۲ـ۶ـ مفهوم ریاضی حد

همان‌طور که در فعالیت بخش اوّل بررسی شد، تابع $g(x)=\sin\frac{\pi}{x}$ در مجاورت $x=0$ (به‌ازای $x\neq 0$) دارای رفتاری نوسانی است و به ازای دنباله‌های همگرا به صفر $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ و $\{c_n\}$ و $\{x_n\}$، دنباله‌های $\{g(a_n)\}$ و $\{g(b_n)\}$ و $\{g(c_n)\}$ و $\{g(x_n)\}$ به ترتیب به ۰ و ۱ و ۱− و $\frac{1}{2}$ همگرا می‌شوند یعنی به ازای هر دنباله دلخواه همگرا به صفر مقدارهای $g(x)$ به سمت یک عدد ثابتی میل نمی‌کند بنابراین $\lim_{x\to 0}\sin\frac{\pi}{x}$ وجود ندارد.

البته نباید این ذهنیت به‌وجود آید که فقط نوسان‌های $g(x)=\sin\frac{\pi}{x}$ جلوی حد داشتن آن را در $x=0$ می‌گیرند. زیرا با بررسی وضعیت تابع $x\neq 0$ ،$f(x)=x\sin\frac{\pi}{x}$ در مجاورت $x=0$ خواهیم دید این تابع مانند تابع $g(x)=\sin\frac{\pi}{x}$ دارای نوسان است، امّا در اینجا نوسان‌ها به وسیلهٔ عامل میرایی x، مستهلک می‌شوند. برای یادگیری بهتر مفاهیم «عامل میرایی x» و «مستهلک شدن نوسان‌ها» ابتدا جدول‌های زیر را به کمک دنباله‌های فعالیت بخش اوّل که برای تابع $g(x)=\sin\frac{\pi}{x}$ به‌کار بردیم، با تابع $x\neq 0$ ،$f(x)=x\sin\frac{\pi}{x}$ تنظیم می‌کنیم.

(۵)

$x=a_n$	۱	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\cdots$
$f(a_n)$	۰	۰	۰	۰	۰	$\cdots\to 0$

(۶)

$x=b_n$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{13}$	$\frac{2}{17}$	$\frac{2}{21}$	$\cdots$
$f(b_n)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{13}$	$\frac{2}{17}$	$\frac{2}{21}$	$\cdots\to 0$

(۷)

$x=c_n$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{19}$	$\cdots$
$f(c_n)$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{7}$	$-\frac{2}{11}$	$-\frac{2}{15}$	$-\frac{2}{19}$	$\cdots\to 0$

(۸)

$x=x_n$	$\frac{6}{13}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{6}{37}$	$\frac{6}{49}$	$\frac{6}{61}$	$\cdots$
$f(x_n)$	$\frac{3}{13}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{3}{37}$	$\frac{3}{49}$	$\frac{3}{61}$	$\cdots\to 0$

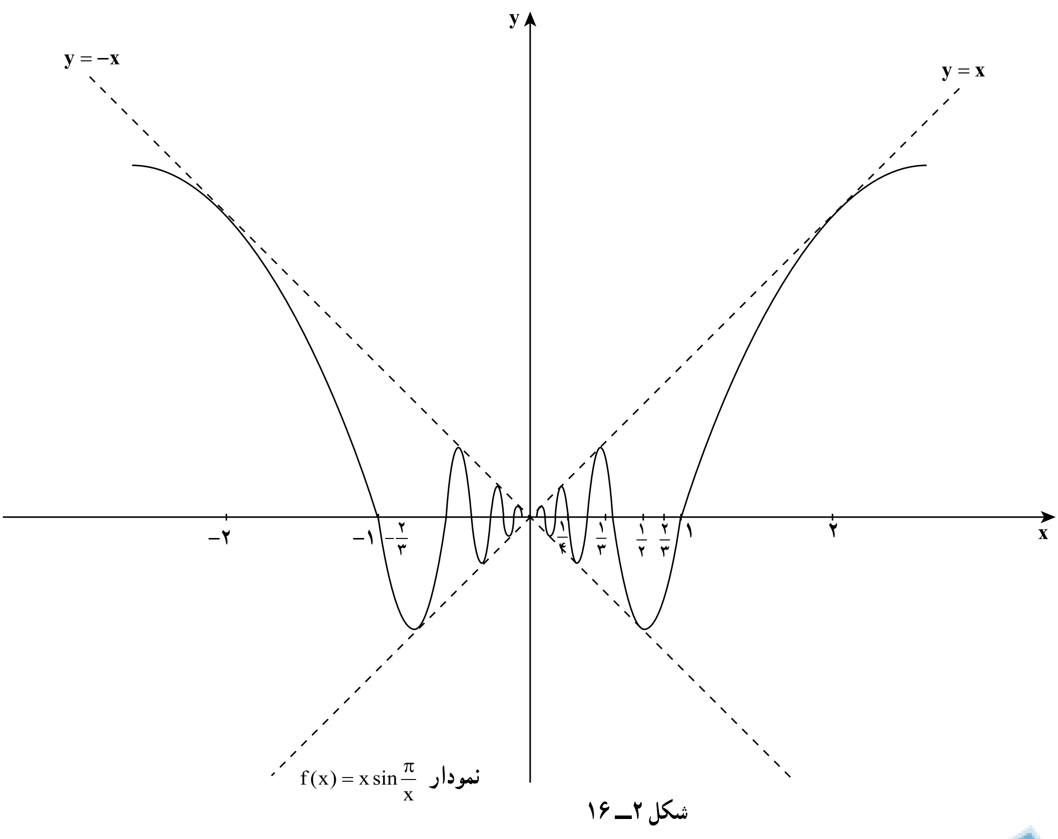
با مشاهدهٔ جدول‌های ۵ و ۶ و ۷ و ۸ معلوم می‌شود که با نزدیک کردن x (مقدار دنباله) به صفر، می‌توان هرچقدر که بخواهیم $f(x)$ را به صفر نزدیک کنیم و عاملی که باعث شده به ازای هر دنباله همگرا به صفر نظیر $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ و $\{c_n\}$ و $\{x_n\}$ و ...، $f(x)$ به صفر میل کند همان عامل «x» است که در $\sin\frac{\pi}{x}$ ضرب شده و $f(x)$ را به‌وجود آورده است.

از طرفی به ازای هر $x \neq 0$، $-1 \leq \sin\frac{\pi}{x} \leq 1$ و

$$x > 0 ,\quad -x \leq x\sin\frac{\pi}{x} \leq x$$

$$x < 0 ,\quad -x \geq x\sin\frac{\pi}{x} \geq x$$

از این‌رو در هر حالت $f(x)$ بین $y=x$ و $y=-x$ قرار می‌گیرد و چون تابع f زوج است نمودار تابع $f(x)=x\sin\frac{\pi}{x}$ نسبت به محور y تقارن دارد و حد مشترک توابع $f(x)=x\sin\frac{\pi}{x}$ و $y=x$ و $y=-x$ وقتی $x \to 0$، مساوی صفر است. (شکل ۲ــ۱۶)



شکل ۲ــ ۱۶

با بررسی رفتار تابع $f(x)=x\sin\frac{\pi}{x}$ به‌طور شهودی نشان داده شد که $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{\pi}{x}=0$. در حالی که $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{\pi}{x}$ وجود ندارد، از این‌رو برای طرح مفاهیم حد و اثبات قضایایی در باب حدود، تعریف حد را با رویکرد دقیق ریاضی بیان می کنیم.

توضیح اینکه در این بخش با تابع‌هایی سروکار داریم مانند $f: D\to \mathbb{R}$ که دامنهٔ آن D، زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ (مجموعهٔ اعداد حقیقی) است. در این کتاب وقتی از حد تابع f در نقطهٔ $x=a$ صحبت می کنیم فرض بر این است که تابع f در یک همسایگی چپ یا راست (یا هر دو) نقطه a تعریف شده باشد.

تعریف: فرض کنیم D زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ و $f: D\to\mathbb{R}$ یک تابع باشد، در این صورت، گوییم حد تابع f در a، عدد حقیقی L است و می‌نویسیم، $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ ، هرگاه به ازای هر دنباله از نقاط دامنهٔ f مانند $\{a_n\}$ که به a همگرا است $(a_n\neq a)$، دنبالهٔ $\{f(a_n)\}$ به L همگرا باشد.

دقت کنید چون حد دنباله $\{f(a_n)\}$ در صورت وجود یکتا است، حد تابع f در نقطه a نیز در صورت وجود یکتا است که آن را با $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ نشان می‌دهیم.

مثال: به کمک تعریف ثابت کنید : $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$

حل: تابع $f(x)=\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}$ به ازای $x=1$ نامعین است و برای هر $x\neq 1$ داریم $f(x)=x+1$ و برای هر دنباله $\{a_n\}$ که $a_n\neq 1$ و همگرا به ۱ داریم :

$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n)=\lim_{n\to+\infty}(a_n+1)=1+1=2$$

بنابراین

$$\lim_{x\to 1} f(x)=2$$

تمرین در کلاس

به کمک تعریف ثابت کنید :

۱ــ عدد ثابت c، $\lim\limits_{x\to a} c=c$, $\lim\limits_{x\to a} x=a$

۲ــ $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{\pi}{x}=0$

۳ــ $\lim\limits_{x\to a} x^2=a^2$

۴ــ $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{a}$ ، n عددی است طبیعی (اگر n زوج باشد، $a\geq 0$)

مسأله: به کمک تعریف ثابت کنید تابع $f(x)=\sin\frac{\pi}{x}$ در نقطه $x=0$ حد ندارد.

در فعالیت زیر نشان می‌دهیم تابع f در $x=0$ حد ندارد:

فعالیت

۱ــ دو دنباله به‌نام‌های $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ مثال بزنید که هردو مخالف صفراند ولی به عدد صفر همگرا باشند.

۲ــ دنباله‌های $\{f(a_n)\}$ و $\{f(b_n)\}$ به چه عددی همگرا هستند؟

۳ــ آیا $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{\pi}{x}$ وجود دارد؟

در فعالیت بالا

۱ــ دنباله‌های $\{a_n\}$ با ضابطه $a_n=\frac{1}{n}$ و $\{b_n\}$ با ضابطه $b_n=\frac{1}{2n+\frac{1}{2}}$ هردو مخالف صفرند ولی به صفر همگرا هستند.

۲ــ

$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n)=\lim_{n\to+\infty}\sin n\pi=\lim_{n\to+\infty} 0=0$$

$$\lim_{n\to+\infty} f(b_n)=\lim_{n\to+\infty}\sin(2n\pi+\frac{\pi}{2})=\lim_{n\to+\infty} 1=1$$

۳ــ در این فعالیت

$\lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n)\neq\lim\limits_{n\to+\infty} f(b_n)$ بنابراین طبق تعریف حد، $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{\pi}{x}$ وجود ندارد.

تمرین در کلاس

ثابت کنید:

۱ــ $\lim\limits_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$ وجود ندارد.

۲ــ تابع f با ضابطه $f(x)=\begin{cases}x^2 & , \quad x<0\\ x-1 & , \quad x>0\end{cases}$ در نقطه صفر دارای حد نیست.

قضیه صفحهٔ بعد محاسبه حد بسیاری از توابع را بدون مراجعه مستقیم به تعریف حد امکان‌پذیر می‌سازد.

قضیه ۱ : فرض کنیم D زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ باشد و $g: D \to \mathbb{R}$ و f تابع‌هایی باشند که

$\lim\limits_{x\to a} g(x) = L_2$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L_1$ در این صورت

الف) $\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x) = L_1 + L_2$

ب) $\lim\limits_{x\to a}(f-g)(x) = L_1 - L_2$

پ) $\lim\limits_{x\to a}(cf)(x) = cL_1$ ، c عددی ثابت است.

ت) $\lim\limits_{x\to a}(f.g)(x) = L_1.L_2$

ث) اگر $L_2 \neq 0$ آنگاه $\lim\limits_{x\to a}(\frac{f}{g})(x) = \frac{L_1}{L_2}$

نتیجه : با استفاده از استقراءِ ریاضی از قضیه (۱) نتیجه می‌شود :

$$\lim_{x\to a}(f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_n(x)) = \lim_{x\to a} f_1(x)+\cdots+\lim_{x\to a} f_n(x)$$

$$\lim_{x\to a}(f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x)) = \lim_{x\to a} f_1(x)\times \lim_{x\to a} f_2(x)\times\cdots\times \lim_{x\to a} f_n(x)$$

مثال : نشان دهید :

الف) $\lim\limits_{x\to a} x^n = a^n$

ب) اگر $P(x)$ یک چندجمله‌ای دلخواه باشد آنگاه $\lim\limits_{x\to a} P(x) = P(a)$

پ) اگر $P(x)$ و $Q(x)$ دوچندجمله‌ای دلخواه باشند و $Q(a) \neq 0$ آنگاه :

$$\lim_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}$$

حل :

الف)

$$\lim_{x\to a} x^n = (\lim_{x\to a} x)\cdots(\lim_{x\to a} x) = (\lim_{x\to a} x)^n = a^n$$

ب) اگر $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ آنگاه طبق قسمت الف و قسمت پ قضیه (۱)

داریم :

$$\lim_{x\to a} P(x) = a_n \lim_{x\to a} x^n + a_{n-1}\lim_{x\to a} x^{n-1} + \cdots + \lim_{x\to a} a_0$$

$$= a_n a^n + a_{n-1}a^{n-1} + \ldots + a_0 = P(a)$$

پ) طبق قسمت (ث) قضیه (۱) و قسمت (ب) مثال (۲) داریم :

$$\lim_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}P(x)}{\lim\limits_{x\to a}Q(x)}=\frac{P(a)}{Q(a)}$$

اثبات قضیه (۱)

دنباله دلخواه $\{a_n\}$، همگرا به a را که $a_n \neq a$ است درنظرمی‌گیریم چون $\lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n)=L_1$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} g(a_n)=L_2$ پس :

$$\lim_{n\to+\infty}(f(a_n)\pm g(a_n))=\lim_{n\to+\infty}f(a_n)\pm\lim_{n\to+\infty}g(a_n)=L_1\pm L_2$$

در نتیجه $\lim\limits_{x\to a}(f\pm g)(x)=L_1\pm L_2$

$$\lim_{n\to+\infty}cf(a_n)=c\lim_{n\to+\infty}f(a_n)=cL_1$$

$$\lim_{n\to+\infty}f(a_n)g(a_n)=\lim_{n\to+\infty}f(a_n)\lim_{n\to+\infty}g(a_n)=L_1L_2$$

در نتیجه $\lim\limits_{x\to a}cf(x)=cL_1 \quad , \quad \lim\limits_{x\to a}(f.g)(x)=L_1L_2$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{f(a_n)}{g(a_n)}=\frac{\lim\limits_{n\to+\infty}f(a_n)}{\lim\limits_{n\to+\infty}g(a_n)}=\frac{L_1}{L_2} \quad , \quad L_2\neq 0$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{L_1}{L_2} \quad , \quad L_2\neq 0$$

در نتیجه

تمرین در کلاس

۱ــ به کمک قضیه (۱) ثابت کنید :

$\lim\limits_{x\to a}f(x)=L$ اگر و تنها اگر $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-L)=0$

۲ــ به کمک قضیه (۱) ثابت کنید :

الف) $\lim\limits_{x\to 2}9x^2=36$ ب) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2}{x+1}=\frac{4}{3}$

پ) $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+1)(x^2+x)=4$

۲ـ۷ـ قضیه فشردگی

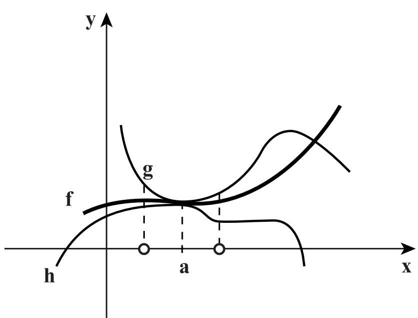
در بعضی مواقع برای محاسبهٔ حد یک تابع، مقایسهٔ آن تابع با دو تابع که دارای حد معلوم هستند مفید می‌باشد (هرسه تابع باید در حوالی یک نقطه باهم مقایسه شوند).

برای مثال در شکل (۱) این بخش مشاهده می‌شود نمودار تابع $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$ به ازای $x\neq 0$ همواره بین نمودارهای دو تابع $g(x)=x$ و $h(x)=-x$ قرار دارد و با توجه به شکل (۱) اگر x به صفر میل کند، هر دو تابع $g(x)=x$ و $h(x)=-x$ به صفر میل می‌کنند و به‌طور شهودی نتیجه می‌شود که اگر $x\to 0$ آنگاه $f(x)$، که بین $g(x)$ و $h(x)$ فشرده شده است به صفر میل می‌کند. این ایده محتوای قضیه زیر موسوم به قضیه فشردگی است.

قضیه ۲: هرگاه به ازای هر x در بازهٔ بازی شامل a،(به جز احتمالاً در خود a) $h(x)\leq f(x)\leq g(x)$ و نیز $\lim\limits_{x\to a} g(x)=L=\lim\limits_{x\to a} h(x)$ آنگاه: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$

توصیف قضیهٔ فشردگی، که گاهی آن را قضیه ساندویچ هم می‌نامند، در شکل ۲ــ۱۷ آورده شده است.

طبق این قضیه اگر $f(x)$ در نزدیکی a بین $h(x)$ و $g(x)$ فشرده شده باشد و اگر حدهای h و g در a برابر با L باشد، آنگاه تابع f در a حدی برابر با L دارد.



شکل ۲ــ۱۷

مثال: نشان دهید $\lim\limits_{x\to 0} x^2\sin\frac{1}{x}=0$

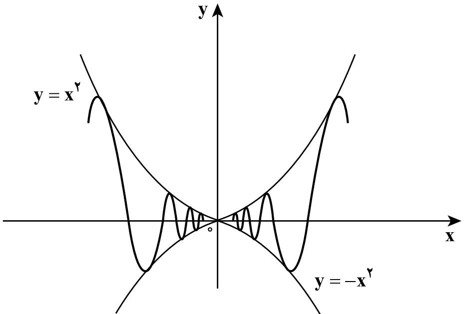
حل: ابتدا توجه کنید که نمی‌توان نوشت:

$$\lim_{x\to 0} x^2\sin\frac{1}{x}=\lim_{x\to 0} x^2\times\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$$

زیرا $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ وجود ندارد (چرا؟)

ولی به علت این که $-1\leq\sin\frac{1}{x}\leq 1$ پس همان‌طور که در شکل ۲ــ۱۸ هم مشاهده می‌شود

$$-x^2\leq x^2\sin\frac{1}{x}\leq x^2$$



شکل ۲ــ۱۸

و می‌دانیم $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = \lim\limits_{x\to 0}(-x)^2 = 0$ پس طبق قضیه فشردگی نتیجه می گیریم :

$$\lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = 0$$

اثبات قضیه فشردگی : باید نشان دهیم که برای هر دنباله دلخواه $\{a_n\}$ که همگرا به a است و $a_n \neq a$، دنباله $\{f(a_n)\}$ به L همگراست.

و امّا برای هر دنباله $\{a_n\}$ که به a همگراست، به ازای nهای به اندازه کافی بزرگ، a_n در یک همسایگی محذوف a قرار می‌گیرد. بنابراین : $h(a_n) \leq f(a_n) \leq g(a_n)$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} h(a_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} g(a_n) = L$

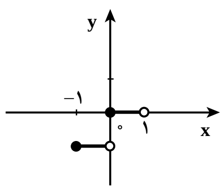
پس طبق قضیه فشردگی در دنباله‌ها داریم : $\lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n) = L$ (شکل بالا را مشاهده کنید)

بنابراین $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$.

تعریف: اگر A زیرمجموعه‌ای از دامنه f باشد، آنگاه تابع f را بر مجموعه A **کراندار** می‌نامیم، در صورتی که عدد مثبتی مانند M یافت شود به‌طوری که برای هر $x \in A$، $f(x) \leq M$

مثال : الف) تابع $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ در دامنه‌اش کراندار است. زیرا به ازای هر $x \in D$، $\left|\sin\frac{1}{x}\right| \leq 1$

ب) تابع $[x]$ $f(x)$ بر مجموعه $\{x \in \mathbb{R},\ 1 < x < 1\}$ A کراندار است زیرا به ازای هر $x \in A$، $f(x)$ یا صفراست و یا 1 یعنی $f(x) \leq 1$



تمرین در کلاس

نشان دهید تابع $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ در دامنه‌اش کراندار است.

یادآوری : همان‌طور که قبلاً نشان داده شد تابع $f(x)=\sin\frac{\pi}{x}$ در نقطه صفر حد ندارد ولی در دامنه‌اش کراندار است و با مشاهده نمودار تابع $g(x)=x\sin\frac{\pi}{x}$ (شکل (۱)) را مشاهده کنید) که بین دو تابع $y=x$ و $y=-x$ فشرده شده است. معلوم می‌شود که $\lim\limits_{x\to ۰} x\sin\frac{\pi}{x}=۰$.
و از این ایده می‌توان قضیه زیر را بیان کرد، که در محاسبه حد بعضی از توابع به‌کار می‌رود.

قضیه ۳ : اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=۰$ و تابع g در یک همسایگی محذوف a کراندار باشد. آنگاه
$\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)=۰$

مثال : بنابر قضیه (۳) داریم :

$$۱)\ \lim_{x\to ۱}(x-۱)^۲\sin\frac{۱}{x-۱}=۰$$

زیرا : $\lim\limits_{x\to ۱}(x-۱)^۲=۰$ و $-۱\le\sin\frac{۱}{x-۱}\le ۱$ یعنی تابع $g(x)=\sin\frac{۱}{x-۱}$ کراندار است.

$$۲)\ \lim_{x\to ۰} x^۲[x]=۰$$

زیرا : $\lim\limits_{x\to ۰} x^۲=۰$ و تابع $g(x)=[x]$ در یک همسایگی محذوف صفر و به شعاع مثلاً $r=۱$ کراندار است.

اثبات قضیه (۳) : طبق تعریف حد به ازای هر دنباله $\{a_n\}$ که همگرا به a باشد و $a_n\neq a$ داریم $\lim\limits_{n\to +\infty} f(a_n)=۰$ و برای تابع g که در یک همسایگی محذوف a کراندار است عدد مثبتی مانند M وجود دارد که $|g(a_n)|\le M$ پس طبق قضیه فشردگی نتیجه می‌شود که دنباله $\{f(a_n)\,g(a_n)\}$ همگرا به صفر است. بنابراین $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)=۰$

تمرین در کلاس

۱ـ نشان دهید که اگر $\lim\limits_{x\to a}|f(x)|=۰$ ، آنگاه $\lim\limits_{x\to a} f(x)=۰$

۲ـ اگر به ازای هر $x\neq ۰$ داشته باشیم $۳-x^۲\le f(x)\le ۳+x^۲$، مطلوب است $\lim\limits_{x\to ۰} f(x)$

۳ـ تابع دیریکله با ضابطه $D(x)=\begin{cases} ۱ & \text{x گویا،} \\ ۰ & \text{x اصم،} \end{cases}$ داده شده است. ثابت کنید $\lim\limits_{x\to ۰} xD(x)=۰$

یادداشت

در حالت کلی قاعده زیر درست است که در بخش پیوستگی تابع مرکب می‌توان آنرا ثابت کرد.

قاعده ریشه‌گیری : $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$ که در اینجا n عددی است طبیعی (اگر n زوج باشد، فرض می‌کنیم $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L \geq ۰$)

مثال : طبق قاعده ریشه‌گیری داریم :

$$۱)\ \lim_{x\to ۳} \sqrt{\frac{x-۲}{۳x^۲-۲}} = \sqrt{\frac{۱}{۲۵}} = \frac{۱}{۵}$$

$$۲)\ \lim_{x\to ۵} \sqrt[۳]{\frac{x-۶}{x^۲+۲}} = \sqrt[۳]{\frac{-۱}{۲۷}} = \frac{-۱}{۳}$$

تمرین در کلاس

مقدار $\lim\limits_{x\to ۱} \sqrt[۴]{\frac{x+۱۵}{۲x^۲-۱}}$ را به‌دست آورید.

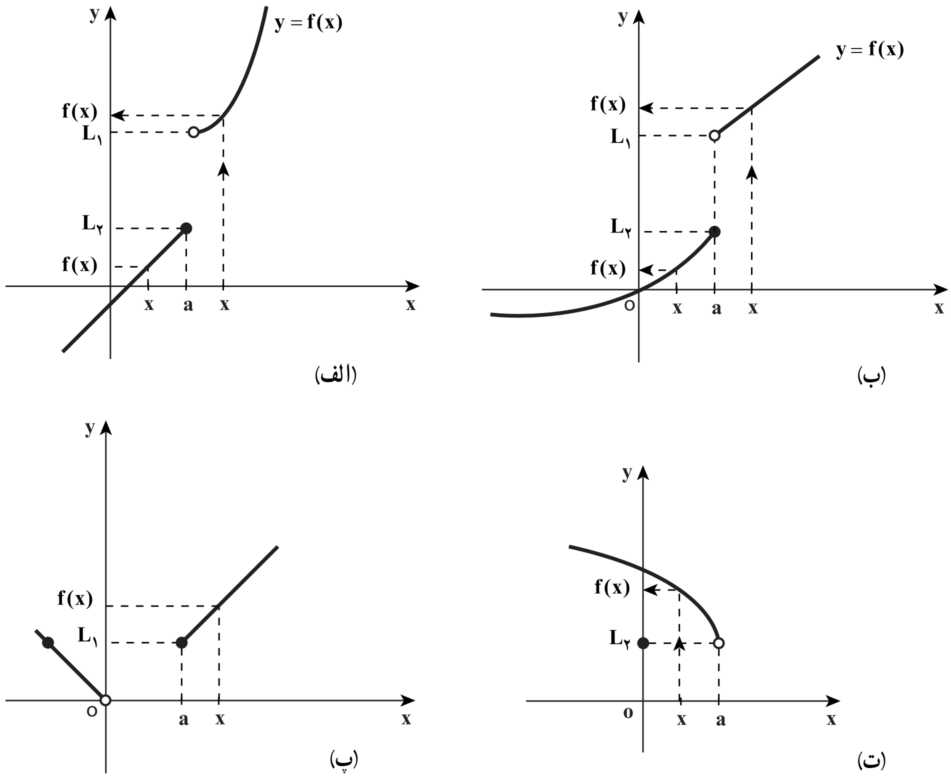
۲ـ ۸ ـ حدهای یک‌طرفه

همان‌طورکه بعد از تعریف حد بیان شد، حد تابع یکتاست، یعنی اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L_۱$ و $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L_۲$ آنگاه $L_۱ = L_۲$

با وجود این که تابعی مانند f فقط می‌تواند یک حد در نقطهٔ مفروض داشته باشد، گاهی لازم است بتوانیم رفتار توابعی را وقتی x با مقدارهای بزرگتر از a به a میل می‌کند و یا وقتی که x با مقدارهای کوچکتر از a به a میل می‌کند، توصیف کنیم.

همچنین ممکن است f(x)، با نزدیک شدن x به a از دوجهت راست و چپ به دو مقدار متفاوت میل کند. (الف، ب در شکل ۲ــ ۱۹) و یا اینکه تابع به ازای xهای کوچکتر از a و یا بزرگتراز a، تعریف نشده باشد (پ، ت در شکل ۲ــ۱۹).

در حالتی که x با مقادیر بزرگتر از a (از سمت راست) به a میل کند حد f(x) را، حد راست f(x) و حد f(x)، وقتی x با مقادیر کوچکتر از a (از سمت چپ) به a میل کند حد چپ f(x) نامیده می‌شود و حد راست تابع $y = f(x)$ در نقطه a را با نماد $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ و حد چپ تابع $y = f(x)$ در نقطه a را با نماد $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ نشان می‌دهیم.



شکل ۲ــ ۱۹

با این توضیح‌ها دو تعریف زیر را بیان می‌کنیم. همچنین در حد راست تابع f در نقطه a فرض بر این است که تابع در یک همسایگی راست a تعریف‌شده و برای حد چپ لازم است تابع در یک همسایگی چپ a تعریف شده باشد.

تعریف: گوییم تابع $y = f(x)$ در نقطه a دارای حد راست L است و می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=L$ ، هرگاه به ازای هر دنباله از عضوهای دامنهٔ f مانند $\{a_n\}$ که به a همگراست و $a_n > a$ داشته باشیم: $\lim\limits_{n\to +\infty} f(a_n)=L$

مثال: تابع $f(x)=\begin{cases} ۲x-۱ \,, & x \le ۱ \\ x^۲+۱ \,, & x > ۱ \end{cases}$ را درنظر بگیرید. به کمک تعریف حد راست ثابت کنید $\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)=۲$.

حل: فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ای دلخواه و همگرا به ۱ باشد $(a_n \neq 1)$ که مقادیر آن همگی از ۱ بزرگتر باشند آنگاه:

$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = \lim_{n\to+\infty} (a_n^2 + 1) = 1+1 = 2$$

پس طبق تعریف $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 2$

تمرین در کلاس

به کمک تعریف حد راست ثابت کنید: $\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$

تعریف: گوییم تابع $y = f(x)$ در نقطه a دارای حد چپ L است و می‌نویسیم $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$، هرگاه به ازای هر دنباله از عضوهای دامنه f مانند $\{a_n\}$ که به a همگراست و $a_n < a$ داشته باشیم: $\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = L$

مثال: تابع $f(x) = \begin{cases} 2x-1, & x \leq 1 \\ x^2+1, & x > 1 \end{cases}$ را درنظر گرفته و $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ را به کمک تعریف حد چپ به‌دست آورید.

حل: فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ای دلخواه و همگرا به ۱ باشد $(a_n \neq 1)$ که مقادیر آن همگی از ۱ کوچکتر باشند آنگاه:

$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = \lim_{n\to+\infty} (2a_n - 1) = 2-1 = 1$$

پس طبق تعریف $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1$

تمرین در کلاس

به کمک تعریف ثابت کنید که اگر $\lim_{x\to a^+} f(x)$ و $\lim_{x\to a^-} f(x)$ موجود و مساوی عدد حقیقی L باشند آنگاه $\lim_{x\to a} f(x)$ موجود و مساوی L است.

نکته: کلیه قضایایی که در این بخش بررسی شدند، با تغییرات جزئی و بدیهی در مورد حدهای یک‌طرفه نیز برقرار هستند.

مثال: ثابت کنید : $\lim\limits_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right]=1$ ، که در آن، $\left[\frac{1}{x}\right]$ جزءِ صحیح $\frac{1}{x}$ است.

حل: می‌دانیم به ازای هر عدد حقیقی S، $S-1<[S]\le S$ و با انتخاب $S=\frac{1}{x}$ ، $x\neq 0$ داریم :

$$\frac{1}{x}-1<\left[\frac{1}{x}\right]\le\frac{1}{x} \qquad (1)$$

رابطه (۱) را برای دو حالت زیر درنظر می‌گیریم.

۱) طرفین نامساوی‌های (۱) را در $x>0$ ضرب می کنیم.

$$1-x<x\left[\frac{1}{x}\right]\le 1$$

چون $\lim\limits_{x\to 0^+} 1=1$ و $\lim\limits_{x\to 0^+}(1-x)=1$ ، بنابر قضیه فشردگی داریم : $\lim\limits_{x\to 0^+} x\left[\frac{1}{x}\right]=1$

۲) طرفین نامساوی‌های (۱) را در $x<0$ ضرب می‌کنیم.

$$1\le x\left[\frac{1}{x}\right]<1-x$$

چون $\lim\limits_{x\to 0^-} 1=1$ و $\lim\limits_{x\to 0^-}(1-x)=1$ ، بنابراین طبق قضیه فشردگی داریم :

$$\lim_{x\to 0^-} x\left[\frac{1}{x}\right]=1$$

در نتیجه $\lim\limits_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right]=1$

تمرین در کلاس

نشان دهید : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$ موجود نیست.

یادآوری : در حسابان دیده‌اید که اگر x برحسب رادیان باشد نامساوی‌های زیر به ازای xهایی که $0<|x|<\frac{\pi}{2}$ ، برقرارند

$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1 \qquad (1)$$

نتیجه: نامساوی $\sin x\le x$ به ازای هر x (برحسب رادیان) برقرار است.

برهان: نامساوی بـه ازای $x\ge 0$ می‌شود $0\le 0$ که این هم درست است و به ازای $0<|x|<\frac{\pi}{2}$ ،

نامساوی به‌خاطر (۱) برقرار می‌باشد و نامساوی به ازای $|x| \geq \frac{\pi}{۲}$ نیز واضح است که برقرار است زیرا $|\sin x| \leq ۱$

مثال : به کمک تعریف حد ثابت کنید :

اگر a یک عدد حقیقی باشد، آنگاه $\lim\limits_{x \to a} \sin x = \sin a$

اثبات : دنباله دلخواه $\{a_n\}$ که همگرا به a است و برای هر عدد طبیعی n ، $a_n \neq a$ را درنظر بگیرید، در این‌صورت

$$|\sin a_n - \sin a| = ۲\left|\sin\frac{a_n - a}{۲}\cos\frac{a_n + a}{۲}\right| \leq ۲\left|\sin\frac{a_n - a}{۲}\right| \leq |a_n - a|$$

بنابراین $\lim\limits_{n \to +\infty} \sin a_n = \sin a$

در نتیجه طبق تعریف حد، $\lim\limits_{x \to a} \sin x = \sin a$

تمرین در کلاس

۱ــ ثابت کنید : $\lim\limits_{x \to a} \cos x = \cos a$

۲ــ ثابت کنید : الف) $\lim\limits_{x \to a} \tan x = \tan a \quad , \quad a \neq k\pi + \frac{\pi}{۲}$

ب) $\lim\limits_{x \to a} \cot x = \cot a \quad , \quad a \neq k\pi$ (k عدد صحیح است)

۲ـ۹ـ محاسبه یک حد مهم

در بخش قبل با جدول و نمودار به‌صورت شهودی نتیجه گرفتیم که $\lim\limits_{x \to ۰} \frac{\sin x}{x} = ۱$ (x برحسب رادیان)

اکنون به کمک قضیه فشردگی درستی تساوی $\lim\limits_{x \to ۰} \frac{\sin x}{x} = ۱$ را ثابت می‌کنیم.

اثبات : می‌دانیم $\lim\limits_{x \to ۰} \cos x = \cos ۰ = ۱$ و برای هر x که $۰ < |x| < \frac{\pi}{۲}$ ، $\cos x < \frac{\sin x}{x} < ۱$

و یا

$$۰ < ۱ - \frac{\sin x}{x} < ۱ - \cos x$$

از طرفی $\lim\limits_{x \to ۰} ۰ = ۰$ و $\lim\limits_{x \to ۰} (۱ - \cos x) = ۱ - ۱ = ۰$ پس بنابر قضیه فشردگی داریم :

$$\lim\limits_{x \to ۰} \left(۱ - \frac{\sin x}{x}\right) = ۰$$

در نتیجه : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

مثال: حد تابع $f(x)=\frac{\sin ax}{bx}$ را وقتی $x\to 0$ بیابید. $(a,b\neq 0)$

حل:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{bx}=\lim_{x\to 0}\frac{a}{b}\times\frac{\sin ax}{ax}=\frac{a}{b}\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax}=\frac{a}{b}\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}$$

زیرا، وقتی $x\to 0$، $t=ax\to 0$ و امّا $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$

در نتیجه

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{bx}=\frac{a}{b}$$

مثال: حد تابع $f(x)=\frac{\sin(\sin x)}{x}$ را وقتی $x\to 0$ بیابید.

حل: می‌دانیم $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$ که در این تساوی $x\neq 0$ و $\sin x\neq 0$ بنابراین

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)}{\sin x}\times\frac{\sin x}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\times\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

زیرا اگر $x\to 0$ داریم $t=\sin x\to 0$

تمرین در کلاس

مقدار $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{3x}$ را حساب کنید.

روش های محاسبهٔ بعضی از حدود : اگر $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$ آن وقت برای محاسبه $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ نمی‌توان از قضیه حد خارج‌قسمت استفاده کرد.

بلکه باید تابع $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ را از طریق حذف عامل مخالف صفر مشترک در صورت و مخرج کسر (با عمل تجزیه و گویا کردن صورت یا مخرج کسر) با تابعی ساده‌تر مانند $y=h(x)$ که حدشان برابر است، عوض کرد. این کار به این دلیل درست است که به ازای $x\neq a$ ، $\frac{f}{g}(x)=h(x)$ و در حالت کلی نتیجهٔ زیر درست است.

اگر $x \neq a$, $\frac{f}{g}(x) = h(x)$، در این صورت $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} h(x)$ به شرط آنکه حدها وجود داشته باشند.

مثال: $\lim\limits_{x\to -۲} \frac{۲x^{۲}+۵x+۲}{x+۲}$ را بیابید.

حل: چون $\lim\limits_{x\to -۲}(۲x^{۲}+۵x+۲) = \lim\limits_{x\to -۲}(x+۲) = ۰$ بنابراین به ازای $x \neq -۲$ و یا $x + ۲ \neq ۰$ داریم:

$$\frac{۲x^{۲}+۵x+۲}{x+۲} = \frac{\cancel{(x+۲)}(۲x+۱)}{\cancel{(x+۲)}} = ۲x+۱$$

در نتیجه

$$\lim_{x\to -۲} \frac{۲x^{۲}+۵x+۲}{x+۲} = \lim_{x\to -۲}(۲x+۱) = -۴+۱ = -۳$$

تمرین در کلاس

مطلوب است محاسبه $\lim\limits_{x\to ۱} \frac{x^{۳}-۱}{x^{۲}-۱}$

مثال: مقدار $\lim\limits_{x\to ۰} \frac{x^{۲}}{\sqrt{x^{۲}+۹}-۳}$ را بیابید.

حل: اگر x به صفر میل کند، صورت و مخرج کسر به صفر میل می‌کنند بنابراین به ازای $x \neq ۰$ داریم:

$$\frac{x^{۲}}{\sqrt{x^{۲}+۹}-۳} = \frac{x^{۲}(\sqrt{x^{۲}+۹}+۳)}{(\sqrt{x^{۲}+۹}-۳)(\sqrt{x^{۲}+۹}+۳)} = \frac{x^{۲}(\sqrt{x^{۲}+۹}+۳)}{x^{۲}+۹-۹} = ۳+\sqrt{x^{۲}+۹}$$

در نتیجه

$$\lim_{x\to ۰} \frac{x^{۲}}{\sqrt{x^{۲}+۹}-۳} = \lim_{x\to ۰}(۳+\sqrt{x^{۲}+۹}) = ۳+\sqrt{۹} = ۶$$

تمرین در کلاس

مقدار $\lim\limits_{x\to ۱} \frac{x^{۲}-۱}{\sqrt[۳]{x}-۱}$ را بیابید.

مثال: مقدار $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{۱+\cos^۳ x}{\sin^۲ x}$ را بیابید.

حل: وقتی x به π میل کند، صورت و مخرج کسر به صفر میل می‌کنند پس به ازای $x \neq \pi$ (حد را در یک همسایگی محذوف π حساب می‌کنیم)

$$\frac{۱+\cos^۳ x}{\sin^۲ x}=\frac{(۱+\cancel{\cos} x)(۱-\cos x+\cos^۲ x)}{(۱+\cancel{\cos} x)(۱-\cos x)}=\frac{۱-\cos x+\cos^۲ x}{۱-\cos x}$$

عامل $(۱+\cos x)\neq ۰$ از صورت و مخرج ساده شده است زیرا $x\neq \pi$ است.

در نتیجه $$\lim_{x\to \pi}\frac{۱+\cos^۳ x}{\sin^۲ x}=\lim_{x\to \pi}\frac{۱-\cos x+\cos^۲ x}{۱-\cos x}=\frac{۱+۱+۱}{۱-(-۱)}=\frac{۳}{۲}$$

تمرین در کلاس

مقدار $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}}\frac{۱-\sin x}{\cos^۲ x}$ را محاسبه کنید.

مسائل

۱ــ به کمک تعریف دنباله‌ای حد، ثابت کنید

الف) $\lim\limits_{x\to ۲} x^۳=۸$

ب) $\lim\limits_{x\to ۳}\frac{x^۲-۹}{x-۳}=۶$

پ) $\lim\limits_{x\to ۱}\sqrt{x-۱}=۰$

ت) $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{x}=\sqrt{a}\quad ,\quad a\geq ۰$

ث) $\lim\limits_{x\to \frac{۱}{۲}^+} x^۲[x]=۰$

۲ــ الف) دو تابع به نام‌های f و g مثال بزنید که $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))$ وجود داشته باشد، ولی نه $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ وجود داشته باشد نه $\lim\limits_{x\to a}g(x)$

ب) دو تابع به نام‌های f و g مثال بزنید که $\lim\limits_{x\to a}f(x)g(x)$ وجود داشته باشد، ولی نه $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ وجود داشته باشد، نه $\lim\limits_{x\to a}g(x)$

۳ــ با استفاده از قضایای حد، حدهای زیر را در صورت وجود حساب کنید :

الف) $\lim\limits_{x\to ۰} \frac{(x+۳)^۲-۹}{x}$ ب) $\lim\limits_{x\to ۴} \frac{x-۴}{\sqrt{x}-۲}$

پ) $\lim\limits_{x\to ۰} \tan x \cot x$ ت) $\lim\limits_{x\to ۰^-} (۱-x+[x]-[۲x])$

۴ــ آیا عددی مانند a وجود دارد که مقدار $\lim\limits_{x\to ۲} \frac{x+۱-\sqrt{۴x+۱}}{۲x^۲+ax-۴}$ ، عددی مخالف صفر باشد؟ مقدار a و مقدار این حد را پیدا کنید.

۵ــ عددهای a و b را چنان انتخاب کنید که $\lim\limits_{x\to ۰} \frac{\sqrt{ax+b}-۲}{x}=۱$

۶ــ $\lim\limits_{x\to ۰} \frac{|۳x-۱|-|۳x+۱|}{x}$ را حساب کنید.

۷ــ $\lim\limits_{x\to ۰} \frac{۱}{x}(۱-x\left[\frac{۱}{x}\right])$ را حساب کنید.

۸ــ $\lim\limits_{x\to ۰} (\frac{۳x-۴}{x^۲-۲x}-\frac{x+۲}{x^۲+x})$ را حساب کنید.

۹ــ مقدار $\lim\limits_{x\to ۰^+} \sin ۴x(\cot ۲x-\cot x)$ را بیابید.

۱۰ــ مقدار $\lim\limits_{x\to \frac{۱}{۲}^+} \frac{|\cos \pi x|}{۱-\sqrt{۲x}}$ را بیابید.

۱۱ــ تابع $f(x)=\left[\frac{۴x^۲+۳}{x^۲+۱}\right]$ در چند نقطه دارای حد است؟ (چرا؟)

۱۲ــ حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۰} \frac{۱-\cos x}{x^۲}$ ب) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۴}} \frac{۱-\tan x}{\sin x-\cos x}$

پ) $\lim\limits_{x\to ۰} \frac{\cos ۳x-\cos x}{x^۲}$ ت) $\lim\limits_{x\to ۴} (۲-\sqrt{x})\tan \frac{\pi x}{۸}$

۱۳ــ با استفاده از قضیه فشردگی مقدار $\lim\limits_{x\to ۰} x^۲ \cos \frac{۱}{x}$ را بیابید (می‌توانید راه حل ساده‌تری برای این مسأله، ارائه دهید؟)

۱۴ــ با فرض اینکه $f(x)=\left[x+\frac{۱}{۳}\right]+[۳x]$ ، دنباله $\left\{f(\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{n})\right\}$ به چه عددی همگراست؟

۱۵ــ به کمک تعریف دنباله‌ای حد، ثابت کنید تابع‌های زیر در نقطهٔ داده شده، حدشان موجود نیست.

الف) $f(x)=\frac{|x-۱|}{x-۱}$ در نقطهٔ $x=۱$ ب) $g(x)=\cos\frac{۱}{x-۱}$ در نقطهٔ $x=۱$

۱۶ــ به کمک تعریف دنباله‌ای حد، ثابت کنید، تابع زیر (تابع دیریکله) در هیچ نقطه‌ای دارای حد نیست.

$$D(x)=\begin{cases}۱ & \text{x گویا،}\\ ۰ & \text{x گنگ،}\end{cases}$$

۱۷ــ به کمک تعریف دنباله‌ای حد، نشان دهید تابع زیر در نقطهٔ $x=\frac{۱}{۲}$ ، دارای حد است و مقدار حد را مشخص کنید.

$$f(x)=\begin{cases}x+۲ & \text{x گویا،}\\ ۳x+۱ & \text{x گنگ،}\end{cases}$$

۱۸ــ ثابت کنید : $\lim\limits_{x\to+\infty}(۱+\frac{۱}{x})^x=e$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}(۱+\frac{۱}{x})^x=e$

۲ـ ۰ ۱ ـ پیوستگی تابع

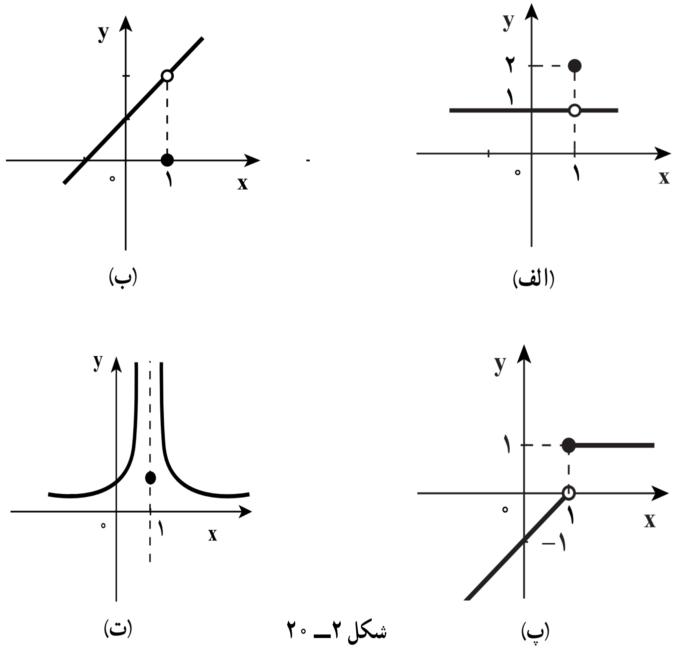
مقدمه : یک شیء، متحرک فیزیکی که در حال حرکت است، نمی‌تواند در یک‌جا ناپدید شده و دوباره درجایی دیگر ظاهر شود. لذا ما مسیر متحرک را یک خط راست یا یک منحنی یکپارچهٔ بدون سوراخ (حفره) و بدون هیچ بریدگی یا جهشی می‌بینیم. این چنین خط راست یا منحنی‌هایی را «پیوسته» می‌گوییم. در این بخش، می‌خواهیم این مفهوم شهودی را به‌صورت ریاضی بیان کرده و چند خاصیت نمودارها و منحنی‌های پیوسته را توصیف کنیم.

اوّلین ایده‌ای که از کلمه پیوستگی به ذهن شما می‌رسد چیست؟

«**مسلسل**»، «**به‌هم چسبیده**»، «**بدون بریدگی**» : همهٔ اینها از کلمه پیوستگی به ذهن می‌رسد و به‌طور کلی تصور ذهنی ما از نمودار یک تابع پیوسته، یک خط راست یا یک منحنی صاف و هموار در صفحه مختصات است، اگرچه تابع‌هایی وجود دارد که در یک یا چند نقطه و یا در دامنه‌اش پیوسته‌اند ولی اطلاق کلمهٔ پیوسته به آنها دور از ذهن به‌نظر می‌رسد (مثالی ارائه می‌شود) و در این بخش خواهیم دید، توابع پیوسته آن‌گونه که احساس و درک شهودی اوّلیهٔ ما بیانگر آن است، خیلی هم ساده نیستند، درواقع خیلی از توابع پیوسته هموار نیستند.

فعالیت

در شکل ۲ــ۲۰ رفتار توابع $f_۱$ و $f_۲$ و $f_۳$ و $f_۴$ را در حوالی نقطه $x=۱$ بررسی کنید. (مقدار تابع و حد تابع را در صورت وجود به‌دست آورید)



شکل ۲ــ۲۰

الف) $f_۱(x)=\begin{cases}\dfrac{x-۱}{x-۱} & , \quad x\neq ۱\\ ۲ & , \quad x=۱\end{cases}$

ب) $f_۲(x)=\begin{cases}\dfrac{x^۲-۱}{x-۱} & , \quad x\neq ۱\\ ۰ & , \quad x=۱\end{cases}$

پ) $f_۳(x)=\begin{cases}۱ & , \quad x\geq ۱\\ x-۱ & , \quad x<۱\end{cases}$

ت) $f_۴(x)=\begin{cases}\dfrac{۱}{(x-۱)^۲} & , \quad x\neq ۱\\ ۱ & , \quad x=۱\end{cases}$

در فعالیت بالا دیدیم که رابطه $\lim\limits_{x\to ۱} f_n(x)=f(۱)$ ، $(n=۱,۲,۳,۴)$ در توابع داده شده برقرار نیست و به‌طور شهودی ملاحظه می‌شود که این توابع در نقطهٔ $x=۱$ دارای بریدگی و یا پرش هستند و می‌گوییم این توابع در نقطه $x=۱$ ناپیوسته‌اند. در سایر نقاط وضعیت چگونه است؟

معلوم است که در هر نقطه به طول $x\neq ۱$ نمودار تابع‌های بالا بریدگی و یا پرشی ندارند که در این حالت، گوییم در نقاط $x\neq ۱$ پیوسته‌اند. به زبان نمادی گوییم تابع f در نقطه $x=a$ پیوسته است هرگاه

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ این امور ما را به تعریف زیر می‌رساند.

تعریف ۱: فرض کنیدتابع f در نقطهٔ a و در یک همسایگی چپ یا راست (یا هر دو) تعریف‌شده باشد. در این صورت می‌گوییم تابع f در نقطهٔ a پیوسته است هرگاه شرایط زیر برقرار باشد:

الف) $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ وجود داشته باشد.

ب) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

تبصره ۱: البته شرط «ب» نیز به تنهایی پیوستگی تابع f را در a بیان می‌کند،

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

چرا که سخن از این عبارت متضمن وجود $f(a)$، وجود حد و تساوی مقدار حد با $f(a)$ است.

تبصره ۲: اگر تابع f در نقطه a عضو دامنه‌اش پیوسته نباشد، گوییم f در a ناپیوسته است.

مثال: آیا مقداری برای m یافت می‌شود که تابع $\begin{cases} \frac{|\,|}{} & , \ x \neq \\ m & , \ x \end{cases}$ $f(x)$ در $x \quad ۰$ پیوسته باشد؟

حل: می‌دانیم $\lim\limits_{x \to ۰^{+}} \frac{|x|}{x} = ۱$ و $\lim\limits_{x \to ۰^{-}} \frac{|x|}{x} = -۱$ ، درنتیجه $\lim\limits_{x \to ۰} \frac{|x|}{x}$ وجود ندارد. لذا m را هر عددی که بگیریم، شرط (ب) در تعریف پیوستگی برقرار نیست و نمی‌توان تابع f را در $x \quad ۰$ پیوسته کرد.

تمرین در کلاس

پیوستگی تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{x^{۲} - ۱}{x - ۱} & , \ x \neq ۱ \\ ۴ & , \ x = ۱ \end{cases}$ را در $x \quad ۱$ بررسی کنید.

پیوستگی تابع در هر نقطه از دامنه آن: دامنه اکثر توابعی که با آنها سروکار داریم یا بازه هستند یا اجتماع تعدادی بازهٔ جدا از هم، نقطه c متعلق به دامنه را یک **نقطه درونی** دامنه می‌نامیم هرگاه این نقطه به بازهٔ بازی واقع در دامنه تعلق داشته باشد. مثلاً دامنه تابع $f(x) = \sqrt{۱ - x^{۲}}$

بازه بسته $[-۱,۱]$ است که از نقاط درونی $(-۱,۱)$ و نقطه انتهایی چپ -۱ و نقطه انتهایی راست ۱ تشکیل شده است. بنابراین می‌گوییم تابع f در نقطه درونی c متعلق به دامنه‌اش پیوسته است هرگاه

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$$

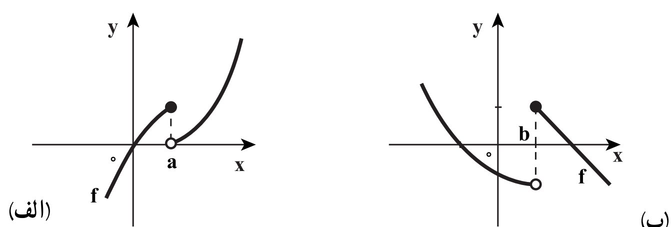
مثال: نشان دهید تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & , \quad x\neq ۰\\ ۱ & , \quad x=۰\end{cases}$ در نقطه $x=۰$ پیوسته است.

حل: $x=۰$ نقطه درونی دامنه f است و $\lim_{x\to ۰} f(x) = f(۰) = ۱$ پس تابع f در $x=۰$ پیوسته است.

تمرین در کلاس

نشان دهید تابع $f(x)=\sqrt{۴-x^{۲}}$ در نقطهٔ $x=۱$ پیوسته است.

پیوستگی راست و چپ : ممکن است یک تابع در یک نقطه از دامنه‌اش پیوسته نباشد (شکل ۲ــ۲۱ را ببینید)



شکل ۲ــ۲۱

در قسمت (الف) $\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$ ، در این حالت می‌گوییم تابع f در $x=a$ پیوستگی چپ دارد و در قسمت (ب) $\lim_{x\to b^+} f(x)=f(b)$ که می‌گوییم تابع f در $x=b$ پیوستگی راست دارد، بنابراین تعریف زیر را بیان می‌کنیم.

تعریف۲: می‌گوییم f در c از راست پیوسته است هرگاه $\lim_{x\to c^+} f(x)=f(c)$

می‌گوییم f در c از چپ پیوسته است هرگاه $\lim_{x\to c^-} f(x)=f(c)$

مثال: تابع $f(x)=[x]$ در هر عدد صحیح n از راست پیوسته است امّا از چپ ناپیوسته است.

زیرا :
$$\lim_{x\to n^+} f(x)=\lim_{x\to n^+}[x]=n=f(n)$$

امّا
$$\lim_{x\to n^-} f(x)=\lim_{x\to n^-}[x]=n-۱\neq f(n)$$

تمرین در کلاس

پیوستگی تابع $f(x)=[\sin x]$ را در نقطه $x=\pi$ بررسی کنید. (پیوستگی راست و چپ)

تعریف: پیوستگی درنقاط انتهایی

۱) اگر c یک نقطهٔ انتهایی چپ دامنه f باشد، می‌گوییم f در c پیوسته است هرگاه در c از راست پیوسته باشد.

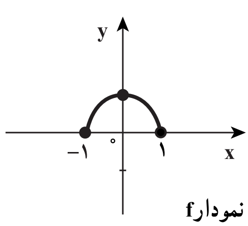
۲) اگر c یک نقطهٔ انتهایی راست دامنه f باشد می‌گوییم f در c پیوسته است هرگاه در c از چپ پیوسته باشد.

برای درک بهتر این تعریف به مثال زیر توجه کنید.

مثال: دامنه تابع $f(x)=\sqrt{۱-x^۲}$ بازهٔ $[-۱,۱]$ است، f در نقطهٔ انتهایی راست دامنه خود یعنی ۱ پیوسته است زیرا در آنجا از چپ پیوسته است، زیرا به این سبب که $\lim_{x\to ۱^-} f(x)=f(۱)=۰$ و f در نقطهٔ انتهایی چپ دامنه خود یعنی ۱− پیوسته است زیرا در آنجا از راست پیوسته است :
$$\lim_{x\to(-۱)^+} f(x)=f(-۱)=۰$$

البته f در هر نقطه درونی دامنه‌اش $(-۱<x<۱)$ نیز پیوسته است یعنی اگر $-۱<c<۱$ آنگاه $\lim_{x\to c} f(x)=\sqrt{۱-c^۲}=f(c)$ (شکل ۲ــ۲۲ نمودار f است)

پرسش : آیا تابع f در هر نقطه از دامنه‌اش پیوسته است؟



شکل ۲ــ۲۲

تمرین در کلاس

پیوستگی تابع $f(x)=x-\sqrt{۴-x^۲}$ را در نقاط انتهایی دامنه آن بررسی کنید.

پیوستگی روی بازه : می‌گوییم تابع f روی بازهٔ I پیوسته است هرگاه f در هر نقطهٔ I پیوسته باشد به‌ویژه می‌گوییم f تابعی پیوسته است هرگاه f در هر نقطهٔ دامنه‌اش پیوسته باشد.

مثال: پیوستگی تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را در دامنه‌اش یعنی $[\circ,+\infty)$ بررسی کنید.

حل: تابع f در نقطهٔ انتهایی چپ دامنه‌اش یعنی ∘ پیوسته است زیرا در آنجا از راست پیوسته است $(\lim\limits_{x\to\circ^+}\sqrt{x}=f(\circ))$ همچنین f در هر نقطهٔ $c>\circ$ پیوسته است زیرا $\lim\limits_{x\to c}\sqrt{x}=\sqrt{c}$

تمرین در کلاس

پیوستگی تابع $f(x)=\frac{۱}{\sqrt{x-۱}}$ را در دامنه‌اش بررسی کنید.

۲ـ۱ـ مفهوم پیوستگی تابع f در یک نقطه براساس همگرایی دنباله‌ها

تابع f را در نقطهٔ x=a عضو دامنه‌اش پیوسته می‌نامیم، به شرطی که

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a) \qquad (۱)$$

البته برقراری رابطه (۱) به‌طور ضمنی دو ویژگی زیر را لازم دارد.

۱ــ $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ وجود داشته باشد.

۲ــ $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$

با این توضیح و تعریف حد تابع بر اساس همگرایی دنباله‌ها، می‌توان تعریف دیگری از پیوستگی تابع در یک نقطه را براساس همگرایی دنباله‌ها بیان کرد.