

داستان ماتریس

می‌گویند مفهوم ماتریس قبل از این که ابداع شود تعمیق و گسترش یافته بود، چه مقدم بر آن مفهوم دترمینان در مطالعه دستگاه‌های معادلات خطی در اوایل قرن هیجدهم میلادی مطرح شده بود. ولی واژه ماتریس اولین بار در سال ۱۸۵۰ میلادی به وسیله جیمز جوزف سیلوستر، ریاضیدان انگلیسی، در واقع برای تمیز دادن ماتریس‌ها از دترمینان‌ها به کار گرفته شد.



سیلوستر

۴

ماتریس و دترمینان

۱.۴ ماتریس‌ها

ماتریس را به عنوان آرایه‌ای مستطیلی از اعداد حقیقی تعریف می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

اعداد داخل آرایه را درآیه‌های ماتریس می‌نامیم. زیرنویس‌های i و j درآیه a_{ij} ، برای مشخص کردن سطر و ستونی که a_{ij} در آنها قرار دارد، به کار می‌روند. برای مثال

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & 13 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

یک ماتریس است. درآیه a_{23} در سطر دوم و ستون سوم قرار دارد و در این مثال، این درآیه ۲ می‌باشد. در این مثال درآیه a_{33} برابر صفر است.

ماتریسی را که دارای m سطر و n ستون باشد، ماتریس $m \times n$ (بخوانید ماتریس m در n)^۱

می‌نامیم. وقتی که $m = n$ ، ماتریس را ماتریس مربعی از مرتبه n می‌نامیم. برای مثال $\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 1 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$

۱- هر ماتریس 1×1 مانند $[a_{11}]$ را با عدد حقیقی a_{11} یکی می‌گیریم.

یک ماتریس 3×2 است، حال آنکه $\begin{bmatrix} 3 & 7 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ یک ماتریس 2×3 می باشد و $\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ماتریس مربعی از مرتبه ۲. در جدول بندی داده ها، وقتی که تعداد آنها زیاد است، موضوع استفاده از ماتریس ها به طور طبیعی پیش می آید. برای مثال فاصله بین شهرهای اصفهان، تهران و شیراز را می توان به صورت یک ماتریس جدول بندی کرد :

شیراز تهران اصفهان

$$\begin{matrix} \text{اصفهان} \\ \text{تهران} \\ \text{شیراز} \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 414 & 481 \\ 414 & 0 & 895 \\ 481 & 895 & 0 \end{bmatrix}$$

اغلب نماد

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

را به صورت $[a_{ij}]_{m \times n}$ خلاصه می کنیم. زیرنویس $m \times n$ اندازه ماتریس را نشان می دهد و کل نماد به معنی یک ماتریس $m \times n$ است که درآیه سطر i ام و ستون زام آن a_{ij} است. برای مثال، با این نماد، $[ij]_{2 \times 3}$ یعنی ماتریس 2×3 ای که درآیه سطر i ام و ستون زام آن برابر j می باشد :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

همچنین $[a_{ij}]_{3 \times 3}$ با تعریف $a_{ij} = \begin{cases} j-i & \text{اگر } j < i \\ j+i & \text{اگر } j \geq i \end{cases}$ یعنی ماتریس مربعی از مرتبه ۳ که به صورت

زیر است :

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

تذکره. از این پس، وقتی در این کتاب می نویسیم A یک ماتریس $m \times n$ است (یا ماتریس

$(A = [a_{ij}]_{m \times n})$ ، m و n را حداکثر ۳ فرض می‌کنیم.

فرض کنیم $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ یک ماتریس مربعی از مرتبه n باشد. درآیه‌های a_{11} ، a_{22} ، \dots ، a_{nn} را درآیه‌های قطر اصلی ماتریس A می‌نامیم. اگر درآیه‌های خارج از قطر اصلی ماتریس A برابر

صفر باشند، A را ماتریس قطری از مرتبه n می‌نامیم. مثلاً $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ یک ماتریس قطری مرتبه ۳

است. اگر درآیه‌های بالای قطر اصلی ماتریس A برابر صفر باشند، A را ماتریس پایین مثلثی از

مرتبه n می‌نامیم. مثلاً $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 5 & 6 & 3 \end{bmatrix}$ یک ماتریس پایین مثلثی از مرتبه ۳ است. اگر درآیه‌های پایینی

قطر اصلی ماتریس A برابر صفر باشند، A را ماتریس بالامثلثی از مرتبه n می‌نامیم. مثلاً $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

یک ماتریس بالامثلثی از مرتبه ۳ است.

تعریف. دو ماتریس $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ و $B = [b_{ij}]_{p \times q}$ مساوی اند اگر دارای مرتبه یکسان

باشند، یعنی $m = p$ و $n = q$ ، و به ازای هر i و هر j ، $a_{ij} = b_{ij}$. اگر A و B مساوی باشند، می‌نویسیم $A = B$.

جمع ماتریس‌ها و ضرب اعداد حقیقی در آنها

در بالا ماتریس‌ها را معرفی کردیم و این‌که چه موقع دو ماتریس مساوی‌اند را تعریف کردیم. اکنون می‌خواهیم ببینیم جمع دو ماتریس چه مواقعی امکان دارد و در این صورت حاصل جمع دو ماتریس چه خواهد بود. همچنین ضرب یک عدد حقیقی در یک ماتریس را تعریف خواهیم کرد.

تعریف. فرض کنیم $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ و $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ دو ماتریس هم‌رتبه باشند. در این

صورت مجموع آنها، یعنی $A + B$ ، یک ماتریس $m \times n$ است: $A + B = [c_{ij}]_{m \times n}$ ، و به صورت

زیر تعریف می‌شود

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

همچنین برای عدد حقیقی داده شده r ، حاصلضرب rA در ماتریس A ، یعنی rA ، نیز یک

ماتریس $m \times n$ است: $rA = [d_{ij}]_{m \times n}$ ، که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$d_{ij} = ra_{ij}.$$

برای مثال دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ را نمی‌توانیم جمع کنیم، زیرا

هم مرتبه نمی‌باشند ولیکن مجموع دو ماتریس $C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ و $D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ماتریس

زیر است:

$$C + D = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 10 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

همچنین ضرب عدد حقیقی ۲ در ماتریس A نیز ماتریس زیر است:

$$2A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \end{bmatrix}.$$

این اعمال را با یک مثال ساده تشریح می‌کنیم.

مثال ۱. دو دبیرستان a و b را در نظر می‌گیریم. تعداد دانش‌آموزانی که در دبیرستان a مجاز

به گرفتن درس «هندسه تحلیلی و جبر خطی» و «ریاضیات گسسته» می‌باشند 10° نفر و در دبیرستان

b برابر 5° نفر می‌باشند. تعداد دانش‌آموزان این دو دبیرستان که در درس «هندسه تحلیلی و جبر

خطی» و «ریاضیات گسسته» قبول یا مردود شده‌اند در ماتریس‌های زیر جدول‌بندی

شده‌اند (ماتریس A مربوط به دبیرستان a و ماتریس B مربوط به دبیرستان b است):

	مردود قبول	مردود قبول
هندسه تحلیلی و جبر خطی $A =$ ریاضیات گسسته	$\begin{bmatrix} 90 & 10 \\ 89 & 11 \end{bmatrix}$	هندسه تحلیلی و جبر خطی $B =$ ریاضیات گسسته
		$\begin{bmatrix} 42 & 8 \\ 40 & 10 \end{bmatrix}$

لذا برای مثال، 90° دانش‌آموز از دبیرستان a در درس «هندسه تحلیلی و جبر خطی» قبول

شده‌اند، حال آنکه در دبیرستان b فقط 42 نفر در این درس قبول شده‌اند.

مجموع دو ماتریس A و B ، یعنی $A+B = \begin{bmatrix} 132 & 18 \\ 129 & 21 \end{bmatrix}$ ، تعداد کل دانش‌آموزان این دو

دبیرستان را که در این دو درس قبول یا مردود شده‌اند نشان می‌دهد. بنابراین ۱۳۲ دانش‌آموز از این دو دبیرستان در درس «هندسه تحلیلی و جبر خطی» قبول و ۱۸ نفر در این درس مردود شده‌اند. همچنین ۱۲۹ دانش‌آموز از این دو دبیرستان در درس «ریاضیات گسسته» قبول و ۲۱ نفر آنها در این

درس مردود شده‌اند. ماتریس $\begin{bmatrix} 88 & 12 \\ 86 & 14 \end{bmatrix} (A+B) = \frac{2}{3}(A+B) = \frac{1}{15}(A+B)$ نیز درصد قبولی یا

مردودی در این دو دبیرستان را نشان می‌دهد. مثلاً ۸۸٪ دانش‌آموزان این دو دبیرستان در درس «هندسه تحلیلی و جبر خطی» قبول شده‌اند (و ۱۲٪ مردود) و ۸۶٪ دانش‌آموزان این دو دبیرستان در درس «ریاضیات گسسته» قبول شده‌اند (و ۱۴٪ مردود).

تعریف. فرض کنیم A یک ماتریس $m \times n$ باشد. قرینه A را ماتریسی $m \times n$ تعریف

می‌کنیم که از حاصلضرب عدد -1 در ماتریس A به وجود می‌آید. این ماتریس را با $-A$ نمایش می‌دهیم، یعنی $-A = (-1)A$.

توجه می‌کنیم که درآیه‌های قرینه ماتریس A ، قرینه درآیه‌های

ماتریس A هستند و لذا بنابر تعریف جمع دو ماتریس، مجموع A و $-A$ ماتریس $m \times n$ است که تمام درآیه‌هایش برابر صفر است. چنین ماتریسی را ماتریس صفر می‌نامیم و آن را با O (اگر لازم به تأکید باشد با $O_{m \times n}$) نمایش می‌دهیم.

تعریف. اگر A و B دو ماتریس هم‌رتبه باشند، تفاضل B از A را با $A - B$ نمایش می‌دهیم

و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$A - B = A + (-B).$$

جمع ماتریس‌ها و ضرب آنها در اعداد حقیقی از همان قوانین معمولی حساب تبعیت می‌کنند.

در قضیه صفحه بعد این ویژگی‌های ابتدایی را به‌طور رسمی بیان می‌کنیم.

قضیه ۱. فرض کنیم $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ، $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ و $C = [c_{ij}]_{m \times n}$ سه ماتریس هم مرتبه

باشند و r و s دو عدد حقیقی. در این صورت

$$(1) \quad A + B = B + A \quad (\text{خاصیت جابه‌جایی جمع})$$

$$(2) \quad A + (B + C) = (A + B) + C \quad (\text{خاصیت شرکت‌پذیری جمع})$$

$$(3) \quad A + O = O + A = A$$

$$(4) \quad A + (-A) = (-A) + A = O$$

$$(5) \quad r(A + B) = rA + rB$$

$$(6) \quad (r + s)A = rA + sA$$

$$(7) \quad (rs)A = r(sA)$$

$$(8) \quad 1A = A$$

انبات. اثبات ویژگی‌های بالا همه سر راست است و به کمک تعریف به‌سادگی انجام می‌شود.

آنها را به‌عنوان تمرین رها می‌کنیم. ■

ضرب ماتریس‌ها

نحوه ضرب کردن ماتریس‌ها، که اکنون شرح خواهیم داد، در نگاه اول چندان آشنا نیست و بررسی منشأ این تعریف از برنامه‌دستی این کتاب خارج است.

تعریف. فرض کنیم $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ و $B = [b_{ij}]_{n \times p}$ دو ماتریس باشند (توجه می‌کنیم که

تعداد ستون‌های A برابر تعداد سطرهای B است). در این صورت حاصلضرب A در B (با همین

ترتیب)، یعنی AB ، یک ماتریس $m \times p$ است: $AB = [c_{ij}]_{m \times p}$ ، و به‌صورت زیر تعریف

می‌شود

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

توجه می‌کنیم که بنابر تعریف بالا برای این که درآیة سطر i ام و ستون j ام ماتریس AB ، یعنی

c_{ij} ، را پیدا کنیم باید حاصلضرب داخلی سطر i ام از ماتریس A را (به‌عنوان یک بردار) در ستون j ام

از ماتریس B (به عنوان برداری دیگر) محاسبه کنیم. برای مثال حاصلضرب

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

بدون معنی است ولیکن

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 58 & 64 \\ 139 & 154 \end{bmatrix},$$

زیرا

$$(1, 2, 3) \cdot (7, 9, 11) = (1 \times 7) + (2 \times 9) + (3 \times 11) = 58,$$

$$(1, 2, 3) \cdot (8, 10, 12) = (1 \times 8) + (2 \times 10) + (3 \times 12) = 64,$$

$$(4, 5, 6) \cdot (7, 9, 11) = (4 \times 7) + (5 \times 9) + (6 \times 11) = 139,$$

$$(4, 5, 6) \cdot (8, 10, 12) = (4 \times 8) + (5 \times 10) + (6 \times 12) = 154.$$

تذکره. اگر A یک ماتریس مربعی از مرتبه n باشد، آنگاه منظور از A^2 یعنی AA، A^3 یعنی A^2A و الی آخر.

مثال زیر نشان می‌دهد که چگونه ضرب ماتریس‌ها ممکن است در یک مبحث زیست‌شناسی پیش آید.

مثال ۲. در بخشی از یک جنگل، شیر و گرگ‌هایی زندگی می‌کنند که از خرگوش و آهوهای آن جنگل تغذیه می‌کنند. همچنین این خرگوش و آهوها از کلم، کاهو و علف موجود در آن جنگل تغذیه می‌کنند. ماتریس زیر مقدار کلم، کاهو و علفی را که هر یک از خرگوش و آهوها به طور متوسط در روز می‌خورند بر حسب گرم مشخص می‌کند

	کلم	کاهو	علف
A =	خرگوش	$\begin{bmatrix} 200 & 350 & 150 \\ 300 & 150 & 200 \end{bmatrix}$	
	آهو		

پس یک آهو مقدار ۱۵۰ گرم کاهو را در یک روز مصرف می‌کند. ماتریس دیگری تعداد

خرگوش و آهوهای را که شیر یا گرگ‌ها به طور متوسط در یک روز می‌خورند، مشخص می‌نماید

$$B = \begin{matrix} & \text{آهو} & \text{خرگوش} \\ \begin{matrix} \text{شیر} \\ \text{گرگ} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

لذا یک گرگ به طور متوسط، چهار خرگوش و دو آهو را در یک روز می‌خورد. می‌خواهیم تعیین کنیم هر شیر و گرگ چند گرم کلم، کاهو و علف را به طور غیرمستقیم در یک روز مصرف می‌کند. برای مثال بررسی می‌کنیم که یک شیر، چند گرم کلم را به طور غیرمستقیم مصرف می‌کند. اولاً، یک شیر، سه خرگوش را می‌خورد و هر خرگوش، ۲۰۰ گرم کلم را می‌خورد. لذا، با خوردن خرگوش‌ها، یک شیر به طور غیرمستقیم ۳×۲۰۰ گرم کلم را مصرف می‌کند. همچنین یک شیر، یک آهو را می‌خورد و آهو ۳۰۰ گرم کلم را مصرف کرده است. در این صورت، یک شیر به طور غیرمستقیم ۱×۳۰۰ گرم کلم را مصرف می‌کند. پس روی هم رفته، یک شیر، ۳×۲۰۰+۱×۳۰۰ گرم کلم را به طور غیرمستقیم مصرف می‌کند. ملاحظه می‌کنیم که این عدد همان درآیه سطر اول و ستون اول از ماتریس BA است. همین طور، درآیه سطر اول و ستون دوم آن مقداری از کاهو برحسب گرم است که یک شیر به طور غیرمستقیم می‌خورد، و به همین ترتیب حاصلضرب BA را حساب می‌کنیم

$$BA = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 200 & 350 & 150 \\ 300 & 150 & 200 \end{bmatrix}, \\ = \begin{bmatrix} 900 & 1200 & 650 \\ 1400 & 1700 & 1000 \end{bmatrix}.$$

از اینجا اطلاعات مطلوب را می‌توانیم بخوانیم. برای مثال، هر گرگ به طور غیرمستقیم ۱۰۰۰ گرم از علف را مصرف می‌کند.

تذکره. فرض کنیم A و B دو ماتریس مربعی از مرتبه ۲ باشند که به صورت زیر تعریف شده‌اند

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

در این صورت

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

پس $AB \neq BA$ و این نشان می‌دهد که حاصلضرب ماتریس‌ها در حالت کلی خاصیت جابه‌جایی ندارد (به این دلیل در تعریف حاصلضرب دو ماتریس A و B نوشتیم حاصلضرب A در B (با همین ترتیب) ولیکن برای مجموع A و B چنین چیزی نوشتیم). حتی

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

نشان می‌دهد که حاصلضرب دو ماتریس غیرصفر، ممکن است صفر شود!

در زیر چند ویژگی ابتدایی مربوط به حاصلضرب ماتریس‌ها را بیان می‌کنیم. ویژگی اول برقراری خاصیت شرکت‌پذیری برای ضرب ماتریس‌ها است.

قضیه ۲. فرض کنیم $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ، $B = [b_{ij}]_{n \times p}$ و $C = [c_{ij}]_{p \times q}$ سه ماتریس باشند.

در این صورت $A(BC) = (AB)C$.

اثبات. ماتریس BC یک ماتریس $n \times q$ است و لذا $A(BC)$ ماتریس $m \times q$ خواهد بود. از طرفی AB ماتریس $m \times p$ است و در نتیجه $(AB)C$ نیز یک ماتریس $m \times q$ خواهد بود. پس $A(BC)$ و $(AB)C$ هم‌رتبه هستند. اکنون قرار می‌دهیم $BC = [d_{ij}]_{n \times q}$ ، $A(BC) = [e_{ij}]_{m \times q}$ ،

$AB = [f_{ij}]_{m \times p}$ و $(AB)C = [g_{ij}]_{m \times q}$ و ثابت می‌کنیم برای هر i و هر j ، $e_{ij} = g_{ij}$:

$$\begin{aligned} e_{ij} &= \sum_{k=1}^n a_{ik} d_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^n a_{ik} \left(\sum_{t=1}^p b_{kt} c_{tj} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{t=1}^p a_{ik} (b_{kt} c_{tj}) \\ &= \sum_{t=1}^p \sum_{k=1}^n a_{ik} (b_{kt} c_{tj}) \\ &= \sum_{t=1}^p \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kt} \right) c_{tj} \\ &= \sum_{t=1}^p \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kt} \right) c_{tj} \end{aligned}$$

$$= \sum_{t=1}^p f_{it} c_{tj}$$

$$= g_{ij}.$$

در نتیجه \blacksquare . $A(BC) = (AB)C$

ویژگی دیگر حاکی از توزیع پذیری ضرب ماتریس‌ها نسبت به جمع آنها است.

قضیه ۳. فرض کنیم $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ، $B = [b_{ij}]_{n \times p}$ و $C = [c_{ij}]_{n \times p}$ سه ماتریس باشند.

در این صورت $A(B+C) = AB + AC$.

اثبات. ماتریس $B+C$ یک ماتریس $n \times p$ است و لذا $A(B+C)$ ماتریس $m \times p$ خواهد بود. از طرفی AB و AC هر دو ماتریس‌های $m \times p$ هستند و لذا $AB + AC$ نیز یک ماتریس $m \times p$ خواهد بود. پس $A(B+C)$ و $AB + AC$ هر دو ماتریس‌های $m \times p$ هستند. اکنون قرار می‌دهیم $B+C = [d_{ij}]_{n \times p}$ ، $A(B+C) = [e_{ij}]_{m \times p}$ ، $AB = [f_{ij}]_{m \times p}$ ، $AC = [g_{ij}]_{m \times p}$ و $AB + AC = [h_{ij}]_{m \times p}$ ثابت می‌کنیم برای هر i و هر j ، $e_{ij} = h_{ij}$:

$$e_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} d_{kj}$$

$$= \sum_{k=1}^n a_{ik} (b_{kj} + c_{kj})$$

$$= \sum_{k=1}^n (a_{ik} b_{kj} + a_{ik} c_{kj})$$

$$= \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} + \sum_{k=1}^n a_{ik} c_{kj}$$

$$= f_{ij} + g_{ij}$$

$$= h_{ij}.$$

در نتیجه \blacksquare . $A(B+C) = AB + AC$

تذکر. برای ماتریس‌های A ، B و C داریم $(A+B)C = AC + BC$ ، مشروط بر آنکه کلیه اعمال جمع و ضرب این دستورها امکان‌پذیر باشند. این مطلب را به صورت قضیه‌ای دقیق، مانند

قضیه قبل، بیان کرده و آن را به عنوان تمرین ثابت کنید.

ویژگی (۳) از قضیه ۱ حاکی از آن است که ماتریس صفر این خاصیت را دارد که با هر ماتریسی جمع شود، خود آن ماتریس را به ما می دهد، همانگونه که در میان اعداد وقتی عدد صفر با هر عددی جمع شود، حاصل همان عدد است. اکنون با توجه به این که عدد یک وقتی در عددی ضرب شود، خود آن عدد را به ما می دهد، سؤال طبیعی پیش می آید و آن این که «آیا در میان ماتریس ها، ماتریسی وجود دارد که در هر ماتریسی ضرب شود، خود آن ماتریس را بدهد یا خیر؟». جواب به این سؤال مثبت است. در زیر این ماتریس را تعریف می کنیم و سپس «خاصیت ویژه» آن را ثابت می کنیم.

تعریف. ماتریس همانی از مرتبه n که آن را با I (اگر لازم به تأکید باشد با I_n) نشان می دهیم را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$I = [\delta_{ij}]_{n \times n} \quad \text{که در آن} \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{اگر } i = j \\ 0 & \text{اگر } i \neq j \end{cases}$$

توجه می کنیم که در واقع ماتریس همانی مرتبه n ، یعنی I_n ، ماتریسی قطری است که تمام

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{مثلاً}$$

قضیه ۴. فرض کنیم A یک ماتریس مربعی مرتبه n باشد. در این صورت $AI_n = I_n A = A$.

اثبات. واضح است که AI_n و A هر دو $n \times n$ و لذا هم مرتبه هستند. قرار می دهیم

$$A = [a_{ij}]_{n \times n} \quad \text{و} \quad AI_n = [b_{ij}]_{n \times n} \quad \text{و ثابت می کنیم برای هر } i \text{ و } j, \quad b_{ij} = a_{ij} :$$

$$\begin{aligned} b_{ij} &= \sum_{k=1}^n a_{ik} \delta_{kj} \\ &= a_{ij} \delta_{jj} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n a_{ik} \delta_{kj} \\ &= a_{ij}(1) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n a_{ik}(0) \\ &= a_{ij}. \end{aligned}$$

در نتیجه $AI_n = A$. به همین شکل می توانیم ثابت کنیم $I_n A = A$. ■

تذکره. ویژگی (۴) از قضیه ۱ حاکی از آن است که هر ماتریس $m \times n$ مانند A دارای قرینه است، یعنی ماتریسی $(-A)$ موجود است که مجموع آن با A برابر O می شود، همانند اعداد، که برای هر عدد a قرینه ای موجود است، یعنی عددی $(-a)$ که مجموع آن با a برابر صفر می گردد. اکنون با توجه به این که هر عدد مخالف صفر a دارای وارون است، یعنی این که عددی $(\frac{1}{a})$ موجود است که حاصلضرب آن در a برابر یک می شود، سؤالی طبیعی پیش می آید و آن این که «آیا برای هر ماتریس غیر صفر A ، ماتریسی موجود است که وقتی در آن ضرب شود، حاصل برابر I شود؟». معادلاً «آیا هر ماتریس غیر صفر A ، وارون دارد؟». جواب به این سؤال منفی است، زیرا مثلاً اگر برای $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

ماتریسی مانند B موجود باشد که $AB = I$ آنگاه $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. بنابر ویژگی های ذکر شده در بالا $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ یا $O = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ که تناقض است. در بخش ۱ از فصل ۵ در مورد این موضوع بیشتر بحث خواهیم کرد.

ترانهادهٔ یک ماتریس

تعریف. فرض کنیم $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ یک ماتریس $m \times n$ باشد. در این صورت ترانهادهٔ A که آن را با A^t نمایش می دهیم یک ماتریس $n \times m$ است: $A^t = [b_{ij}]_{n \times m}$ ، و به صورت زیر تعریف می شود

$$b_{ij} = a_{ji} .$$

توجه می کنیم که در واقع ترانهادهٔ یک ماتریس مانند A ، ماتریسی است که از عوض کردن جای سطرها و ستون های ماتریس A به دست می آید. برای مثال اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ آنگاه

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} .$$

در زیر ویژگی های ابتدایی مربوط به ارتباط یک ماتریس و ترانهادهٔ آن را می آوریم.

قضیه ۵. فرض کنیم $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ و $B = [b_{ij}]_{n \times n}$ دو ماتریس مربعی مرتبه n باشند و r

یک عدد حقیقی. در این صورت

$$(A + B)^t = A^t + B^t \quad (۱)$$

$$(rA)^t = rA^t \quad (۲)$$

$$(AB)^t = B^t A^t \quad (۳)$$

$$(A^t)^t = A \quad (۴)$$

اثبات. اثبات ویژگی‌های بالا همه سر راست است و به کمک تعریف به سادگی انجام می‌شود.

فقط ویژگی (۳) را ثابت می‌کنیم و بقیه را به عنوان تمرین رها می‌کنیم.

واضح است که $(AB)^t$ و $B^t A^t$ هر دو ماتریس‌های $n \times n$ و لذا هم مرتبه هستند. اکنون

قرار می‌دهیم $AB = [c_{ij}]_{n \times n}$ ، $(AB)^t = [d_{ij}]_{n \times n}$ ، $A^t = [e_{ij}]_{n \times n}$ ، $B^t = [f_{ij}]_{n \times n}$ و

$$B^t A^t = [g_{ij}]_{n \times n} \quad \text{و ثابت می‌کنیم برای هر } i \text{ و هر } j, d_{ij} = g_{ij} :$$

$$\begin{aligned} d_{ij} &= c_{ji} \\ &= \sum_{k=1}^n a_{jk} b_{ki} \\ &= \sum_{k=1}^n b_{ki} a_{jk} \\ &= \sum_{k=1}^n f_{ik} e_{kj} \\ &= g_{ij} \end{aligned}$$

در نتیجه $(AB)^t = B^t A^t$. ■

تعریف. فرض کنیم A یک ماتریس مربعی از مرتبه n باشد. A را متقارن می‌نامیم هرگاه

$$A^t = A \quad \text{و آنرا پاد متقارن می‌نامیم هرگاه } A^t = -A.$$

برای مثال ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۴ \\ ۴ & ۵ \end{bmatrix}$ یک ماتریس متقارن است، زیرا $A^t = \begin{bmatrix} ۱ & ۴ \\ ۴ & ۵ \end{bmatrix} = A$ ، و

$B = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}$ پاد متقارن زیرا $B^t = \begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix} = -B$ ، حال آنکه $C = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ نه متقارن است

و نه پاد متقارن.

تذکر. فرض کنیم A یک ماتریس مربعی از مرتبه n باشد. با توجه به ویژگی‌های ذکرشده در قضیه بالا داریم

$$\left[\frac{1}{2}(A + A^t) \right]^t = \frac{1}{2}(A + A^t)^t = \frac{1}{2}(A^t + (A^t)^t) = \frac{1}{2}(A^t + A) = \frac{1}{2}(A + A^t),$$

$$\left[\frac{1}{2}(A - A^t) \right]^t = \frac{1}{2}(A - A^t)^t = \frac{1}{2}(A^t - (A^t)^t) = \frac{1}{2}(A^t - A) = -\frac{1}{2}(A - A^t).$$

در نتیجه $\frac{1}{2}(A + A^t)$ ماتریس متقارن و $\frac{1}{2}(A - A^t)$ ماتریس پاد متقارن است. اکنون

با توجه به

$$A = \frac{1}{2}(A + A^t) + \frac{1}{2}(A - A^t)$$

نتیجه می‌گیریم که هر ماتریس مربعی را می‌توان به صورت مجموع یک ماتریس متقارن و یک ماتریس پاد متقارن نوشت.

ماتریس‌ها و تبدیلات هندسی در صفحه

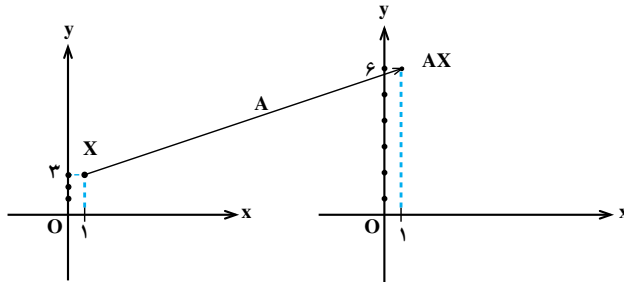
در اینجا نقاط \mathbb{R}^2 را به جای (x, y) با ماتریس $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ که یک ماتریس 2×1 است نمایش

می‌دهیم. گیریم A یک ماتریس 2×2 باشد. برای هر نقطه $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ از \mathbb{R}^2 یک $AX = A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ یک

ماتریس 2×1 است و لذا نقطه‌ای از \mathbb{R}^2 را نمایش می‌دهد. در واقع این نقطه از ضرب ماتریس A در X به وجود می‌آید. پس می‌توانیم بگوییم که یک ماتریس 2×2 با ضرب در نقطه‌ای از \mathbb{R}^2 ، آن را به نقطه‌ای از \mathbb{R}^2 می‌نگارد و لذا ماتریس‌های 2×2 را می‌توانیم به عنوان تبدیلات هندسی در صفحه در نظر بگیریم. به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۳. ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ را در نظر می‌گیریم. این ماتریس نقطه $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ از \mathbb{R}^2 را

به نقطه $AX = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix}$ می‌نگارد (به شکل ۱ نگاه کنید).



شکل ۱

اکنون فرض کنیم F یک شکل هندسی خاص در صفحه باشد. مثلاً می‌توانیم F را محیط و

درون دایره‌ای به شعاع ۱ و به مرکز مبدأ مختصات در نظر بگیریم: $F = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1 \right\}$.

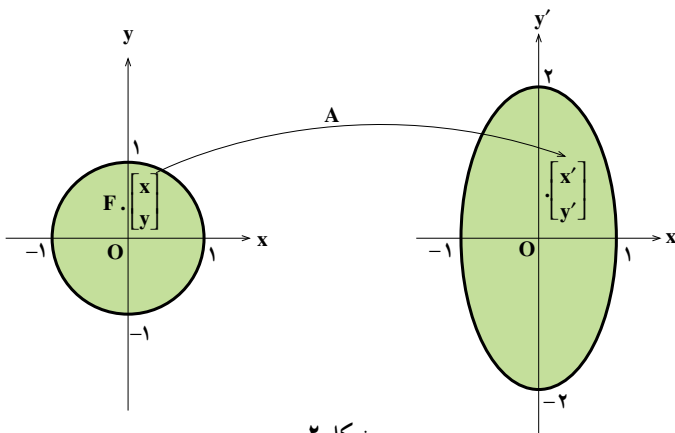
می‌خواهیم بررسی کنیم A شکل F را به چه شکلی تبدیل خواهد کرد. یعنی اگر A بر تک تک نقاط F اثر کند، نقاط حاصل چه شکلی پدید می‌آورند. بگیریم $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in F$ ، لذا $x^2 + y^2 \leq 1$. حال اگر

$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = AX = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 2y \end{bmatrix}$ برابر است با $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ ، یعنی نقطه حاصل، یعنی $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ ،

لذا $x = x'$ و $y = \frac{1}{2}y'$. در نتیجه $x'^2 + (\frac{1}{2}y')^2 \leq 1$ ، یا $x'^2 + \frac{y'^2}{4} \leq 1$. پس نقاط حاصل از اثر

روی نقاط F ، یعنی $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ ها، در $x'^2 + \frac{y'^2}{4} \leq 1$ صدق می‌کنند و لذا شکل حاصل از اثر A روی

F ، محیط و درون یک بیضی است به مرکز مبدأ مختصات، قطر بزرگ ۴ و قطر کوچک ۲ (به شکل ۲ نگاه کنید).



شکل ۲

در سال دوم دیده‌ایم که ماتریس‌های $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ و

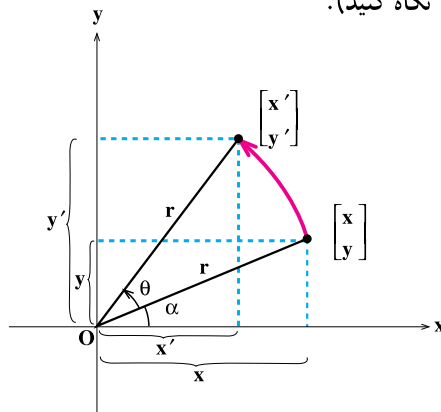
$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ در اثر روی نقاط صفحه به ترتیب آنها را نسبت به محور x ها، محور y ها، خط $y=x$ ، خط $y=-x$ و مبدأ مختصات قرینه می‌کنند. در مثال زیر ماتریسی را پیدا می‌کنیم که در اثر روی نقاط صفحه آنها را به اندازه زاویه ثابت θ حول مبدأ مختصات در جهت مثلثاتی دوران می‌دهند.

مثال ۴. فرض کنیم نقطه $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ را به اندازه زاویه ثابت θ حول مبدأ مختصات در جهت

مثلثاتی دوران دهیم. می‌خواهیم مختصات نقطه حاصل از این دوران را پیدا کنیم. گیریم $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ نقطه

حاصل از دوران باشد. واضح است که فاصله $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ از مبدأ مختصات برابر می‌باشد که آن را

r فرض می‌کنیم (به شکل ۳ نگاه کنید).



شکل ۳

چون $\begin{cases} x = r \cos \alpha \\ y = r \sin \alpha \end{cases}$ و $\begin{cases} x' = r \cos(\alpha + \theta) \\ y' = r \sin(\alpha + \theta) \end{cases}$ ، لذا با استفاده از بسط سینوس و کسینوس

به دست می‌آوریم

$$\begin{cases} x' = (\cos \theta)x + (-\sin \theta)y \\ y' = (\sin \theta)x + (\cos \theta)y \end{cases}$$

لذا دوران یافته $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ حول مبدأ مختصات در جهت مثلثاتی به اندازه θ می باشد. حال توجه می کنیم که

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} (\cos \theta)x + (-\sin \theta)y \\ (\sin \theta)x + (\cos \theta)y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

در نتیجه ماتریس

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

که آن را با R_θ نمایش می دهیم، در اثر روی نقاط \mathbb{R}^2 ، آنها را به اندازه θ در جهت مثلثاتی حول مبدأ مختصات دوران می دهد.



۱. ماتریس های زیر را به صورت آرایه مستطیلی بنویسید.

(الف) $[i + j]_{2 \times 2}$ ، (ب) $[ij]_{3 \times 3}$ ،

(ج) $[i^2 + j^2]_{2 \times 3}$ ، (د) $[2i + 3j]_{3 \times 3}$.

۲. عبارات زیر را محاسبه کنید.

(الف) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 4 & 8 \\ 5 & -3 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$

(ب) $\begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

(ج) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 4 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 4 & 9 & 0 \end{bmatrix}$

۳. فرض کنید $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & -5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$. یک ماتریس 3×2 مانند C را طوری

پیدا کنید که $A + B - C = O_{3 \times 3}$.

۴. قضیه ۱ را ثابت کنید.

۵. حاصلضربهای زیر را به دست آورید.

$$\text{الف) } \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\text{ب) } \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 5 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{۶. اگر } A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \text{ و } C = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

نشان دهید $CA = C$ و $AC = A$ ، $AB = BA = O$.

۷. فرض کنید a, b, c, d چهار واحد طول باشد. ماتریس زیر یک جدول تبدیل واحد است

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & 24 \\ \frac{1}{3} & 1 & 2 & 8 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 & 4 \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

بنابراین، یک واحد از a ، شش واحد از c است، یک واحد از b هشت واحد از d است، و یک واحد از c نصف واحد از b است. این جدول را به عنوان یک ماتریس در نظر بگیرید و شرح

دهید که چرا $a_{ik}a_{kj} = a_{ij}$. آیا می‌توانید بدون محاسبه مستقیم A^2 را پیدا کنید؟

۸. کارخانه‌ای سه محصول a, b, c را به دو بازار m و n می‌فروشد. تعداد واحدهای فروخته

شده هر محصول در هر بازار در یک سال معین با ماتریس

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c \end{matrix} \\ \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} & \begin{bmatrix} 5000 & 2000 & 1500 \\ 2000 & 2000 & 1000 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

داده شده است. ماتریس‌های $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} 1/8 \\ 3/5 \\ 2/5 \end{bmatrix}$ به ترتیب، قیمت فروش و قیمت تمام شده هر واحد از a, b و c را نشان می‌دهند. درآیه‌های هر یک از ماتریس‌های AB, AC و $AB - AC$ را تعبیر کنید.

۹. اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ ، نشان دهید $A^2 - 4A - 5I_3 = O$.

۱۰. اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ، مطلوب است محاسبه A^{10} .

۱۱. اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ، ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n ، $A^n = \begin{bmatrix} n+1 & -n \\ n & -n+1 \end{bmatrix}$.

۱۲. اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ، به کمک محاسبه توان‌های مختلف A ، نشان دهید عدد طبیعی

n موجود است که $A^n = O$.

۱۳. اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ، ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n ، $A^n = (2^n - 1)A - 2(2^{n-1} - 1)I_2$.

۱۴. ویژگی‌های ۱، ۲ و ۴ از قضیه ۵ را ثابت کنید.

۱۵. اگر $AB = BA$ که A و B دو ماتریس مربعی مرتبه ۲ یا ۳ هستند و هر دو متقارن یا هر دو

پاد متقارن، ثابت کنید AB متقارن است.

۱۶. ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ را به صورت مجموع یک ماتریس متقارن و یک ماتریس

پاد متقارن بنویسید.

۱۷. فرض کنید F محیط و درون دایره $x^2 + y^2 = 4$ باشد:

$$F = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 \leq 4 \right\}.$$

ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ در اثر روی F ، F را به چه شکل هندسی تبدیل می‌کند؟

۱۸. برای زاویه ثابت داده شده θ و عدد طبیعی n ، ثابت کنید $R_\theta^n = R_{n\theta}$ ، یعنی

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}. \quad 112$$