ابن‌سینا


ابن‌سینا

ابوعلی حسین‌بن عبدالله معروف به ابن‌سینا

در سال ۳۷۰ قمری/ ۳۵۹ شمسی/ ۹۸۰میلادی در بخارا متولد شد.

در سال ۴۲۸ قمری / ۴۱۶ شمسی / ۱۰۳۷ میلادی در همدان درگذشت.

فیلسوف، پزشک، منجم و ریاضیدان ایرانی

کارهای ریاضی او عبارتند از :

۱. پژوهش در هندسه و تلخیص هندسه اقلیدسی در کتاب شفا
۲. دستور کلی برای ساختن اعداد مثلثی، مربعی و مخمسی در نظریه‌ی اعداد
۳. تلاش برای ارتباط و تلفیق هندسه و حساب
۴. تعیین طول و عرض دائرةالبروج با استفاده از مثلثات کروی

منابع

۱. دانشنامه‌ی جهان اسلام صفحه‌ی ۲۹
۲. اطلس ریاضی صفحه‌ی ۵۷۶
۳. دائرةالمعارف بزرگ اسلامی جلد ۴ صفحه‌ی ۱
۴. زندگینامه‌ی دانشوران جلد ۱ صفحه‌ی ۳۹
۵. نوابغ علماء العرب و المسلمین فی الریاضیات صفحه‌ی ۱۹۶

۵

دستگاه معادلات خطی

۵ . ۱ ماتریس‌های وارونپذیر

می‌دانیم که برای ماتریس غیرصفر A، ممکن است ماتریسی مانند B موجود نباشد که وقتی در آن ضرب شود برابر I گردد (به تذکر صفحهٔ ۱۰۵ نگاه کنید). به عبارت دیگر در ضرب ماتریس‌ها، چنین نیست که هر ماتریس غیرصفر «وارون» داشته باشد، برخلاف ضرب اعداد که هر عدد غیرصفر دارای وارون است. در این بخش می‌خواهیم مفهوم وارون یک ماتریس مربعی را تعریف کنیم، همچنین شرطی لازم و کافی برای وارونپذیری ماتریس‌های مربعی مرتبهٔ ۲ و ۳ پیدا خواهیم کرد.

تعریف. گیریم A یک ماتریس مربعی باشد. اگر ماتریس مربعی B موجود باشد طوری که $AB = BA = I$ ، آنگاه می‌گوییم A **وارونپذیر** است و B را نیز **وارون** A می‌نامیم.

مثال ۱. ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۵ & ۳ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ را در نظر می‌گیریم. اگر قرار دهیم $B = \begin{bmatrix} -۱ & ۳ \\ ۲ & -۵ \end{bmatrix}$ ، آنگاه $AB = BA = I$ ، لذا A وارونپذیر است و وارون آن ماتریس B می‌باشد.

قضیهٔ ۱. فرض کنیم A یک ماتریس مربعی باشد که وارونپذیر است. در این صورت وارون A منحصر به فرد است.

اثبات. گیریم B و C هر دو ماتریس‌های مربعی باشند که وارون A هستند، یعنی $AB = BA = I$

و $AC=CA=I$. اکنون به کمک ویژگی‌های ضرب ماتریس‌ها می‌توانیم بنویسیم

$$B=BI=B(AC)=(BA)C=IC=C,$$

و لذا وارون A منحصر به فرد است.■

تذکر. برای ماتریس وارونپذیر A، وارون منحصر به فرد A را با A^{-1} نمایش می‌دهیم، لذا $AA^{-1}=A^{-1}A=I$.

مثال ۲. برای ماتریس مثال ۱، یعنی $A=\begin{bmatrix}5 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ ، داریم $A^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 2 & -5\end{bmatrix}$ و این تنها وارون ماتریس A است.

قضیهٔ ۲. فرض کنیم A یک ماتریس مربعی باشد که وارونپذیر است. در این صورت $|A|\neq 0$.

اثبات. چون A وارونپذیر است پس A^{-1} موجود است و $AA^{-1}=A^{-1}A=I$. در نتیجه $|A||A^{-1}|=|AA^{-1}|=|I|=1$ و لذا $|A|\neq 0$.■

قضیهٔ قبل یک شرط لازم برای وارونپذیری ماتریس‌های مربعی به دست می‌دهد. در مطالب آیندهٔ این بخش خواهیم دید که این شرط کافی نیز می‌باشد.

وارونپذیری ماتریس‌های ۲×۲

گیریم $A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$ یک ماتریس ۲×۲ باشد. A وارونپذیر است اگر و فقط اگر ماتریس $B=\begin{bmatrix}x & y\\ z & t\end{bmatrix}$ موجود باشد طوری که $AB=BA=I$.

ابتدا بررسی می‌کنیم که تحت چه شرایطی ماتریس B موجود است که $AB=I$. برای این منظور توجه می‌کنیم که $AB=I$ معادل است با این که

$$\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & y\\ z & t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},$$

یا

$$\begin{bmatrix} a_{11}x+a_{12}z & a_{11}y+a_{12}t \\ a_{21}x+a_{22}z & a_{21}y+a_{22}t \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

پس وجود ماتریس $B=\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$ معادل است با این که دستگاه

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}z=1 \\ a_{11}y+a_{12}t=0 \\ a_{21}x+a_{22}z=0 \\ a_{21}y+a_{22}t=1 \end{cases}$$

برحسب x، y، z و t دارای جواب باشد. امّا این دستگاه با دو دستگاه

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}z=1 \\ a_{21}x+a_{22}z=0 \end{cases}, \quad \begin{cases} a_{11}y+a_{12}t=0 \\ a_{21}y+a_{22}t=1 \end{cases}$$

معادل است. توجه می‌کنیم که این دو دستگاه تواماً فقط و فقط وقتی جواب دارند که $a_{11}a_{22} \neq a_{12}a_{21}$ (چرا؟)، $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \neq 0$ ، یا $|A| \neq 0$ و در این حالت نیز جواب برابر است با

$$\begin{cases} x=\dfrac{a_{22}}{|A|} \\ z=\dfrac{-a_{21}}{|A|} \end{cases}, \quad \begin{cases} y=\dfrac{-a_{12}}{|A|} \\ t=\dfrac{a_{11}}{|A|} \end{cases}$$

(چرا؟).

لذا ماتریس B با این خاصیت که $AB=I$ موجود است اگر و فقط اگر $|A| \neq 0$. در این حالت

$$B=\begin{bmatrix} \dfrac{a_{22}}{|A|} & \dfrac{-a_{12}}{|A|} \\ \dfrac{-a_{21}}{|A|} & \dfrac{a_{11}}{|A|} \end{bmatrix}=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}. \qquad (1)$$

بررسی مشابه نشان می‌دهد که وجود ماتریس B با این خاصیت که $BA=I$ نیز معادل است با $|A| \neq 0$ و در این حالت نیز B همان ماتریس معرفی شده در (۱) است. خلاصهٔ مطالب بالا را می‌توانیم در قضیهٔ صفحهٔ بعد خلاصه کنیم.

قضیهٔ ۳. ماتریس $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ وارونپذیر است اگر و فقط اگر $|A|\neq 0$ و در این حالت داریم $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$.

مثال ۳. برای ماتریس مثال ۱، یعنی $A=\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$، داریم $|A|=5-6=-1$ و لذا $A^{-1}=-\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$.

وارونپذیری ماتریس‌های 3×3

در زیر قضیه‌ای مشابه قضیهٔ ۳ برای ماتریس‌های 3×3 بیان می‌کنیم.

قضیهٔ ۴. ماتریس $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ وارونپذیر است اگر و فقط اگر $|A|\neq 0$. در این حالت داریم $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$ که در آن $A^*=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$ و A_{ij}، ijــ امین همسازهٔ ماتریس A است.

اثبات. ابتدا ثابت می‌کنیم که

$$AA^*=A^*A=|A|I. \qquad (1)$$

گیریم $AA^*=[b_{ij}]$. با توجه به این که

$$a_{i1} \quad a_{i2} \quad a_{i3}$$

سطر iام ماتریس A و

$$\begin{matrix} A_{j1} \\ A_{j2} \\ A_{j3} \end{matrix}$$

ستون ژام ماتریس A^* است، لذا

$$b_{ij} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + a_{i3}A_{j3} . \qquad (۲)$$

حالت اوّل: $i = j$. در این حالت (۲) به صورت $b_{ii} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3}$ در می‌آید. امّا طرف راست تساوی اخیر در واقع بسط دترمینان A نسبت به سطر iام است و لذا برابر $|A|$ است، یعنی $b_{ii} = |A|$.

حالت دوم: $i \neq j$. ماتریس $C = [c_{ij}]_{3\times3}$ را طوری در نظر می‌گیریم که تمام سطرهایش، بجز احتمالاً سطر ژام آن، با سطرهای A یکی باشد و سطر ژام آن را نیز برابر سطر iام A می‌گیریم. پس C ماتریسی است با لااقل دو سطر یکسان، سطر iام و سطر ژام و در نتیجه $|C| = 0$. چون سطر ژام C با سطر iام A یکسان است پس $c_{j1} = a_{i1}$ ، $c_{j2} = a_{i2}$ و $c_{j3} = a_{i3}$. از طرفی A و C در تمام سطرها یکسان هستند، بجز احتمالاً در سطر ژام و لذا $C_{j1} = A_{j1}$ ، $C_{j2} = A_{j2}$ و $C_{j3} = A_{j3}$. در نتیجه بنابر (۲)، $b_{ij} = c_{j1}C_{j1} + c_{j2}C_{j2} + c_{j3}C_{j3}$. امّا طرف دوم تساوی اخیر بسط دترمینان C برحسب سطر ژام است و لذا برابر $|C|$ است، یعنی $b_{ij} = |C|$. امّا $|C| = 0$ پس $b_{ij} = 0$.

از آنچه در حالت اوّل و دوم ذکر کردیم نتیجه می‌گیریم که

$$b_{ij} = \begin{cases} |A| & \text{اگر } i = j: \\ 0 & \text{اگر } i \neq j: \end{cases}$$

و لذا $AA^* = \begin{bmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{bmatrix} = |A|I$. با استدلالی مشابه می‌توان ثابت کرد که $A^*A = |A|I$ ، پس (۱) ثابت شده است.

اگر A وارونپذیر باشد بنابر قضیهٔ ۲، $|A| \neq 0$. اگر $|A| \neq 0$ آنگاه رابطهٔ (۱) به صورت $A\left(\frac{1}{|A|}A^*\right) = \left(\frac{1}{|A|}A^*\right)A = I$ تبدیل می‌شود که نشان می‌دهد A وارونپذیر است و $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$. ■

مثال ۴. برای ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & -۴ \\ ۰ & -۴ & ۲ \\ ۱ & -۱ & ۵ \end{bmatrix}$ داریم

$$A_{۱۱}=\begin{vmatrix} -۴ & ۲ \\ -۱ & ۵ \end{vmatrix}=-۱۸\ ,\ A_{۱۲}=-\begin{vmatrix} ۰ & ۲ \\ ۱ & ۵ \end{vmatrix}=۲\ ,\ A_{۱۳}=\begin{vmatrix} ۰ & -۴ \\ ۱ & -۱ \end{vmatrix}=۴\ ,$$

$$A_{۲۱}=-\begin{vmatrix} ۳ & -۴ \\ -۱ & ۵ \end{vmatrix}=-۱۱\ ,\ A_{۲۲}=\begin{vmatrix} ۲ & -۴ \\ ۱ & ۵ \end{vmatrix}=۱۴\ ,\ A_{۲۳}=-\begin{vmatrix} ۲ & ۳ \\ ۱ & -۱ \end{vmatrix}=۵\ ,$$

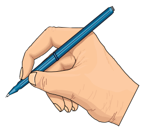
$$A_{۳۱}=\begin{vmatrix} ۳ & -۴ \\ -۴ & ۲ \end{vmatrix}=-۱۰\ ,\ A_{۳۲}=-\begin{vmatrix} ۲ & -۴ \\ ۰ & ۲ \end{vmatrix}=-۴\ ,\ A_{۳۳}=\begin{vmatrix} ۲ & ۳ \\ ۰ & -۴ \end{vmatrix}=-۸\,.$$

پس

$$A^{*}=\begin{bmatrix} -۱۸ & -۱۱ & -۱۰ \\ ۲ & ۱۴ & -۴ \\ ۴ & ۵ & -۸ \end{bmatrix}.$$

امّا $|A|=-۴۶$، لذا

$$A^{-۱}=\frac{-۱}{۴۶}\begin{bmatrix} -۱۸ & -۱۱ & -۱۰ \\ ۲ & ۱۴ & -۴ \\ ۴ & ۵ & -۸ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{۹}{۲۳} & \frac{۱۱}{۴۶} & \frac{۵}{۲۳} \\ \frac{-۱}{۲۳} & \frac{-۷}{۲۳} & \frac{۲}{۲۳} \\ \frac{-۲}{۲۳} & \frac{-۵}{۴۶} & \frac{۴}{۲۳} \end{bmatrix}.$$



تمرین

۱. وارون هر یک از ماتریس‌های زیر را در صورت وجود پیدا کنید.

الف) $\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ -۴ & -۶ \end{bmatrix}$،　　ب) $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۴ & -۱ \end{bmatrix}$،

ج) $\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}$،　　د) $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۲ \\ ۳ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$.

۲. برای ماتریس مثال ۱، یعنی $A=\begin{bmatrix} ۳ & ۵ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ ، ابتدا اعداد m، n و r را طوری پیدا کنید که داشته باشیم $mA^{۲}+nA+rI=O$. سپس به کمک این رابطه $A^{-۱}$ را محاسبه کنید.

۳. فرض کنید A و B ماتریس‌های مربعی وارونپذیر باشند و λ یک عدد حقیقی غیر صفر. ثابت کنید

الف) AB وارونپذیر است و $(AB)^{-۱}=B^{-۱}A^{-۱}$ ،

ب) A^{t} وارونپذیر است و $(A^{t})^{-۱}=(A^{-۱})^{t}$ ،

ج) λA وارونپذیر است و $(\lambda A)^{-۱}=\frac{۱}{\lambda}A^{-۱}$.

۴. فرض کنید A یک ماتریس مربعی وارونپذیر باشد. ثابت کنید $\left|A^{-۱}\right|=\frac{۱}{|A|}$.

۵. اگر برای ماتریس مربعی A، ماتریس مربعی B موجود باشد که $AB=I$ ، ثابت کنید A وارونپذیر است و $B=A^{-۱}$.

۶. الف) اگر A و P ماتریس‌های مربعی هم مرتبه باشند و P وارونپذیر فرض شود، ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n ، $(P^{-۱}AP)^{n}=P^{-۱}A^{n}P$ ،

ب) ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ داده شده است. ابتدا ماتریس وارونپذیر P را طوری پیدا کنید که $P^{-۱}AP=\begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}$. سپس برای عدد طبیعی n، A^{n} را محاسبه کنید.

۷. فرض کنید A یک ماتریس مربعی باشد با این خاصیت که $A^{۲}=A$. اگر $\lambda\neq ۱$ یک عدد حقیقی باشد، ثابت کنید $I-\lambda A$ وارونپذیر است و داریم $(I-\lambda A)^{-۱}=I+\frac{\lambda}{۱-\lambda}A$.

۸. فرض کنید A یک ماتریس مربعی باشد و عدد طبیعی n موجود باشد که $A^{n}=O$. ثابت کنید $I-A$ وارونپذیر است. وارون $I-A$ چیست؟

۹. در قضیهٔ ۴ ثابت کنید $\left|A^{*}\right|=|A|^{۲}$.

۱۰. اگر A و B ماتریس‌های مربعی هم مرتبه باشند به قسمی که $A+B=AB$ ، ثابت کنید با فرض وارونپذیری A، B نیز وارونپذیر است و داریم $A^{-۱}+B^{-۱}=I$.

۱۱. برای زاویهٔ ثابت داده شدهٔ θ ، ثابت کنید ماتریس دوران R_{θ} وارونپذیر است و $(R_{\theta})^{-۱}=R_{-\theta}$.

۲.۵ دستگاه معادلات خطی

در این بخش نظر خود را به دستگاه‌های سه معادلهٔ سه مجهولی معطوف می‌کنیم و روش‌های مختلف حل این نوع دستگاه‌ها را بررسی خواهیم کرد. یک دستگاه سه معادلهٔ سه مجهولی به صورت

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \qquad (1)$$

می‌باشد. a_{ij} ها را **ضرایب** و x_i ها را **مجهولات** دستگاه می‌نامیم. این دستگاه را می‌توانیم به صورت معادلهٔ ماتریسی

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \qquad (1')$$

نیز نمایش دهیم. اگر قرار دهیم $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ (که **ماتریس ضرایب** نام دارد)، $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ (که **ماتریس مجهولات** نام دارد) و $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$، آنگاه دستگاه $(1')$ به صورت

$$AX = B \qquad (1'')$$

تبدیل می‌شود و لذا می‌توانیم بگوییم که هر دستگاه سه معادلهٔ سه مجهولی مانند (۱) نظیر یک معادلهٔ ماتریسی به شکل $(1'')$ است و برعکس.

از آنچه در بالا گفتیم می‌توانیم نتیجه بگیریم که بحث در مورد دستگاه (۱) با بحث روی معادلهٔ $(1'')$ معادل است.

قضیهٔ ۱. فرض کنیم $AX = B$ شکل ماتریسی دستگاه سه معادلهٔ سه مجهولی (۱) باشد. اگر $|A| \neq 0$، آنگاه این معادله و در نتیجه دستگاه (۱)، دارای جوابی منحصر به فرد است. این جواب منحصر به فردِ معادله و در نتیجه دستگاه (۱)، $X = A^{-1}B$ می‌باشد.

اثبات. اگر $|A|\neq ۰$، آنگاه A وارونپذیر است و لذا $A^{-۱}$ موجود است. واضح است که $X=A^{-۱}B$ جواب معادله است، زیرا $A\left(A^{-۱}B\right)=\left(AA^{-۱}\right)B=IB=B$. اکنون اگر $X_۱$ و $X_۲$ دو جواب برای $AX=B$ باشند، آنگاه $AX_۱=B$ و $AX_۲=B$ و لذا $AX_۱=AX_۲$. پس $A^{-۱}(AX_۱)=A^{-۱}(AX_۲)$، $(A^{-۱}A)X_۱=(A^{-۱}A)X_۲$، $IX_۱=IX_۲$، یا $X_۱=X_۲$. لذا جواب منحصر به فرد است. ■

مثال ۱. دستگاه سه معادلهٔ سه مجهولی

$$\begin{cases} ۲x_۱+۳x_۲-۴x_۳=۱ \\ \quad -۴x_۲+۲x_۳=-۲ \\ x_۱-x_۲+۵x_۳=۵ \end{cases}$$

را در نظر می‌گیریم. ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & -۴ \\ ۰ & -۴ & ۲ \\ ۱ & -۱ & ۵ \end{bmatrix}$، $X=\begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ \\ -۲ \\ ۵ \end{bmatrix}$ را در نظر می‌گیریم. در نتیجه $AX=B$ شکل ماتریسی دستگاه داده شده است. چون، $|A|=-۴۶\neq ۰$، بنابر قضیهٔ قبل این معادله جواب منحصر به فرد $X=A^{-۱}B$ دارد. امّا $A^{-۱}=\begin{bmatrix} \frac{۹}{۲۳} & \frac{۱۱}{۴۶} & \frac{۵}{۲۳} \\ \frac{-۱}{۲۳} & \frac{-۷}{۲۳} & \frac{۲}{۲۳} \\ \frac{-۲}{۲۳} & \frac{-۵}{۴۶} & \frac{۴}{۲۳} \end{bmatrix}$ (به مثال ۴ بخش قبل نگاه کنید) و لذا

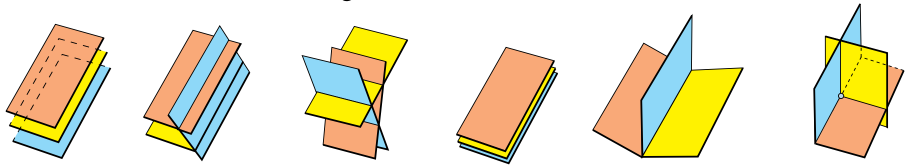
$$X=A^{-۱}B=\begin{bmatrix} \frac{۹}{۲۳} & \frac{۱۱}{۴۶} & \frac{۵}{۲۳} \\ \frac{-۱}{۲۳} & \frac{-۷}{۲۳} & \frac{۲}{۲۳} \\ \frac{-۲}{۲۳} & \frac{-۵}{۴۶} & \frac{۴}{۲۳} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ \\ -۲ \\ ۵ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}.$$

یعنی $X=\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$ جواب معادله و $\begin{cases} x_۱=۱ \\ x_۲=۱ \\ x_۳=۱ \end{cases}$ جواب دستگاه مورد نظر است.

یک دید هندسی نیز در مورد جوابهای دستگاه (۱)، یعنی دستگاه

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

می‌توان به‌کار گرفت. توجه می‌کنیم که هر یک از معادلات این دستگاه یک صفحه را نمایش می‌دهد. لذا وجود جواب برای این دستگاه معادل است با وجود نقطه‌ای مشترک روی صفحاتی که توسط سه معادلهٔ این دستگاه مشخص می‌شود. ارتباط بین جوابها و نقاط تقاطع صفحه‌ها در شکل زیر نمایان شده است.



سه صفحهٔ متقاطع در یک نقطه، دستگاه جواب منحصر به‌فرد دارد.

سه صفحهٔ متقاطع در یک خط، دستگاه بیشمار جواب دارد.

سه صفحهٔ منطبق، دستگاه بیشمار جواب دارد.

دستگاه بدون جواب است.

دستگاه بدون جواب است.

سه صفحهٔ موازی، دستگاه بدون جواب است.

شکل ۱

مثال ۲. دستگاه سه معادلهٔ سه مجهولی مثال ۱، یعنی دستگاه

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 1 \\ \quad\ \ - 4x_2 + 2x_3 = -2 \\ x_1 - \ \ x_2 + 5x_3 = 5 \end{cases}$$

را درنظر می‌گیریم. می‌خواهیم این بار به روش هندسی وجود جواب را بررسی کنیم. همان‌طور که در بالا اشاره کردیم هریک از معادلات این دستگاه یک صفحه را نمایش می‌دهد. لذا وجود جواب برای این دستگاه معادل است با وجود نقطه‌ای مشترک روی صفحاتی که توسط سه معادلهٔ این دستگاه مشخص می‌شود. در دو معادلهٔ اوّل با قرار دادن $x_1 = 0$ به‌دست می‌آوریم $x_2 = \frac{3}{5}$ و $x_3 = \frac{1}{5}$.

لذا نقطهٔ $(0, \frac{3}{5}, \frac{1}{5})$ روی هردو صفحه‌ای که توسط دو معادلهٔ اوّل مشخص می‌شود قرار دارد. پس این دو صفحهٔ مذکور به دلیل این که متمایزاند، یکدیگر را در یک خط قطع می‌کنند. صفحهٔ مشخص شده توسط معادلهٔ اوّل بر بردار $n_1 = (2, 3, -4)$ عمود است و صفحهٔ مشخص شده توسط معادلهٔ دوم

بر بردار $n_۲=(۰,-۴,۲)$. در نتیجه خطی که فصل مشترک دو صفحهٔ مشخص شده توسط دو معادلهٔ اوّل است با بردار $n_۱\times n_۲=(-۱۰,-۴,-۸)$ موازی خواهد بود و لذا معادلات پارامتری آن به‌صورت زیر می‌باشد.

$$\begin{cases} x_۱=-۱۰t\,. \\ x_۲=\frac{۳}{۵}-۴t \qquad , \qquad t\in\mathbb{R}\,. \\ x_۳=\frac{۱}{۵}-۸t \end{cases}$$

حال اگر این خط بر صفحه‌ای که توسط معادلهٔ سوم مشخص می‌شود منطبق باشد، دستگاه بیشمار جواب دارد ؛ اگر آن را قطع نکند، دستگاه جواب ندارد و اگر آن را در یک نقطه قطع کند، دستگاه جواب منحصر به فرد دارد. پس کافی است بررسی کنیم که به ازای چه tهایی نقاط خط مذکور روی صفحهٔ $x_۱-x_۲+۵x_۳=۵$ قرار می‌گیرد. برای این منظور باید معادلهٔ $-۱۰t-(\frac{۳}{۵}-۴t)+۵(\frac{۱}{۵}-۸t)=۵$ را حل کنیم. امّا این معادله به صورت $-۴۶t=\frac{۲۳}{۵}$ ساده می‌شود که تنها جواب آن $t=\frac{-۱}{۱۰}$ است. پس فقط به ازای $t=\frac{-۱}{۱۰}$، نقطهٔ $(۱,۱,۱)$ از خطی که فصل مشترک دو صفحهٔ مشخص شده توسط دو معادلهٔ اوّل دستگاه است روی صفحهٔ مشخص شده توسط معادلهٔ سوم دستگاه قرار می‌گیرد. لذا دستگاه جوابی منحصر به فرد دارد که عبارت است از

$$\begin{cases} x_۱=۱ \\ x_۲=۱ \\ x_۳=۱. \end{cases}$$

اگر در دستگاه (۱)، $b_۱=b_۲=b_۳=۰$ ، آنگاه می‌گوییم یک دستگاه سه معادلهٔ سه مجهولی **همگن** داریم. واضح است که یک دستگاه سه معادلهٔ سه مجهولی همگن

$$\begin{cases} a_{۱۱}x_۱+a_{۱۲}x_۲+a_{۱۳}x_۳=۰ \\ a_{۲۱}x_۱+a_{۲۲}x_۲+a_{۲۳}x_۳=۰ \qquad (۲) \\ a_{۳۱}x_۱+a_{۳۲}x_۲+a_{۳۳}x_۳=۰ \end{cases}$$

نظیر معادلهٔ ماتریسی

$$AX=O \quad (۲')$$

است.

مثال ۳. دستگاه سه معادلهٔ سه مجهولی همگن

$$\begin{cases}2x_1+x_2+x_3=0\\-4x_1-2x_2-2x_3=0\\3x_1-x_2+x_3=0\end{cases}$$

را درنظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم $A=\begin{bmatrix}2&1&1\\-4&-2&-2\\3&-1&1\end{bmatrix}$ و $X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$. درنتیجه $AX=O$ شکل ماتریسی دستگاه داده شده است. چون $|A|=0$، لذا برای این معادله و درنتیجه دستگاه داده شده قضیهٔ ۱ کارساز نخواهد بود. البته واضح است که $x_1=x_2=x_3=0$ یک جواب این دستگاه همگن می‌باشد (جواب صفر) و برای بررسی وجود یا عدم وجود جواب غیرصفر برای این دستگاه روش هندسی ممکن است کارساز باشد. معادلات اوّل و دوم دستگاه مذکور یکی هستند. درنتیجه این دستگاه با دستگاه

$$\begin{cases}2x_1+x_2+x_3=0\\3x_1-x_2+x_3=0\end{cases}$$

معادل است. امّا نقاط (x_1,x_2,x_3) که در معادلهٔ اوّل صدق می‌کنند نقاط یک صفحهٔ گذرا از مبدأ مختصات می‌باشند. نقاط (x_1,x_2,x_3) و صادق در معادلهٔ دوم نیز چنین است. امّا دو صفحهٔ متمایز و گذرا از مبدأ مختصات یکدیگر را در یک خط قطع می‌کنند. پس نقاط (x_1,x_2,x_3) که روی این خط قرار دارند هم در معادلهٔ اوّل صدق می‌کنند و هم در معادلهٔ دوم و لذا هر یک از نقاط روی این خط جوابی برای دستگاه مذکور به‌دست می‌دهد. پس این دستگاه جوابهای غیرصفر (درواقع بیشمار جواب) دارد.

این که در مثال قبل از صفر بودن دترمینان ماتریس ضرایب دستگاه سه معادلهٔ سه‌مجهولی همگن نتیجه گرفتیم که دستگاه بیشمار جواب دارد تصادفی نمی‌باشد. قضیهٔ زیر این موضوع را روشن می‌کند.

قضیهٔ ۲. فرض کنیم $AX=O$ شکل ماتریسی دستگاه سه معادلهٔ سه مجهولی همگن (۲) باشد. در این صورت این معادله و در نتیجه دستگاه (۲) دارای بیشمار جواب است اگر و فقط اگر $|A|=0$.

اثبات. $(\Leftarrow)$ فرض کنیم $|A|\neq 0$. لذا بنابر قضیهٔ ۱، معادلهٔ $AX=O$ دارای جواب منحصر

به فرد $X = A^{-1}O = O$ است که تناقض می‌باشد. لذا لزوماً $|A| = ۰$.

($\Rightarrow$) دستگاه سه معادلهٔ سه مجهولی همگن (۲) به‌صورت

$$\begin{cases} a_{۱۱}x_۱ + a_{۱۲}x_۲ + a_{۱۳}x_۳ = ۰ \\ a_{۲۱}x_۱ + a_{۲۲}x_۲ + a_{۲۳}x_۳ = ۰ \\ a_{۳۱}x_۱ + a_{۳۲}x_۲ + a_{۳۳}x_۳ = ۰ \end{cases}$$

می‌باشد که ماتریس‌های

$$A = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{bmatrix} \quad , \quad X = \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix}$$

شکل ماتریسی آن، یعنی $AX = O$ را به‌دست می‌دهد. با فرض $|A| = ۰$، ثابت می‌کنیم این دستگاه دارای بیشمار جواب است. برای این منظور روش هندسی[۱] را به‌کار می‌گیریم. هریک از معادلات این دستگاه صفحه‌ای را مشخص می‌کند و وجود جواب برای این دستگاه معادل است با وجود نقطه‌ای مشترک روی صفحاتی که توسط سه معادلهٔ این دستگاه مشخص می‌شود. توجه می‌کنیم که هرسه صفحه از مبدأ مختصات عبور می‌کند، زیرا $x_۱ = x_۲ = x_۳ = ۰$ جوابی برای دستگاه همگن است.

حالت اوّل: سه صفحه برهم منطبق باشند.

در این حالت واضح است که بیشمار نقطهٔ مشترک روی صفحاتی که (در واقع یک صفحه هستند و) توسط سه معادلهٔ این دستگاه مشخص می‌شود وجود خواهد داشت و لذا دستگاه نیز بیشمار جواب خواهد داشت.

حالت دوم: دوتا از سه صفحه برهم منطبق باشند.

در این حالت واضح است که یکی از صفحات دو صفحه دیگر را (که در واقع یکی هستند) در یک خط قطع خواهد کرد و مجدداً نقاط این خط نقاط مشترکی است روی سه صفحهٔ تعیین شده توسط سه معادلهٔ دستگاه همگن و لذا دستگاه بیشمار جواب دارد.

حالت سوم: سه صفحه متمایز باشند.

در این حالت صفحات مشخص شده توسط معادلات دوم و سوم دستگاه به دلیل این که یک نقطهٔ مشترک دارند همدیگر را در یک خط مانند L قطع می‌کنند. L موازی بردار $n_۲ \times n_۳$ است که در آن $n_۲ = (a_{۲۱}, a_{۲۲}, a_{۲۳})$ بردار عمود بر صفحهٔ مشخص شده توسط معادلهٔ دوم است و

۱ــ اثبات این قضیه «صرفاً با ابزارهای جبر خطی» از برنامهٔ درسی این کتاب خارج است.

$n_3=(a_{31},a_{32},a_{33})$ بردار عمود بر صفحهٔ مشخص شده توسط معادلهٔ سوم. حال باید بررسی کنیم که وضعیت این خط نسبت به صفحهٔ مشخص شده توسط معادلهٔ اوّل چگونه است. صفحهٔ مشخص شده توسط معادلهٔ اوّل بر بردار $n_1=(a_{11},a_{12},a_{13})$ عمود است و چون بنابر فرض و تمرین ۹ از صفحهٔ ۱۲۸

$$n_1.(n_2\times n_3)=|A|=0,$$

لذا خط L و صفحهٔ مشخص شده توسط معادلهٔ اوّل موازی خواهند بود که به دلیل وجود یک نقطهٔ مشترک روی آنها در واقع L براین صفحه منطبق است. پس تمام نقاط L نقاط مشترک روی صفحاتی هستند که توسط سه معادلهٔ این دستگاه مشخص می‌شود و لذا دستگاه در این حالت نیز بیشمار جواب دارد.■

دستور کرامر برای حل دستگاه‌های سه معادلهٔ سه مجهولی

قضیهٔ زیر روشی را برای حل دستگاه‌های سه معادلهٔ سه مجهولی به دست می‌دهد که منسوب به کرامر است.

قضیهٔ ۳ (دستور کرامر). گیریم دستگاه سه معادلهٔ سه مجهولی (۱) داده شده است. A را ماتریس ضرایب این دستگاه فرض می‌کنیم و برای $j=1,2,3$ ، A_j را ماتریسی 3×3 می‌گیریم که از تعویض ستون jام A با

$$\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{matrix}$$

به دست آمده است. اگر $|A|\neq 0$، در این صورت جواب منحصر به فرد دستگاه (۱) از فرمول‌های

$$x_1=\frac{|A_1|}{|A|}\ ,\ \ x_2=\frac{|A_2|}{|A|}\ ,\ \ x_3=\frac{|A_3|}{|A|}$$

به دست می‌آید.

اثبات. اگر $|A|\neq 0$، قضیهٔ ۱ نشان می‌دهد که دستگاه سه معادلهٔ سه مجهولی (۱) دارای جواب منحصر به فرد (x_1,x_2,x_3) است. اکنون بنابر ویژگی‌های دترمینان‌ها می‌توانیم بنویسیم

$$x_۱|A| = \begin{vmatrix} a_{۱۱}x_۱ & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱}x_۱ & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱}x_۱ & a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{۱۱}x_۱ + a_{۱۲}x_۲ & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱}x_۱ + a_{۲۲}x_۲ & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱}x_۱ + a_{۳۲}x_۲ & a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{۱۱}x_۱ + a_{۱۲}x_۲ + a_{۱۳}x_۳ & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱}x_۱ + a_{۲۲}x_۲ + a_{۲۳}x_۳ & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱}x_۱ + a_{۳۲}x_۲ + a_{۳۳}x_۳ & a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b_۱ & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ b_۲ & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ b_۳ & a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{vmatrix}$$

$$= |A_۱|.$$

در نتیجه $x_۱ = \frac{|A_۱|}{|A|}$. به طور مشابه می‌توان $x_۲$ و $x_۳$ را نیز محاسبه کرد و لذا حکم ثابت است.■

مثال ۴. دستگاه مثال ۱ را در نظر می‌گیریم. به کمک دستور کرامر، جواب این دستگاه برابر است با

$$x_۱ = \frac{\begin{vmatrix} ۱ & ۳ & -۴ \\ -۲ & -۴ & ۲ \\ ۵ & -۱ & ۵ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} ۲ & ۳ & -۴ \\ ۰ & -۴ & ۲ \\ ۱ & -۱ & ۵ \end{vmatrix}} = \frac{-۴۶}{-۴۶} = ۱,$$

$$x_۲ = \frac{\begin{vmatrix} ۲ & ۱ & -۴ \\ ۰ & -۲ & ۲ \\ ۱ & ۵ & ۵ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} ۲ & ۳ & -۴ \\ ۰ & -۴ & ۲ \\ ۱ & -۱ & ۵ \end{vmatrix}} = \frac{-۴۶}{-۴۶} = ۱,$$

$$x_3=\frac{\begin{vmatrix}2 & 3 & 1\\ 0 & -4 & -2\\ 1 & -1 & 5\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & 3 & -4\\ 0 & -4 & 2\\ 1 & -1 & 5\end{vmatrix}}=\frac{-46}{-46}=1.$$

روش حذفی گاوس و روش گاوس ــ جردن برای حل دستگاه‌های سه معادلهٔ سه مجهولی

همانطور که دیدیم اگر دترمینان ماتریس ضرایب دستگاه (۱) غیرصفر باشد، می‌توانیم ماتریس وارونِ ضرایب دستگاه را پیدا کنیم. با ضرب کردن طرفین (″۱) در این ماتریسِ وارون جواب دستگاه به‌دست می‌آید. پیدا کردن ماتریس وارون به روشی که ذکر شد نیاز به عملیات و محاسبات زیادی دارد. لذا روش‌های دیگری برای حل دستگاه‌ها که عملیات کمتری نیاز داشته باشد، از لحاظ کاربردهای عملی مورد توجه قرار دارد. در این قسمت روش‌های **حذفی گاوس** و **گاوس ــ جردن** را برای حل دستگاه‌های سه معادلهٔ سه مجهولی ذکر می‌کنیم. در این روش‌ها از قاعده‌های زیر برای حل دستگاه استفاده می‌کنیم:

۱) اگر طرفین یکی از معادلات را در یک عدد غیرصفر ضرب کنیم، جواب دستگاه تغییر نمی‌کند،

۲) اگر طرفین یکی از معادلات را به معادلهٔ دیگری بیافزاییم، جواب دستگاه تغییر نمی‌کند،

۳) اگر جای دو معادله را عوض کنیم، جواب دستگاه تغییر نمی‌کند.

روش حذفی گاوس

روش حذفی گاوس را با ارائهٔ مثال زیر مورد بررسی قرار می‌دهیم.

$$\begin{cases}2x_1+4x_2+6x_3=18\\ 4x_1+5x_2+6x_3=24\\ 3x_1+x_2-2x_3=4\end{cases}$$

ماتریس ضرایب دستگاه را همراه با یک ستون اضافی که از مقادیر ثابت تشکیل شده است در نظر می‌گیریم.

$$\begin{bmatrix}2 & 4 & 6 & 18\\ 4 & 5 & 6 & 24\\ 3 & 1 & -2 & 4\end{bmatrix}$$

نخست عنصری که در سطر اوّل و ستون اوّل قرار دارد را محور عملیات قرار داده و عناصر ستون اوّل در سطرهای دوم و سوم را با استفاده از قواعد ذکر شده صفر می‌کنیم. پس داریم

$$\begin{array}{r} R_۱ \\ R_۲ - ۲R_۱ \\ R_۳ - \frac{۳}{۲}R_۱ \end{array} \begin{bmatrix} ۲ & ۴ & ۶ & ۱۸ \\ ۰ & -۳ & -۶ & -۱۲ \\ ۰ & -۵ & -۱۱ & -۲۳ \end{bmatrix}. \quad (\text{یعنی سطر } R_i \text{ ام})$$

در گام بعدی عنصر واقع در سطر دوم و ستون دوم را محور عملیات گرفته و عنصر واقع در ستون دوم و سطر سوم را صفر می‌کنیم.

$$\begin{array}{r} R_۱ \\ R_۲ \\ R_۳ - \frac{۵}{۳}R_۲ \end{array} \begin{bmatrix} ۲ & ۴ & ۶ & ۱۸ \\ ۰ & -۳ & -۶ & -۱۲ \\ ۰ & ۰ & -۱ & -۳ \end{bmatrix}.$$

حال که ماتریس ضرایب دستگاه به یک ماتریس بالا مثلثی تبدیل شده است می‌توانیم با استفاده از عملیات برگشتی از پایین به بالا جواب را پیدا کنیم. در واقع در آخرین مرحله دستگاه به صورت زیر درآمده است.

$$\begin{cases} ۲x_۱ + ۴x_۲ + ۶x_۳ = ۱۸ \\ \quad - ۳x_۲ - ۶x_۳ = -۱۲ \\ \qquad\quad - x_۳ = -۳ \end{cases}$$

پس $x_۳ = ۳$ و با جایگذاری در معادلهٔ دوم داریم $x_۲ = -۲$. اکنون این دو مقدار را در معادلهٔ اوّل جایگذاری می‌کنیم، پس $x_۱ = ۴$.

روش گاوس ـــ جردن

روش گاوس ـ جردن نیز مشابه روش حذفی گاوس است ولی در اینجا در هر مرحله، عناصر غیر از قطر اصلی در هر ستون را با استفاده از قواعد ذکر شده به صفر تبدیل می‌کنیم. به مثال قبلی توجه کنید.

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۹ \\ ۴ & ۵ & ۶ & ۲۴ \\ ۳ & ۱ & -۲ & ۴ \end{bmatrix}$$

مرحلهٔ اوّل مشابه مرحلهٔ اوّل روش حذفی گاوس است.

$$\begin{array}{r} R_1 \\ R_2-4R_1 \\ R_3-3R_1 \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 0 & -5 & -11 & -23 \end{bmatrix}.$$

در مرحلهٔ دوم عنصر سطر دوم و ستون دوم ماتریس ضرایب دستگاه را محور گرفته و عناصر ستون دوم در سطر اوّل و سوم را صفر می‌کنیم.

$$\begin{array}{r} R_1+\frac{2}{3}R_2 \\ R_2 \\ R_3-\frac{5}{3}R_2 \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

در گام بعد عنصر روی سطر سوم و ستون سوم محور عملیات است و کلّیهٔ عناصر ستون سوم در سطرهای اوّل و دوم را صفر می‌کنیم.

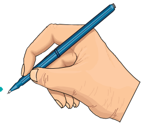
$$\begin{array}{r} R_1-R_3 \\ R_2-6R_3 \\ R_3 \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

و نهایتاً، عناصر سطر اوّل، ستون اوّل ؛ سطر دوم، ستون دوم ؛ و سطر سوم، ستون سوم را به ۱ تبدیل می‌کنیم.

$$\begin{array}{r} R_1 \\ -\frac{1}{3}R_2 \\ -R_3 \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

پس جواب عبارت است از $x_1=4$ ، $x_2=-2$ و $x_3=3$.

تذکر. اگر در روش‌های حذفی گاوس و گاوس ــ جردن عنصری که روی قطر اصلی ماتریس ضرایب دستگاه قرار دارد و باید محور قرار گیرد، صفر باشد جای سطر شامل آن عنصر و یکی از سطرهای دیگر را عوض می‌کنیم. اگر چنین کاری امکان نداشته باشد، یعنی کلّیهٔ عناصر در ستون مربوطه برابر صفر باشد، آنگاه دترمینان ماتریس ضرایب دستگاه برابر صفر است و دستگاه جواب ندارد.



تمرین

۱. دستگاه‌های زیر را با پیدا کردن وارون ماتریس ضرایب دستگاه (در صورت وجود) حل کنید.

الف) $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 7 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 3 \\ 3x_1 - 4x_2 - 6x_3 = 5 \end{cases}$ ،

ب) $\begin{cases} 2x_3 + 3 = x_2 + 3x_1 \\ x_1 - 3x_3 = 2x_2 + 1 \\ 3x_2 + x_3 = 2 - 2x_1 \end{cases}$.

۲. دستگاه‌های زیر را به کمک دستور کرامر، روش حذفی گاوس و گاوس ــ جردن حل کنید.

الف) $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 18 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 24 \\ 2x_1 + 7x_2 + 12x_3 = 40 \end{cases}$ ،

ب) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 7 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 4 \\ 6x_1 + x_2 + x_3 = 18 \end{cases}$ ،

ج) $\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 6x_3 = 18 \\ 5x_1 + 8x_3 = -16 \\ 3x_1 + 2x_2 - 10x_3 = -3 \end{cases}$.

۳. دستگاه زیر را به روش حذفی گاوس حل کنید.

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

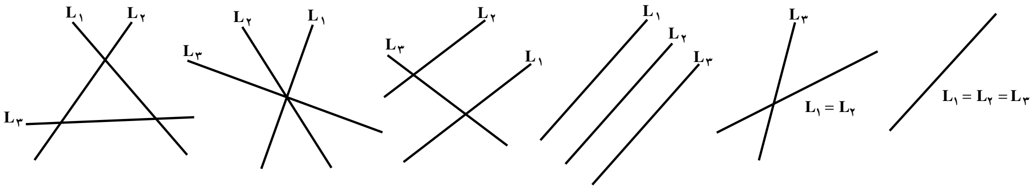
۴. به کمک قضیهٔ ۲، اثبات دیگری برای تمرین ۷ از بخش قبل ارائه کنید. یعنی ثابت کنید اگر A یک ماتریس مربعی باشد با این خاصیت که $A^2 = A$ و $\lambda \neq 1$ یک عدد حقیقی، آنگاه $I - \lambda A$ وارونپذیر است. $(I - \lambda A)^{-1}$ را نیز محاسبه کنید.

۵. فرض کنید A و B دو ماتریس مربعی باشند، طوری که $I - AB$ وارونپذیر است. ثابت کنید $I - BA$ نیز وارونپذیر است (راهنمایی : از قضیهٔ ۲ استفاده کنید). $(I - BA)^{-1}$ را نیز محاسبه کنید.

۶. دستگاه سه معادلهٔ دو مجهولی زیر سه خط L_1 ، L_2 و L_3 را در صفحه مشخص می‌کند.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 = b_3 \end{cases}$$

شکل‌های زیر حالات مختلف این سه خط را نسبت به هم نشان می‌دهد.



شکل ۲

مجموعهٔ جواب دستگاه داده شده را در هر یک از این حالات توصیف کنید.

۷. به کمک روش هندسی بررسی کنید که تحت چه شرایطی روی a، b و c دستگاه

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = a \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = b \\ 7x_1 + 4x_2 + 9x_3 = c \end{cases}$$

الف) دارای جواب منحصر به فرد است،

ب) جواب ندارد،

ج) بیشمار جواب دارد.

۸. دستگاه زیر را درنظر بگیرید.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \end{cases}$$

الف) توضیح دهید که چرا دستگاه بالا یا جواب ندارد، یا بیشمار جواب دارد.

ب) اگر $b_1 = b_2 = 0$ ، چرا دستگاه بالا باید بیشمار جواب داشته باشد؟

مراجع

[1] Barnett, P. A., Ziegler, M. R., *Pre-calculus*, Third edition, Mc Graw - Hill, New York, 1995.

[2] Lang, S, *Linear Algebra*, Third edition, Springer - Verlag, New York, 1987.

[3] O'Nan, Michael, *Linear Algebra*, Harcourt Brace Jovanovich, New York, 1971.

[ترجمهٔ فارسی : اونان، مایکل. جبر خطی. ترجمهٔ علی‌اکبر محمّدی حسن‌آبادی، مرکز نشر دانشگاهی، تهران، ۱۳۶۳.]

[4]Silverman, Richard A, *Modern Calculus and Analytic Geometry*, Macmillan, New York, 1969.

[ترجمهٔ فارسی : سیلورمن، ریچارد ا. *حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسهٔ تحلیلی جدید*. ترجمهٔ علی‌اکبر عالم‌زاده، انتشارات علمی و فنی، تهران، ۱۳۶۷.]

[۵] تابش، یحیی ؛ نیوشا، جعفر. *هندسهٔ تحلیلی و جبر خطی*. دورهٔ پیش‌دانشگاهی، رشتهٔ علوم ریاضی، دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتابهای درسی وزارت آموزش و پرورش، تهران، ۱۳۷۷.