجموعه

فکر می‌کنید می‌توانیم مفهوم مجموعه را به کمک مفهوم‌های ساده‌تری از خود مفهوم مجموعه تعریف کنیم؟!

این کار امکان‌پذیر نیست! ولی اغلب افراد با این مفهوم آشنا هستند و آن را به کار می‌برند. به عنوان مثال عبارت‌های «دانش‌آموزانی که معدل آنها ۱۶ است»، «نقطه‌هایی در فضا که از دو نقطه مفروض به یک فاصله‌اند»، «عددهای ۲، ۳، ۵ و ۷» و «همه کسانی که گواهینامه رانندگی دارند» هر کدام یک مجموعه هستند. در واقع مجموعه به عنوان دسته‌ای از اشیای کاملاً معین در نظر گرفته می‌شود که با نام بردن اعضای آن یا معرفی خاصیت مشترک اعضای آن مشخص می‌شود.

در این فصل ضمن آشنایی بیشتر با طبیعت مجموعه‌ها به بررسی روش‌های طبیعی و متعدد ترکیب و پیرایش مجموعه‌ها، برای تشکیل مجموعه‌های دیگر می‌پردازیم. همان‌طور که بررسی نظام‌وار ویژگی‌های کلی اعداد همراه با اعمال جمع، تفریق، ضرب و تقسیم به جبر اعداد می‌انجامد؛ مطالعه نظام‌وار این روش‌ها نیز به نوعی «جبر» مجموعه‌ها منجر می‌شود.

معمولاً در حالت کلی مجموعه را با یکی از حروف بزرگ A ، B ، C ، ... نشان می‌دهیم. اشیایی که با هم مجموعه مفروضی را تشکیل می‌دهند، عضوها یا عناصرهای آن مجموعه نامیده می‌شوند. برای آن‌که تعلق عضوی چون x به مجموعه‌ای چون A را به‌طور نمادی بیان کنیم، می‌نویسیم

$$x \in A$$

و اگر x عضو مجموعه A نباشد و یا به عبارت دیگر x متعلق به A نباشد، می‌نویسیم

$$x \notin A$$

بدیهی است برای شناختن یک مجموعه باید بدانیم دقیقاً چه چیزهایی عضو آن هستند. گفتیم یک مجموعه با نام بردن اعضای آن یا معرفی خاصیت مشترک اعضای آن مشخص

می‌شود. مثلاً مجموعه اعداد اول یک رقمی را با نام بردن اعضای آن به صورت

$$\{2, 3, 5, 7\}$$

و یا با بیان خاصیت مشترک اعضای آن به صورت

$$\{x \mid x \text{ عدد اول یک رقمی است}\}$$

نشان می‌دهیم که آن را با به کار بردن نماد « $x < 10$ » به جای « x یک رقمی است» و « $x \in P$ » به جای

« x عددی اول است» به صورت

$$\{x \mid x < 10, x \in P\}$$

می‌نویسیم.

به عنوان مثالی دیگر؛ می‌دانیم مجموعه نقطه‌هایی از یک صفحه که به فاصله معینی از نقطه مفروضی در آن صفحه باشند یک دایره تشکیل می‌دهند. در این مثال مجموعه را به کمک یک شرط تعریف کرده‌ایم که باید عضوهای مجموعه با آن سازگار باشند و یا می‌توان گفت، خاصیتی را معین کرده‌ایم که عضوهای مجموعه باید آن را داشته باشند. نقطه‌های واقع بر محیط دایره، با این شرط سازگارند و یا دارای این خاصیت هستند که، همه آن‌ها در یک صفحه قرار گرفته‌اند و از نقطه مفروضی (O مرکز دایره) به یک فاصله (r اندازه شعاع دایره) هستند.

در مشخص کردن یک مجموعه، ممکن است مناسب، یا حتی امکان‌پذیر نباشد که فهرست کاملی از اعضایش را بنویسیم. مجموعه نقاط روی دایره به مرکز O و شعاع r از آن جمله هستند؛ یا مانند مجموعه اعداد اول امکان نوشتن همه عضوهای آن نباشد،

$$P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \dots\}$$

مفهوم‌های «شرط» و «خاصیت» پیوندی جدی با مفهوم «مجموعه» دارند. به طور کلی هر تعریف از نوع

$$S = \{x \mid x \text{ شرطی در مورد } x\}$$

به این معنی است که S مجموعه همه x‌هایی است که در مورد آن‌ها شرط مفروضی صادق باشد. به طور مثال اگر A را مجموعه جواب‌های معادله درجه دوم

$$x^2 - 4x - 5 = 0$$

در نظر بگیریم می‌توان آن را بعد از حل معادله به صورت

$$A = \{-1, 5\}$$

نشان داد، یا از حل معادله اجتناب کرده آن را به صورت

$$A = \{x \mid x^2 - 4x - 5 = 0\}$$

بنویسیم. به این طریق نیز تعریفی دقیق و بدون ابهام برای A به دست می‌آید.
 حال به عنوان مثالی دیگر مجموعه B را به صورت زیر در نظر بگیرید

$$B = \{x \mid -2 \leq x \leq 3\}$$

با کمی دقت متوجه ابهامی در تعریف این مجموعه می‌شویم. زیرا اگر فقط اعداد صحیح مورد نظر باشند، مجموعه B شامل اعداد $-2, -1, 0, 1, 2, 3$ می‌شود ولی اگر اعداد حقیقی مورد نظر باشند آنگاه همه اعداد حقیقی دیگر بین -2 و 3 را نیز شامل می‌شود.

برای رفع یک چنین ابهامی، مجموعه‌ای چون U را که اعضای مجموعه مورد نظر باید از آن انتخاب شوند، مشخص می‌کنیم. به طور کلی هر تعریف به صورت

$$X = \{x \in U \mid x \text{ مورد } \}$$

به این معنی است که X مجموعه تمام اعضای مانند x موجود در مجموعه U است که به ازای آن‌ها شرط مفروض در مورد x برآورده می‌شود. البته صورت معادل

$$X = \{x \mid x \text{ مورد } \}$$

نیز همان معنا را دارد ولی ما نمایش اول را ترجیح می‌دهیم چون بر نقش U تأکید بیشتری دارد.
 مجموعه U که اعضای X طبق شرط تعیین شده از آن انتخاب می‌شوند، مجموعه مرجع یا مجموعه جهانی^۱ خوانده می‌شود.

به عنوان مثال اگر A مجموعه اعداد مضرب ۳ باشد، آنگاه مجموعه جهانی را مجموعه اعداد صحیح « \mathbb{Z} » می‌گیریم و آن را به صورت

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 3k, k \in \mathbb{Z}\}$$

نشان می‌دهیم.

معمولاً خاصیت مشترک اعضای یک مجموعه را با $P(x)$ یا $q(x)$ نشان می‌دهیم و آن را گزاره‌نما با متغیر x می‌خوانیم. بنابراین برای نشان دادن مجموعه X در حالت کلی می‌نویسیم:

$$X = \{x \in U \mid P(x)\}$$

که U مجموعه جهانی و $P(x)$ به معنی «x خاصیت P دارد» می‌باشد (گزاره‌نما).
 در مجموعه

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2\}$$

اعداد حقیقی \mathbb{R} ، مجموعه جهانی و $1 < x < 2$ همان $P(x)$ است.

گزاره نما عبارتی است شامل نمادی مانند x که هرگاه هر عضو مانند $a \in U$ را به جای x قرار دهیم جمله حاصل یا به وضوح درست باشد یا به وضوح نادرست.

اگر چنین باشد می‌گوییم که این گزاره‌نما برای مجموعه U معتبر است.

مثلاً عبارت $2 \leq x \leq 3$ یک گزاره‌نماست که برای مجموعه \mathbb{Z} و برای مجموعه \mathbb{R} معتبر است. یعنی با قرار دادن هر عدد صحیح یا حقیقی به جای x جمله‌ای به دست می‌آید که یا درست است یا نادرست. مثلاً جمله $2 \leq 1 \leq 3$ درست است ولی $2 \leq 6 \leq 3$ نادرست است.

باید توجه کرد که گزاره‌نما در مجموعه‌های جهانی متفاوت تعریف می‌شود. مثلاً اگر M را مجموعه چهارضلعی‌های محدب واقع در صفحه در نظر بگیریم آنگاه عبارت « x مربع است» گزاره‌نمایی است معتبر برای مجموعه M و مجموعه

$$\{x \in M \mid x \text{ مربع است}\}$$

فقط مجموعه مربع‌های واقع در صفحه است.

یا اگر S مجموعه نقاط صفحه باشد، دایره به مرکز O و شعاع r را به عنوان یک مجموعه از نقاط به صورت

$$\{x \in S \mid \text{فاصله } x \text{ از } O \text{ برابر } r \text{ است}\}$$

می‌نویسیم.

گفتیم یک مجموعه ممکن است به روش‌های مختلف توصیف شود. مثلاً اگر A مجموعه جواب‌های معادله

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

باشد و B مجموعه اعداد صحیح زوج بین ۱ و ۵، آنگاه A و B هر دو دقیقاً دارای دو عضو ۲ و ۴ هستند. با مشخص شدن اعضاء مشاهده می‌شود که این دو مجموعه برابرند. بنابراین طبیعی است بگوییم

دو مجموعه A و B برابرند اگر و فقط اگر اعضایشان یکی باشد و می‌نویسیم

$$A=B$$

اگر A و B برابر نباشند می‌نویسیم $A \neq B$.

با توجه به تعریف بالا مشاهده می‌شود که مجموعه‌های $A = \{5, 15, 25\}$ و $B = \{15, 25, 5\}$ برابرند، زیرا هر عضو A عضو B نیز هست و هر عضو B نیز عضو A است.

تغییر ترتیب عضوهای یک مجموعه، آن مجموعه را تغییر نمی‌دهد.

همچنین مجموعه‌های $C = \{1, 3, 1, 6\}$ و $D = \{3, 1, 3, 6\}$ نیز برابرند زیرا هر عضو C متعلق به D نیز هست و هر عضو D نیز به C تعلق دارد.

تکرار عضوها در یک مجموعه، آن مجموعه را تغییر نمی‌دهد.

مجموعه

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x + 1 = 0\}$$

را در نظر بگیرید، با کمی دقت ملاحظه می‌کنید که هیچ عدد حقیقی در شرط این مجموعه صدق نمی‌کند، در نتیجه این مجموعه خالی از عضو است.

مجموعه‌ای که هیچ عضوی نداشته باشد مجموعه تهی نامیده می‌شود و با نماد \emptyset یا $\{\}$ نشان داده می‌شود.

حال با توجه به تعریف بالا آیا می‌توانید تفاوت مجموعه‌های \emptyset و $\{0\}$ را بیان کنید؟

۲-۲ زیر مجموعه

با حذف برخی از اعضای مجموعه غیر تهی A ، مجموعه‌های دیگری به دست می‌آیند که این مجموعه‌ها را زیرمجموعه‌های A می‌نامیم. مثلاً اگر از مجموعه

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

اعضای ۱ و ۲ را حذف کنیم مجموعه

$$B = \{3, 4\}$$

به دست می‌آید که همه اعضای آن در A نیز هستند. در این حالت می‌گوییم B زیرمجموعه A است یا

A شامل B است.

B یک زیرمجموعه از A است اگر هر عضو B عضوی از A نیز باشد و می‌نویسیم $B \subseteq A$.

به عبارت دیگر $B \subseteq A$ اگر برای هر $x \in U$ از $x \in B$ نتیجه شود که $x \in A$. با توجه به این تعریف می‌توان گفت برای دو مجموعه A و B اگر عضوی در B وجود داشته باشد که این عضو در A نباشد در این صورت B زیرمجموعه A نیست و آن را به صورت $B \not\subseteq A$ نشان می‌دهیم. بنابراین می‌توان گفت:

هر مجموعه‌ای زیرمجموعه خودش است.

یعنی برای هر مجموعه A داریم $A \subseteq A$. همچنین بدیهی است که $\emptyset \subseteq U$.

مثال ۱: نشان دهید مجموعه $A = \{2, 3, 4, 5\}$ زیرمجموعه x زوج باشد $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ زوج باشد}\}$ نیست.

حل: باید نشان دهیم حداقل یک عضو A در B نیست.

چون $3 \in A$ و $3 \notin B$ بنابراین $A \not\subseteq B$.

توجه کنید که لازم نیست بدانیم که آیا عضوهای دیگر A عضو B هستند یا خیر.

اگر $A \subseteq B$ ولی $B \neq A$ ، آنگاه B زیرمجموعه سره A نامیده می‌شود.

مثال ۲: نشان دهید که مجموعه $A = \{a, b\}$ زیرمجموعه سره $B = \{a, b, c\}$ است.

حل: B. A است زیرا a و b هم متعلق به A و هم متعلق به B است. اما چون $c \in B$ ولی

$c \notin A$ ، در نتیجه $A \not\subseteq B$. بنابراین A یک زیرمجموعه سره B است.

مثال ۳: اگر

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -20 \leq x \leq 20\}$$

$$B = \{n \in \mathbb{Z} \mid n^2 \leq 49\}$$

$$C = \{A, B, -3, 4, 6\}$$

$$D = \{-3, 4, 6, 7\}$$

آنگاه :

B. A (چرا؟)

$A \in C$ زیرا $C \pm A$ ولی A, A

D. A (چرا؟)

$D \pm C$ زیرا $\forall \in D$ ولی \forall, C

$D \pm B$ زیرا $3 \in D$ ولی $B, -3$

مثال ۴: ثابت کنید . زیر مجموعه هر مجموعه است.

حل: A .. زیرا اگر $A \pm$ باید عضوی مانند x در . باشد که در A نباشد، و این

غیرممکن است چون . عضوی ندارد.

با توجه به تعریف زیر مجموعه می توان تعریف تساوی دو مجموعه را به صورت قضیه زیر

بازنویسی کرد.

قضیه ۱: دو مجموعه A و B مساوی هستند، یعنی $A=B$ ، اگر و تنها اگر A. B و B. A

برهان: اگر $A=B$ آنگاه از آنجا که A. A، نتیجه می گیریم که A. B و B. A.

برعکس، فرض می کنیم B. A و A. B آنگاه هر عضو A، عضوی از B است و هر عضو



B، عضوی از A. از این رو اعضای A و B یکی هستند و لذا $A=B$.

قضیه ۲: برای سه مجموعه A، B و C اگر داشته باشیم B. A و B. C آنگاه داریم

A. C

برهان: چون B. A پس هر عضو A در B است و چون B. C پس هر عضو B در C است.



بنابراین هر عضو A، عضو C نیز هست در نتیجه A. C.

توجه کنید که زیر مجموعه ها را نباید با اعضای مجموعه اشتباه گرفت زیرا که این دو مفهوم

کاملاً متفاوت هستند.

مثال ۵: اگر $M = \{r, s, t\}$ ، کدام یک از احکام زیر درست و کدام یک نادرست است؟ در

صورت نادرستی دلیل آن را بیان کنید.

(ب) $r \in M$

(الف) $r \in M$

(ت) $\{r\} \in M$

(پ) $\{r\} \in M$

حل: الف) درست.

(ب) نادرست، علامت . بایستی دو مجموعه را به هم مربوط کند ولی در این جا r زیر مجموعه

M نیست بلکه عضو M است.

پ) نادرست، علامت \in بایستی یک شیء را به یک مجموعه مربوط کند، ولی $\{T\}$ زیرمجموعه M است نه عضو M.

ت) درست.

مثال ۶: اگر $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x = 6\}$ آیا $A = 3$ ؟

حل: A یک مجموعه است که دارای تنها یک عنصر ۳ است، یعنی $A = \{3\}$. پس عدد ۳ متعلق به A است نه مساوی A.

در نتیجه باید توجه داشته باشیم که عضو a و مجموعه $\{a\}$ متفاوت هستند و آن‌ها را یکی نگیریم.

مثال ۷: آیا هر مجموعه‌ای دارای زیرمجموعه سره است؟

حل: مجموعه تهی دارای زیرمجموعه سره نیست ولی بقیه مجموعه‌ها را به عنوان زیرمجموعه سره خود دارند. اگر مجموعه سره غیرتهی مورد نظر باشد، مجموعه‌های تک‌عضوی دارای زیرمجموعه سره غیرتهی نیستند ولی بقیه مجموعه‌ها که بیش از یک عضو دارند دارای زیرمجموعه سره ناتهی می‌باشند.

۲-۳- مجموعه توانی

مجموعه $A = \{1, 2, 3\}$ را در نظر می‌گیریم و همه زیرمجموعه‌های A را می‌نویسیم که عبارتند

از:

$$A = \{1, 2, 3\}$$

.

$$A_1 = \{1\}$$

$$A_2 = \{2\}$$

$$A_3 = \{3\}$$

$$A_4 = \{1, 2\}$$

$$A_5 = \{1, 3\}$$

$$A_6 = \{2, 3\}$$

حال اگر مجموعه این زیرمجموعه‌ها را با

$$P(A) = \{A, ., A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}$$

نشان دهیم، $P(A)$ مجموعه توانی A خوانده می شود. پس

مجموعه کلیه زیرمجموعه های X ، مجموعه توانی X نامیده می شود و با $P(X)$ نشان داده می شود.

مثال ۸: مجموعه توانی $B = \{a, b\}$ را بنویسید.

حل: کلیه زیرمجموعه های B عبارتند از:

$$B = \{a, b\}$$

.

$$B_1 = \{a\}$$

$$B_2 = \{b\}$$

بنابراین

$$P(B) = \{\{a, b\}, \{a\}, \{b\}, \emptyset\}.$$

چنانکه ملاحظه شد مجموعه B که ۲ عضو داشت، مجموعه توانی آن دارای $2^2 = 4$ عضو بود و مجموعه A که ۳ عضو داشت، مجموعه توانی آن $2^3 = 8$ عضوی شد. شاید شما نیز با مشاهده مثال های بالا به حدس زیر رسیده باشید.

قضیه ۳: اگر مجموعه A دارای n عضو باشد، مجموعه توانی آن دارای 2^n عضو خواهد بود.

برهان: این قضیه را با استفاده از استقرای ریاضی اثبات می کنیم.

اگر $n=1$ ، مثلاً $A = \{a\}$ آنگاه:

$$P(A) = \{A, \emptyset\}$$

می بینیم که در این حالت $P(A)$ دارای 2^1 عضو است و در نتیجه حکم قضیه برقرار است. اگر

$n=2$ ، مثلاً $A = \{a, b\}$ آنگاه

$$P(A) = \{A, \emptyset, \{a\}, \{b\}\}$$

که دارای 2^2 عضو است و در نتیجه حکم قضیه در این حالت نیز برقرار است.

حال درستی حکم را برای $n=k$ فرض می کنیم (فرض استقراء)، یعنی فرض می کنیم اگر

مجموعه A دارای k عضو باشد، مجموعه توانی آن، $P(A)$ ، دارای 2^k عضو است.

اگر به مجموعه A یک عضو اضافه کنیم، یعنی مجموعه A ، $k+1$ عضو شود ($n = k+1$)، آنگاه این عضو با 2^k عضو دیگر مجموعه توانی، 2^k مجموعه جدید برای مجموعه توانی پدید خواهد آورد.

یعنی تعداد عضوهای مجموعه توانی A جدید، $2(2^k)$ یعنی 2^{k+1} می باشد و به این ترتیب نتیجه می شود که حکم قضیه برای هر عدد طبیعی، n برقرار است. \square

مجموعه ای را که تعداد اعضای آن برابر یک عدد حسابی باشد مجموعه متناهی می نامیم و مجموعه ای را که متناهی نباشد، مجموعه نامتناهی می نامیم. مثلاً مجموعه اعداد صحیح یک رقمی متناهی است ولی مجموعه اعداد صحیح \mathbb{Z} نامتناهی است همچنین مجموعه \mathbb{N} نامتناهی است. تعداد عضوهای یک مجموعه متناهی را عدد اصلی آن مجموعه می نامیم. مثلاً عدد اصلی مجموعه

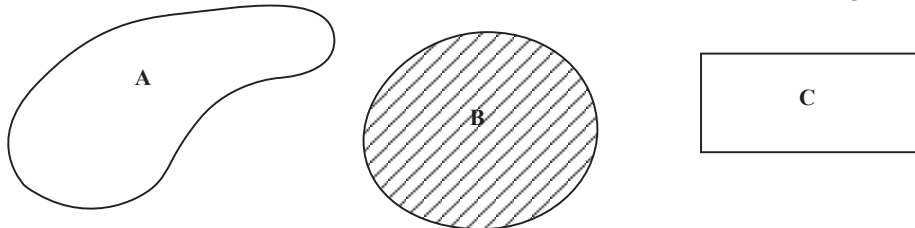
$$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$$

10 است، چون تعداد عضوهای آن 10 است. عدد اصلی مجموعه ای مانند A را با $|A|$ یا $n(A)$ نشان می دهیم. باید توجه داشت که همواره می توان تعداد زیرمجموعه های یک مجموعه متناهی را بر حسب تعداد اعضای همان مجموعه به دست آورد ولی تعداد زیرمجموعه های یک مجموعه نامتناهی تعریف نشده است.

تذکره: مجموعه $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$ نیز نمونه ای از مجموعه های نامتناهی است.

۲-۴- نمایش هندسی مجموعه ها

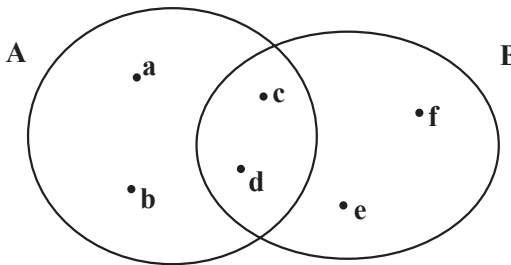
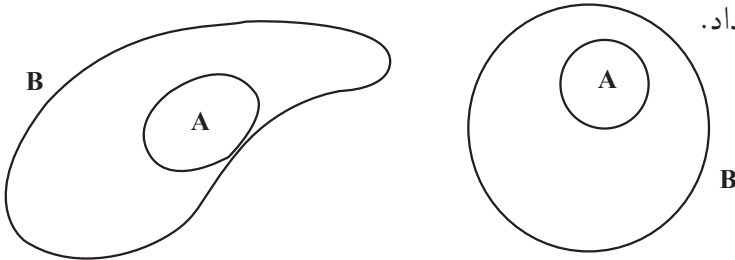
یکی از ابزارهای مهم استدلال های شهودی و استقرایی برای فهم بهتر مجموعه ها استفاده از تمثیل هندسی است. این کار برای بار اول توسط ریاضیدانی به نام ون انجام شد و نمودار ون نام گرفت. در نمودار ون در حالت کلی اعضای مجموعه درون یک خم بسته در صفحه مانند دایره یا مستطیل نشان داده می شود. گاهی ناحیه داخلی شکلی را که برای نمایش مجموعه به کار می رود هاشور می زنند. در زیر مجموعه های A ، B و C با استفاده از نمودار ون نشان داده شده اند.



۱- Venn

به عنوان مثال اگر $A \neq B$ و $A \subset B$ ، آنگاه A و B را می توان به صورت هر یک از نمودارهای

زیر نشان داد.



به عنوان مثالی دیگر، اگر
 $A = \{a, b, c, d\}$ و $B = \{c, d, e, f\}$ ،
 آنگاه این مجموعه ها را با استفاده از
 نمودار ون به صورت مقابل می توان نشان
 داد.

باید توجه داشت که نمودار ون

خود یک نوع تمثیل شهودی و هندسی است و به وسیله آن نمی توان یک قضیه ریاضی را ثابت کرد. بلکه برای اثبات می توان از آن ها ایده گرفت.



۱- مجموعه های زیر را که با بیان خاصیتی معین، مشخص شده اند با گزاره نما نشان دهید.

الف) مجموعه اعداد حقیقی مثبت

ب) مجموعه اعداد صحیح که مربعشان بزرگتر از ۲۵ نباشد.

پ) مجموعه اعداد حقیقی بین ۲- و ۲

۲- مجموعه های زیر را که با گزاره نما نوشته شده اند با نوشتن اعضا نشان دهید:

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 5\} \quad \text{الف)}$$

$$B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 \leq 25\} \quad \text{ب)}$$

$$C = \{x \in \mathbb{Q} \mid 10x^2 + 3x - 1 = 0\} \quad \text{پ)}$$

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 + 1 = 0\} \quad (\text{ت})$$

$$E = \{x \in \mathbb{N} \mid x^3 + 1 = 0\} \quad (\text{ث})$$

۳- هریک از مجموعه‌های زیر را با استفاده از یک گزاره‌نما بنویسید.

$$A = \{1, 4, 9, 16, 25, \dots\} \quad (\text{الف})$$

$$B = \{2, 4, 6, 8, 10, \dots\} \quad (\text{ب})$$

$$C = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots \right\} \quad (\text{پ})$$

$$D = \{1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}\} \quad (\text{ت})$$

۴- نشان دهید که مجموعه حروف لازم برای هجی کردن «بینابین» با مجموعه حروف لازم

برای هجی کردن «بیان» مساوی است.

۵- چه شرایطی بین a, b, c, d وجود داشته باشد تا تساوی زیر برقرار باشد؟

$$\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$$

۶- نشان دهید: الف) اگر $A \dots$ آنگاه $A = \dots$

ب) اگر $A = U$ آنگاه $A = U$

۷- تمام زیرمجموعه‌های مجموعه $\{-1, 0, 1\}$ را بنویسید.

۸- تمام زیرمجموعه‌های مجموعه $S = \{3, \{1, 4\}\}$ را بنویسید.

۹- از گزاره‌های زیر کدام یک درست و کدام یک نادرست است.

$$= \dots \{ \} \quad (\text{الف})$$

$$\in \dots \{ \} \quad (\text{ب})$$

$$\dots \{ \} \quad (\text{پ})$$

$$\{\dots, \{ \}\} \in \{\dots, \{ \}, \{ \dots, \{ \}\}\} \quad (\text{ث})$$

۱۰- کدام یک از مجموعه‌های زیر با هم مساویند.

$$A = \{m \in \mathbb{Z} \mid |m| < 2\}$$

$$B = \{m \in \mathbb{Z} \mid m^3 = m\}$$

$$C = \{m \in \mathbb{Z} \mid m^2 \leq 2m\}$$

$$D = \{m \in \mathbb{Z} \mid m^2 \leq 1\}$$

$$E = \{0, 1, 2\}$$

۱۱- تعیین کنید که در مجموعه‌های زیر، کدام مجموعه، زیرمجموعه دیگری است.

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 8x + 12 = 0\}$$

$$B = \{2, 4, 6\}$$

$$C = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$$

$$D = \{6\}$$

۱۲- تعیین کنید کدام یک از گزاره‌های زیر درست و کدام یک نادرست است.

$$x \in \{\{x\}, \{x, y\}\} \quad \text{(الف)}$$

$$\{x\} \cdot \{\{x\}, \{x, y\}\} \quad \text{(ب)}$$

$$\{1, x, 2\} \cdot \{1, 2, x\} \quad \text{(پ)}$$

$$\{a, b\} \cdot \{b, a\} \quad \text{(ت)}$$

$$\{x\} \in \{x\} \quad \text{(ث)}$$

۱۳- مثال‌هایی از مجموعه‌های دلخواه A و B و C بیاورید که برای آن‌ها احکام زیر درست

باشند.

$$A, C \text{ و } B \in C \text{ و } A \in B \quad \text{(الف)}$$

$$A \in C \text{ و } B \in C \text{ و } A \in B \quad \text{(ب)}$$

$$A \cdot B \text{ و } A \in B \quad \text{(پ)}$$

۲-۵- جبر مجموعه‌ها

همان‌طور که با اعمال جمع و تفریق و ضرب و تقسیم در مجموعه اعداد، اعداد جدیدی حاصل می‌شود، در نظریه مجموعه‌ها نیز اعمالی مانند اجتماع، اشتراک، تفاضل تعریف می‌شود که به کمک آن‌ها می‌توان از دو مجموعه داده شده، مجموعه جدیدی ساخت.

اجتماع دو مجموعه

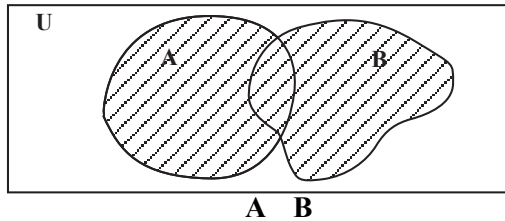
اجتماع مجموعه‌های A و B، مجموعه‌ای است که اعضایش، همه اعضای A و همه اعضای B را شامل می‌شود. به عنوان مثال اگر

$$A = \{1, 2, 3\} \text{ و } B = \{3, 4, 5\}$$

آنگاه اجتماع آن‌ها مجموعه $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ است. یعنی

اجتماع مجموعه‌های A و B مجموعه‌ای است که اعضایش متعلق به A یا متعلق به B یا متعلق به هر دو مجموعه A و B باشد.

اجتماع A و B را به صورت $A \cup B$ نمایش می‌دهیم. لذا داریم:
 $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ یا } x \in B \text{ یا } x \text{ متعلق به هر دو مجموعه } A \text{ و } B \text{ است}\}$
 با استفاده از نمودار ون، اجتماع دو مجموعه را می‌توان به صورت زیر نمایش داد.



تبصره: با توجه به تعریف اجتماع دو مجموعه می‌توان نتیجه گرفت که دو مجموعه A و B یکی هستند یعنی:

$$A \cup B = B \cup A$$

همچنین هر یک از دو مجموعه A و B زیرمجموعه $A \cup B$ هستند، یعنی

$$A \subseteq A \cup B \quad \text{و} \quad B \subseteq A \cup B$$

مثال ۱: اگر $A = \{1, 2, 3\}$ ، $B = \{2, 4, 6, 8\}$ و $C = \{3, 4, 5, 6\}$ آنگاه طبق تعریف اجتماع

داریم:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$$

$$C \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6, 8\}$$

$$B \cup B = \{2, 4, 6, 8\}$$

در این مثال مشاهده می‌شود که $B \cup B = B$.

مثال ۲: فرض کنید A ، B و C مجموعه‌های مثال ۱ باشند. می‌توان نشان داد

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

برای این منظور ابتدا $A \cup B$ را تعیین می‌کنیم

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$$

سپس اجتماع $A \cup B$ را با C به دست می‌آوریم

$$(A \cup B) \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$$

به همین ترتیب برای محاسبه $(B \cap C) \cap A$ ابتدا $B \cap C$ را تعیین می‌کنیم:

$$B \cap C = \{2, 4, 6, 8, 3, 5\}$$

و بعد اجتماع A و $B \cap C$ را به دست می‌آوریم

$$A \cap (B \cap C) = \{1, 2, 4, 6, 8, 3, 5\}$$

به وضوح مشاهده می‌شود که

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

مثال ۳: برای مجموعه‌های $A = \{1, 2\}$ ، $B = \{2, 3\}$ و $C = \{1, 2, 3, 4\}$ ملاحظه می‌شود:

$$A \cap C \text{ و } B \cap C$$

در این حالت برای مجموعه

$$A \cap B = \{1, 2, 3\}$$

نیز داریم

$$A \cap B \cap C$$

مشاهده بالا در حالت کلی برقرار است. این مطلب را می‌توان به صورت قضیه زیر بیان کرد.

قضیه ۱: اگر $A \cap C$ و $B \cap C$ آنگاه $B \cap C \cap A$.

برهان: فرض می‌کنیم $x \in A \cap B$ آنگاه طبق تعریف اجتماع، $x \in A$ یا $x \in B$. اگر $x \in A$ ،

چون طبق فرض قضیه داریم $A \cap C$ ، بنابراین $x \in C$ ؛ اگر $x \in B$ ، چون طبق فرض قضیه $B \cap C$ ،

بنابراین $x \in C$ ؛ یعنی در هر صورت از $A \cap B$ نتیجه می‌شود $x \in C$. بنابراین

$$A \cap B \cap C$$

قضیه زیر خواص مقدماتی اجتماع را بیان می‌کند.

قضیه ۲: برای هر سه مجموعه A ، B و C داریم:

$$A \cap (A \cup B) = A \quad (\text{الف})$$

$$A \cap A = A \quad (\text{ب})$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \quad (\text{پ})$$

برهان: بندهای الف و ب با توجه به تعریف به سادگی اثبات می‌شود. در اینجا فقط به اثبات

قسمت پ می‌پردازیم.

چون $B \cap C \cap A$ و $(B \cap C) \cap A$ بنابراین

$$B \cap C \cap A = (B \cap C) \cap A$$

اما $A \cdot A (B C)$ بنابراین طبق قضیه ۱

$$A B \cdot A (B C) \quad (۱)$$

اما $C \cdot B C$ و $A (B C)$ بنابراین

$$C \cdot A (B C) \quad (۲)$$

براساس قضیه ۱، از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$(A B) C \cdot A (B C)$$

با استدلالی مشابه می‌توان ثابت کرد

$$A (B C) \cdot (A B) C$$

بنابراین

$$A (B C) = (A B) C$$

با توجه به برابری به دست آمده می‌توان پرازنرها را برداشت و نوشت

$$A B C \quad \square$$

قضیه ۳: اگر $A \cdot B = B$ آنگاه $A \cdot B = B$.

برهان: اگر $A \cdot B = B$ چون $B \cdot B = B$ طبق قضیه ۱ خواهیم داشت:

$$A B \cdot B$$

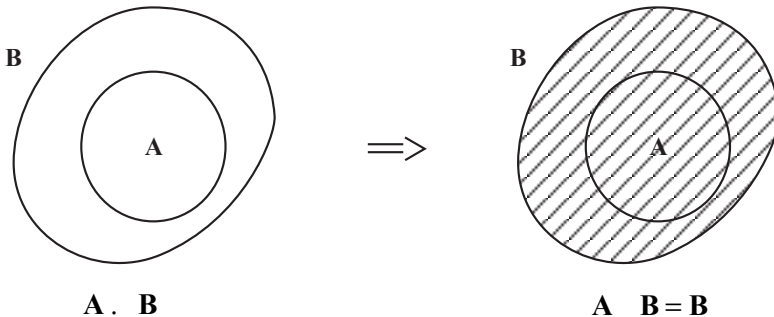
اما از طرف دیگر می‌دانیم

$$B \cdot A B$$

به این ترتیب از دو رابطه اخیر نتیجه می‌شود:

$$A B = B \quad \square$$

با استفاده از نمودار و نیز نتیجه این قضیه را می‌توان مشاهده کرد.



عکس قضیه ۳ نیز برقرار است.

قضیه ۴: برای هر دو مجموعه A و B ، اگر $A \subseteq B$ آنگاه $A \cap B = A$.
 برهان: می‌دانیم $A \subseteq B$ و طبق فرض قضیه داریم $A \cap B = A$. پس $A \subseteq B$.

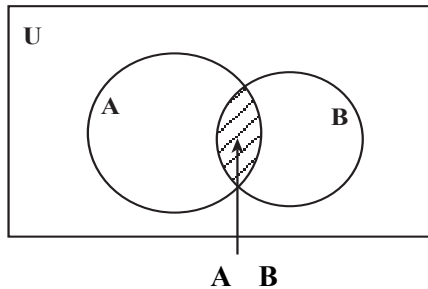
اشتراک دو مجموعه

در دو مجموعه $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{3, 4, 5\}$ ، عدد ۳ مشترک است، لذا مجموعه $\{3\}$ اشتراک دو مجموعه A و B خوانده می‌شود.

اشتراک دو مجموعه A و B مجموعه‌ای است که اعضایش به هر دو مجموعه A و B تعلق داشته باشد.

اشتراک دو مجموعه A و B را با $A \cap B$ نمایش می‌دهیم، پس
 $A \cap B = \{x \mid x \in B, x \in A\}$

با استفاده از نمودار ون، اشتراک دو مجموعه را به صورت زیر می‌توان نشان داد.



تبصره: از تعریف اشتراک دو مجموعه نتیجه می‌شود که

$$A \cap B = B \cap A$$

همچنین چون عضوهای $A \cap B$ هم در A و هم در B قرار دارند بنابراین

$$A \cap B \subseteq A$$

$$A \cap B \subseteq B$$

اگر دو مجموعه غیرتهی A و B عضو مشترک نداشته باشند آنگاه

$$A \cap B = \emptyset$$

در این حالت دو مجموعه A و B را جدا از هم یا مجزا می‌نامیم.

مشابه ویژگی‌هایی که برای اجتماع دو مجموعه برقرار بود، برای اشتراک هم برقرار است.

قضیه ۵: برای هر سه مجموعه A ، B و C داریم:

$$A = A \cap (A \cup B) \quad (\text{الف})$$

$$A \cap (A \cup B) = A \quad (\text{ب})$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \quad (\text{پ})$$

اثبات این قضیه به عنوان تمرین رها می‌شود.

قضیه ۶: برای هر دو مجموعه A و B ، اگر $A \cap B = A$ آنگاه $A \subseteq B$.

برهان: چون $A \cap B = A$ بنابراین کافی است ثابت کنیم $A \subseteq B$.

اگر $x \in A$ چون $A \subseteq B$ پس $x \in B$. حال با توجه به این که $x \in A$ و $x \in B$ می‌توان نتیجه گرفت که $x \in A \cap B$. یعنی $A \subseteq A \cap B$. حال از دو رابطه $A \subseteq A \cap B$ و $A \cap B \subseteq A$ نتیجه می‌شود $A \subseteq A \cap B = A$. \square

در پایان دو تساوی وجود دارند که اجتماع و اشتراک را درهم می‌آمیزند. ما این مطلب را در قضیه زیر بدون اثبات بیان می‌کنیم.

قضیه ۷: (قوانین پخش پذیری)

برای هر سه مجموعه A ، B و C داریم:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad (\text{الف})$$

(پخش پذیری اجتماع نسبت به اشتراک)

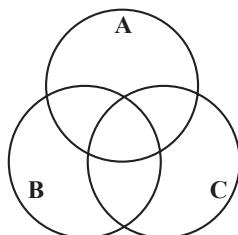
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad (\text{ب})$$

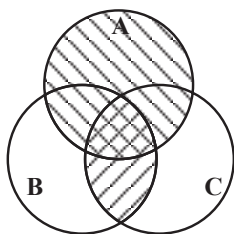
(پخش پذیری اشتراک نسبت به اجتماع)

یک راه تصور تساوی‌هایی که در قضیه بالا مطرح شد، استفاده از نمودار ون است. برای تحقیق تساوی

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

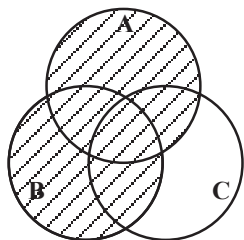
سه دایره دو به دو متقاطع برای نمایش مجموعه‌های A ، B و C در نظر می‌گیریم.



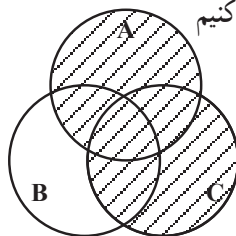


حال $B \cap C$ را سایه می‌زنیم و سپس اجتماع آن ناحیه را با A مشخص می‌کنیم. به این ترتیب ناحیه سایه‌دار مجموعه $A \cap (B \cap C)$ را نمایش می‌دهد.

از سوی دیگر اگر دو مجموعه $A \cap B$ و $A \cap C$ را روی شکل مشخص کنیم



$A \cap B$



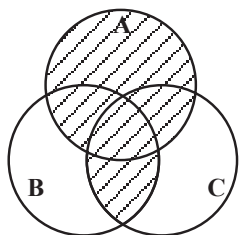
$A \cap C$

اشتراک این دو ناحیه یعنی:

$$(A \cap B) \cap (A \cap C)$$

را به صورت مقابل خواهیم داشت.

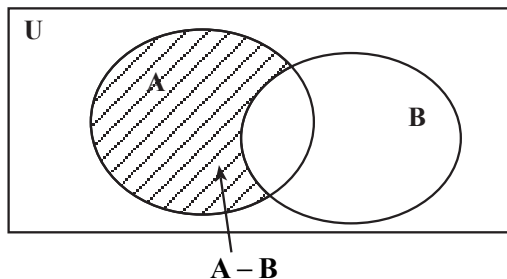
همین طور که ملاحظه می‌کنید ناحیه‌های یکسانی به دست آمد.



تفاضل دو مجموعه

فرض کنیم A و B دو مجموعه باشند

تفاضل مجموعه‌ای $A - B$ عبارت است از مجموعه تمام اعضای A که به B تعلق ندارند.



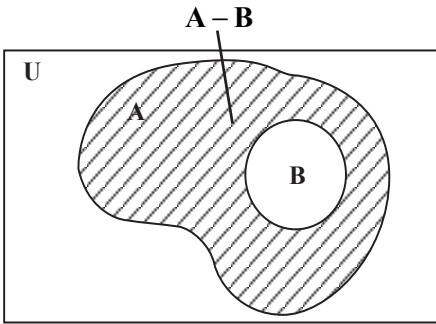
تفاضل دو مجموعه با استفاده از نماد ریاضی

چنین بیان می‌شود

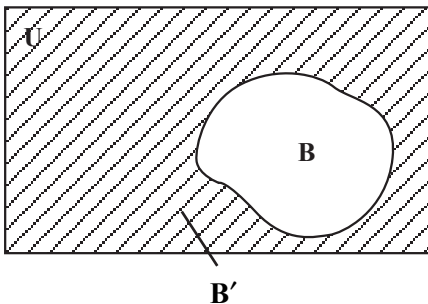
$$A - B = \{x \in A \mid x \notin B\}$$

و با استفاده از نمودار ون تفاضل دو مجموعه

به صورت مقابل نشان داده می‌شود.



اگر B زیر مجموعه‌ای از A باشد، آنگاه $A - B$ را متمم B نسبت به A می‌نامیم.



اگر A را برابر U (مجموعه جهانی) بگیریم آنگاه $U - B$ را با B' نشان می‌دهیم و آن را متمم مجموعه B نسبت به مجموعه جهانی می‌نامیم. پس $U - B = B'$

عمل متمم‌گیری از قوانین ساده‌ای پیروی می‌کند که برخی از آن‌ها در قضیه زیر مطرح شده

است.

قضیه ۸: اگر A و B دو زیرمجموعه از مجموعه جهانی U باشند، آنگاه

$$(A - B)' = U \quad (\text{الف})$$

$$U' = \emptyset \quad (\text{ب})$$

$$(A')' = A \quad (\text{پ})$$

$$A - B = A \cap B' \quad (\text{ت})$$

(ث) اگر A، B آنگاه $A' \cap B'$

$$A \cap A' = \emptyset \quad (\text{ج})$$

$$A \cap A' = U \quad (\text{چ})$$

اثبات قضیه به کمک تعریف‌ها به سادگی انجام می‌شود.

به عنوان مثال اگر \mathbb{R} مجموعه اعداد حقیقی و Q مجموعه اعداد گویا باشد آنگاه $\mathbb{R} - Q$

مجموعه اعداد گنگ است.

اعمالی که تا اینجا تعریف شدند از دو قانون دیگر به نام قوانین دمرگان تبعیت می‌کنند.

قضیه ۹: اگر A و B زیرمجموعه‌هایی از مجموعه جهانی U باشند، آنگاه:

$$(A \cap B)' = A' \cup B' \quad (\text{الف})$$

$$(A \cup B)' = A' \cap B' \quad (\text{ب})$$

برهان: الف) فرض کنیم $x \in (A \cup B)'$ آنگاه $x \in A'$ و $x \in B'$ پس $x \in A'$ و $x \in B'$ در نتیجه

$x \in A'$ و $x \in B'$ بنابراین $x \in A' \cap B'$ به این ترتیب می توان نتیجه گرفت

$$(A \cup B)' \subseteq A' \cap B'$$

و اگر مراحل استدلال بالا را وارونه کنیم خواهیم داشت

$$A' \cap B' \subseteq (A \cup B)'$$

از روابط به دست آمده می توان تساوی

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$



را نتیجه گرفت.

اثبات قسمت (ب) به عنوان تمرین به عهده دانش آموز است.

از قوانین دمرگان و بند (پ) قضیه ۸ نتیجه می شود که اگر متمم گیری را بدانیم آنگاه اجتماع یا

اشتراک را می توان به صورت زیر برحسب دیگری بیان کرد.

$$A \cap B = (A' \cup B')'$$

$$A \cup B = (A' \cap B')'$$

گفتیم اگر برای دو مجموعه A و B داشته باشیم $A \cap B = \emptyset$ آنگاه دو مجموعه را جدا از هم

می نامیم. حال با توجه به تعریف متمم یک مجموعه، می توان ویژگی زیر را برای دو مجموعه جدا از

هم A و B نتیجه گرفت.

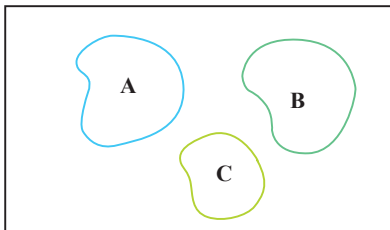
نتیجه: اگر $A \cap B = \emptyset$ آنگاه $A' \cup B' = U$.

توجه کنید که مفهوم مجزا بودن سه مجموعه معنایی وسیعتر از

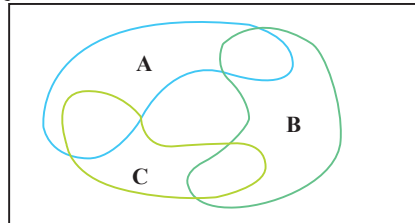
$$A \cap B \cap C = \emptyset$$

دارد. در واقع سه مجموعه A ، B و C مجزا هستند اگر

$$A \cap B = \emptyset, \quad A \cap C = \emptyset, \quad \text{و} \quad B \cap C = \emptyset$$



A ، B و C مجزا هستند



$$A \cap B \cap C \neq \emptyset$$

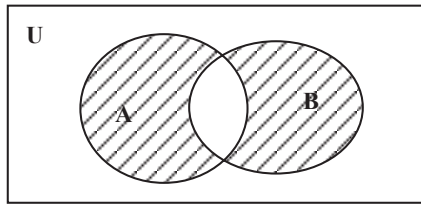
ولی A ، B و C مجزا نیستند

تفاضل متقارن

مجموعهٔ تفاضل متقارن دو مجموعهٔ A و B شامل اعضای است که دقیقاً به یکی از دو مجموعه A یا B تعلق دارند. این مجموعه به طور نمادی با $A \cdot B$ نمایش داده می‌شود و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A \cdot B = (A - B) \cup (B - A)$$

تفاضل متقارن دو مجموعه را با استفاده از نمودار ون به صورت زیر می‌توان نمایش داد.



$A \cdot B$

همان طور که از روی نمودار ون مشاهده می‌شود

$$A \cdot B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

بنابراین دو مجموعهٔ $A \cdot B$ و $A \cap B$ مجزا هستند. همچنین سه مجموعهٔ $A - B$ ، $A \cap B$ و $B - A$ نیز مجزا هستند.

این فصل را با اثبات دو اتحاد از طریق جبر مجموعه‌ها به پایان می‌رسانیم.

مثال ۱: می‌خواهیم ثابت کنیم

$$A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$$

برای اثبات این تساوی به کمک قوانین مجموعه‌ها که جبر مجموعه‌ها خوانده می‌شود از یک طرف تساوی شروع می‌کنیم و به طرف دیگر تساوی می‌رسیم (یا می‌توانیم دو طرف را ساده کنیم تا به یک نتیجه برسیم). اکنون سمت راست رابطهٔ بالا را در نظر می‌گیریم:

$$(A \cap B) - (A \cap C) = (A \cap B) \cap (A \cap C)'$$

طبق ت از قوانین متمم

$$= (A \cap B) \cap (A' \cup C')$$

قانون دمرگان

پخش‌پذیری اشتراک نسبت به اجتماع

$$= [(A \cap B) \cap A'] \cup [(A \cap B) \cap C']$$

قوانین جابه‌جایی و شرکت‌پذیری

$$= [(A \cap A') \cap B] \cup [A \cap (B \cap C')]$$

$$= (\emptyset \cap B) \cup [A \cap (B \cap C')]$$

طبق ج از قوانین متمم

$$= . [A (B C')] \quad \text{طبق الف از قضیه ۵}$$

$$= A (B C') \quad \text{طبق الف از قضیه ۲}$$

$$= A (B-C) \quad \text{طبق ت از قوانین متمم}$$

مثال ۲: می خواهیم ثابت کنیم

$$A (A B) = A$$

از طرف چپ تساوی شروع می کنیم

$$A (A B) = (A .) (A B)$$

$$= A (. B)$$

$$= A .$$

$$= A$$



۱- اگر $A = \{1, 2, 3, \{1, 2, 3\}\}$ و $B = \{1, 2, \{1, 2\}\}$ مطلوب است $A \cup B$ ، $A \cap B$ ، $A - B$ و $B - A$.

۲- اگر $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ، $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ، $B = \{2, 4, 6, 8\}$ و

$C = \{3, 4, 5, 6\}$ مطلوب است :

(الف) A' (ب) $(A \cap C)'$

(پ) $B - C$ (ت) $(A \cup B)'$

۳- اگر $n \in \mathbb{N}$ و $A_n = \{m \in \mathbb{Z} \mid -n \leq m, 2^m \leq n\}$ ، A_1 و A_2 و A_3 و A_4 را تعیین

کنید چه رابطه‌ای بین A_1 و A_2 و A_3 و A_4 وجود دارد؟

اشتراک A_1 تا A_4 چیست؟ $(\bigcap_{i=1}^4 A_i = ?)$ اجتماع A_1 تا A_4 چیست؟ $(\bigcup_{i=1}^4 A_i = ?)$ ،

(توضیح: $\bigcap_{i=1}^n A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$)

۴- اگر $n \in \mathbb{N}$ و $A_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{2n-1}{n}\right)$ ، مطلوب است A_1 و A_2 و A_3 سپس اجتماع

و اشتراک A_1 و A_2 و A_3 را مشخص کنید.

۵- اگر $i \in \{1, 2, \dots, 10\}$ و $A_i = [-i, 10-i]$ ، A_1 و A_2 و ... و A_{10} را حساب

کنید. سپس $\sum_{i=1}^{10} A_i$ و $\sum_{i=1}^{10} A_i$ را مشخص کنید.

۶- با ذکر مثال $n(A \setminus B) = n(A) + n(B)$ را حساب کنید. آیا $n(A \setminus B) = n(A) + n(B)$ ؟

۷- به کمک جبر مجموعه‌ها ثابت کنید اگر A و B مجموعه باشند. داریم:

(الف) $A \setminus B = (A \setminus B) \cap (A \setminus B) \cap (B \setminus A)$

(ب) $(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \emptyset$

(ج) اگر $A \setminus C$ و $B \setminus C$ آنگاه $A \setminus B \setminus C$

(د) اگر $A \setminus B$ و $A \setminus C$ آنگاه $A \setminus B \setminus C$

(ه) اگر $A \setminus B = A$ آنگاه $A \setminus B = A$

(و) اگر $A \setminus B$ آنگاه $A \setminus B = A$

۸- برای هر دو مجموعه A و B ثابت کنید:

(الف) $A \setminus B = B \setminus A$

(ب) $A \setminus B = (A \setminus B) \cap (A \setminus B)$

(ج) اگر $A \setminus B = A$ آنگاه $A \setminus B = A$

(د) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

۹- به وسیله نمودار ون نشان دهید که

$$A' \setminus B' = B \setminus A$$

۱۰- به کمک جبر مجموعه‌ها ثابت کنید اگر A و B دو مجموعه باشند آنگاه داریم:

(الف) $(A \setminus B) \cap B = \emptyset$

(ب) $B \setminus A = B \cap A'$

(پ) $A \setminus B = A \cap (B \setminus A)'$

(ت) $(A \setminus B) \cap (A \setminus B) = A \setminus B$

۱۱- در هریک از موارد زیر به جای S یکی از مجموعه‌های \mathbb{N} ، \mathbb{Z} یا \mathbb{R} را چنان جایگزین

کنید تا تساوی درستی حاصل شود.

(الف) $\{x \in S \mid x^3 = 5\} = \emptyset$

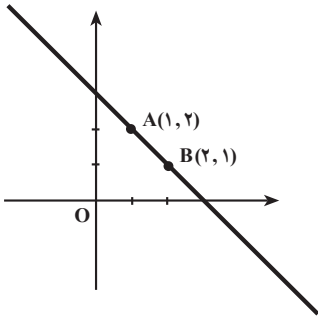
(ب) $\{x \in S \mid -1 \leq x \leq 1\} = \{1\}$

(پ) $\{x \in S \mid 2 < x^2 < 5\} - \{x \in S \mid x > 0\} = \{-2\}$

(ت) $\{x \in S \mid 1 < x \leq 4\} = \{x \in S \mid x^2 = 4\} \cup \{3, 4\}$

۲-۶ حاصلضرب دکارتی دو مجموعه

دیدید که با اجتماع و اشتراک و متمم‌گیری و تفاضل مجموعه‌های مفروض، مجموعه‌های جدیدی حاصل می‌شوند. حاصلضرب دکارتی دو مجموعه روش دیگری برای ساختن یک مجموعه جدید از مجموعه‌های مفروض است، ولی این کار با استفاده از مفهوم زوج مرتب انجام می‌شود. همان طور که خوانده‌اید اگر دستگاه محورهای مختصات در صفحه را در نظر بگیریم هر نقطه از صفحه با یک



زوج مرتب منحصر به فردی مانند (x, y) مشخص می‌شود که x و y اعداد حقیقی‌اند و x را مختص یا مؤلفه اول و y را مختص یا مؤلفه دوم می‌نامیم. معمولاً در صفحه مختصات x را طول و y را عرض نقطه مفروض می‌گویند. به شکل روبرو که نمودار خط $y = -x + 3$ است، توجه کنید. ملاحظه می‌کنید که نقاط A و B به ترتیب به مختصات $(1, 2)$ و $(2, 1)$ با این که متعلق به نمودار خط هستند ولی با هم متفاوتند بنابراین دو زوج (x, y) و (y, x) در حالت کلی با هم برابر نیستند.

پس دو زوج مرتب (a, b) و (c, d) زمانی مساویند که مؤلفه‌های اول آنها با هم و مؤلفه‌های دوم آنها نیز با هم مساوی باشند. $(c = a)$ و $(b = d)$
 مثال ۱: x و y را طوری تعیین کنید که زوج‌های مرتب $(x + y, 6)$ و $(-5, xy)$ با هم مساوی باشند.

حل: طبق شرط تساوی دو زوج مرتب باید
$$\begin{cases} x + y = -5 \\ xy = 6 \end{cases}$$
 که پس از حل دستگاه $x = -2$ و $y = -3$ بدست می‌آید.

اکنون به مثال زیر توجه کنید.

اگر شخصی دو شلوار طوسی و آبی و سه پیراهن آبی، سفید و طوسی داشته باشد به شش طریق می‌تواند یک شلوار و یک پیراهن را انتخاب کند:

(طوسی، آبی) و (سفید، آبی) و (آبی، آبی) و (طوسی، طوسی) و (سفید، طوسی) و (آبی، طوسی). ملاحظه

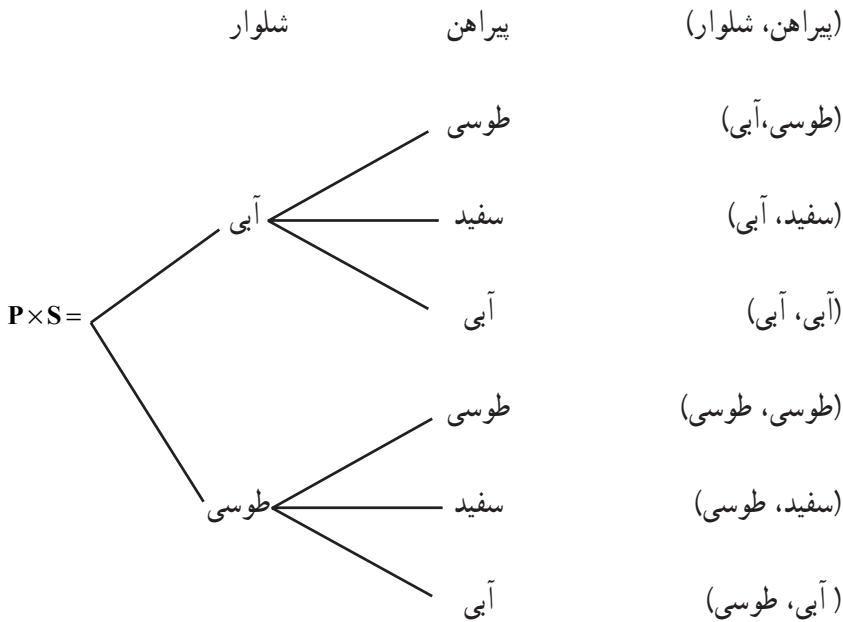
می‌کنید برای هر انتخاب یک زوج مرتب تشکیل شده است. اگر {شلوار طوسی، شلوار آبی} $P =$

و {پیراهن آبی، پیراهن سفید، پیراهن طوسی} $S =$ آنگاه مجموعه همه زوج‌های مرتب تشکیل شده را

به صورت $P \times S$ نشان می‌دهیم یعنی

$P \times S = \{ (آبی، طوسی)، (سفید، طوسی)، (طوسی، طوسی)، (آبی، آبی)، (سفید، آبی)، (طوسی، آبی) \}$

و نمودار درختی آن به صورت زیر است :



به عبارتی اگر x را رنگ شلوار و y را رنگ پیراهن بنامیم

$$P \times S = \{(x, y) \mid x \in P, y \in S\}$$

$P \times S$ را حاصلضرب دکارتی مجموعه P در مجموعه S می نامیم. دقت کنید که چون مؤلفه های

اول زوج ها نماینده شلوار و مؤلفه های دوم زوج ها نماینده پیراهن است ترتیب آن ها اهمیت دارد.

تعریف: حاصلضرب دکارتی مجموعه A در مجموعه B که با $A \times B$ نشان می دهیم، مجموعه همه زوج های مرتب (a, b) است که a عضوی از A و b عضوی از B است یعنی:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

اگر $A = B$ باشد $A \times A$ را با A^2 نشان می دهیم و $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ یعنی \mathbb{R}^2 را صفحه مختصات

می نامیم.

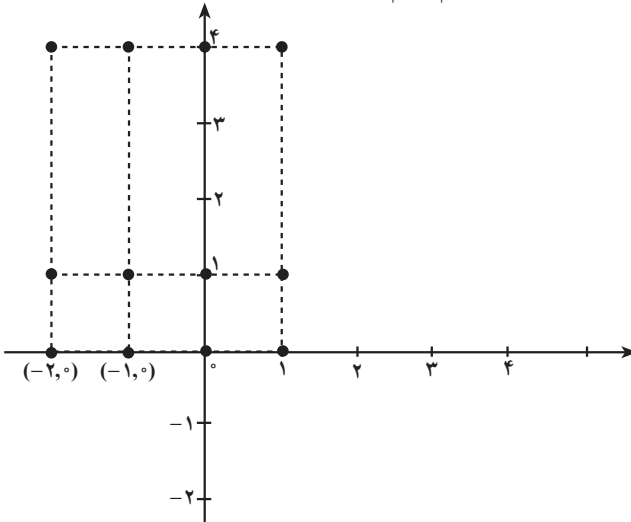
مثال ۲: اگر $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ و $B = \{1, 4, 9\}$ را مشخص کنید و نمودار

مختصاتی $A \times B$ را رسم کنید.

حل: حاصلضرب دکارتی A در B به صورت زیر است:

$$A \times B = \{(-1, 1), (-1, 4), (-1, 0), (0, 1), (0, 4), (0, 0), (1, 1), (1, 4), (1, 0), (-2, 1), (-2, 4), (-2, 0)\}$$

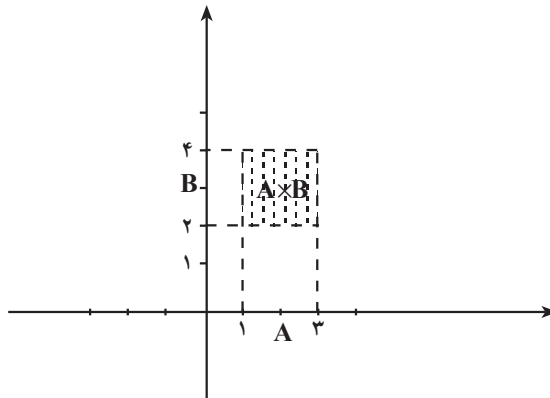
برای رسم نمودار مختصاتی $A \times B$ کافی است هر عضو آن را به عنوان مختصات یک نقطه در نظر بگیریم و در صفحه مختصات رسم کنیم. مانند شکل.



مثال ۳: اگر $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 3\}$ و $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 4\}$ نمودار $A \times B$ را در

صفحه نمایش دهید.

حل: $A \times B = \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq 3 \text{ و } 2 < y < 4\}$



تمرین



۱- x و y را طوری تعیین کنید که زوج‌های مرتب زیر با هم مساوی باشند.

الف - $(0, 3)$ و $((x-1)^2 + (y-1)^2, 3)$

ب - $(13, xy)$ و $(x^2 + y^2, 6)$

۲- اگر مجموعه A دارای m عضو و مجموعه B دارای n عضو باشد، مجموعه $A \times B$ چند

عضو دارد؟ تعداد زیرمجموعه‌های $A \times B$ چند تا است؟

۳- اگر $A = \{2k+1 \mid k \in \mathbb{Z}, -2 \leq k \leq 0\}$ و $B = \{y \mid y \in \mathbb{N}, y^2 \leq 9\}$

الف - $A \times B$ را به صورت زوج‌های مرتب بنویسید.

ب - تعداد اعضای مجموعه‌های $(A \times B)$ و $(B \times A)$ را بنویسید.

ج - $A^2 - B^2$ چند زیرمجموعه دارد؟

۴- اگر A و B دو مجموعه غیرتهی باشند در چه شرایطی $A \times B = B \times A$ ؟ و در چه شرایطی

$(A \times B) \cap (B \times A)$ تهی است؟

۵- اگر شهر B بین دو شهر A و C باشد و برای رفتن از شهر A به شهر B سه راه و برای رفتن

از B به C چهار راه موجود باشد به چند طریق یک مسافر می‌تواند از شهر A به شهر C برود؟ به چند

طریق می‌تواند برگردد؟ آیا راه‌های رفت و برگشت یکی است؟

۶- در پرتاب دو سکه ۲ ریالی و ۵ ریالی با هم، چند زوج مرتب از پشت و روی سکه‌ها حاصل

می‌شود؟

۷- هر یک از مجموعه‌های زیر را در صفحه مختصات نمایش دهید.

الف $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = y\}$

ب $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x > y\}$

ج $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid |x+y| \leq 1\}$

۸- حاصلضرب دکارتی هر یک از مجموعه‌های زیر را در دستگاه مختصات رسم کنید.

الف $B = (-2, 0]$ ، $A = [-3, 2]$

ب $B = (-\infty, -2)$ ، $A = (3, \infty)$

ج $B = [1, 2]$ ، $A = [-2, 2]$

۹- روابط زیر را ثابت کنید.

$$A \times B = \cdot / \quad A = \cdot \quad \text{یا} \quad B = \cdot \quad (\text{الف})$$

$$C \neq \cdot \quad \text{و} \quad A \times C = B \times C \quad \% \quad A = B \quad (\text{ب})$$

۲-۷- رابطه

یکی از مهمترین مفاهیم در نظریه مجموعه‌ها، مفهوم رابطه است که نه تنها در تمام ریاضیات بلکه در خارج از ریاضیات نیز کاربرد دارد. عبارات «بزرگتر است از»، «کوچکتر است از»، «عاد می‌کند»، «برابر است با» در اعداد و «زیرمجموعه‌ای است از»، «متعلق است به»، در مجموعه‌ها و « x برادر y است»، « x فرزند y است» در مجموعه انسان‌ها، هر یک مثالی از رابطه است آنچه در تمام این مثال‌ها مشترک است این است که همه عبارات به دو شیء اشاره می‌کنند یعنی یک زوج مانند (x, y) و این که در هر حالت شیء اول با شیء دوم در رابطه هست یا نیست. مثلاً $x > y$ که x و y اعداد حقیقی باشند، یا درست است یا نادرست ($3 > 2$) درست است ولی $2 > 3$ نادرست).

بنابراین $x > y$ کاملاً با $y > x$ متفاوت است یعنی $(x, y) \neq (y, x)$ (مفهوم زوج مرتب) پس هر رابطه را می‌توان مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب در نظر گرفت. از طرفی هر کدام از روابط در مجموعه مشخصی تعریف شده‌اند مانند مجموعه اعداد، مجموعه انسان‌ها و ... حتماً دقت کرده‌اید که مثلاً $x > y$ یک گزاره‌نما در مجموعه اعداد است.

پس می‌توان رابطه « x بزرگتر است از y » در اعداد حقیقی را مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب به صورت $\{(x, y) | x > y\}$ در نظر گرفت.

مثال ۱: فرض کنیم مجموعه عام مجموعه انسان‌ها و گزاره‌نمای $p(x, y)$ به معنی « x پدر y

است» باشد بنابراین رابطه پدری در مجموعه انسان‌ها چنین است:

$$\text{رابطه پدری} = \{(x, y) \mid x \text{ پدر } y \text{ است}\}$$

$$\text{یا} \quad \text{رابطه پدری} = \{(x, y) \mid p(x, y)\}$$

بنابراین شرط این که حسن پدر تقی باشد آن است که زوج مرتب (تقی، حسن) متعلق به

مجموعه رابطه پدری باشد.

پس می‌توان رابطه را به کمک مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب تعریف کرد، یک راه ساختن

زوج‌های مرتب به کمک ضرب دکارتی مجموعه‌هاست.

تعریف: فرض کنیم A و B دو مجموعه باشند هر زیرمجموعه از حاصلضرب دکارتی $A \times B$ رابطه‌ای از A در B است. اگر رابطه را با R نشان دهیم، $R \subseteq A \times B$

جمله «از A در B » یعنی اولین مؤلفه‌های زوج‌های مرتب، عضوهای A و دومین مؤلفه‌های زوج‌های مرتب عضوهای B می‌باشند.

اگر $A = B$ ، گوئیم R رابطه‌ای روی A است.

اگر $a \in A$ و $b \in B$ گوئیم a با b توسط R در رابطه هستند هرگاه $(a, b) \in R$ ، متداولتر است

که نماد aRb را به معنی $(a, b) \in R$ به کار ببریم. در صورتی که R ، می‌نویسیم $a \mathbb{R} b$

مثال ۲: فرض کنیم، \mathbb{Z} مجموعه عام باشد یکی از مهمترین رابطه‌های ریاضی رابطه عادکردن

در \mathbb{Z} است که با علامت «|» نمایش داده می‌شود اگر بنویسیم: $a|b$ یعنی عدد صحیحی مانند c هست که $b = ac$.

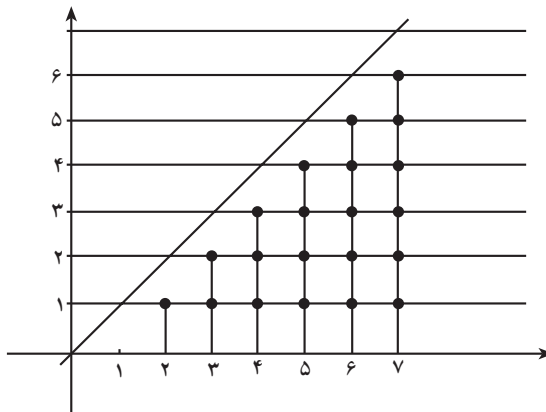
مثلاً $6|3$ ، $6|2$ ، $6|-3$ که $6|-3$ معادل $3|-6$ یا معادل $6|-3$ معادل $3|-6$ یا معادل $6|-3$ معادل $3|-6$ است پس $a|b$

معادل aRb است که به صورت $aRb \iff a|b$ یا $R = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Z}, a|b\}$ نشان می‌دهیم.

مثال ۳: فرض کنیم $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ رابطه «>» را روی A در نظر می‌گیریم یعنی

$(a, b) \in R$ معادل است با $a > b$ برای نمایش این رابطه ابتدا حاصلضرب دکارتی $A \times A$ را به دست می‌آوریم. و روی مختصات دکارتی مشخص می‌کنیم.

$$A \times A = \{(1, 1), (1, 2), \dots, (1, 7), (2, 1), \dots, (2, 7), \dots, (7, 7)\}$$



روی شکل، زیرمجموعه $A \times A$ که با نقاط پررنگ مشخص شده‌اند، نمودار رابطه R می‌باشد

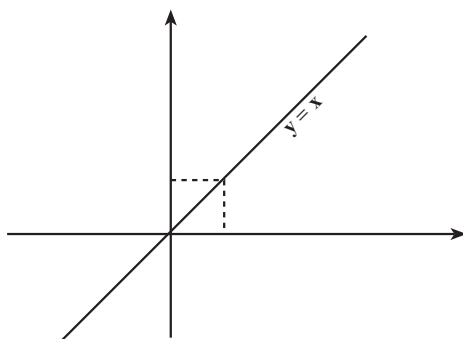
$$R = \{(2, 1), (3, 1), \dots, (7, 1), (3, 2), (4, 2), (4, 3), \dots, (7, 6)\}$$

مثال ۴: فرض کنیم رابطه تساوی روی \mathbb{R} به صورت زیر تعریف شده باشد.

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x\}$$

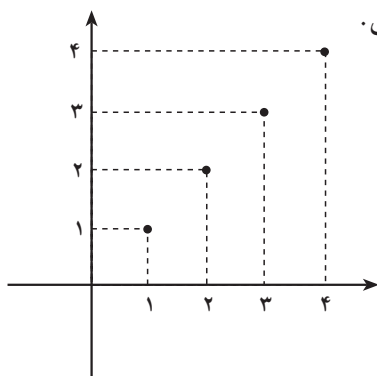
نمودار مختصاتی این رابطه خط راست $y = x$ است که نیمساز ربع اول و سوم دستگاہ

مختصات است.



تذکر: اگر $A = \mathbb{N}$ رابطه تساوی فقط نقاطی از خط $y = x$ می باشند که مؤلفه های صحیح

مثبت داشته باشند مانند شکل.

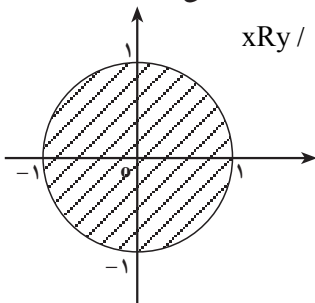


مثال ۵: در صفحه xOy رابطه R را چنین تعریف می کنیم که x با y در رابطه است اگر (x, y)

نقطه ای در داخل یا روی دایره واحد باشد یعنی $x^2 + y^2 \leq 1$ به عبارتی

$$xRy / \quad x^2 + y^2 \leq 1$$

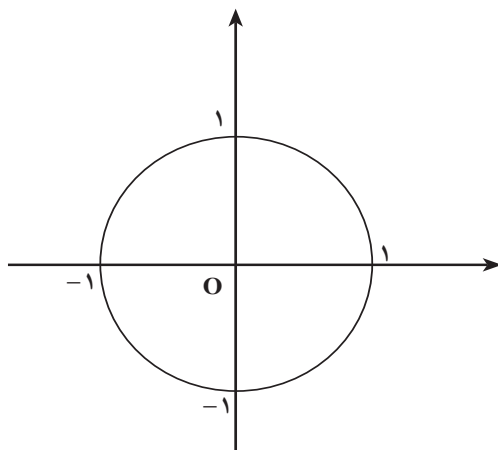
بنابراین نمودار این رابطه قرصی به شکل زیر است.



با توجه به مثال‌ها، تاکنون متوجه شده‌اید که کلیه معادلات و نامعادلات (نامساوی‌ها) دو متغیره‌ای که قبلاً خوانده‌اید می‌توانند به عنوان رابطه در نظر گرفته شوند.

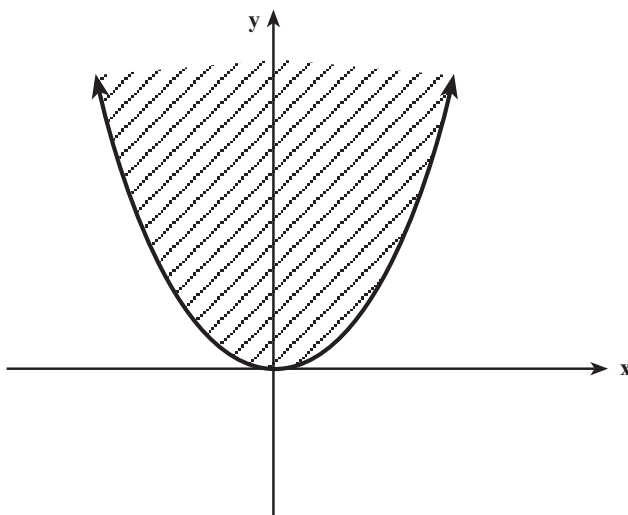
مثال ۶: نمودار رابطه $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ یک دایره به شعاع ۱ است که

مرکز آن $O(0, 0)$ می‌باشد.

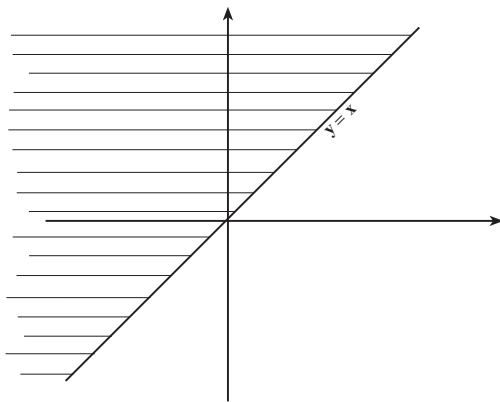


مثال ۷: نمودار رابطه $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2\}$ نقاط مرز و داخل سهمی $y = x^2$

می‌باشد. مانند شکل



مثال ۸: نمودار رابطه « \leq » در اعداد حقیقی یعنی رابطه $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y\}$ سطح یک نیم صفحه است. (ناحیه سایه دار در شکل زیر)



۱- رابطه $R = \{(1, 0), (0, 2), (0, 1), (2, 2)\}$ در $A = \{0, 1, 2, 4\}$ تعریف شده است. الف - تحقیق کنید کدام یک از موارد زیر درست است؟

$1R2$ ، $1R1$ ، $1R$ ، $2R0$ ، $4R1$

ب - مجموعه اعضای A که با ۲ رابطه دارند را مشخص کنید.

۲- چند رابطه در مجموعه A از تمرین ۱ می توان نوشت؟

۳- آیا . یک رابطه است؟

۴- در مجموعه $A = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ رابطه $R = \{(x, y) \mid x, y \in A, x|y\}$ تعریف شده است

R را به صورت مجموعه ای از زوج های مرتب بنویسید، دامنه و برد R را تعیین کنید.

۵- اعضای رابطه $R = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 4\}$ را در \mathbb{Z} به صورت مجموعه ای از زوج های

مرتب مشخص کنید و نمودار آن را رسم کنید.

۶- اگر $A = \{1, 2, 3, 4\}$ نمودار رابطه های زیر را رسم کنید .

الف) $a, b \in A \quad aRb / a + b \leq 4$

ب) $aRb / a(b+1) \leq 6$

ج) $aRb / -10 \leq a + 5b \leq 10$

د) $xRy / x^2 + y^2 \leq 4$

۷- رابطه f از \mathbb{R} در فاصله بسته $[0, 1]$ به صورت $y = \frac{1}{x^2 + 1}$ xy / xfy تعریف شده است

نمودار رابطه f را رسم کنید.

۸- رابطه‌های زیر روی مجموعه $A = \{1, 2, 3, 6\}$ تعریف شده‌اند اولاً هر رابطه را به صورت

زوج‌های مرتب نشان دهید ثانیاً نمودار رابطه‌ها را رسم کنید.

$$R_1 = \{(x, y) \mid x|y\} \quad , \quad R_2 = \{(x, y) \mid x < y\}$$

$$R_3 = \{(x, y) \mid x = y\} \quad , \quad R_4 = \{(x, y) \mid x \neq y\}$$

$$R_5 = \{(x, y) \mid x^2 \leq y\} \quad , \quad R_6 = \{(x, y) \mid x + y \text{ فرد است}\}$$

۹- رابطه‌های زیر روی مجموعه \mathbb{R} تعریف شده‌اند نمودار آن‌ها را رسم کنید.

$$R_1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$$

$$R_2 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, y \geq x\}$$

$$R_3 = \{(x, y) \mid |x| = |y|\}$$

$$R_4 = \{(x, y) \mid |y| = -x\}$$

۲-۸-۱- افراز یک مجموعه

مجموعه اعداد صحیح \mathbb{Z} را به صورت $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ در نظر می‌گیریم.

این مجموعه را می‌توان به دو زیرمجموعه اعداد فرد و اعداد زوج تقسیم کرد. مسلماً $\mathbb{Z}_O \cup \mathbb{Z}_E = \mathbb{Z}$.

زیرا هیچ عددی نمی‌تواند هم زوج و هم فرد باشد و $\mathbb{Z}_O \cap \mathbb{Z}_E = \emptyset$ ، این تقسیم را افراز \mathbb{Z} به دو

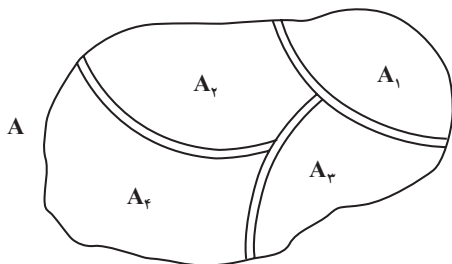
مجموعه \mathbb{Z}_O و \mathbb{Z}_E می‌نامیم همچنین هر مجموعه A با متمم خود یعنی A' یک افراز برای مجموعه

عام U می‌باشند زیرا :

$$A \cup A' = U \quad \text{و} \quad A \cap A' = \emptyset$$

می‌توان این ایده را تعمیم داد. در شکل زیر مجموعه A به چهار مجموعه A_1 و A_2 و A_3 و A_4 و

A_4 افراز شده است.



تعریف: فرض کنیم A یک مجموعه غیر تهی باشد گوییم A به n زیرمجموعه A_1 و A_2 و ... و A_n افراز شده است اگر:

الف - برای هر $1 \leq i \leq n$ ، $A_i \neq \emptyset$.

ب - برای هر $i \neq j$ ، $A_i \cap A_j = \emptyset$. ($1 \leq j \leq n$)

ج - $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^n A_i = A$

مثال: اگر $A = \{1, 2, 3\}$ آنگاه A دارای ۵ افراز به صورت زیر است:

$$\{1\}, \{2\}, \{3\} \quad (1)$$

$$\{1\}, \{2, 3\} \quad (2)$$

$$\{2\}, \{1, 3\} \quad (3)$$

$$\{3\}, \{1, 2\} \quad (4)$$

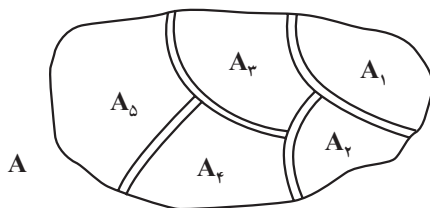
$$\{1, 2, 3\} \quad (5)$$

۹-۲- رابطه هم‌ارزی

مثال: فرض کنیم که مجموعه A به قطعات مجزای از یکدیگر مانند شکل، افراز شده باشد

می‌توانیم رابطه « \sim » را چنین تعریف کنیم.

$x \sim y /$ هر دو در یک قطعه هستند



برای داشتن شهودی بهتر فرض کنید A نقشه یک کشور باشد و زیرمجموعه‌های A_1 و A_2 و

A_3 و A_4 و A_5 استان‌های این کشور باشند رابطه‌ای که بین هر دو شهروند این کشور برقرار است

رابطه هم‌استانی بودن است. یعنی

$x \sim y /$ هر دو در یک استان هستند

بنابراین اگر x متعلق به استان A_1 است و y متعلق به استان A_2 ، x و y رابطه‌ای باهم ندارند.

این رابطه دارای این خواص است که اگر x و y و z افرادی از این کشور باشند :

۱- x با خودش هم استان است.

۲- اگر x با y هم استان باشد y نیز با x هم استان است.

۳- اگر x با y و y با z هم استان باشند، x نیز با z هم استان است.

برعکس می‌توانیم ناحیه‌ها را با رابطه « \sim » بازسازی کنیم. ناحیه‌ای که x متعلق به آن است

(استانی که x در آن زندگی می‌کند) با E_x نمایش می‌دهیم. که عبارت است از :

$$E_x = \{y \in A \mid x \sim y\}$$

یعنی استانی که x متعلق به آن است مجموعه تمام شهروندان کشور A است که با x در یک استان زندگی می‌کنند. یعنی مجموعه E_x یکی از استان‌های کشور است یا یکی از ناحیه‌های مورد نظر است. بنابراین اگر $x \in A_2$ باشد آنگاه $E_x = A_2$ و اگر $x \in A_5$ آنگاه $E_x = A_5$ پس دقیقاً رابطه هم‌استانی بودن، کشور را به استان‌ها تقسیم می‌کند. به طور کلی می‌توان گفت: رابطه‌ای که دارای خواص (۱) و (۲) و (۳) باشد یک رابطه هم‌ارزی است.

تعریف: رابطه‌ای چون « \sim » روی مجموعه A یک رابطه هم‌ارزی است اگر به ازای هر x و y و z از A سه خاصیت زیر برقرار باشد :

الف - $x \sim x$ یعنی هر عضو با خودش رابطه داشته باشد. (بازتابی یا انعکاسی)

ب - اگر $x \sim y$ آنگاه $y \sim x$ (تقارنی)

ج - اگر $x \sim y$ و $y \sim z$ آنگاه $x \sim z$ (تعدی یا تراگذری)

مثال: رابطه‌ی توازی خطوط در صفحه و رابطه‌ی هم‌نهستی دو مثلث رابطه‌های هم‌ارزی روی صفحه هستند.

ملاحظه کردید که هرگاه مجموعه A را به قطعات مجزا تقسیم کنیم، رابطه $(x \sim x)$ هم‌استان است با (y) یک رابطه‌ای هم‌ارزی است و برعکس. بنابراین

هر رابطه هم‌ارزی روی یک مجموعه آن مجموعه را به زیرمجموعه‌های مجزا که هر یک از آنها دسته یا کلاس هم‌ارزی نامیده می‌شود تقسیم می‌کند.

دسته هم‌ارزی a را با علامت $[a]$ نشان می‌دهیم. a را نماینده دسته می‌گوییم و به صورت

$$[a] = \{x \mid xRa\}$$

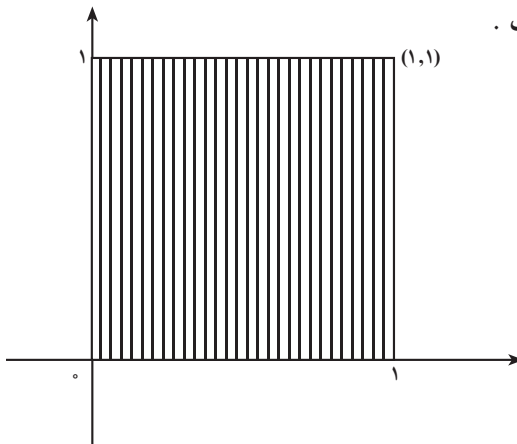
مثال: سطح مربع واحد $D = [0,1] \times [0,1]$ را در نظر بگیرید هر دو نقطه از این مربع را با رابطه این که مؤلفه‌های اول آن‌ها با هم برابرند تعریف می‌کنیم یعنی:

$$(x, y)R(a, b) / x = a$$

این رابطه یک رابطه هم‌ارزی روی D است. و مجموعه D (صفحه D) را به دسته‌های هم‌ارزی افراز می‌کند، دسته‌های هم‌ارزی خطوط عمود بر محور x ها می‌باشند زیرا مثلاً دسته $(0, 0)$ عبارت است از:

$$\begin{aligned} [(0, 0)] &= \{(x, y) \mid (x, y)R(0, 0)\} \\ &= \{(x, y) \mid x = 0\} \end{aligned}$$

که نمودار آن خط $x = 0$ است.



۱- رابطه R در \mathbb{Z} به صورت

$$xRy / 3 \mid x - y$$

تعریف شده است. اولاً ثابت کنید R یک رابطه هم‌ارزی است. ثانیاً رابطه R مجموعه \mathbb{Z} را به چند کلاس هم‌ارزی افراز می‌کند؛ این کلاس‌های هم‌ارزی را مشخص کنید.

۲- ثابت کنید رابطه تشابه دو مثلث، یک رابطه هم‌ارزی است.

۳- از رابطه‌های زیر که روی \mathbb{R}^2 تعریف شده‌اند کدام یک هم‌ارزی است؟

(الف) $(a, b)R(c, d) / a + d = b + c$

(ب) $(a, b)R(c, d) / (a - c)(b - d) = 0$

(پ) $(a, b)R(c, d) / ab = cd$