فصل ۳

تبدیلها

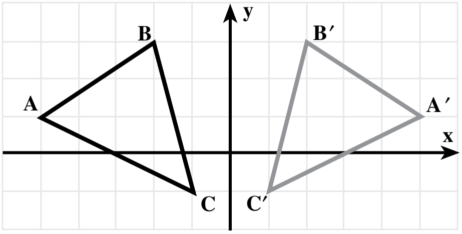
قالی طرح شمسه نمونهٔ زیبایی از تبدیلهای هندسی است.

۳ــ۱ــ نگاشت

در مطالعهٔ شکلهای هندسی همنهشت و متشابه دیدیم تناظرهای خاصی بین اجزای آنها برقرار است. حال می‌خواهیم وضعیتهای مختلفی را که یک شکل دراثر حرکت مجموعهٔ نقطه‌هایش در صفحه پیدا خواهد کرد مورد مطالعه قرار دهیم. این حرکتها از نظر ریاضی به عنوان تناظرهایی بین مجموعهٔ نقطه‌های آنها توصیف می‌شوند.

فعالیت ۳ــ۱

همنهشتی دو مثلث به عنوان تناظر بین مثلثهایی که ضلعهای متناظر و زاویه‌های متناظرشان



شکل ۱

مساوی هستند، مشخص شد. مثلثهای ABC و A′B′C′ را که در شکل (۱) آمده‌اند در نظر بگیرید.

۱. زاویه‌های دو مثلث را اندازه گرفته، اندازه‌های آنها را باهم مقایسه کنید.

۲. با توجه به مختصات نقطه‌ها طول AB، AC، BC، A′B′ ، A′C′ و B′C′ را به‌دست آورید. این طولها چه نسبتی با هم دارند؟

۳. آیا مثلثهای ABC و A′B′C′ همنهشت هستند؟

۴. نقطهٔ دلخواه (x,y) از مثلث ABC را در نظر بگیرید، نقطهٔ نظیر آن را روی مثلث A′B′C′ مشخص کنید.

در ریاضی برای تعریف انواع معینی از نظیرسازی‌های بین مجموعه‌ها، کلمهٔ نگاشت به‌کار می‌رود.

> یک نگاشت از D به R، یک عمل نظیر سازی است که به هر عضو مجموعهٔ D یک و تنها یک عضو از مجموعهٔ R را نظیر می‌کند.

توجّه: طبق این تعریف یک عضو R ممکن است به بیش از یک عضو D نظیر شود.

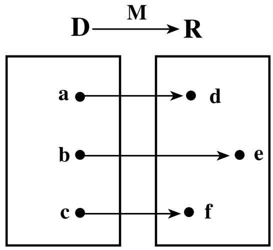
نگاشت‌ها را معمولاً با حروف بزرگ نشان می‌دهند. نماد $M{:}D \to R$ نگاشت M از مجموعه D به مجموعه R را نمایش می‌دهد. اگر P عضوی از مجموعه D و P′ عضو نظیر آن در مجموعهٔ R باشد، می‌نویسیم $M(P) = P'$ [1]. P′ تصویر P تحت نگاشت M خوانده می‌شود.

مثال ۱: در کدامیک از موردهای صفحه بعد، نظیرسازی M، نگاشتی از D به R است؟ تصویر c را تحت نظیرسازی هایی که نگاشت هستند پیدا کنید. در هریک از موردهای زیر، e تصویر چه عضوی از D است؟

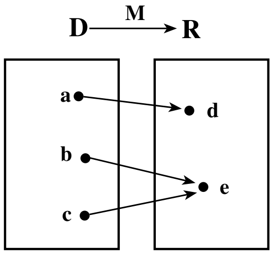
حل: مورد (الف) یک نگاشت است، زیرا هر عضو مجموعهٔ D به یک و تنها یک عضو از مجموعه R نظیر می‌شود. تصویر c، f است یعنی $M(c) = f$ و e تصویر b است یا $M(b) = e$.

مورد (ب) نیز یک نگاشت است، به دلیل آن که هیچ عضوی در مجموعهٔ D وجود ندارد که به بیش از یک عضو از مجموعه R نظیرشده باشد. البته نگاشت (الف) با نگاشت (ب) متفاوت است. به آن فکر کنید! تصویر c، e است یعنی $M(c) = e$ و e تصویر دو عضو D، b و c است، یعنی

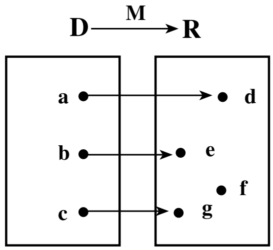
۱ـ Mapping



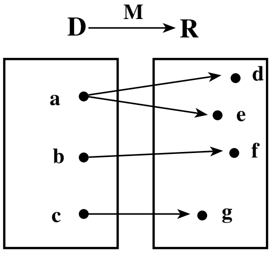
(الف)



(ب)



(پ)



(ت)

$M(c) = e$ و $M(b) = e$.

مورد (پ) یک نگاشت است. یعنی هر عضو D دارای یک و فقط یک تصویر در R است. تصویر c، g است یا $M(c) = g$ و e تصویر b است یا $M(b) = e$.

موردهای (الف)، (ب) و (پ) را با هم مقایسه کرده، تفاوتها و مشابهت‌های آنها را بررسی کنید.

مورد (ت) یک نگاشت نیست، زیرا یکی از عضوهای D یعنی a به دو عضو مختلف R یعنی d و e نظیر شده است. بنابراین شرط نگاشت بودن را ندارد.

در مثال ۱، قسمتهای (الف) و (پ) نگاشت‌های **یک به یک** خوانده می‌شوند. در نگاشت یک به یک، هر عضو R حداکثر می‌تواند تصویر یک عضو D باشد. به این ترتیب نگاشت بند (ب) یک به یک نیست. توجه کنید که در بند (پ) اگرچه f تصویر هیچ‌یک از اعضای D تحت نگاشت M نیست، ولی با این وجود شرایط یک به یک بودن نگاشت همچنان برقرار است.

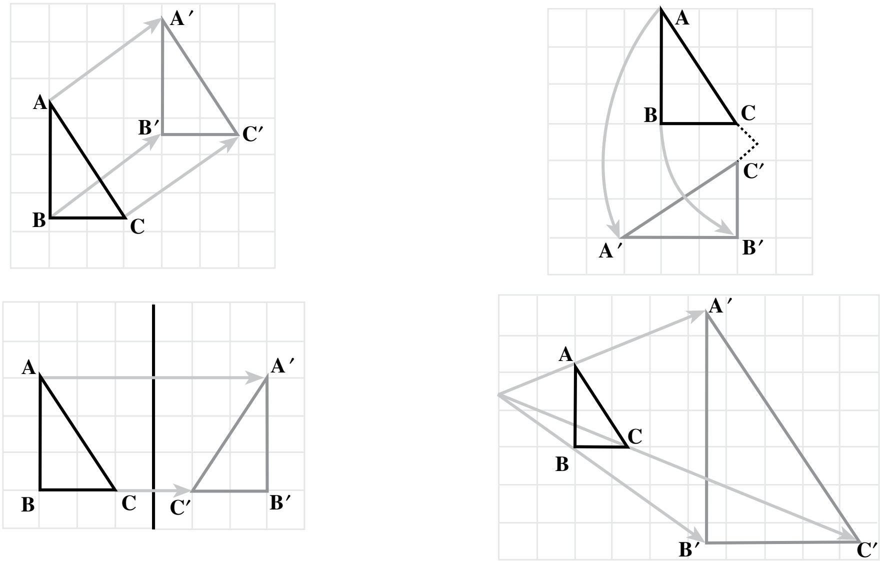
نگاشت‌های خاصی که آنها را تبدیل[1] می‌خوانیم حرکتهایی را در هندسه تشریح می‌کنند.

تبدیل، نگاشتی یک به یک از صفحه به روی خودش است. یعنی در تبدیل، هیچ دو نقطه‌ای دارای یک تصویر نیستند و هر نقطه در صفحه، تصویر یک نقطه از صفحه است.

توجّه: اگرچه تبدیلها به عنوان نگاشت‌هایی از کل صفحه به روی خودش تعریف می‌شوند ولی

۱ــ Transformation

در این کتاب، فقط اثر این‌گونه نگاشت‌ها را بر شکلهای هندسی مانند خط، مثلث یا شکلهای دیگر مورد بررسی قرار می‌دهیم. در شکل زیر تعدادی از تبدیلهای متداول نشان داده شده است.



شکل ۲

در هریک از نمودارها رابطه‌ای بین نقطه‌های متناظر در دو مثلث وجود دارد.

A نگاشته می‌شود به A′: $A \to A'$

B نگاشته می‌شود به B′: $B \to B'$

C نگاشته می‌شود به C′: $C \to C'$

A′ ، B′ و C′ به ترتیب تبدیل یافتهٔ نقطه‌های A، B و C هستند.

هر نقطهٔ صفحه را به‌صورت زوج مرتب (x,y) نشان می‌دهیم. اگر T یک تبدیل باشد، آنگاه $T(x,y)=(x',y')$ به این معنا است که نقطهٔ (x',y') تصویر نقطهٔ (x,y) تحت تبدیل T است.

مثال ۲: اگر $T(x,y)=(x+۱,۳y)$ یک تبدیل باشد،آنگاه

الف) تصویر نقطه‌های $(۲,۵)$ ، $(۳,۰)$ و $(۲-,۳)$ را تحت این تبدیل به‌دست آورید.

ب) تحت تبدیل T، $(۴,۹)$ تصویر چه نقطه‌ای است؟

حل: الف) چون تبدیل T به طول هر نقطه یعنی x، یک واحد اضافه و عرض هر نقطه یعنی y را سه برابر می‌کند، پس

$$T(۲,۵)=(۲+۱\ ,\ ۳\times۵)=(۳,۱۵)$$

$$T(۰,۳)=(۰+۱\ ,\ ۳\times۳)=(۱,۹)$$
$$T(۳,-۲)=(۳+۱\ ,\ ۳(-۲))=(۴,-۶)$$

ب) در اینجا، تصویر نقطه را داریم و می‌خواهیم خود نقطه را پیدا کنیم. اگر آن نقطه را با زوج مرتب (x,y) نشان دهیم، با توجه به تبدیل T خواهیم داشت :

$$T(x,y)=(۴,۹)$$

یعنی

$$(x+۱\ ,\ ۳y)=(۴,۹)$$

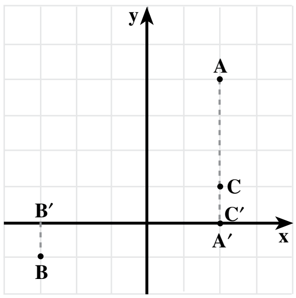
پس باید
$$x+۱=۴\ ,\ ۳y=۹$$

درنتیجه

$$x=۳\ ,\ y=۳$$

بنابراین $(۴,۹)$ تصویر $(۳,۳)$ است یا $T(۳,۳)=(۴,۹)$.

مثال ۳: نقطه‌های $A=(۲,۴)$ ، $B=(-۳,-۱)$ و $C=(۲,۱)$ را در صفحهٔ مختصات مشخص کنید و تصویر این نقطه‌ها را تحت نگاشت $M(x,y)=(x,۰)$ به‌دست آورید. اگر A' ، B' و C' تصویر این نقطه‌ها تحت نگاشت M باشند، آنها را نیز در صفحهٔ مختصات مشخص کنید.



شکل ۳

حل: چون نگاشت M طول هر نقطه را حفظ می‌کند و عرض آن را صفر می‌کند، بنابراین

$$M(A)=M(۲,۴)=(۲,۰)=A'$$
$$M(B)=M(-۳,-۱)=(-۳,۰)=B'$$
$$M(C)=M(۲,۱)=(۲,۰)=C'$$

از نظر هندسی نگاشت M هر نقطه را به‌طور عمودی روی محور xها تصویر می‌کند.

آیا این نگاشت یک تبدیل است؟

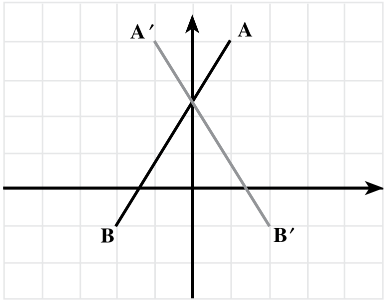
مثال ۴: نقطه‌های $A=(۱,۴)$ ، $B=(-۲,-۱)$ و سپس A' و B' که $T(A)=A'$ و $T(B)=B'$ را، با توجه به ضابطه‌های زیر در صفحهٔ مختصات مشخص کنید. پاره‌خطهای AB و

$A'B'$ را رسم کنید. طول AB و $A'B'$ را با استفاده از فرمول فاصله به‌دست آورید. AB و $A'B'$ چه وضعیتی نسبت به هم دارند؟

الف) $T(x,y)=(-x,y)$

ب) $T(x,y)=(۲x,y-۱)$

حل: الف)



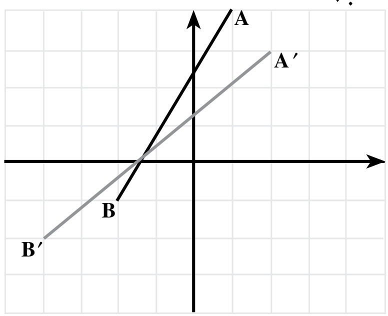
شکل ۴

$$T(A)=T(۱,۴)=(-۱,۴)=A'$$
$$T(B)=T(-۲,-۱)=(۲,-۱)=B'$$
$$AB=\sqrt{(x_A-x_B)^۲+(y_A-y_B)^۲}$$
$$AB=\sqrt{(۱+۲)^۲+(۴+۱)^۲}$$
$$=\sqrt{۹+۲۵}$$
$$=\sqrt{۳۴}$$
$$A'B'=\sqrt{(-۱-۲)^۲+(۴+۱)^۲}$$
$$=\sqrt{۹+۲۵}$$
$$=\sqrt{۳۴}$$

درنتیجه $AB=A'B'$ ، یعنی طول دو پاره‌خط با هم برابر است.

ب)

$$T(A)=T(۱,۴)=(۲\times۱,۴-۱)=(۲,۳)=A'$$
$$T(B)=T(-۲,-۱)=(۲(-۲),-۱-۱)$$
$$=(-۴,-۲)=B'$$
$$A'B'=\sqrt{(۲+۴)^۲+(۳+۲)^۲}$$
$$=\sqrt{۳۶+۲۵}$$
$$=\sqrt{۶۱}$$



شکل ۵

با توجه به اینکه $AB=\sqrt{۳۴}$ بنابراین $A'B'>AB$ یعنی طول $A'B'$ بیشتر از طول AB است.

در مثال ۴، قسمت (الف) تحت تبدیل T، فاصلهٔ نقطه‌ها تغییری نکرد یعنی فاصله‌ها حفظ شدند. درصورتیکه تحت تبدیل T قسمت (ب) فاصلهٔ نقطه‌ها تغییر کرد. اگر $AB=A'B'$ که در آن $M(A)=A'$ و $M(B)=B'$ آنگاه می‌گوییم نگاشت M فاصلهٔ نقطه‌های A و B را حفظ می‌کند.

تبدیلی که فاصلهٔ بین نقطه‌ها را حفظ کند، **ایزومتری**[1] نامیده می‌شود.

نتیجه: اگر شکلی توسط یک ایزومتری نگاشته شود، تصویر شکل با شکل اصلی همنهشت خواهد بود.

مسأله‌ها

۱. تصویر نقطهٔ $(۵,۲)$ را تحت هریک از تبدیلهای زیر به‌دست آورید.

الف) $T(x,y)=(x+۳,y-۲)$

ب) $D(x,y)=(-x,y)$

پ) $D(x,y)=(۲x,y)$

ت) $K(x,y)=(۳x-۴,۵y+۱)$

۲. الف) مربع YAZD به رأسهای $Y=(-۱,۱)$ ، $A=(۳,۱)$ ، $Z=(۳,۵)$ و $D=(-۱,۵)$ رسم کنید.

ب) تصویر مربع YAZD را تحت تبدیل $T(x,y)=(x+۵,y+۲)$ رسم کنید.

پ) این تبدیل را توصیف کنید.

۳. الف) متوازی‌الاضلاع IRAN به رأسهـای $I=(-۲,۱)$ ، $R=(۴,۳)$ ، $A=(۵,۶)$ و $N=(-۱,۴)$ را رسم کنید.

ب) تصویر آن را تحت تبدیل $D(x,y)=(x,-y)$ رسم کنید.

پ) تبدیل بالا را توصیف کنید.

۴. $P=(۱,-۱)$ ، $Q=(۷,۲)$ و $R=(۴,۶)$ رأسهای یک مثلث‌اند.

الف) تصویر آن‌را تحت تبدیل $D(x,y)=(-x,-y)$ رسم کنید.

ب) این تبدیل را توصیف کنید.

۵. مختصات نقطه‌ای را به‌دست آورید که تصویر آن تحت تبدیلهای زیر $(۰,۶)$ باشد.

الف) $F(x,y)=(x,-y+۱۲)$

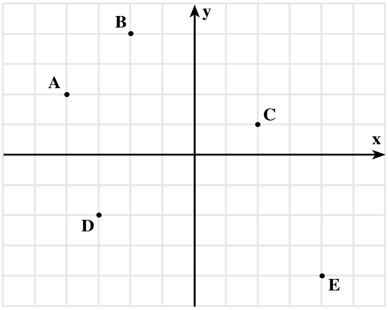
ب) $H(x,y)=(۲x,y-۱)$

پ) $G(x,y)=(y,-x)$

۶. تبدیل $T(x,y)=(x,y-۲)$ را در نظر بگیرید.

الف) تصویر نقطه‌های A، B، C، D و E را تحت تبدیل T به دست آورید.

۱ـ Isometry



ب) نقطه‌های (۳,۶)، (۶−,۲−)، (۰,۰)، (۱−,۴) و (۳,۵−) تصویر چه نقطه‌هایی هستند؟

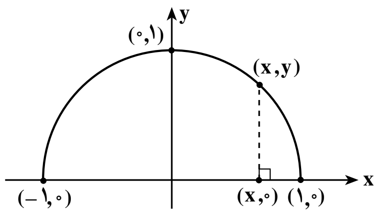
پ) آیا T یک ایزومتری است؟ پاسخ خود را با دلیل نشان دهید.

ت) قسمتهای (الف) تا (پ) را با تبدیل $T(x,y) = (۲x,۲y)$ حل کنید.

۷. هر نقطه (x,y) از نیم دایره می‌تواند به یک نقطه روی محور xها بین ۱− و ۱ نظیر شود. برای این منظور کافی است از نقطهٔ (x,y)، عمودی بر محور xها رسم کنیم که در این‌صورت (x,y) نظیر $(x,۰)$ خواهد شد. این تبدیل **تصویر قائم** نیم‌دایره روی محور xها خوانده می‌شود.

الف) آیا این تناظر نگاشتی از نیم‌دایره به محور xها است؟ توضیح دهید.

ب) اگر نگاشت است آیا یک به یک است؟ با توجه به شکل توضیح دهید.



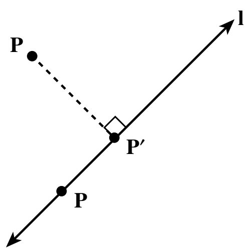
پ) تصویر (۰,۱) و (۱,۰−) چیست؟ تصویر هر نقطهٔ دلخواه (x,y) روی نیم دایره کدام است؟

ت) $(\frac{۱}{۲},۰)$ و $(-\frac{۱}{۴},۰)$ تصویر چه نقطه‌هایی هستند؟ نقطهٔ دلخواه $(x,۰)$ روی محور xها بین ۱− و ۱ تصویر چه نقطه‌ای از نیم دایره است؟

۸. نگاشت M را به‌صورت زیر در نظر بگیرید :

ــ اگر نقطهٔ P روی خط l باشد آنگاه $M(P) = P$

ــ اگر نقطهٔ P روی خط l نباشد، آنگاه $M(P) = P'$، به‌طوری که P' محل تقاطع عمودی است که از نقطهٔ P بر خط l رسم می‌شود.



الف) آیا M یک به یک است؟ پاسخ خود را توضیح دهید.

ب) آیا M فاصلهٔ بین نقطه‌ها را حفظ می‌کند؟ درستی پاسخ خود را با دلیل توضیح دهید.

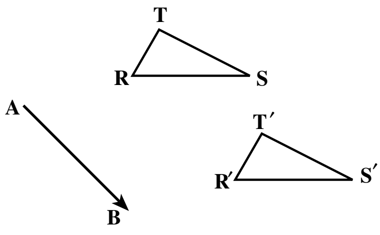
۳ــ۲ــ انتقال

در صنعت کشتی‌سازی، پس از ساخت یک کشتی برای به آب انداختن آن معمولاً از یک سطح شیب‌دار استفاده می‌کنند. به این ترتیب که کشتی را روی آن سُر داده و به آب می‌اندازند. این‌گونه حرکتها که جابجایی در یک امتداد معین را نشان می‌دهند، در زندگی روزمره بسیار به چشم می‌خورند. به عنوان مثال جابجایی آسانسور و حرکت مهرهٔ پیاده در شروع بازی شطرنج نمونه‌هایی از این نوع حرکت هستند.

آیا شما نیز می‌توانید چند نمونه از این نوع حرکت نام ببرید؟

اگر مثلث RST را در امتداد بردار AB روی صفحه سُر بدهیم، بر مثلث R′S′T′ منطبق خواهد شد. این‌گونه حرکتها در صفحه یک **انتقال**[1] را نشان می‌دهند. تحت انتقال همهٔ نقطه‌های صفحه به یک فاصله و در یک جهت جابه‌جا می‌شوند.

مثال ۱: الف) نقطه‌های (۳−,۵)، (۴,۲)، (۱,۳)، (۰,۰)، (۲−,۴−) و (۳,۲−) و تصویرهای



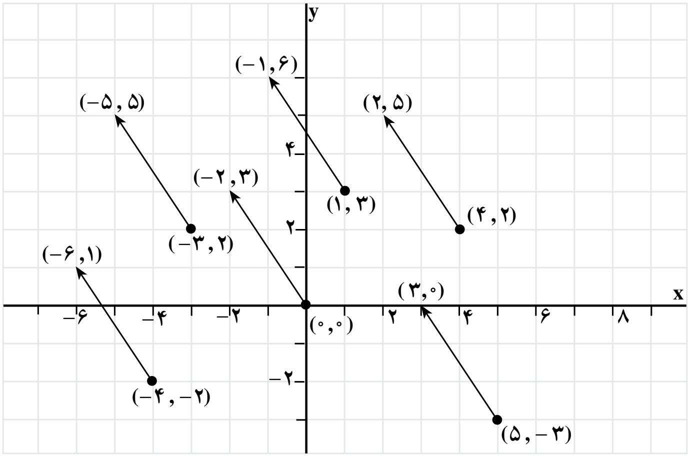
شکل ۶

۱ــ Translation

آنها را تحت تبدیل $T(x,y)=(x-۲,y+۳)$ در صفحه مشخص نمایید.

ب) هریک از نقطه‌ها را به تصویرش وصل کنید. مشاهدات خود را شرح دهید.

حل: الف)

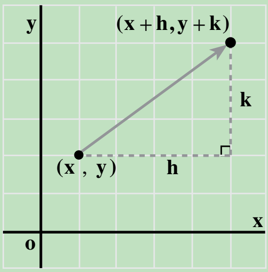


شکل ۷

ب) تبدیل T، انتقالی است که هر نقطه را ۲ واحد به سمت چپ و ۳ واحد به طرف بالا می‌برد. تمام پاره‌خطهایی که از وصل کردن هریک از نقطه‌ها و تصویرهای نظیرشان به هم ایجاد شده، دارای طولهای برابر بوده و با یکدیگر موازیند.

ضابطهٔ نگاشت انتقال

تبدیل $T(x,y)=(x+h,y+k)$ به ازای هر دو عدد حقیقی ثابت h و k نشان‌دهندهٔ یک انتقال است.

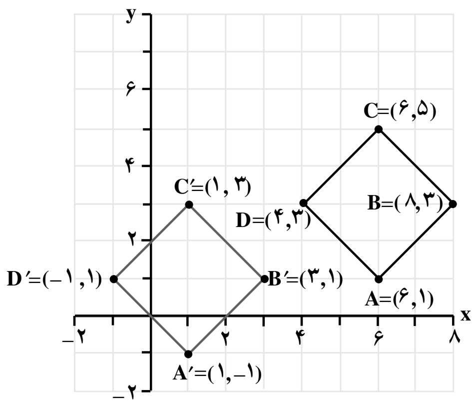


مثال ۲: $A=(۶,۱)$ ، $B=(۸,۳)$ ، $C=(۶,۵)$ و $D=(۴,۳)$ رأسهای یک مربع هستند.

الف) روی یک کاغذ شطرنجی، تصویر مربع را تحت انتقال $T(x,y)=(x-۵,y-۲)$ رسم کنید.

ب) مربع و تصویرش را از نظر طول و شیب ضلعها با هم مقایسه کنید.

حل: الف) تبدیل‌یافتهٔ مربع ABCD تحت انتقال، چهارضلعی $A'B'C'D'$ است.



شکل ۸

ب)

$$BC=\sqrt{(۶-۸)^۲+(۵-۳)^۲} \quad ; \quad B'C'=\sqrt{(۱-۳)^۲+(۳-۱)^۲}$$

$$=\sqrt{۸} \qquad\qquad =\sqrt{۸}$$

$$=۲\sqrt{۲}\ \text{واحد} \qquad\qquad =۲\sqrt{۲}\ \text{واحد}$$

پس طول پاره‌خط BC با طول تصویرش یعنی $B'C'$ برابر است. به همین ترتیب می‌توان نشان داد که طول سایر ضلعها نیز با طول تصویرشان برابر است. پس تحت این انتقال طول ثابت می‌ماند.

$$\text{شیب } BC=\frac{۵-۳}{۶-۸}=-۱ \quad ; \quad \text{شیب } B'C'=\frac{۳-۱}{۱-۳}=-۱$$

چون دو پاره‌خط دارای شیبهای مساوی هستند پس پاره خط BC با تصویرش $B'C'$ موازی است. به همین ترتیب می‌توان نشان داد که سایر ضلعها نیز با تصویرشان موازی هستند. پس تحت این انتقال شیب خطها تغییر نمی‌کند.

فعالیت ۳ـــ۲

نگاشت انتقال $T(x,y)=(x+h,y+k)$ را در نظر بگیرید.

۱. تصویر نقطه‌های $A=(x_۱,y_۱)$ و $B=(x_۲,y_۲)$ را تحت انتقال T به‌دست آورده آنها را A' و B' بنامید.

۲. مختصات بردارهایی را که A را به A' و B را به B' وصل می‌کند به‌دست آورید.

۳. طول پاره‌خطهای AB و $A'B'$ را به‌دست آورده آنها را با هم مقایسه کنید.

۴. شیب پاره‌خطهای AB و $A'B'$ را به‌دست آورده آنها را با هم مقایسه کنید.

ویژگیهای انتقال

ــ بردارهایی که هر نقطه را به نقطهٔ تصویرش تحت یک انتقال نظیر می‌سازند دارای طولهای مساوی و جهتهای یکسان هستند.

ــ انتقال شیب خط را حفظ می‌کند.

ــ انتقال یک ایزومتری است.

مثال ۳: آیا تبدیلهای داده شدهٔ زیر انتقال هستند؟ درستی جواب خود را با ذکر دلیل ثابت کنید.

الف) $T(x,y)=(x+۱,y-۲)$

ب) $T(x,y)=(۲x,y)$

پ) $T(x,y)=(x-۳,y)$

حل: مورد (الف) یک انتقال است زیرا اگر

$$T(x,y)=(x+۱,y-۲)=(x+h,y+k)$$

آنگاه

$$x+h=x+۱ \text{ و } y+k=y-۲$$

درنتیجه

$$h=۱ \text{ و } k=-۲$$

مورد (ب) یک انتقال نیست زیرا نمی‌توان عدد ثابتی مانند h را یافت به طوری که در ضابطهٔ نگاشت انتقال صدق کند یعنی

$$T(x,y)=(۲x,y)\neq(x+h,y+k)$$

مورد (پ) یک انتقال است زیرا اگر $h=-۳$ و $k=۰$ درنظر بگیریم آنگاه

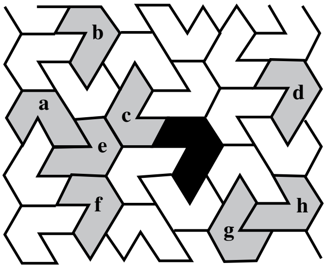
$$T(x,y)=(x-۳,y)=(x+h,y+k)$$

مسأله‌ها

۱. جدول مقابل را کامل کنید.

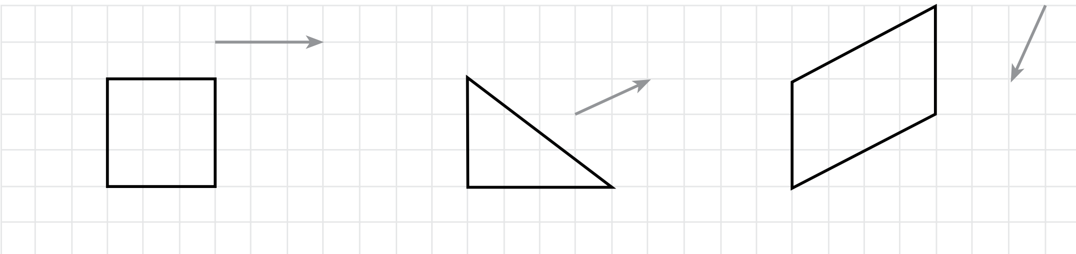
تصویر	نقطه	ضابطهٔ نگاشت انتقال
$(۴,-۱)$	$(۰,۰)$	
	$(۴,-۳)$	$(x,y)\to(x+۵,y+۱)$
$(۳,-۱)$	$(-۲,۱)$	
$(-۳,۰)$		$(x,y)\to(x,y-۲)$
$(۱,۱)$	$(۴,-۲)$	

۲. در نمودار زیر کدامیک از تصویرهای مشخص شده، تصویر انتقال یافتهٔ شکل سایه‌دار است؟



۳. تصویر انتقال یافتهٔ هریک از شکلهای زیر را در امتداد بردار داده شده رسم کنید.

پ)   ب)   الف)



۴. انتقال $T(x,y)=(x-۲,y+۵)$ را در نظر بگیرید.

الف) تصویر نقطه‌های (۰,۰)، (۳,۱) و (۶,−۲) را تحت انتقال T تعیین کنید.

ب) نقطه‌هایی را مشخص کنید که تصویرهایشان (۳,۰)، (۱,۷) و (۱,−۳) باشند.

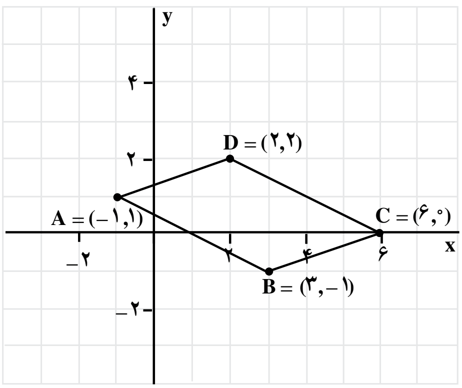
پ) همهٔ نقطه‌ها و تصویرهایشان را که در قسمتهای (الف) و (ب) به دست آورده‌اید در صفحهٔ مختصات مشخص کنید. سپس نقطه‌های متناظر را با یک پاره‌خط به هم وصل کنید.

ت) طول و شیب هر پاره‌خط را تعیین کنید.

۵. شکل مقابل را به دفتر خود منتقل کرده، سپس تصویر متوازی‌الاضلاع ABCD را تحت هر یک از انتقال‌های داده شده رسم کنید.

الف) $T_۱(x,y)=(x+۵,y+۲)$

ب) $T_۲(x,y)=(x-۸,y-۱)$



۶. $A=(-۴,۲)$ ، $B=(۲,۲)$ و $C=(-۴,۵)$ رأسهای یک مثلث هستند، مثلث ABC و تصویرش را تحت هریک از انتقال‌های زیر رسم کنید.

الف) $T_۱(x,y)=(x+۶,y-۳)$ ب) $T_۲(x,y)=(x-۳,y+۱)$

۷. $A=(۱,۱)$ ، $B=(۴,۲)$ ، $C=(۳,۵)$ و $D=(۰,۴)$ رأسهای یک مربع‌اند.

الف) مربع و تصویرش را تحت انتقالی که رأس A را بر روی رأس B تصویر می‌کند، رسم کنید.

ب) قاعدهٔ نگاشت این انتقال را بنویسید.

۸. تمرین ۷ را برای انتقال‌هایی که رأس A را بر روی

الف) رأس C ب) رأس D

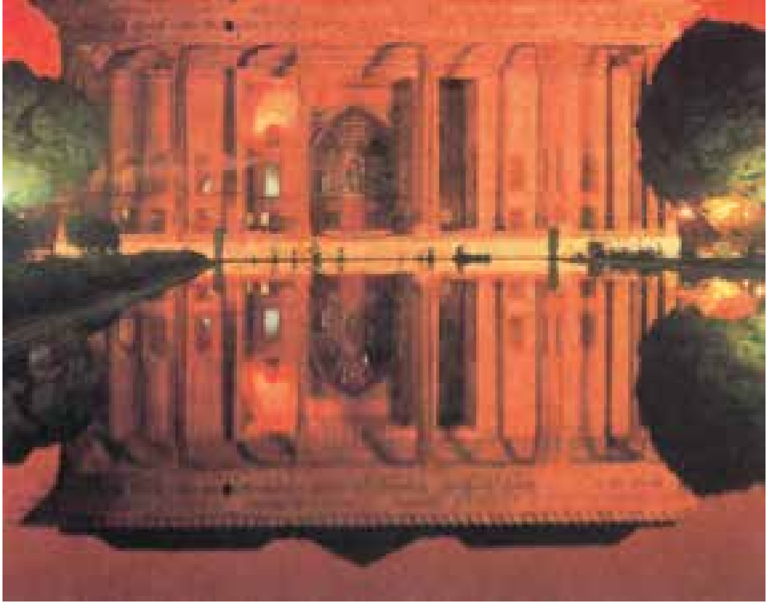
تصویر می‌کند، تکرار کنید.

۹. $P=(-۳,۰)$ ، $Q=(۵,۴)$ و $R=(۲,-۲)$ رأسهای یک مثلث هستند.

الف) مثلث و تصویرش را تحت انتقال $T(x,y)=(x+۸,y+۱)$ رسم کنید.

ب) طول ضلعها، شیب ضلعها و مساحت را در مثلث و تصویرش با هم مقایسه کنید.

۱۰. نگاشت انتقال را در تصویر زیر توصیف کنید.



کاخ چهلستون در اصفهان

۳ــ۳ ــ بازتاب

شما غالباً بازتاب ساختمانها، درختها و ابرها را در آبگیرها، استخرها، دریاچه‌ها و نهرها دیده‌اید. فروشگاهها و خانه‌ها پُر هستند از آینه‌هایی که تصویر اجسام را منعکس می‌سازند. هرگاه در آینه می‌نگرید، بازتاب[۱] خود را در آینه می‌بینید. بازتاب شما در آینه به همان فاصله از پشت آینه دیده می‌شود که شما از جلو آن.

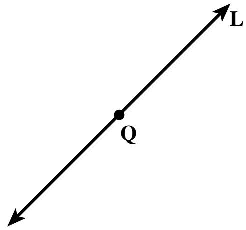
فعالیت ۳ــ۳

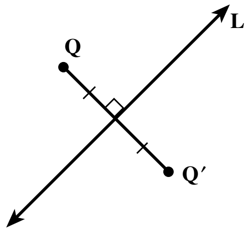
شکلی در سمت چپ یک ورق کاغذ بکشید. خطهای رسم شده را با مداد پر رنگ کنید. سپس کاغذ را از وسط تا کرده و روی خطهای پر رنگ شده که از پشت کاغذ مشخص هستند، شکل را دوباره برگردان کنید. چه می‌بینید؟ فرق بین شکل برگردان شده و شکل اصلی چیست؟ نقطه‌های متناظر شکلها را به هم وصل کنید. خط تای کاغذ نسبت به آنها چه وضعی دارد؟

به ازای هرخط L در صفحه، **بازتاب نسبت به خط L**، تبدیلی است که تحت آن تصویر هر نقطهٔ Q که روی خط L نباشد نقطه‌ای مانند Q' است به‌طوری که خط L عمودمنصف QQ' شود و تصویر هر نقطه مانند Q که روی خط L باشد خودش شود. خط L **محور تقارن** بازتاب نامیده می‌شود.

۱ــ Reflection

یعنی





نقطهٔ Q روی خط L است.
نقطهٔ Q بازتاب خودش است.

نقطهٔ Q روی خط L نیست.
نقطهٔ ′Q بازتاب Q نسبت به خط L است.
خط L عمودمنصف ′QQ است.

شکل ۹

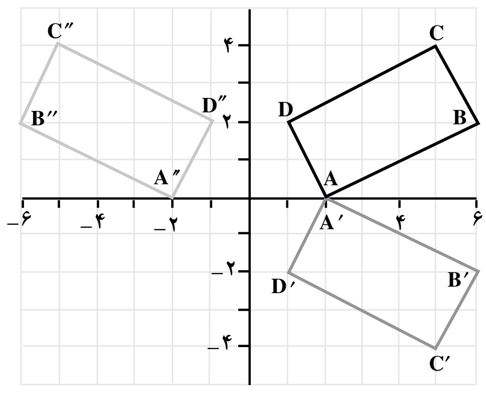
مثال ۱: $A=(۲,۰)$ ، $B=(۶,۲)$ ، $C=(۵,۴)$ و $D=(۱,۲)$ رأسهای یک مستطیل هستند. مستطیل ABCD و تصویرهایش را تحت هریک از تبدیلهای زیر در یک صفحهٔ مختصات رسم کنید، سپس ویژگی هریک از آنها را توضیح دهید.

الف) $R_۱(x,y)=(x,-y)$

ب) $R_۲(x,y)=(-x,y)$

حل:

نقطه	تصویرها	
(x,y)	$(x,-y)$	$(-x,y)$
$A=(۲,۰)$	$A'=(۲,۰)$	$A''=(-۲,۰)$
$B=(۶,۲)$	$B'=(۶,-۲)$	$B''=(-۶,۲)$
$C=(۵,۴)$	$C'=(۵,-۴)$	$C''=(-۵,۴)$
$D=(۱,۲)$	$D'=(۱,-۲)$	$D''=(-۱,۲)$



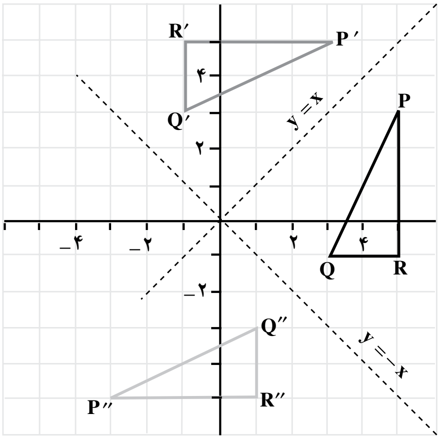
شکل ۱۰

تبدیل (الف) بازتاب نسبت به محور x ها و تبدیل (ب) بازتاب نسبت به محور y ها است.

مثال۲: $P=(۵,۳)$ ، $Q=(۳,-۱)$ و $R=(۵,-۱)$ رأسهای یک مثلث هستند. مثلث PQR و تصویرهایش را تحت هریک از تبدیلهای زیر در یک صفحهٔ مختصات رسم کرده، سپس ویژگی هر تبدیل را مشخص کنید.

الف) $R_۱(x,y)=(y,x)$ ب) $R_۲(x,y)=(-y,-x)$

حل:

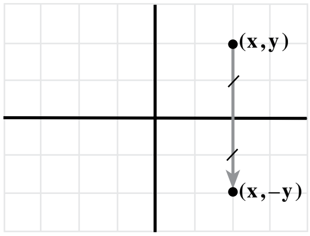


شکل ۱۱

نقطه	تصویرها	
(x,y)	(y,x)	(−y,−x)
P = (۵,۳)	P′ = (۳,۵)	P″ = (−۳,−۵)
Q = (۳,−۱)	Q′ = (−۱,۳)	Q″ = (۱,−۳)
R = (۵,−۱)	R′ = (−۱,۵)	R″ = (۱,−۵)

تبدیل(الف)بازتاب نسبت به خط $y = x$ و تبدیل (ب) بازتاب نسبت به خط $y = -x$ است.
ضابطهٔ هر نگاشت بازتاب بستگی به خطی دارد که **محور تقارن** آن است.

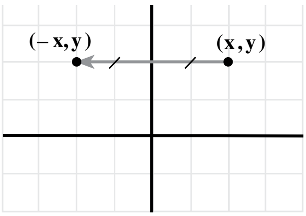
(الف)



بازتاب نسبت به محور xها :

$R(x,y) = (x,-y)$

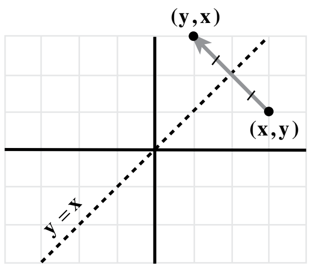
(ب)



بازتاب نسبت به محور yها :

$R(x,y) = (-x,y)$

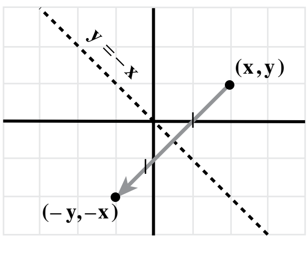
(پ)



بازتاب نسبت به خط $y = x$:

$R(x,y) = (y,x)$

(ت)



بازتاب نسبت به خط $y = -x$:

$R(x,y) = (-y,-x)$

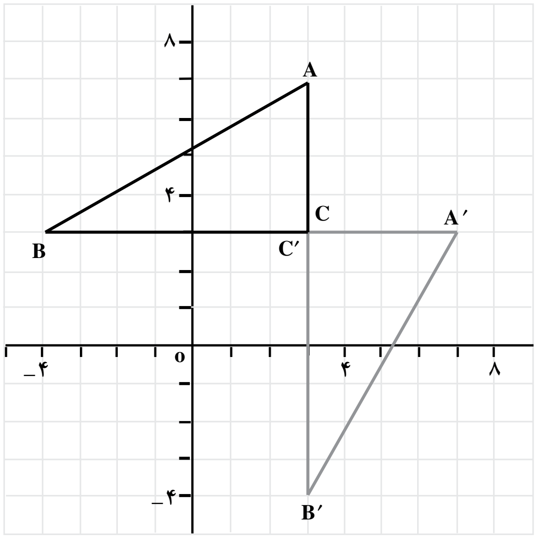
شکل ۱۲

مثال۳: $A = (۳,۷)$ ، $B = (-۴,۳)$ و $C = (۳,۳)$ رأسهای یک مثلث هستند.

الف) مثلث و تصویرش را تحت تبدیل $R(x,y) = (y,x)$ رسم کنید.

ب) مثلث و تصویرش را از نظر طول و شیب ضلعها با هم مقایسه کنید.

حل: الف)



نقطه	تصویر
(x,y)	(y,x)
A = (۳,۷)	A′ = (۷,۳)
B = (−۴,۳)	B′ = (۳,−۴)
C = (۳,۳)	C′ = (۳,۳)

شکل ۱۳

ب)

$$AB \text{ طول } = \sqrt{(-۴-۳)^۲ + (۳-۷)^۲} = \sqrt{۶۵} \text{ واحد}$$

$$A'B' \text{ طول } = \sqrt{(۳-۷)^۲ + (-۴-۳)^۲} = \sqrt{۶۵} \text{ واحد}$$

طول AB، با طول تصویرش یعنی $A'B'$ برابر است. به همین ترتیب می‌توان نشان داد طول سایر ضلعها نیز با طول تصویرهایشان برابر هستند. تحت این بازتاب، طول ثابت می‌ماند. حال به بررسی شیب ضلعها و شیب تصویرهایشان می‌پردازیم.

$$AB \text{ شیب } : \frac{۳-۷}{-۴-۳} = \frac{۴}{۷} \qquad A'B' \text{ شیب } = \frac{-۴-۳}{۳-۷} = \frac{۷}{۴}$$

یعنی ضلع AB موازی تصویرش $A'B'$ نیست. پس شیب خطها تحت بازتاب الزاماً حفظ نمی‌شود.

در شکل مثال ۳، برای حرکت از A به B و به C، جهت حرکت عکس جهت حرکت عقربه‌های ساعت است، در صورتی که برای حرکت از A' به B' و به C' جهت حرکت، در جهت حرکت عقربه‌های ساعت است. پس بازتاب جهت حرکت را عکس می‌کند.

ویژگیهای بازتاب نسبت به یک خط

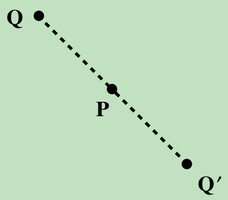
ــ بازتاب شیب خط را الزاماً حفظ نمی‌کند.

ــ بازتاب جهت شکل را حفظ نمی‌کند.

ــ بازتاب یک ایزومتری است.

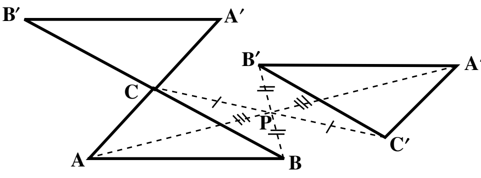
تاکنون بازتاب نسبت به یک خط را مورد بررسی قرار دادیم. نگاشت بازتاب نسبت به یک نقطه نیز از اهمیت خاصی برخوردار است.

به ازای هر نقطهٔ P در صفحهٔ **بازتاب نسبت به نقطهٔ P**، نگاشتی است که تحت آن هر نقطهٔ Q در صفحه روی نقطه‌ای مانند Q' طوری نگاشته می‌شود که Q، P و Q' روی یک خط راست باشند و $PQ = PQ'$. نقطه P **مرکز تقارن** این بازتاب نامیده می‌شود.



بسیاری از پدیده‌های طبیعی متقارن هستند. ببرها نمونه‌های زیبایی از این تقارن هستند.

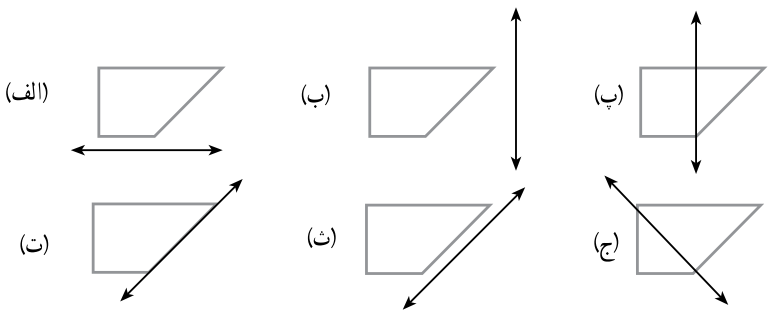
در شکل مقابل مثلث $A'B'C'$ بازتاب مثلث ABC نسبت به نقطهٔ C است و مثلث $A'\,B'\,C'$ بازتاب مثلث ABC نسبت به نقطهٔ P است.

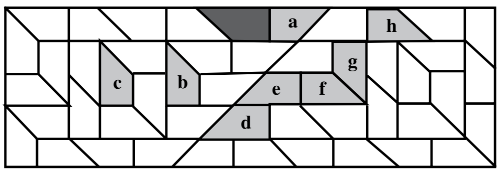


شکل ۱۴

مسأله‌ها

۱. نمودارهای زیر را در دفترتان کشیده و بازتاب آنها را تحت خطهای داده شده رسم کنید.





۲. در نمودار مقابل کدامیک از تصاویر مشخص شده، تصویر شکل سایه‌دار تحت بازتـاب نسبت به یک خط است؟

۳. $A=(۳,۱)$ ، $B=(۷,۱)$ و $C=(۷,۳)$ رأسهای یک مثلث‌اند. مثلث و تصویرش را تحت بازتاب‌های زیر رسم کنید.

الف) $R_۱(x,y)=(-x,y)$ ب) $R_۲(x,y)=(x,-y)$

پ) $R_۳(x,y)=(y,x)$ ت) $R_۴(x,y)=(-y,-x)$

۴. $J=(۲,۲)$ ، $K=(۱۰,۶)$ ، $L=(۰,۶)$ رأسهای یک مثلث هستند.

الف) مثلث و تصویرش را تحت بازتاب $R(x,y)=(x,-y)$ رسم کنید.

ب) مثلث و تصویرش را از نظر طول و شیب ضلعها و مساحت با هم مقایسه کنید.

۵. $A=(۰,۲)$ ، $B=(-۵,۰)$ ، $C=(-۳,-۵)$ و $D=(۲,-۳)$ رأسهای یک مربع‌اند.

الف) مربع و تصویرش را تحت بازتاب $R(x,y)=(-y,-x)$ رسم کنید.

ب) مربع و تصویرش را از نظر طول و شیب ضلعها و مساحت با هم مقایسه کنید.

۶. $P=(۲,۴)$ ، $Q=(-۱,۳)$ و $R=(۱,-۱)$ رأسهای یک مثلث‌اند.

الف) مثلث و تصویرش را تحت تبدیل $F(x,y)=(-x+۶,y)$ رسم کنید.

ب) تبدیل F را توصیف کنید.

۷. $E=(-۲,۱)$ ، $F=(-۳,-۲)$ ، $G=(۳,۰)$ و $H=(۴,۳)$ رأسهای یک متوازی‌الاضلاع هستند.

الف) متوازی‌الاضلاع و تصویرش را تحت تبدیل $T(x,y)=(y+۳,x-۳)$ رسم کنید.

ب) تبدیل T را توصیف کنید.

۸. $P=(۲,۳)$ ، $Q=(۴,-۱)$ ، $R=(۸,۱)$ و $S=(۷,۴)$ رأسهای یک چهار ضلعی هستند.

الف) چهار ضلعی و تصویرش را تحت تبدیل $G(x,y)=(-y-۱,-x-۱)$ رسم کنید.

ب) تبدیل G را توصیف کنید.

۹. $A=(۱,۴)$ ، $B=(۳,-۲)$ و $C=(۵,۱)$ رأسهای یک مثلث هستند.

الف) تصویر مثلث ABC را تحت بازتاب نسبت به خط

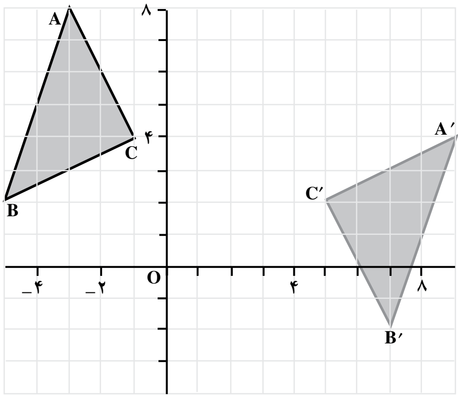
ـ $x+۲=۰$ رسم کرده آن را $A'B'C'$ بنامید.

ـ $y+۳=۰$ رسم کرده آن را $A''B''C''$ بنامید.

ب) تصویر مثلث $A'B'C'$ را تحت بازتاب نسبت به خط $y+۳=۰$ رسم کنید.

پ) تصویر مثلث $A''B''C''$ را تحت بازتاب نسبت به خط $x+۲=۰$ رسم کنید.

۱۰. در نمودار مقابل مثلث $A'B'C'$ ، تصویر بازتاب مثلث ABC است.



الف) محور تقارن را رسم کنید.

ب) معادلهٔ محور تقارن را بنویسید.

پ) تصویر $P=(-۳,۵)$ را تحت این بازتاب به دست آورید.

۱۱. تحت یک بازتاب نقطهٔ $(-۳,-۱)$ روی نقطهٔ $(۳,۵)$ تصویر می‌شود.

الف) محور تقارن را رسم کرده، تصویر نقطه‌های $(۱,۵)$ ، $(۲,-۱)$ و $(۴,-۲)$ را تحت همان بازتاب در صفحهٔ مختصات مشخص کنید.

ب) نقطه‌هایی که تحت همان بازتاب تصویرشان نقطه‌های $(۳,۲)$ ، $(-۴,۶)$ و $(-۱,-۳)$ باشند، را مشخص کنید.

پ) معادلهٔ محور تقارن را بنویسید.

۱۲. اگر O مبدأ مختصات باشد، مختصات تبدیل یافتهٔ هر نقطهٔ (x,y) تحت بازتاب نسبت به نقطهٔ O را به‌دست آورید.

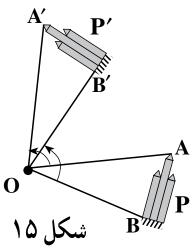
شهر بازی تهران

۳ـ۴ ــ دَوران

یک نمونه از مراکز تفریحی که در برخی شهرستانها وجود دارد، شهر بازی است. در این‌گونه مراکز وسایل بازی متعددی وجود دارد که اغلب آنها با ایجاد حرکتهای مختلف در بازدیدکنندگان شور و هیجان ایجاد می‌کند. از جمله رایجترین وسایل در این مراکز، چرخ و فلک است. حرکت چرخ و فلک به‌صورت چرخشی است که **دوران**[1] نامیده می‌شود.

حرکتهای دورانی از جمله حرکتهایی هستند که در زندگی روزمرّه بسیار با آنها سروکار داریم. به عنوان مثال، هنگام چرخاندن دستگیرهٔ در، پایین‌آوردن شیشهٔ اتومبیل، بازکردن شیر آب، تراشیدن مداد و گرداندن کلید در قفل تجربه‌ای از حرکت دورانی به‌دست آورده‌اید. آیا تا به حال به ساختار هندسی این‌گونه حرکتها نیز فکر کرده‌اید؟

فعالیت ۳ــ۴



شکل ۱۵

تصویر مقابل مدلی از یک چرخ و فلک است. این تصویر، دو وضعیت مختلف از یک موشک چرخ و فلکِ در حالِ حرکت را نشان می‌دهد. وضعیت اول موشک را با **P**، وضعیت دوم آن را با **P′** و محور چرخ و فلک را با O نشان داده‌ایم.

۱ــ Rotation

۱. A و B دو نقطه از وضعیت اول، A' و B' دو نقطهٔ متناظر آنها از وضعیت دوم موشک هستند. زاویه‌های $A\hat{O}A'$ و $B\hat{O}B'$ را به‌وسیلهٔ نقاله اندازه گرفته با هم مقایسه کنید.

۲. دو نقطهٔ متناظر دیگر روی **P** و **P′** به دلخواه در نظر بگیرید و آنها را X و X' نامگذاری کنید. اندازهٔ $X\hat{O}X'$ را تعیین کنید.

۳. تجربهٔ بند ۲ را با انتخاب نقطه‌های متناظر دیگر تکرار کنید.

۴. دایره‌ای به مرکز O و شعاع OA رسم کنید. آیا این دایره از A' می‌گذرد؟

۵. دایره‌هایی به مرکز O و شعاعهای OB و OX رسم کنید. آیا این دایره‌ها نیز از B' و X' می‌گذرند؟

۶. آیا نتیجهٔ بند ۵، برای هر دو نقطهٔ متناظر دیگر نیز برقرار است؟

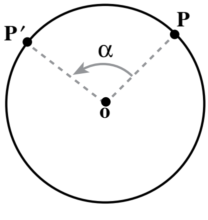
احتمالاً از انجام فعالیت بالا به این نتیجه رسیده‌اید که نقطه‌های متناظر روی دایره‌ای به مرکز O جابجا می‌شوند، که این نقطه مرکز دوران نامیده می‌شود. همانطور که مشاهده کردید از وصل کردن نقطه‌های متناظر به مرکز دوران، زاویه‌های برابر تشکیل شدند ($A\hat{O}A' = B\hat{O}B' = X\hat{O}X' = \cdots$)، که این اندازهٔ مشترک زاویهٔ دوران نامیده می‌شود.

یک دوران به مرکز O و زاویهٔ α، تبدیلی است که هر نقطهٔ A در صفحه را به نقطه‌ای مانند A' از آن صفحه نظیر می‌کند به‌طوری که

الف) مرکز دوران یعنی نقطهٔ O ثابت است ؛

ب) اگر A نقطه‌ای غیر از O باشد، آنگاه $OA = OA'$ و $A\hat{O}A' = \alpha$ (زاویهٔ دوران).

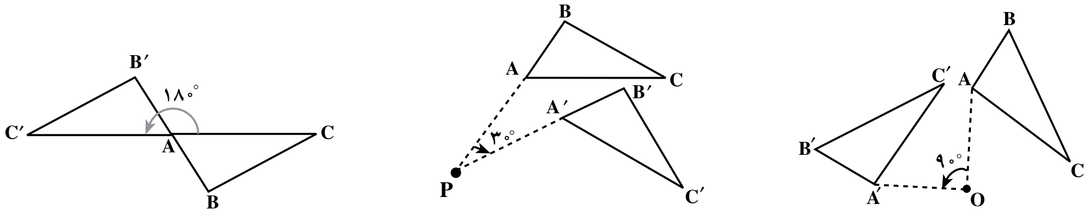
در دایره‌ای به مرکزO نقطه‌ای مانند P را در نظر گرفته و در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت، روی دایره از P به P' حرکت کنید. به‌طوری که $P\hat{O}P' = \alpha$. چون $OP = OP'$، پس P' تصویر نقطهٔ P تحت دوران به مرکزO و اندازهٔ α است.



شکل ۱۶

اگر α یعنی اندازهٔ زاویه مثبت باشد، دوران در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت است و اگر α منفی باشد دوران در جهت حرکت عقربه‌های ساعت است.

مثال ۱:



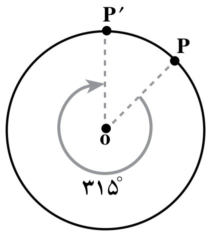
الف) مرکز دوران O
زاویهٔ دوران °۹۰

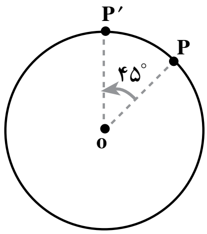
ب) مرکز دوران P
زاویهٔ دوران °۳۰−

پ) مرکز دوران A
زاویهٔ دوران °۱۸۰

شکل ۱۷

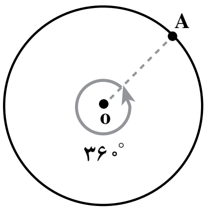
دو دوران شکل زیر را با یکدیگر مقایسه کنید. شکل سمت چپ، P را توسط دورانی به مرکز O و زاویهٔ °۴۵ روی P′ تصویر می‌کند و شکل سمت راست P را توسط دورانی به مرکز O و زاویهٔ °۳۱۵− روی P′ تصویر می‌کند. توجّه کنید که نتیجهٔ هر دو دوران یکسان است.





شکل ۱۸

دورانی به زاویهٔ °۳۶۰ ، هر نقطه‌ای مانند A را به محل اولیّه‌اش تصویر می‌کند. یک چنین دورانی، یک **دوران کامل** خوانده می‌شود.



شکل ۱۹

مثال ۲: $A=(۲,۰)$ ، $B=(۵,۰)$ و $C=(۵,۲)$ رأسهای یک مثلث هستند. در یک صفحه، مثلث ABC و تصویرهایش را تحت هر یک از تبدیلهای زیر رسم کرده سپس هر تبدیل را توصیف کنید.

الف) $R_۱(x,y)=(-y,x)$

ب) $R_۲(x,y)=(-x,-y)$

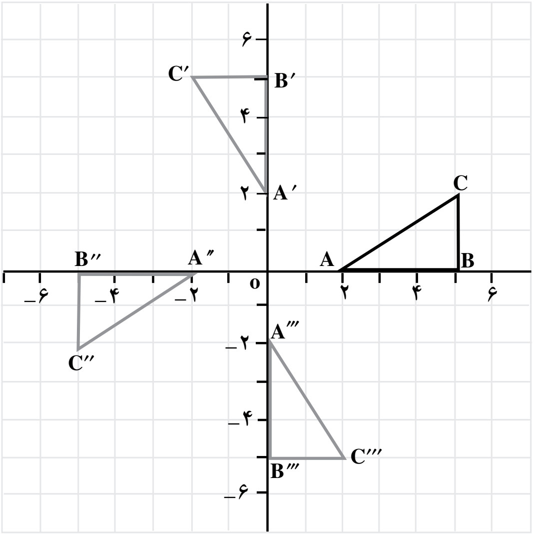
پ) $R_۳(x,y)=(y,-x)$

نقطه	تصویرها		
(x,y)	(−y,x)	(−x,−y)	(y,−x)
A = (۲,۰)	A′ = (۰,۲)	A″ = (−۲,۰)	A‴ = (۰,−۲)
B = (۵,۰)	B′ = (۰,۵)	B″ = (−۵,۰)	B‴ = (۰,−۵)
C = (۵,۲)	C′ = (−۲,۵)	C″ = (−۵,−۲)	C‴ = (۲,−۵)

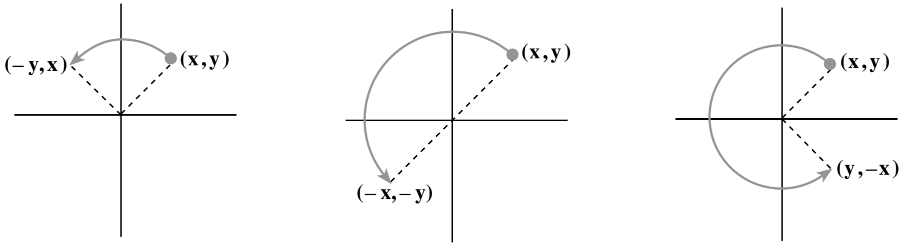
حل:

این تبدیلها، دوران‌هایی به مرکز مبدأ مختصات و به ترتیب به زاویه‌های °۹۰، °۱۸۰ و °۲۷۰ هستند.

ضابطهٔ نگاشت برای دوران‌ها بستگی به مکان مرکز دوران و اندازهٔ زاویهٔ دوران دارد.



شکل ۲۰



R(x,y) = (y,−x)
مرکز دوران (۰,۰)
زاویهٔ دوران °۲۷۰

R(x,y) = (−x,−y)
مرکز دوران (۰,۰)
زاویهٔ دوران °۱۸۰

R(x,y) = (−y,x)
مرکز دوران (۰,۰)
زاویهٔ دوران °۹۰

شکل ۲۱

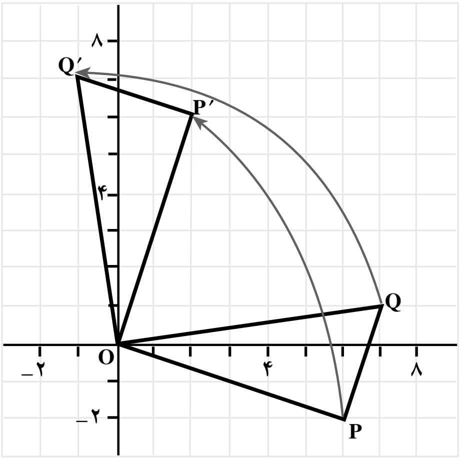
نکته: دوران به مرکز O و زاویهٔ °۱۸۰، **بازتاب نسبت به نقطهٔ** O نیز هست. در این حالت نقطهٔ O **مرکز تقارن** است.

مثال ۳: O = (۰,۰) ، P = (۶,−۲) و Q = (۷,۱) رأسهای یک مثلث هستند.

الف) نمودار مثلث OPQ و تصویرش تحت تبدیل R(x,y) = (−y,x) را رسم کنید.

ب) طول و شیب ضلعهای مثلث و تصویرش را با هم مقایسه کنید.

حل: الف)



شکل ۲۲

نقطه	تصویر
(x,y)	$(-y,x)$
$O=(۰,۰)$	$O'=(۰,۰)$
$P=(۶,-۲)$	$P'=(۲,۶)$
$Q=(۷,۱)$	$Q'=(-۱,۷)$

این تبدیل دورانی به مرکز $O=(۰,۰)$ و زاویهٔ ۹۰° است.

ب)

$$PQ \text{ طول } = \sqrt{(۷-۶)^۲+(۱+۲)^۲}=\sqrt{۱۰} \qquad \text{واحد}$$

$$P'Q' \text{ طول } = \sqrt{(-۱-۲)^۲+(۷-۶)^۲}=\sqrt{۱۰} \qquad \text{واحد}$$

طول PQ و طول تصویر آن یعنی $P'Q'$ با یکدیگر برابرند. به همین ترتیب می‌توان نشان داد که سایر ضلعها نیز دارای طولی برابر طول تصویرشان هستند. پس تحت این دوران طول پاره‌خطها ثابت می‌ماند.

$$PQ \text{ شیب } = \frac{۱+۲}{۷-۶}=۳ \qquad \text{و} \qquad P'Q' \text{ شیب } = \frac{۷-۶}{-۱-۲}=\frac{-۱}{۳}$$

به طوری که دیده می‌شود، PQ بر تصویرش $P'Q'$ عمود است. می‌توان نشان داد که ضلعهای دیگر نیز بر تصویر خود عمود هستند. بنابراین، لزومی ندارد تحت دوران، شیب خطها ثابت بماند.

تحت دوران، فاصلهٔ بین نقطه‌ها ثابت می‌ماند، یعنی دوران یک ایزومتری است. پس تصویر یک شکل تحت دوران، شکلی همنهشت با شکل اولیّه خواهد بود.

با توجه به مثال ۳ ویژگیهای دوران را می‌توان به شکل زیر در نظر گرفت.

ویژگیهای دوران

ــ دوران مرکز دوران را ثابت نگه می‌دارد ؛

ــ دوران الزاماً شیب خط را حفظ نمی‌کند ؛

ــ دوران یک ایزومتری است.

مسأله‌ها

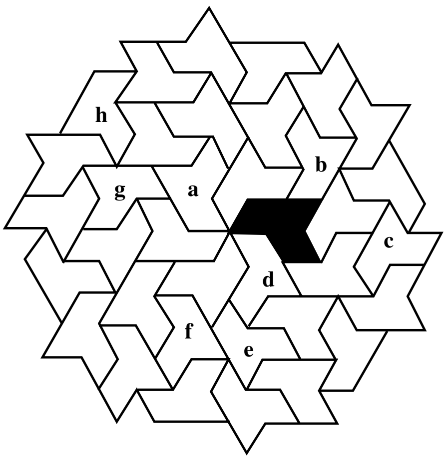
۱. دوران $R(x,y)=(-y,x)$ مفروض است.

الف) تصویر نقطه‌های (۴,۱) ، (۰,۵) و (−۳,۲) را تحت این دوران تعیین کنید.

ب) نقطه‌هایی را بیابید که تحت این دوران، تصویرشان (۲,۶) ، (۳,۰) و (−۴,−۱) باشد.

پ) همهٔ نقطه‌ها و تصویرهایی را که در (الف) و (ب) به دست آورده‌اید در صفحهٔ مختصات مشخص کنید.

۲. در نمودار زیر، با استفاده از استدلال استقرایی، تعیین کنید کدام یک از تصویرهای مشخص شده ، تصویر دوران یافتهٔ شکل سایه‌دار نسبت به یک مرکز دوران است؟

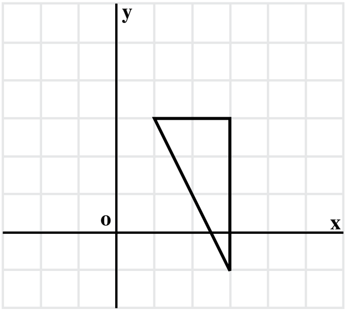


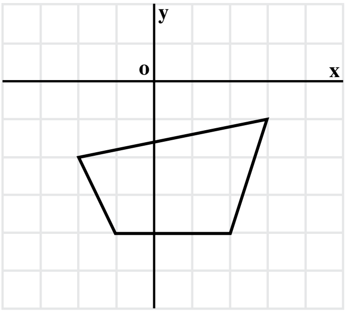
۳. با در نظر گرفتن O به عنوان مرکز دوران، دوران یافتهٔ شکلها را در هر یک از حالتهای

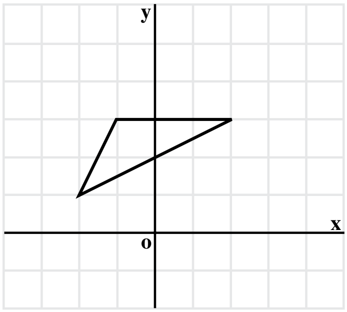
زیر رسم کنید.

الف) دوران ۹۰°

ب) دوران ۱۸۰°







۴. $P=(۲,۵)$ ، $A=(۴,۵)$ و $K=(۴,۱)$ رأسهای یک مثلث هستند.

الف) مثلث و تصویرش را تحت دوران $R(x,y)=(-y,x)$ رسم کنید.

ب) طول و شیب ضلعها و مساحت را در مثلث و تصویرش با هم مقایسه کنید.

۵. $A=(-۱,-۲)$ ، $M=(۷,۲)$ ، $I=(۵,۶)$ و $N=(-۳,۲)$ رأسهای یک مستطیل هستند.

الف) مستطیل و تصویرش را تحت دوران $R(x,y)=(y,-x)$ رسم کنید.

ب) طول و شیب ضلعها و مساحت را در مستطیل و تصویرش با هم مقایسه کنید.

۶. $I=(۵,۰)$ ، $L=(۷,۰)$ و $A=(۵,۳)$ رأسهای یک مثلث هستند.

الف) مثلث و تصویرش را تحت تبدیل $F(x,y)=(-y+۳,x-۳)$ رسم کنید.

ب) تصویر مثلث ALI را ابتدا تحت دوران $R(x,y)=(-y,x)$ پیدا کرده و آن را $A'L'I'$

بنامید. سپس تصویر $A'L'I'$ را تحت انتقال $T(x,y)=(x+۳,y-۳)$ تعیین کنید. نتیجهٔ به دست آمده را با نتیجهٔ (الف) مقایسه کنید.

۷. $H=(-۳,۱)$ ، $O=(-۲,-۲)$ ، $M=(۱,-۱)$ و $A=(۳,۳)$ رأسهای یک ذوزنقه هستند. ذوزنقه و تصویرش را تحت هر یک از تبدیلهای زیر رسم کنید.

الف) $F(x,y)=(-y+۶,x)$ ب) $G(x,y)=(-x+۶,-y+۶)$

پ) $S(x,y)=(y,-x+۶)$

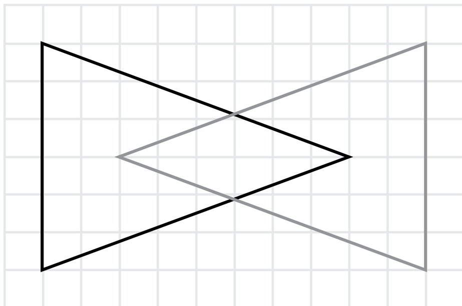
۸. $G=(۱,-۱)$ ، $O=(۲,-۵)$ ، $L=(۵,-۵)$ و $I=(۶,-۳)$ رأسهای یک چهارضلعی هستند.

الف) چهارضلعی و تصویرش را تحت تبدیل $T(x,y)=(x+۹,-y)$ رسم کنید.

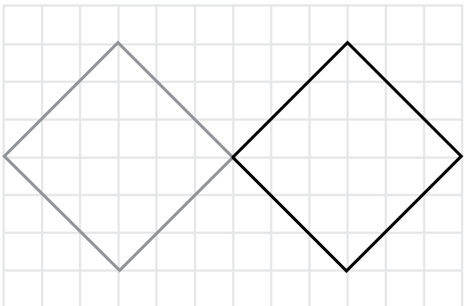
ب) نشان دهید که تبدیل T، نه انتقال است، نه بازتاب و نه دوران.

پ) این تبدیل جدید چه ویژگیهایی دارد؟

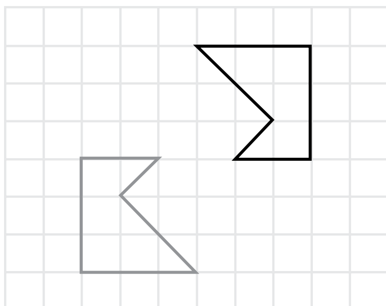
۹. شکلهای خاکستری، دوران یافتهٔ شکلهای سیاه تحت یک دوران هستند. در هر یک از موارد زیر، مرکز دوران و زاویهٔ دوران را مشخص کنید.



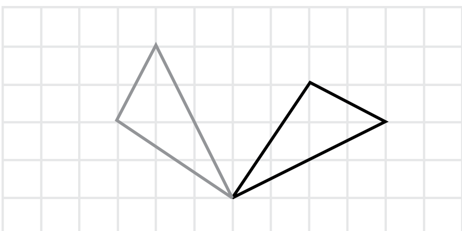
الف)



ب)



پ)



ت)

سقف مسجد شیخ‌لطف‌الله در اصفهان

۳ ــ ۵ ــ تجانس

تنها اختلافی که دو شکل متشابه با هم دارند، آن است که الزاماً ابعاد با هم یکسان نیستند. وقتی یک تصویر عکاسی را بزرگ می‌کنید، تنها تغییری که نسبت به تصویر اولیّه پیدا می‌کند آن است که با یک مقیاس، تمام ابعاد آن بزرگ می‌شود. به همین ترتیب اگر بخواهند تصویر نقشهٔ بزرگ جغرافیایی ایران را که در کلاس شما آویزان است در کتاب شما بیاورند، باید تمام ابعاد تصویر را با یک مقیاس، کوچک کنند.

$0 < K < 1$ $\quad$ $K=1$ $\quad$ $K > 1$

در واقع، تصویر جدید هم‌جنس اولی امّا با یک مقیاس، بزرگتر یا کوچکتر شده است. ساده‌ترین تبدیل از این نوع **تجانس**[1] است. تحت تجانس، همهٔ ابعاد یک شکل با یک عامل $k \neq 0$ که **نسبت**

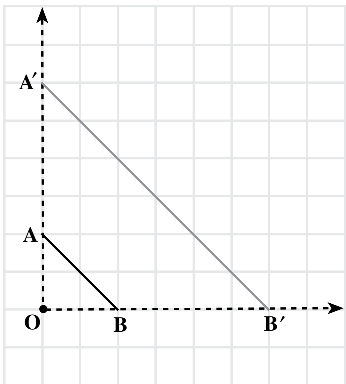
1ــ Dilation

تجانس (مقیاس) نامیده می‌شود، بزرگ یا کوچک می‌شود.

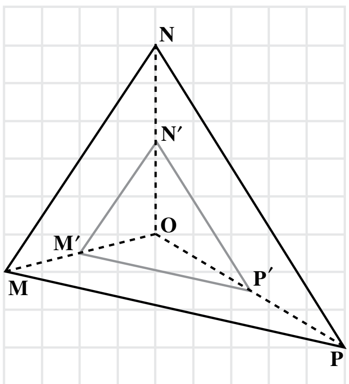
> **تجانس به مرکز O و نسبت k** تبدیلی است که هر نقطهٔ A در صفحه را به نقطه‌ای مانند A' از آن صفحه طوری نظیر کند که
> الف) مرکز تجانس یعنی نقطهٔ O ثابت باشد ؛
> ب) A' روی نیم خط OA قرار گیرد و $OA' = k.OA$.

توجه: در این کتاب نسبت تجانس را مثبت در نظر می‌گیریم.

مثال ۱: شکل زیر نمونه‌هایی از تجانس را نشان می‌دهد.



الف)
مرکز تجانس O
مقیاس ۳



ب)
مرکز تجانس O
مقیاس $\frac{۱}{۲}$

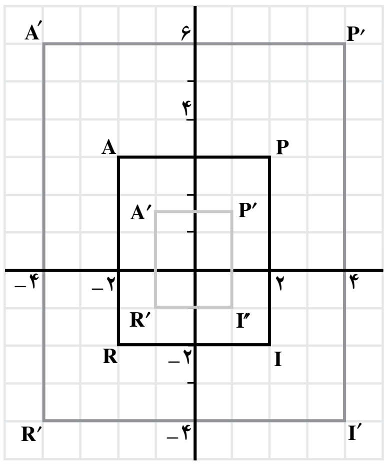
شکل ۲۳

مثال ۲: $P=(۲,۳)$ ، $A=(-۲,۳)$ ، $R=(-۲,-۲)$ و $I=(۲,-۲)$ رأسهای یک مستطیل هستند. این مستطیل و تصویرهایش را تحت هر یک از تبدیلهای زیر در یک دستگاه مختصات رسم کرده، سپس آنها را با مستطیل PARI مقایسه کنید.

الف) $D_۱(x,y)=(۲x,۲y)$

ب) $D_۲(x,y)=(\frac{۱}{۲}x,\frac{۱}{۲}y)$

حل:

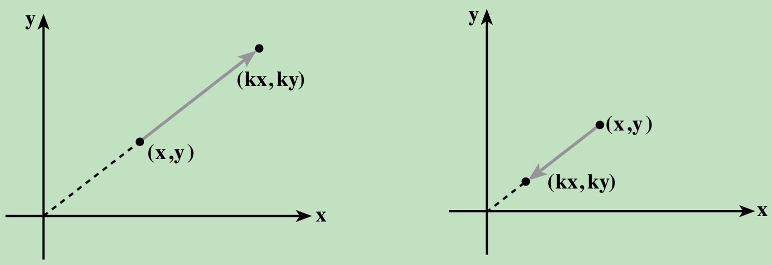


شکل ۲۴

نقطه	تصویر	
(x,y)	$(۲x,۲y)$	$(\frac{۱}{۲}x,\frac{۱}{۲}y)$
$P=(۲,۳)$	$P'=(۴,۶)$	$P'=(۱,۱/۵)$
$A=(-۲,۳)$	$A'=(-۴,۶)$	$A'=(-۱,۱/۵)$
$R=(-۲,-۲)$	$R'=(-۴,-۴)$	$R'=(-۱,-۱)$
$I=(۲,-۲)$	$I'=(۴,-۴)$	$I'=(۱,-۱)$

هر دو تبدیل بالا تجانس هستند. تبدیل (الف) مستطیل را با مقیاس ۲ بزرگ کرده و تبدیل (ب) آن را با مقیاس $\frac{۱}{۲}$ کوچک کرده است.

ضابطهٔ نگاشت تجانس: تبدیل $D(x,y)=(kx,ky)$ در صفحهٔ مختصات یک تجانس با نسبت تجانس k و مرکز تجانس $(۰,۰)$ را نشان می‌دهد.



اگر $K>۱$ ، تجانس یک **انبساط** است.

اگر $۰<K<۱$ تجانس یک **انقباض** است.

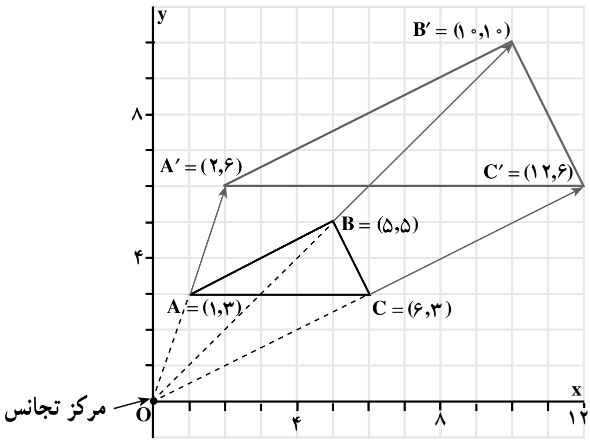
مثال ۳: $A=(۱,۳)$ ، $B=(۵,۵)$ و $C=(۶,۳)$ رأسهای یک مثلث‌اند.

الف) مثلث و تصویرش تحت تبدیل $D(x,y)=(۲x,۲y)$ را رسم کنید.

ب) مثلث و تصویرش را از نظر طول و شیب ضلعها و مساحتشان با هم مقایسه کنید.

پ) خطهایی که نقطه‌های نظیر را به هم وصل می‌کنند، نسبت به هم چه وضعی دارند؟

حل: الف)



شکل ۲۵

ب) $A'B'$ طول $= \sqrt{(10-2)^2 + (10-6)^2}$ و AB طول $= \sqrt{(5-1)^2 + (5-3)^2}$

$= \sqrt{64+16}$ $\quad\quad$ $= \sqrt{16+4}$

$= \sqrt{80}$ $\quad\quad$ $= \sqrt{20}$

$= 4\sqrt{5}$ واحد $\quad\quad$ $= 2\sqrt{5}$ واحد

پس $A'B' = 2AB$. همچنین $B'C' = 2BC$ و $A'C' = 2AC$ (خودتان محاسبه را انجام دهید). بنابراین،

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = 2$$

و $\quad A'B'$ شیب $= \frac{10-6}{10-2} = \frac{1}{2}$ $\quad\quad$ AB شیب $= \frac{5-3}{5-1} = \frac{1}{2}$

درنتیجه، $A'B' \| AB$. حال نشان دهید که $B'C' \| BC$ و $A'C' \| AC$.

با توجه به شکل،

ABC مساحت مثلث $= \frac{1}{2} b.h = \frac{1}{2}(5)(2) = 5$ $\quad$ (واحد)^2

$A'B'C'$ مساحت مثلث $= \frac{1}{2} b.h = \frac{1}{2}(10)(4) = 20$ $\quad$ (واحد)^2

بنابراین،

$A'B'C'$ مساحت مثلث $= 4$ (ABC مساحت مثلث)

پ) از به هم وصل کردن نقطه‌های نظیر، خطهای AA' ، BB' و CC' به دست می‌آیند (شکل ۲۵). با توجه به شکل، مشاهده می‌شود خطهایی که نقطه‌های نظیر را به هم وصل می‌کنند از مبدأ مختصات می‌گذرند. این مطلب را با استفاده از شیب خطها ثابت می‌کنیم.

$$\text{شیب } OA' = \frac{۶-۳}{۲-۰} = ۳ \qquad \text{شیب } OA = \frac{۳-۰}{۱-۰} = ۳$$

بنابراین، نقطه‌های O، A و A' روی یک خط راست قرار دارند. در این حالت نقطه‌های O ، A و A' **هم‌خط**[1] نامیده می‌شوند. با همین استدلال نقطه‌های O، B و B' ، هم‌چنین نقطه‌های O،C و C' نیز هم‌خط هستند. بنابراین، در دو شکل مجانس، خطهایی که نقطه‌های نظیر را به هم وصل می‌کنند، یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌نمایند که آن نقطه، همان مرکز تجانس است.

ویژگیهای تجانس

ــ تجانس شیب خط را حفظ می‌کند ؛

ــ تحت تجانس، مرکز تجانس ثابت می‌ماند ؛

ــ تجانس طول یا مساحت را حفظ نمی‌کند (مگر در حالتی که $k=۱$) ؛

ــ تجانس طول را با ضریب k و مساحت را با ضریب $k^۲$ تغییر می‌دهد ؛

ــ خطهایی که نقطه‌های نظیر را به هم وصل می‌کنند، در مرکز تجانس همرسند.

مسأله‌ها

۱. $J=(-۱,۲)$ ، $A=(۴,۲)$ ، $M=(۳,۵)$ رأسهای یک مثلث‌اند.

الف) مثلث JAM را رسم کنید.

ب) تبدیل یافتهٔ مثلث JAM را تحت $D(x,y)=(۲x,۲y)$ رسم کنید.

پ) مثلث JAM و تبدیل یافتهٔ آن را از نظر طول و شیب ضلعها و مساحت با هم مقایسه کنید.

ت) نسبت تجانس و مرکز تجانس را تعیین کنید.

۲. $M=(۲,۲)$ ، $A=(۴,۲)$ و $N=(۲,-۲)$ رأسهای یک مثلث‌اند.

۱ــ Collinear

الف) مثلث MAN و تصویرش مثلث $M'A'N'$ را تحت تبدیل $D(x,y)=(۳x,۳y)$ رسم کنید.

ب) MM' ، AA' و NN' را رسم کرده، سپس آنها را امتداد دهید تا یکدیگر را در $O=(۰,۰)$ قطع کنند.

پ) طول پاره‌خطهای OM' ، OM، OA' ، OA، ON' ، ON و نسبتهای $\frac{OM'}{OM}$ ، $\frac{OA'}{OA}$ ، $\frac{ON'}{ON}$ را محاسبه نمایید.

ت) طول پاره‌خطهای $M'A'$ ، MA، $A'N'$ ، AN، $M'N'$ ، MN و نسبتهای $\frac{M'A'}{MA}$ ، $\frac{A'N'}{AN}$ و $\frac{M'N'}{MN}$ را محاسبه نمایید.

ث) عامل مقیاس چقدر است؟

۳. $A=(۲,۰)$ ، $B=(۲,۳)$ ، $C=(۴,۳)$ و $D=(۴,۰)$ رأسهای یک مستطیل هستند.

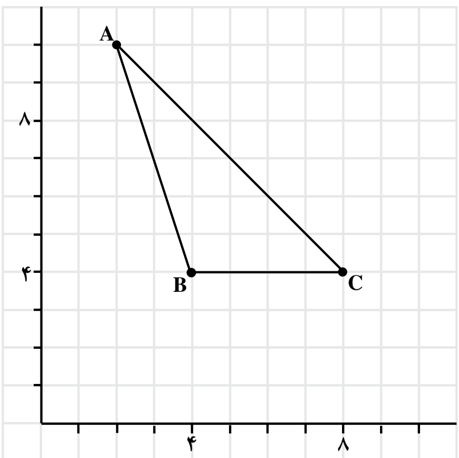
الف) مستطیل و تصویر مجانس آن را با درنظر گرفتن $(۰,۰)$ به‌عنوان مرکز تجانس و $\frac{۱}{۳}$ به‌عنوان عامل مقیاس رسم کنید.

ب) این تجانس انبساط است یا انقباض؟ چرا؟

پ) طول پاره‌خطهای OB' ، OB، OC' ، OC را اندازه بگیرید و نسبتهای $\frac{OB'}{OB}$ و $\frac{OC'}{OC}$ را محاسبه نمایید.

ت) مستطیل ABCD و تصویرش را از نظر طول ضلع و مساحت با هم مقایسه کنید.

۴. شکل زیر را در دفتر خود برگردان کرده، سپس با درنظر گرفتن $(۰,۰)$ به‌عنوان مرکز تجانس، تصویر مجانس مثلث ABC را با نسبتهای تجانس زیر رسم کنید.



الف) ۲

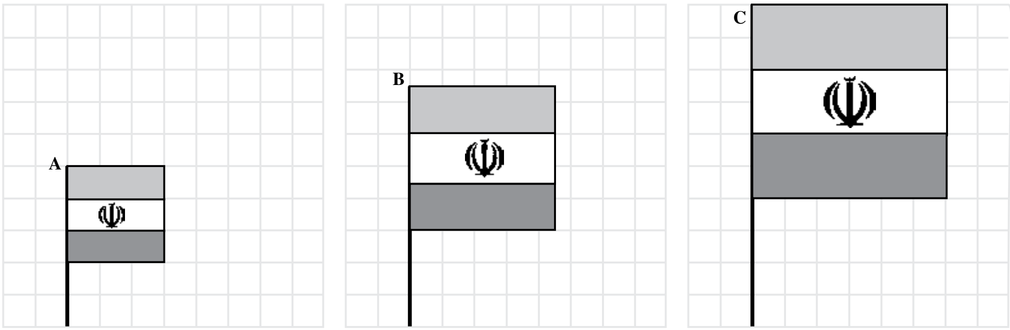
ب) ۱/۵

پ) ۰/۵

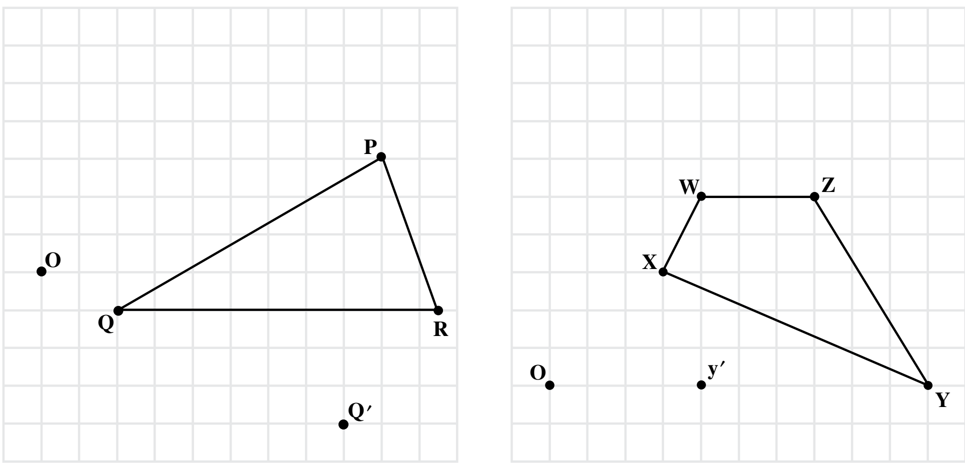
۵. با توجه به شکل زیر، نسبت تجانس یعنی k را برای هر یک از تجانس‌های زیر تعیین کنید.

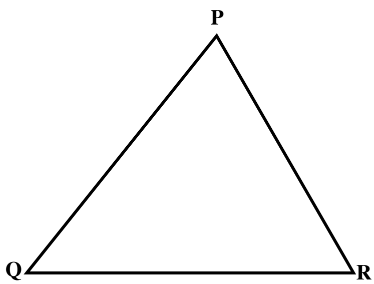
الف) $A \to B$ ب) $A \to C$ پ) $B \to C$

ت) $C \to A$ ث) $C \to B$ ج) $B \to A$



۶. در شکلهای زیر، مرکز تجانس (O) و تبدیل یافتهٔ یک نقطه از هر شکل داده شده است. شکلها را در دفتر خود برگردان کنید و تصویر تبدیل یافتهٔ آنها را کامل کنید.





۷. الف) مثلث PQR و تصویرهای مجانس آن را با نسبت تجانس ۲ و به مرکزهای P ، Q و R رسم کنید.

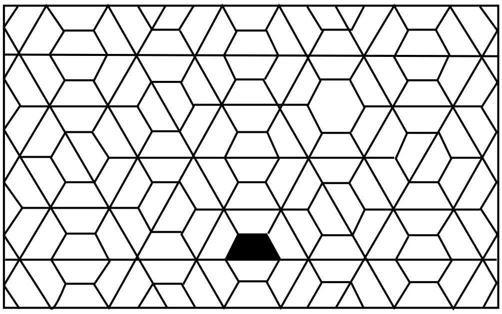
ب) در هر یک از قسمتهای بند (الف) نسبت مساحت مثلث تبدیل یافته به مثلث PQR را به‌دست آورید.

۸. مختصات رأسهای دو چند ضلعی داده شده است. با در نظر گرفتن(۰,۰) به‌عنوان مرکز تجانس، هر چند ضلعی را در یک صفحهٔ مجزا رسم کرده، تصویر مجانس آن را به ازای نسبتهای تجانس داده شده تعیین کنید.

الف) $(-۴,۱),(۲,۱),(۵,۲)$ $k=\frac{۱}{۲}$ $k=۳$

ب) $(۰,۰),(۴,۰),(۶,۶),(۰,۴)$ $k=\frac{۱}{۲}$ $k=\frac{۳}{۲}$

۹. نمودار زیر الگویی را نشان می‌دهد که با استفاده از یک ذوزنقه به‌دست آمده است. در این الگو مجانس‌های ذوزنقه دیده می‌شوند.

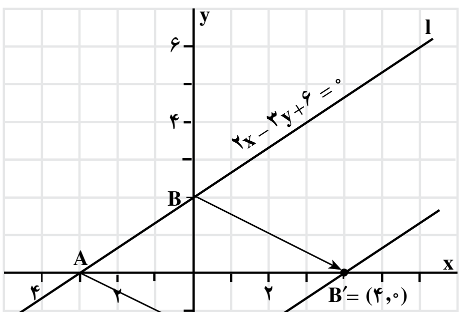


الف) سه مجانس متوالیِ ذوزنقهٔ سایه‌دار را پیدا کرده، سپس هر تصویر را با ذوزنقهٔ سایه‌دار از نظر محیط و مساحت با هم مقایسه کنید.

ب) آیا این الگو می‌تواند ویژگیهای تجانس را نشان دهد؟

۳ــ۶ ــ تبدیل یافتهٔ خط و معادلهٔ آن

در شکل مقابل نمودار خط $۲x-۳y+۶=۰$ با l نشان داده شده است. هر یک از نقطه‌های این خط تحت انتقال $T(x,y)=(x+۴,y-۲)$ تصویر شده، یعنی ۴ واحد به سمت راست و ۲ واحد به سمت پایین منتقل شده است. تبدیل یافتهٔ خط را با مشخص کردن تصویر هر دو نقطهٔ آن مانند $A=(-۳,۰)$ و $B=(۰,۲)$ می‌توانیم رسم کنیم. تحت این انتقال، $A=(-۳,۰)\rightarrow A'=(۱,-۲)$ و



شکل ۲۶

$B=(۰,۲) \rightarrow B'=(۴,۰)$. خط تبدیل یافته از نقطه‌های $A'=(۱,-۲)$ و $B'=(۴,۰)$ می‌گذرد.
برای تعیین معادلهٔ خط تبدیل یافته، باید معادلهٔ خطی را که از A' و B' می‌گذرد پیدا کنیم.
اگر $P=(x,y)$ یک نقطهٔ دلخواه روی خط تصویر باشد، آنگاه

$$\text{شیب } A'P = \frac{y+۲}{x-۱} \qquad \text{و} \qquad \text{شیب } A'B' = \frac{۰+۲}{۴-۱} = \frac{۲}{۳}$$

با توجه به هم‌خط بودن A' ، B' و P، شیب $A'P$ و $A'B'$ با هم برابر هستند، پس

$$\frac{۲}{۳} = \frac{y+۲}{x-۱}$$

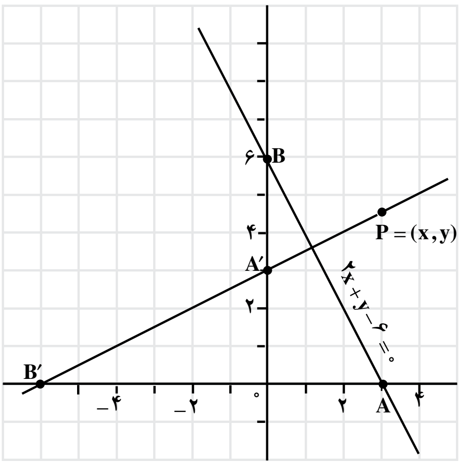
$$۲x-۲=۳y+۶$$

$$۲x-۳y-۸=۰$$

بنابراین، معادلهٔ خط تصویر $۲x-۳y-۸=۰$ است.
مثال بالا روش کلی بدست آوردن معادلهٔ تصویر یک خط تحت یک تبدیل معین را نشان می‌دهد.

روش کلی به دست آوردن معادلهٔ تصویر یک خط تحت یک انتقال، بازتاب، دوران یا تجانس:
گام اول: مختصات دو نقطهٔ دلخواه روی خط را پیدا کنید.
گام دوم: مختصات تصویر این دو نقطه را تحت تبدیل داده شده به دست آورید.
گام سوم: معادلهٔ خط گذرنده از دو نقطهٔ تصویر را به دست آورید.

مثال ۱:
الف) خط $۲x+y-۶=۰$ را رسم کنید.
ب) تصویر خط (الف) را تحت دوران $R(x,y)=(-y,x)$ رسم کنید.
پ) معادلهٔ خط تصویر را به‌دست آورید.
حل:
الف) $A=(۳,۰)$ و $B=(۰,۶)$ دو نقطه از خط هستند. با مشخص نمودن این دو نقطه خط AB را رسم می‌کنیم.



شکل ۲۷

ب) تحت دوران داده شده

$$A=(۳,۰)\to A'=(۰,۳)$$

$$B=(۰,۶)\to B'=(-۶,۰)$$

خطِ تصویر یعنی $A'B'$ را رسم می‌کنیم.

پ) فرض کنید $P=(x,y)$ نقطهٔ دلخواهی از خط تصویر باشد.

$$\text{شیب } A'B' = \frac{۰-۳}{-۶-۰}=\frac{۱}{۲} \qquad \text{و} \qquad \text{شیب } A'P = \frac{y-۳}{x-۰}$$

با توجه به ثابت بودن شیب خط،

$$\frac{y-۳}{x}=\frac{۱}{۲}$$

$$x=۲y-۶$$

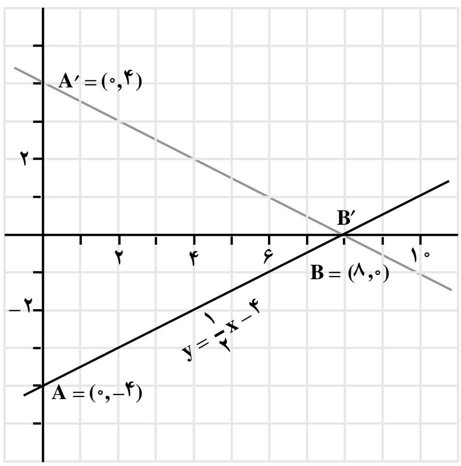
$$x-۲y+۶=۰$$

معادلهٔ خط تصویر $x-۲y+۶=۰$ است.

در مثال (۱)، معادلهٔ خط تصویر را می‌توانستیم با استفاده از شیب و عرض از مبدأ به‌دست آوریم. این روش در مثال بعد نشان داده شده است.

مثال ۲: معادلهٔ تصویر خط $y=\frac{۱}{۲}x-۴$ تحت تقارن نسبت به محور xها را به دست آورید.

حل: با درنظر گرفتن شیب خط $\frac{۱}{۲}$، و عرض از مبدأ آن (۴−)، خط را رسم می‌کنیم. با توجه به نمودار، $A=(۰,-۴)$ و $B=(۸,۰)$، دو نقطه از خط هستند. تحت تقارن نسبت به محور x ها، $A=(۰,-۴)\to A'=(۰,۴)$ و $B=(۸,۰)\to B'=(۸,۰)$. خط تصویر یعنی $A'B'$ را رسم می‌کنیم.



شکل ۲۸

با توجه به نمودار، شیب این خط $-\frac{۱}{۲}$ و عرض از مبدأ آن ۴ است.

بنابراین، معادلهٔ خط تصویر $y=-\frac{۱}{۲}x+۴$ می‌باشد.

مسأله‌ها

۱. الف) خط $۲x+y-۴=۰$ و تصویرش را تحت انتقال $T(x,y)=(x+۴,y-۲)$ رسم کنید.

ب) معادلهٔ خط تصویر را به‌دست آورید.

۲. الف) خط $l:۲x+۶y-۱۲=۰$ و بازتاب آن را نسبت به محور xها و نسبت به محور y ها رسم کنید.

ب) معادلهٔ تصویرهای خط l تحت بازتاب نسبت به محور xها و محور yها را به دست آورید.

۳. الف) خط $y=۲x+۳$ و تصویر بازتاب آن را نسبت به خط $y=x$ رسم کنید.

ب) معادلهٔ تصویر بازتاب خط داده شده را به‌دست آورید.

۴. معادلهٔ تصویر خط $y=x+۵$ تحت بازتاب نسبت به خط $y=-x$ را به دست آورده سپس آنها را رسم کنید.

۵. معادلهٔ تصویر خط $۳x-y+۶=۰$ تحت دوران‌های زیر را به دست آورید :

الف) ۹۰° حول $(۰,۰)$ ب) ۱۸۰° حول $(۰,۰)$

پ) ۲۷۰° حول $(۰,۰)$

۶. الف) در یک صفحهٔ مختصات، دو خط $L_۱$ و $L_۲$ را رسم کنید.

$L_۲:۳x-۲y-۱۲=۰$ $L_۱:۳x-۲y-۶=۰$

ب) ضابطهٔ سه انتقال متفاوت که تحت آنها $L_۲$ تصویر $L_۱$ باشد را به‌دست آورید.

۷. تحت یک بازتاب، تصویر خط $x+y-۳=۰$ ، خط $x+y+۳=۰$ است، معادلهٔ محور تقارن را پیدا کنید.

۸. تحت یک تبدیل، خط $۲x-۵y+۱۰=۰$ ، تصویر خط $۲x-۵y-۱۰=۰$ است. این تبدیل را به عنوان یک

الف) انتقال ب) بازتاب پ) دوران

توصیف کنید.

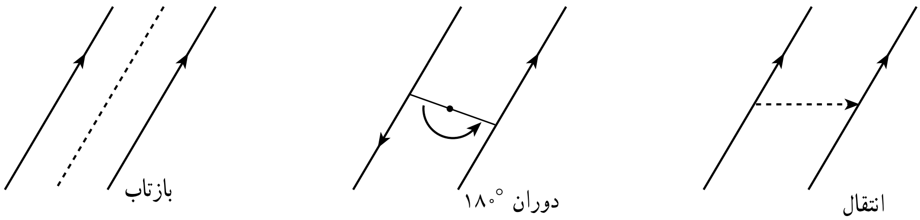
۳ــ۷ــ اثبات با استفاده از ویژگیهای تبدیلها

با توجه به بخشهای قبل، برخی از ویژگیهای تبدیلها را به صورت زیر جمعبندی می‌کنیم.

۱. در هر یک از این تبدیلها، تبدیل یافتهٔ خط راست، خط راست است.

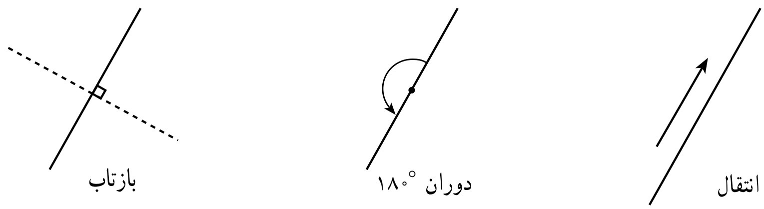
۲. طول پاره‌خط و اندازهٔ زاویه، تحت انتقال، دوران و بازتاب ثابت می‌ماند.

۳. اگر دو خط موازی باشند، هر یک از آنها می‌تواند تحت یک انتقال، دوران °۱۸۰ یا بازتاب بر روی دیگری نگاشته شود.

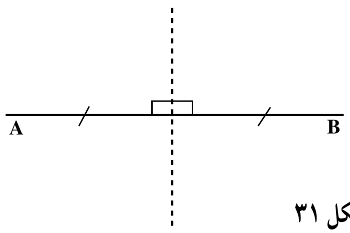


شکل ۲۹

۴. یک خط می‌تواند تحت یک انتقال، دوران °۱۸۰ یا بازتاب بر روی خودش نگاشته شود.



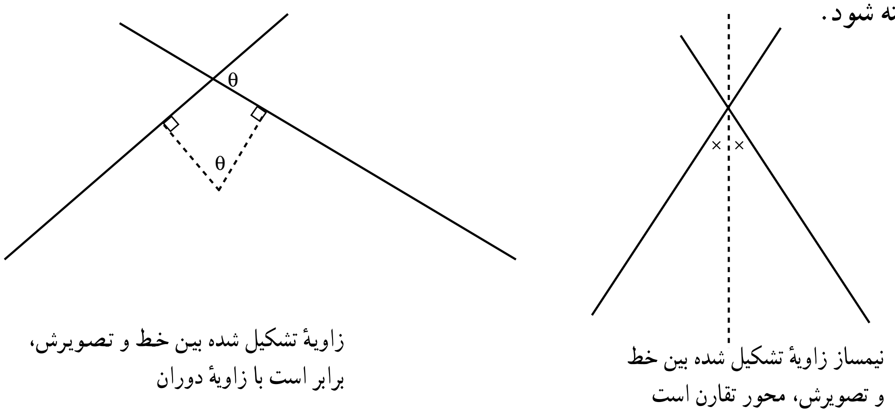
شکل ۳۰



۵. عمودمنصف هر پاره‌خط AB، محور تقارن بازتابی است که $A \to B$ و $B \to A$.

شکل ۳۱

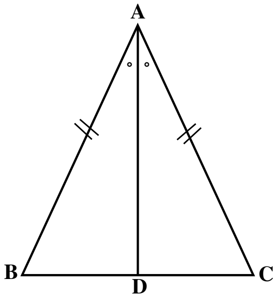
۶. اگر دو خط متقاطع باشند، هر یک از آنها می‌تواند تحت یک دوران یا بازتاب بر دیگری نگاشته شود.



شکل ۳۲

می‌توانیم از ویژگیهای فوق به‌عنوان **حقایق پذیرفته شده**، در اثبات قضیه‌ها و حل مسأله‌ها استفاده کنیم.

قضیه: زاویه‌های روبه‌رو به ضلعهای مساوی در مثلث متساوی‌الساقین با یکدیگر برابرند.

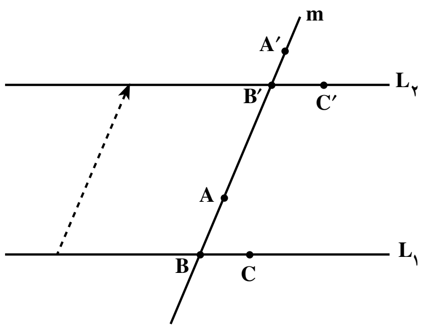


شکل ۳۳

اثبات با استفاده از بازتاب :

در مثلث ABC، $AB = AC$ و نیمساز زاویهٔ A، ضلع BC را در D قطع می‌کند. تحت بازتاب نسبت به خط AD، خطی که شامل پاره‌خط AB است، روی خطی که شامل پاره‌خط AC است تصویر می‌شود. چون $AB = AC$ پس $B \to C$. بنابراین $\hat{B} = \hat{C}$. یعنی زاویه‌های مقابل به ضلعهای مساوی در مثلث متساوی‌الساقین برابرند.

قضیه: اگر خط موربی دو خط موازی را قطع کند، زاویه‌های نظیر برابر خواهند بود.



شکل ۳۴

اثبات با استفاده از انتقال:

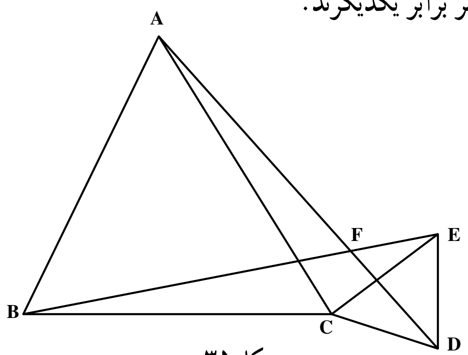
با توجه به نمادگذاری روی شکل، تحت انتقالی به موازات خط مورب m که خط L_1 را بر روی L_2 می‌نگارد، خواهیم داشت

$$C \longrightarrow C' \text{ و } B \longrightarrow B' \text{ ، } A \longrightarrow A'$$

بنابراین

$A\hat{B}C \longrightarrow A'\hat{B'}C'$. یعنی زاویه‌های متناظر برابر یکدیگرند.

مثال: مثلث ABC و مثلث ECD متساوی الاضلاع هستند، ثابت کنید $AD = BE$ و $A\hat{F}B = ۶۰^\circ$.



شکل ۳۵

حل با استفاده از دوران:

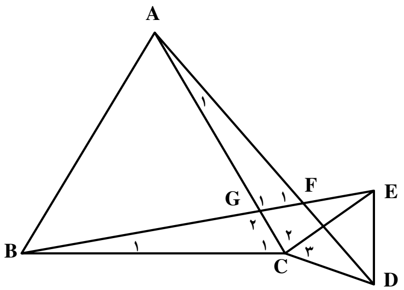
تحت یک دوران ۶۰°، حول نقطهٔ C. مثلث ACD، روی مثلث BCE تصویر می‌شود. بنابراین

$BE \longrightarrow AD$ و AD ضلع BE را با زاویهٔ ۶۰° قطع می‌کند. چون طول تحت دوران حفظ می‌شود پس $AD = BE$ و همچنین $A\hat{F}B = ۶۰^\circ$.

توجه: این مسأله با روشهای دیگر نیز اثبات می‌شود که اغلب طولانی‌تر و پیچیده‌تر از این اثبات است به یکی از این راه‌حلها توجه کنید.

مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است بنابراین

$$BC = AC \qquad , \qquad \hat{C}_۱ = ۶۰^\circ$$



شکل ۳۶

مثلث ECD متساوی الاضلاع است بنابراین

$$EC = CD \qquad , \qquad \hat{C}_۳ = ۶۰^\circ$$

حال در دو مثلث BCE و ACD داریم

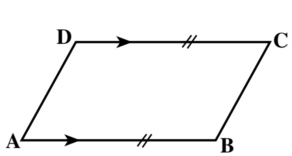
$$BC = AC$$
$$\hat{C}_۱ + \hat{C}_۲ = \hat{C}_۳ + \hat{C}_۲$$
$$EC = CD$$

بنابراین دو مثلث BCE و ACD در حالت (ض‌زض) همنهشت هستند. بنابراین اجزای نظیرشان نیز مساوی هستند یعنی $AD = BE$.

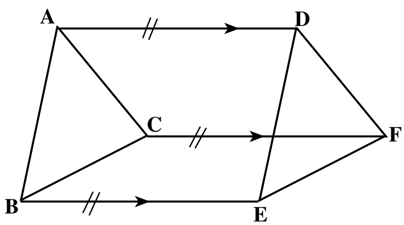
همچنین در دو مثلث AGF و BGC داریم : $\hat{A}_۱ = \hat{B}_۱$ و $\hat{G}_۱ = \hat{G}_۱$ (چرا؟). بنابراین $\hat{F}_۱ = \hat{C}_۱$. یعنی $\hat{F}_۱ = ۶۰^\circ$.

مسأله‌ها

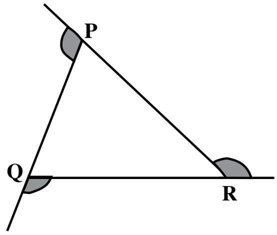
مسأله‌های ۱، ۲ و ۳ را با استفاده از انتقال حل کنید.



۱. در چهارضلعی $ABCD$، $AB \parallel DC$ و $AB = DC$ ، ثابت کنید $AD \parallel BC$ و $AD = BC$.



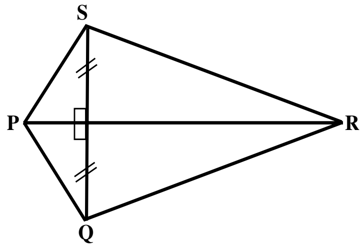
۲. پاره‌خطهای AD، BE و CF مساوی و موازیند. ثابت کنید $ABC \cong DEF$.



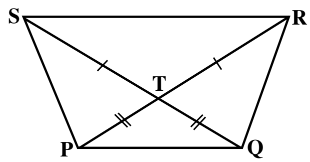
۳. در مثلث دلخواه PQR، ثابت کنید مجموع زاویه‌های خارجی ۳۶۰° است.

مسأله‌های ۴، ۵، ۶ و ۷ را با استفاده از بازتاب حل کنید.

۴. ثابت کنید فاصلهٔ هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط، تا دو سر آن به یک اندازه است.



۵. در شکل روبه‌رو PR عمودمنصف QS است. ثابت کنید $S\hat{P}R = Q\hat{P}R$.

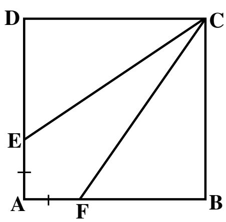


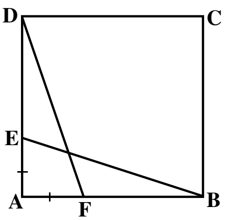
۶. در شکل روبه‌رو PR و QS قطرها، $PT = QT$ و $RT = ST$. ثابت کنید $PQS \cong QPR$.

۷. چهارضلعی ABCD یک مربع است و $AE = AF$. ثابت کنید.

الف) $CE = CF$

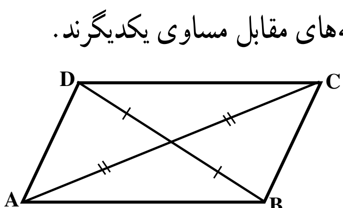
ب) $BE = DF$



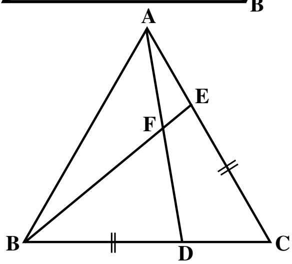


مسأله‌های ۸، ۹ و ۱۰ را با استفاده از دوران حل کنید.

۸. ثابت کنید، هرگاه دو خط یکدیگر را قطع کنند، زاویه‌های مقابل مساوی یکدیگرند.



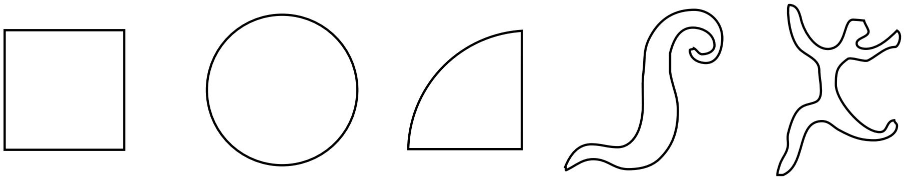
۹. قطرهای چهارضلعی ABCD یکدیگر را نصف کرده‌اند. ثابت کنید ABCD یک متوازی‌الاضلاع است.



۱۰. مثلث ABC متساوی الاضلاع است و $BD = CE$. ثابت کنید $AD = BE$ و $B\hat{F}D = ۶۰^\circ$.

مجلهٔ ریاضی

در هندسهٔ اقلیدسی، اساس مقایسهٔ جسمها با یکدیگر، اندازه و شکل آنهاست.
در **توپولوژی**، دو جسم هم‌ارز هستند اگر یکی از آنها را بتوان با تغییر دادن دیگری به وسیلهٔ کشیدن، جمع کردن، خم‌کردن و چرخاندن به دست آورد، این جسمها می‌توانند بدون ایجاد هیچ برشی یا سوراخی در جسم قبلی ایجاد شوند.



بازار مسگرها در کرمان