تا آنجا که مشتق‌پذیری وجود دارد، می‌توان مشتق‌گیری از مشتقات را ادامه داد و در این صورت، مشتق‌های مرتبه‌های بالاتر تابع $y = f(x)$ را به‌صورت زیر نسبت به x نشان می‌دهیم :

مشتق اوّل f : $y', f'(x) \;,\; \frac{dy}{dx} \;,\; \frac{d}{dx}[f(x)] \,,\, D_x(y)$

مشتق دوم f : $y'', f''(x) \;,\; \frac{d^۲y}{dx^۲} \;,\; \frac{d^۲}{dx^۲}[f(x)] \,,\, D_x^۲(y)$

مشتق سوم f : $y^{(۳)}, f^{(۳)}(x) \;,\; \frac{d^۳y}{dx^۳} \;,\; \frac{d^۳}{dx^۳}[f(x)] \,,\, D_x^۳(y)$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

مشتق n ام f : $y^{(n)}, f^{(n)}(x) \;,\; \frac{d^ny}{dx^n} \;,\; \frac{d^n}{dx^n}[f(x)] \,,\, D_x^n(y)$

مثال : اگر $f(x)$ یک چندجمله‌ای درجهٔ n باشد، یعنی

$$f(x) = a_۰ + a_۱x + a_۲x^۲ + \ldots + a_nx^n$$

که در آن $a_۰ , a_۱, \ldots, a_{n-۱}, a_n$ ثابت هستند، $(a_n \neq ۰)$ مشتق n ام $f(x)$ را حساب کنید.

حل : چون تابع چندجمله‌ای درجه n، از هر مرتبه مشتق‌پذیر است بنابراین :

$$f'(x) = a_۱ + ۲a_۲x + ۳a_۳x^۲ + ۴a_۴x^۳ + \ldots + na_nx^{n-۱}$$

$$f''(x) = ۲a_۲ + ۶a_۳x + ۱۲a_۴x^۲ + \ldots + n(n-۱)a_nx^{n-۲}$$

$$f^{(۳)}(x) = ۶a_۳ + ۲۴a_۴x + \ldots + n(n-۱)(n-۲)a_nx^{n-۳}$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = n(n-۱)(n-۲) \times \ldots \times ۲ \times ۱ \times a_n = n!a_n$$

و برای هر $k > n$ ، $f^{(k)}(x) = ۰$

تمرین در کلاس

مشتق چهارم تابع $f(x) = (x^۲ + ۱)(x^۲ + ۲)(x^۲ + ۳)$ را در $x = ۱$ حساب کنید.

مثال : مشتق‌پذیری تابع $f(x) = |x|$ و مشتق‌های مراتب بالاتر آن را روی $\mathbb{R}$ بررسی کنید.

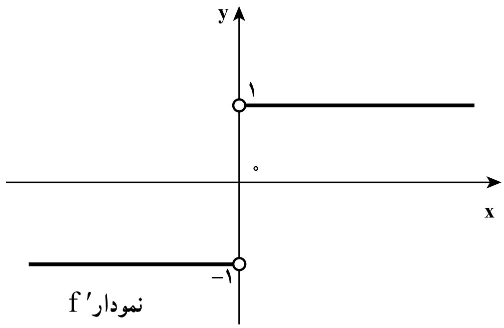
حل : می‌دانیم

$$f(x) = \begin{cases} -x \;,\; x < ۰ \\ x \;\;\;,\; x \geq ۰ \end{cases}$$

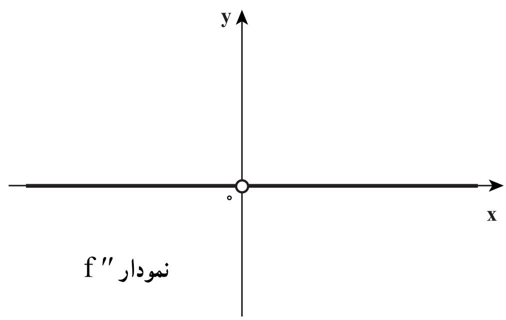
چون
$$f'_{-}(۰)=\lim_{x\to ۰^-}\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{-x}{x}=-۱$$
$$f'_{+}(۰)=\lim_{x\to ۰^+}\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{x}{x}=۱$$

بنابراین تابع f در $x=۰$ مشتق‌پذیر نیست و

$$f'(x)=\begin{cases}-۱ & , \ x<۰\\ \text{تعریف نشده} & , \ x=۰\\ ۱ & , \ x>۰\end{cases}$$



$$f''(x)=\begin{cases}۰ & , \ x<۰\\ ۰ & , \ x>۰\end{cases}$$



تابع f'' در $x=۰$ تعریف نشده است.

و یا $\quad f''(x)=۰ \ , x\neq ۰$

و برای هر $n\geq ۳$ $\quad f^{(n)}(x)=۰ \ , x\neq ۰$

تمرین در کلاس

فرض کنید $f(x)=|x^۲-۴|$

الف) مشتق‌پذیری تابع f را در ۲ و $x=-۲$ بررسی نمایید.

ب) ضابطه تابع مشتق و نمودار آن را رسم کنید.

پ) با تعیین ضابطه توابع f'' و $f^{(۳)}$، ضابطهٔ مشتق n ام تابع f را به‌دست آورید.

برای یافتن مشتق تابع‌های **قطعه قطعه** تعریف شده (نظیر تابع قدرمطلق و تابع جزء صحیح) قضیه زیر بسیار مؤثر است و حل مسأله را ساده‌تر می‌کند.

قضیه ۳:

الف) اگر f روی بازه $[a, x_0]$ پیوسته و روی بازهٔ باز (a, x_0) مشتق‌پذیر بوده و $\lim\limits_{x \to x_0^-} f'(x)$ وجود داشته باشد، آنگاه :

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} f'(x)$$

ب) اگر f روی بازه $[x_0, b)$ پیوسته و روی بازهٔ باز (x_0, b) مشتق‌پذیر بوده و $\lim\limits_{x \to x_0^+} f'(x)$ وجود داشته باشد، آنگاه :

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} f'(x)$$

مثال: مشتق چپ و مشتق راست تابع $f(x) = |x-1| + 2|x-2|$ را در $x = 1$ حساب کنید.

حل: تابع f روی IR پیوسته است و برای هر x از بازه $[0, 1]$ $f(x) = -3x + 5$

پس برای هر x از بازه $(0, 1)$، $f'(x) = -3$

همچنین برای هر x از بازه $[1, 2)$، $f(x) = -x + 3$

پس برای هر x از بازه $(1, 2)$، $f'(x) = -1$

بنابراین $f'_-(1) = \lim\limits_{x \to 1^-} f'(x) = -3$

$$f'_+(1) = \lim_{x \to 1^+} f'(x) = -1$$

در نتیجه تابع در $x = 1$ مشتق‌پذیر نیست.

تمرین در کلاس

مشتق چپ و مشتق راست تابع f با ضابطه $f(x) = x[x^3 + 3]$ را در نقطهٔ $x = 0$ را در صورت وجود به‌دست آورید ([ ] نماد جزء صحیح است).

مسائل

۱ــ فرض کنید تابع f در $x=1$ مشتق‌پذیر و $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)}{h}=3$ ، مقدارهای $f(1)$ و $f'(1)$ را به‌دست آورید.

۲ــ فرض کنید $f(x)=\begin{cases} x^3 &, |x|\geq 1 \\ 2x^2-1 &, |x|<1 \end{cases}$ ، حاصل $\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(1+h)-1}{h}$ را بیابید.

۳ــ فرض کنید $f(x)=\sin x\left[\cos\dfrac{x}{2}\right]$ ، مشتق چپ و مشتق راست تابع f را در نقطهٔ $x=\pi$ حساب کنید.

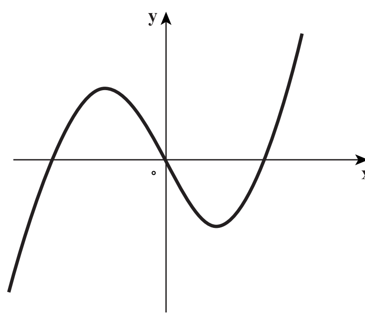
۴ــ الف) ثابت کنید : اگر f در a مشتق‌پذیر باشد، حد زیر موجود و برابر با $f'(a)$ است

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}=f'(a)$$

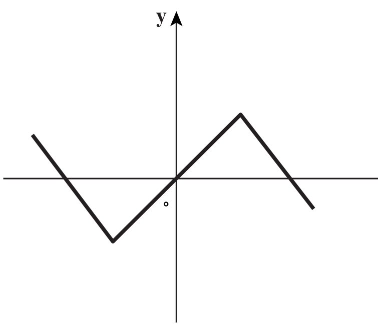
ب) نشان دهید که اگر حد در قسمت الف وجود داشته باشد، لزومی ندارد که تابع در نقطهٔ a مشتق‌پذیر باشد.

۵ــ نمودار هریک از تابع‌های قسمت‌های (الف) تا (ت) را به نمودار مشتقش در قسمت‌های (۱) تا (۴) متناظر کنید و ضمناً دلیل انتخاب خود را بیان کنید.

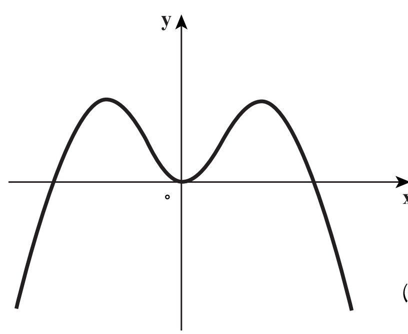
الف)



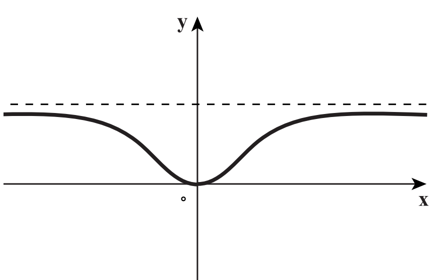
ب)



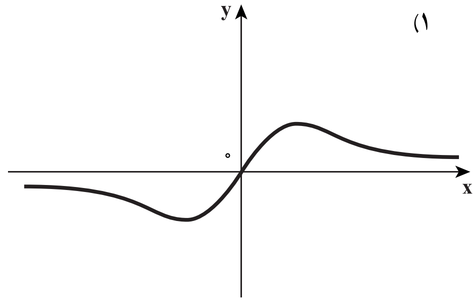
پ)



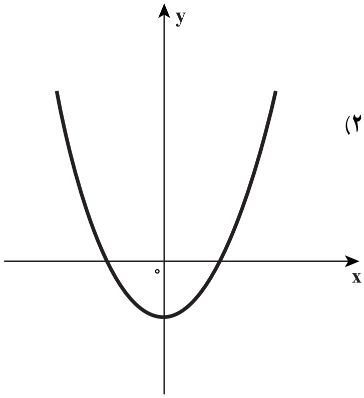
ت)



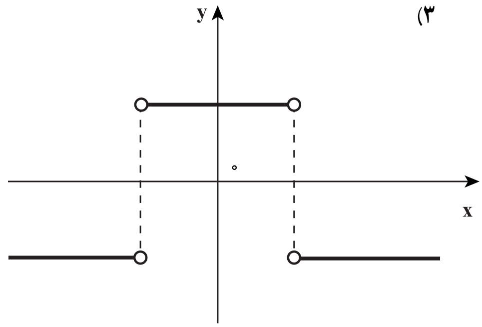
۱)



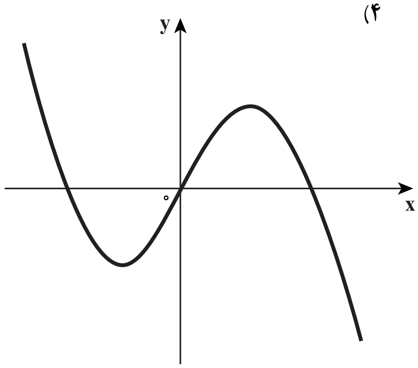
۲)

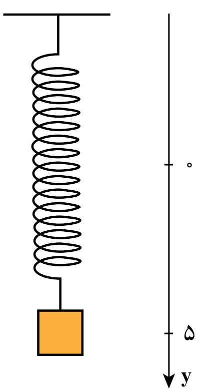


۳)



۴)





۶ــ اگر $f(x)=\sqrt{x}g(x)$ ، $g(۴)=۸$، $g'(۴)=۷$، مقدار $f'(۴)$ به‌دست آورید.

۷ــ جسمی به انتهای فنری آویزان است، آن را به اندازه ۵ سانتی‌متر پایین کشیده و در لحظه $t=۰$ رها می‌کنیم (مطابق شکل رسم شده جهت رو به پایین، جهت مثبت است) موقعیت این جسم در زمان t از رابطه $y=f(t)=۵\cos t$ به‌دست می‌آید. سرعت و شتاب این جسم را در زمان t پیدا کنید و سپس به کمک نتایج به‌دست آمده حرکت جسم را تحلیل کنید.

۸ــ فرض کنید $f(x)=x^۶-۲x^۴-x+۱$، حاصل $\lim\limits_{h\to ۰}\dfrac{f'(۱+h)-f'(۱)}{h}$ را به دست آورید.

۹ـ اگر $f(x)=\frac{x+1}{x}\operatorname{sgn}(x^2-x+1)$ ، $f'(x)$ را حساب کنید.

۱۰ـ ضابطه تابع درجه دوّم f را چنان انتخاب کنید که $f(1)=2$ و $f'(1)=3$ و $f''(1)=4$ باشد.

۱۱ـ نقطه‌ای روی نمودار تابع $y=x^2+x$ پیدا کنید که در آن نقطه، خط مماس بر منحنی تابع، موازی قاطعی باشد که دو نقطه با طول‌های $x=1$ و $x=3$ واقع بر منحنی تابع را به‌هم وصل کند.

۱۲ـ معادله خط مماس بر منحنی تابع $f(x)=\frac{1+2\sin x}{\sin x}$ را در نقطه $(\frac{\pi}{6},4)$ به دست آورید.

۱۳ـ به ازای چه مقادیری از a، b و c تابع $f(x)=\begin{cases} x^3 & , x<1 \\ ax^2+bx+c & , x\geq 1\end{cases}$ در نقطه $x=1$ مشتق مرتبه دوّم دارد؟

۱۴ـ الف) با محاسبه مشتق اوّل و دوم و سوم تابع $f(x)=\sin x$، مشتق nام تابع f را حدس بزنید و سپس درستی حدس خود را به استقراء ثابت کنید.

ب) با استفاده از قسمت الف، دستور مشتق n ام تابع $f(x)=\cos x$ را به‌دست آورید.

۳ـ ۸ـ قاعدهٔ زنجیری

با وجود اینکه می‌توانیم مشتق $\sqrt{x}$ و x^4+1 را بیابیم ولی هنوز نمی‌توانیم مشتق $f(x)=\sqrt{x^4+1}$ را حساب کنیم.

توجه کنید که f تابعی ترکیبی است که اگر فرض کنیم $y=f(u)=\sqrt{u}$ و $u=g(x)=x^4+1$ می‌توانیم بنویسیم :

$$y=h(x)=f(g(x))$$

یعنی $h=fog$

قاعدهٔ محاسبه مشتق تابع‌های f و g را می‌دانیم، در نتیجه دانستن قاعده‌ای که براساس آن بدانیم چگونه مشتق $h=fog$ را برحسب مشتق‌های f و g پیدا کنیم، بسیار با اهمیت است. و این قاعده را **قاعدهٔ زنجیری** می‌نامند.

اکنون فرض کنید تابع $y=\frac{1}{x^2+1}$ برابر است با تابع مرکب $y=f(g(x))$، که در آن $f(u)=\frac{1}{u}$ و $u=g(x)=x^2+1$ و این توابع دارای مشتق‌های $g'(x)=2x$، $f'(u)=\frac{-1}{u^2}$ هستند.

بنابر قاعدهٔ خارج قسمت (که حالت خاصی از قاعدهٔ زنجیری است)

$$\frac{d}{dx}f(g(x))=\frac{d}{dx}(\frac{1}{x^2+1})=\frac{-2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-1}{(x^2+1)^2}(2x)=f'(g(x))g'(x)$$

این مثال می‌گوید مشتق تابع مرکب $y=f(g(x))$ برابر است با مشتق f به ازای $g(x)$، ضرب در مشتق g به ازای x، این همان **قاعدهٔ زنجیری** است.

$$\frac{d}{dx}f(g(x))=f'(g(x))g'(x)$$

طرح این مثال ایده‌ای است برای بیان قضیه مشتق تابع مرکب (و یا **قاعده زنجیری**)

قضیه ۱: قاعده زنجیری : اگر تابع g در نقطهٔ x و تابع f در نقطهٔ $g(x)$ مشتق‌پذیر باشند، آنگاه تابع مرکب fog در نقطه x مشتق‌پذیر است و $(fog)'(x)=f'(g(x))\,g'(x)$

با استفاده از نمادگذاری لایبنیتس، اگر $y=f(u)$، که در آن $u=g(x)$ آنگاه $y=f(g(x))$ و

آهنگ تغییر y نسبت به u عبارت است از $\frac{dy}{du}$

آهنگ تغییر u نسبت به x عبارت است از $\frac{du}{dx}$

بنابراین، آهنگ تغییر $y=f(u)=f(g(x))$ نسبت به x عبارت است از $\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}$ یعنی

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}} \qquad (1)$$

که $\frac{dy}{du}$ در $u=g(x)$ محاسبه شده است.

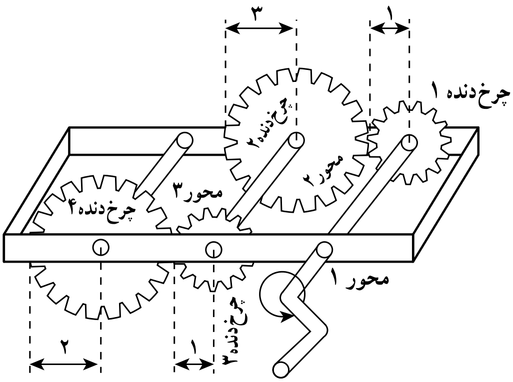
به‌نظر می‌رسد که برای رسیدن به رابطه (۱)، نماد du را از صورت و مخرج حذف کرده‌ایم، ولی این کار معنی‌داری نیست زیرا $\frac{dy}{du}$ معرف خارج قسمت دو کمیت نیست، بلکه کل آن معرف کمیت واحدی به نام مشتق y نسبت به u است.

بیان یک مثال فیزیکی از مشتق تابع مرکب : در شکل ۳ــ۱۷ مجموعه‌ای از چرخ دنده‌ها را می‌بینید که چرخ‌دندهٔ دوم و سوم روی محور واحدی قرار دارند. وقتی محور اول می‌چرخد، محور دوّم را حرکت می‌دهد، و این محور خود محور سوم (چرخ‌دنده ۴) را حرکت خواهد داد. فرض کنیم y ، u و x تعداد دوران‌های محورهای اوّل، دوم، و سوم در دقیقه باشند. $\frac{dy}{du}$ و $\frac{du}{dx}$ و $\frac{dy}{dx}$ را یافته و نشان دهید $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}$

محور ۱ : y دوران در دقیقه

محور ۲ : u دوران در دقیقه

محور ۳ : x دوران در دقیقه



شکل ۳ـ۱۷

حل. چون محیط چرخ دندهٔ دوم ۳ برابر محیط چرخ دندهٔ اول است ($r_۲ = ۳r_۱$ شعاع)، چرخ دندهٔ اول باید ۳ دور بچرخد تا چرخ‌دندهٔ دوم یک‌بار دوران نماید. همچنین چرخ‌دندهٔ دوم باید ۲ دور بچرخد تا چرخ دندهٔ چهارم یک‌بار دوران نماید و داریم $\frac{dy}{du} = ۳$ و $\frac{du}{dx} = ۲$

با ادغام این دو نتیجه معلوم می‌شود که محور اوّل باید ۶ دور بچرخد تا محور سوم (چرخ‌دندهٔ ۴) یک‌بار دوران نماید. در نتیجه

$$\frac{dy}{dx} = (\frac{dy}{du})(\frac{du}{dx}) = (۳)(۲) = ۶$$

به عبارت دیگر، میزان تغییر y نسبت به x حاصلضرب میزان تغییر y نسبت به u در میزان تغییر u نسبت به x است.

مثال: مشتق تابع $f(x) = \sqrt{x^۴ + ۱}$ را با استفاده از قاعدهٔ زنجیری پیدا کنید.

حل اوّل: ابتدا ضابطه f را به شکل $h(x) = (fog)(x) = f(g(x))$ می‌نویسیم که در آن $u = g(x) = x^۴ + ۱$ و $f(u) = \sqrt{u}$ چون $f'(u) = \frac{۱}{۲\sqrt{u}}$ و $g'(x) = ۴x^۳$ پس بنابر قضیه ۴

$$h'(x) = f'(g(x)) \times g'(x) = \frac{۱}{۲\sqrt{x^۴ + ۱}} \times ۴x^۳ = \frac{۲x^۳}{\sqrt{x^۴ + ۱}}$$

حل دوم: با استفاده از تساوی (۱) اگر فرض کنیم $u = x^۴ + ۱$ و $y = \sqrt{u}$، آنگاه

$$h'(x) \text{ یا } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = \frac{۱}{۲\sqrt{u}} \times ۴x^۳ = \frac{۱}{۲\sqrt{x^۴ + ۱}} \times ۴x^۳ = \frac{۲x^۳}{\sqrt{x^۴ + ۱}}$$

تمرین در کلاس

اگر n عدد حقیقی باشد و تابع $u = g(x)$ مشتق‌پذیر، آن وقت $\frac{d}{dx}(u^n)$ را به‌دست آورید.

یادداشت : از فعالیت بالا که محاسبه $\frac{d}{dx}(u^n)$ موردنظر است قاعدهٔ مهم زیر به‌دست می‌آید و آن را قاعدهٔ **توانی کلی** می‌نامیم.

$$\boxed{\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1}\frac{du}{dx} = nu^{n-1}u'}$$

مثال : از توابع زیر مشتق بگیرید.

الف) $y = \sin(x^3)$ ب) $y = \cos^3(x)$

حل :

الف) فرض کنید $u = x^3$ و $y = \sin u$ پس بنابر قاعده زنجیری

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

در نتیجه

$$\frac{dy}{dx} = (\cos u) \times 3x^2 = 3x^2 \cos x^3$$

ب) فرض کنید $u = \cos x$ و $y = u^3$، پس بنابر قاعده توانی کلی

$$\frac{dy}{dx} = 3u^2u' = 3\cos^2 x(-\sin x) = -3\sin x \cos^2 x$$

تمرین در کلاس

فرض کنید $u = g(x)$ تابعی مشتق‌پذیر باشد.

الف) مشتق تابع‌های $y = \sin u$ و $y = \cos u$ را بیابید.

ب) مشتق تابع‌های $y = \tan u$ و $y = \cot u$ (با شرط اینکه tan و cot در u مشتق‌پذیرند) را بیابید.

۳ـ۹ـ مشتق‌گیری ضمنی

اکثر توابعی که با آنها سروکار داریم، دارای معادله‌ای هستند که y (مقدار تابع) را به‌طور صریح برحسب متغیر x بیان می‌کند مثلاً

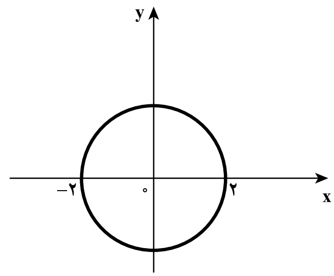
$$y = \sin x \quad , \quad y = x\sqrt{x^2 + 1}$$

یا در حالت کلی، $y = f(x)$

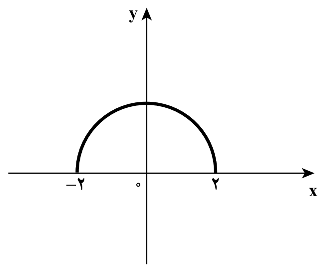
اما بعضی اوقات به معادلاتی نظیر $x^2 + y^2 - 4 = 0$ ، $x^3 + y^3 = 6xy$ برمی‌خوریم که y را به‌طور صریح برحسب متغیر x به دست نمی‌دهند. البته در برخی موارد می‌توان چنین معادله‌هایی را حل کرد تا y را به‌طور صریح برحسب x به‌دست آورد مثلاً در معادله $x^2 + y^2 = 4$ (معادله دایره‌ای به مرکز مبدأ

مختصات و به شعاع $R = 2$ جواب‌های y می‌شوند $y = \pm\sqrt{4 - x^2}$ در نتیجه $x^2 + y^2 - 4 = 0$، معادله ضمنی تابع‌های $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ و $g(x) = -\sqrt{4 - x^2}$ می‌باشد.

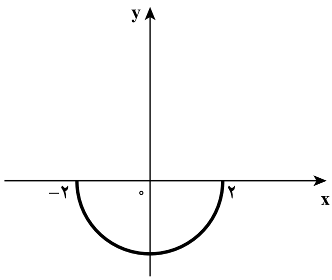
نمودارهای f و g نیم‌دایره‌های بالایی و پایینی دایرهٔ $x^2 + y^2 = 4$ هستند. (شکل زیر)



الف) $x^2 + y^2 = 4$

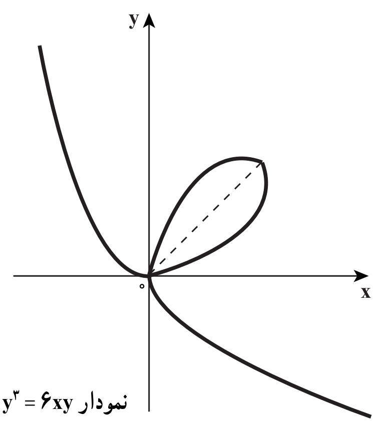


ب) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

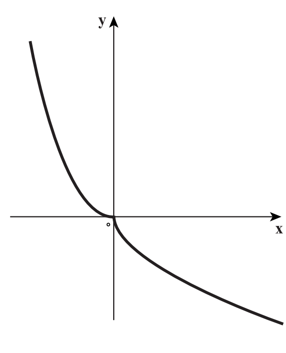


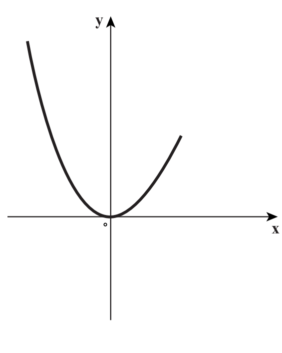
پ) $g(x) = -\sqrt{4 - x^2}$

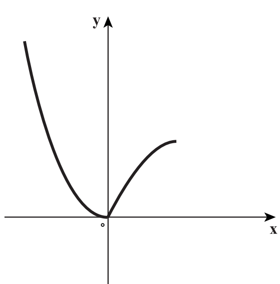
حل کردن معادله $x^3+y^3=6xy$ برای یافتن y برحسب متغیر x کار ساده‌ای نیست (برای سیستم‌های جبری کامپیوتری چنین‌کاری دشوار نیست، امّا عبارتی که به‌دست می‌آید خیلی پیچیده است) به هرحال $x^3 + y^3 = 6xy$ معادله یک منحنی است که آن را منحنی **برگی دکارت** می‌نامند. (شکل روبه‌رو) و از این منحنی برگی دکارت می‌توان چندین تابع تعریف کرد که معادله ضمنی آن توابع همان $x^3 + y^3 = 6xy$ است در شکل زیر سه تا از آن تابع‌ها نشان داده شده‌اند.



نمودار $x^3 + y^3 = 6xy$







درخور توجه است که برای پیدا کردن $\frac{dy}{dx}$ نیازی نداریم که y را برحسب متغیر x پیدا کنیم، به جای این‌کار از **مشتق‌گیری ضمنی** استفاده می‌کنیم، برای این منظور از دوطرف معادله نسبت به x مشتق می‌گیریم و از معادلهٔ حاصل $y' = \frac{dy}{dx}$ را به‌دست می‌آوریم، با این فرض که همواره معادلهٔ داده شده، y را به‌طور ضمنی برحسب تابعی مشتق‌پذیر از x تعریف می‌کند.

مثال: الف) اگر $x^{۲} \quad y^{۲} \quad ۴$، $\frac{dy}{dx}$ را بیابید.

ب) معادله مماس بر دایره $x^{۲} \quad y^{۲} \quad ۴$ را در نقطه $(۱, \sqrt{۳})$ بیابید.

حل: از طرفین معادله $x^{۲} \quad y^{۲} \quad ۴$ نسبت به x مشتق می‌گیریم.

$$\frac{d}{dx}(x^{۲}+y^{۲}) = \frac{d}{dx} \quad (۴)$$

$$\frac{d}{dx}(x^{۲}) + \frac{d}{dx}(y^{۲}) = ۰$$

قابل توجه این که $f(x) \quad y$ تابعی است مشتق‌پذیر و بنابر قاعده «توانی کلی» در مشتق تابع مرکب داریم :

$$\frac{d}{dx}(y^{۲}) = ۲yy'$$

بنابراین

$$۲x \quad ۲yy' \quad ۰$$

اکنون از این معادله y' را پیدا می‌کنیم

$$\frac{dy}{dx} \quad \text{یا} \quad y' = \frac{-x}{y} \quad , \quad (y \neq ۰)$$

ب) در نقطه $(۱, \sqrt{۳})$ ، مشتق تابع (نیم‌دایره بالایی) برابر است با

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-۱}{\sqrt{۳}} = -\frac{\sqrt{۳}}{۳} \quad \text{شیب مماس}$$

بنابراین معادله خط مماس بر دایره در نقطه $(۱, \sqrt{۳})$ می‌شود

$$y - \sqrt{۳} = -\frac{\sqrt{۳}}{۳}(x-۱)$$

یا

$$y = -\frac{\sqrt{۳}}{۳}x + \frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$$

تمرین در کلاس

الف) اگر $\cos\sqrt{y} = y^{۲} \sin x$ ، $\frac{dy}{dx}$ را پیدا کنید.

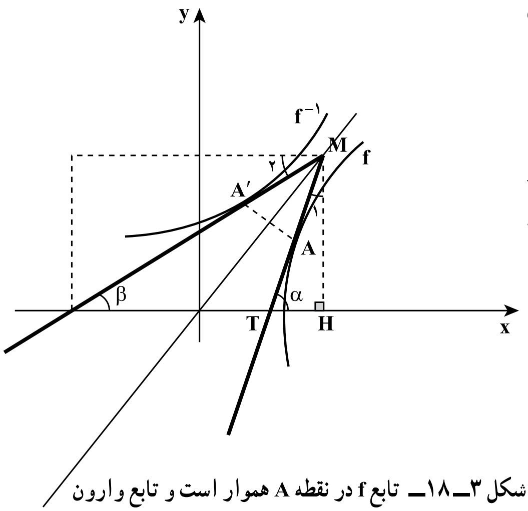
ب) اگر $x + y^{۴} + ۱ = y + x^{۲} + xy^{۲}$، $\frac{d^{۲}y}{dx^{۲}}$ را در نقطه (۱،۱) پیدا کنید.

پ) معادله خط مماس بر منحنی $x^{۳} + y^{۳} = ۶xy$ را در نقطه $(\frac{۸}{۳},\frac{۴}{۳})$ پیدا کنید.

۳ــ۱۰ــ مشتق تابع وارون

فرض کنیم f تابعی یک به یک و مشتق‌پذیر باشد. با یک رویکرد هندسی می‌توانیم تابع مشتق‌پذیر را تابعی بدانیم که نمودارش گوشه یا پیچ ندارد. در نتیجه نمودار $f^{-۱}$ که قرینه نمودار f نسبت به خط $y=x$ است، گوشه یا پیچ ندارد. (شکل ۳ــ۱۸) بنابراین انتظار داریم که $f^{-۱}$ نیز به‌جز در جاهایی که مماس‌ها قائم‌اند، مشتق‌پذیر باشد. و به‌صورت شهودی با یک استدلال هندسی مقدار مشتق $f^{-۱}$ را در نقطهٔ داده شده به‌دست آورید در شکل (۳ــ۱۸) نقطه $A(a,b)$ روی نمودار f و نقطه $A'(b,a)$ قرینه A نسبت به خط $y = x$ روی نمودار $f^{-۱}$ درنظر می‌گیریم

$(f^{-۱})'(b) = \tan\beta$ و $f'(a) = \tan\alpha$



شکل ۳ــ۱۸ــ تابع f در نقطه A هموار است و تابع وارون آن $f^{-۱}$ نیز در A' هموار می‌باشد

فعالیت

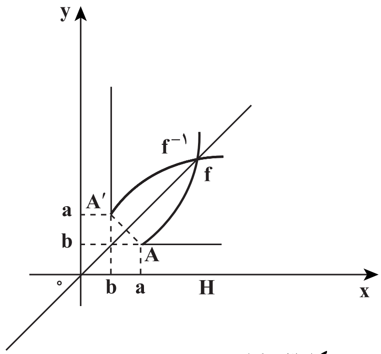
شکل (۳ــ۱۸) را درنظر گرفته و رابطهٔ بین $f'(a)$ و $(f^{-۱})'(b)$ را به‌دست آورید.

نتیجه به‌دست آمده در این فعالیت یک ایده‌ای است برای بیان قضیه بعدی.

قضیه: فرض کنیم I یک بازه و $f: I \to \mathbb{R}$ تابعی باشد که در نقاط درونی بازه I مشتق‌پذیر و مشتق آن همه‌جا مثبت یا همه‌جا منفی است. در این صورت تابع f^{-1} (وارون f) نیز در همهٔ نقاط درونی دامنه‌اش مشتق‌پذیر است و به ازای هر نقطهٔ درونی از دامنه f^{-1} مانند b که $b = f(a)$

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$$

یادداشت: اگر $f'(a) = 0$ یعنی خط مماس بر نمودار f افقی باشد و به معادله $y = b$، آن وقت خط مماس در نقطه b از نمودار f^{-1} خطی است عمود بر محور x و به معادله $x = b$ و در این صورت تابع f^{-1} در نقطه b مشتق ندارد. (شکل ۳ــ۱۹ را ببینید)



شکل ۳ــ۱۹

مثال: فرض کنید $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 6x + 1$ مقدار $(f^{-1})'(1)$ را در صورت وجود پیدا کنید.

حل: تابع f همواره مشتق پذیر و مشتق آن همه جا مثبت است (چرا؟) و $b = 1$ پس از $2x^3 + 3x^2 + 6x + 1 = 1$ نتیجه می‌شود فقط $x = 0$ یعنی $a = 0$

$$f'(x) = 6x^2 + 6x + 6 = f'(0) = 6$$

بنابراین

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{6}$$

تمرین در کلاس

۱ــ فرض کنید f^{-1} تابع وارون تابع مشتق‌پذیر f باشد و $g(x) = \frac{1}{f^{-1}(x)}$ اگر $f(1) = 2$ و $f'(1) = \frac{1}{8}$، $g'(2)$ را بیابید.

۲ــ تابع $f(x) = \sin x$ را با دامنه $D = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ درنظر بگیرید. مشتق تابع $f^{-1} = \sin^{-1}$ را به ازای هر x، عضو بازهٔ باز $(-1, 1)$ بیابید.

۳ـ۱۱ـ مشتق توابع نمایی و لگاریتمی طبیعی

وقتی سرمایه‌ای با آهنگ یکنواخت ۱۴درصد در سال افزایش می‌یابد به‌نظر منطقی است که انتظار داشته باشیم آهنگ رشد آن در هر **لحظه** با مقدار سرمایه در آن **لحظه** متناسب باشد و یا وقتی جمعیت یک جامعه با آهنگ یکنواخت ۳ درصد در سال افزایش می‌یابد، آهنگ رشد جمعیت متناسب با جمعیت است. اینها نمونه‌هایی از پدیده‌ای موسوم به **رشد نمایی** می‌باشند.

همانند رشد نمایی، می‌توان صحبت از **زوال نمایی** کرد مثلاً مقدار اورانیم رادیواکتیو U^{235} با آهنگی متناسب با مقدار موجود U^{235} زوال می‌یابد. زوال اورانیم (یا به‌طور کلی عنصرهای رادیواکتیو) نمونه‌ای از پدیده‌ای به نام زوال‌نمایی است.

اکثر مسائل رشد نمایی و زوال‌نمایی به مدل ریاضی $f(x)=e^x$ می‌انجامد که برخی از خواص این تابع را پیش از این به وسیله مفهوم حد و پیوستگی بررسی کرده‌ایم.

اکنون می‌خواهیم آهنگ تغییر تابع نمایی طبیعی $f(x)=e^x$ را بررسی کنیم و قاعده‌ای برای مشتق این تابع بیابیم.

مشتق تابع نمایی طبیعی : مشتق تابع $f(x)=e^x$ را با استفاده از تعریف مشتق پیدا می‌کنیم

$$f'(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}=\lim_{h\to ۰}e^x\times\frac{e^h-۱}{h}$$

عامل e^x به h بستگی ندارد، بنابراین می‌توانیم آن را به پیش از حد ببریم :

$$f'(x)=e^x\lim_{h\to ۰}\frac{e^h-۱}{h}\qquad (۱)$$

از تعریف e (عدد نِپِر) داریم :

$$\lim_{h\to ۰}(۱+h)^{\frac{۱}{h}}=e$$

از این رابطه و مفهوم حد نتیجه می‌شود

$$(۱+h)^{\frac{۱}{h}}\approx e$$

و این رابطه ایجاب می‌کند که

$$((۱+h)^{\frac{۱}{h}})^h\approx e^h$$

و یا

$$(۱+h)\approx e^h$$

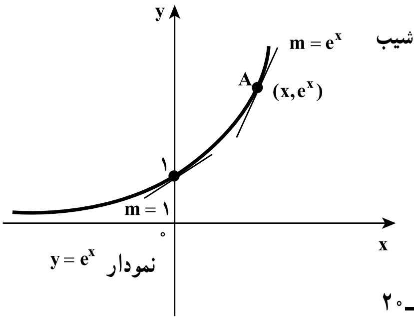
این مقدار را در رابطه (۱) جایگزین می‌کنیم

$$f'(x)=e^x\lim_{h\to ۰}\frac{h}{h}=e^x\times ۱=e^x$$

بنابراین

$$\boxed{\frac{d}{dx}(e^x)=e^x \qquad \text{مشتق تابع نمایی طبیعی}}$$

در نتیجه تـابع مشتق تـابع نـمـایی طبیعی $f(x)=e^x$ خودش می‌باشد و با بیان هندسی شیب خط مماس بر منحنی $y=e^x$ در هر نقطه برابر با مختص y همان نقطه است. (شکل ۳ـ۲۰ را ببینید)



شکل ۳ـ۲۰

یادداشت: $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=۰$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ خط $y=۰$ مجانب افقی $y=e^x$ است.

مثال: فرض کنید $u=g(x)$ تابعی مشتق‌پذیر باشد، مشتق تابع $y=e^u$ را بیابید.

حل: با فرض $u=g(x)$ و $f(x)=e^x$ و $(fog)(x)=e^u$، بنابر قاعده زنجیری داریم:

$$(fog)'(x)=f'(g(x))\,g'(x)$$

چون $f'(x)=e^x$ پس $f'(u)=e^u$، بنابراین

$$\boxed{\frac{d}{dx}(e^u)=u'e^u}$$

تمرین در کلاس

معادلهٔ خط مماس بر منحنی $y=e^{۲x}\cos\pi x$ را در نقطهٔ $(۰,۱)$ پیدا کنید.

مثال: مقدارهایی از λ را پیدا کنید که به ازای آنها $y=e^{\lambda x}$ در معادلهٔ دیفرانسیل $y''+۶y'+۸y=۰$ صدق کند.

(معادله‌ای که رابطه‌ای بین y و مشتقات اول یا بالاتر آن را بیان می‌کند، یک **معادله دیفرانسیل** نامیده می‌شود) .

حل:

$$y'=\lambda e^{\lambda x}$$
$$y''=\lambda^۲ e^{\lambda x}$$

با جایگزین کردن y' و y'' در معادله دیفرانسیل داریم:

$$\lambda^۲ e^{\lambda x}+۶\lambda e^{\lambda x}+۸e^{\lambda x}=۰$$
$$e^{\lambda x}(\lambda^۲+۶\lambda+۸)=۰$$

چون $e^{\lambda x} \neq 0$، پس

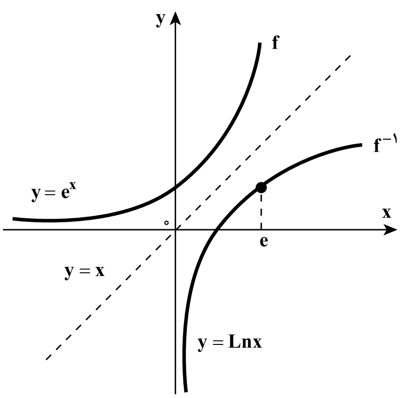
$$\lambda^2 + 6\lambda + 8 = 0$$
$$\lambda = -2, -4$$

$y = e^{-2x}$ و $y = e^{-4x}$ جواب‌های معادله دیفرانسیل $y'' + 6y' + 8y = 0$ می‌باشند.

تابع لگاریتمی طبیعی : با توجه به ویژگی‌های $f(x) = e^x$، تابع f پیوسته و یک به یک است بنابراین تابع وارون f موجود است و تابعی است پیوسته و یک به یک.

وارون تابع $y = e^x$ را می‌توان به صورت $x = e^y$ نوشت (y تابع f ،x تابع f^{-1} است و بالعکس) و در عبارت $x = e^y$، y را لگاریتم x در پایهٔ e می‌خوانیم و با نماد $y = Lnx$ نشان می‌دهیم و این تابع را **تابع لگاریتمی طبیعی** می‌نامیم.

با توجه به اینکه نمودار تابع وارون تابع f، قرینهٔ نمودار تابع f نسبت به نیمساز ربع اوّل و سوم است، به سادگی می‌توان نمودار تابع $y = Lnx$ را، به کمک نمودار $y = e^x$ رسم کرد. (شکل ۳ــ۲۱)



شکل ۳ــ۲۱

دامنهٔ تابع $y = Lnx$، $(0, +\infty)$ و برد آن IR است و $\lim_{x \to +\infty} Lnx = +\infty$, $\lim_{x \to 0^+} Lnx = -\infty$

بنابراین خط $x = 0$ مجانب قائم تابع $y = Lnx$ است.

مشتق تابع لگاریتمی طبیعی : تابع لگاریتم طبیعی $y = Lnx$ را درنظر می‌گیریم. می‌دانیم که این تابع مشتق‌پذیر است، زیرا وارون تابع مشتق‌پذیر $y = e^x$ است.

فرض کنید $y = Lnx$ ، در این‌صورت $x = e^y$ اگر از طرفین معادله $e^y = x$ نسبت به متغیر x به صورت ضمنی مشتق بگیریم، به‌دست می‌آید :

$$e^y \times \frac{dy}{dx} = 1$$

و یا

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}$$

در نتیجه

$$\boxed{\frac{d}{dx}(Lnx) = \frac{1}{x}} \qquad (1)$$

تمرین در کلاس

فرض کنید $u = g(x) > 0$ تابعی مشتق‌پذیر باشد، به کمک قاعده (۱) و قاعدهٔ زنجیری ثابت کنید :

$$\frac{d}{dx}(\mathrm{Ln}u) = \frac{u'}{u}$$

مثال : اگر $f(x) = \mathrm{Ln}|x|$، $f'(x)$ را پیدا کنید.

حل : دامنه تابع f، $\mathbb{R} - \{0\}$ است پس

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{Ln}x & , \quad x > 0 \\ \mathrm{Ln}(-x) & , \quad x < 0 \end{cases}$$

بنابراین

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & , \quad x > 0 \\ \dfrac{1}{-x}(-1) = \dfrac{1}{x} & , \quad x < 0 \end{cases}$$

در نتیجه به ازای هر $x \neq 0$ ، $f'(x) = \dfrac{1}{x}$

نتیجه مثال (۷) ارزش به‌خاطرسپردن را دارد :

$$\frac{d}{dx}(\mathrm{Ln}\,|\,x\,|) = \frac{1}{x}$$

تمرین در کلاس

۱ــ اگر $u = g(x) \neq 0$ تابع مشتق‌پذیری باشد، به کمک نتیجه مثال ۷ و قاعده زنجیری نشان دهید :

$$\frac{d}{dx}(\mathrm{Ln}\,|\,u\,|) = \frac{u'}{u}$$

۲ــ از دوطرف تساوی $x > 0$، $y = x^{\sqrt{x}}$ لگاریتم طبیعی بگیرید و با استفاده از مشتق‌گیری ضمنی، $\dfrac{dy}{dx}$ را پیدا کنید.

در یک آزمون ریاضی مسأله‌ای به شرح زیر مطرح شد.

مطلوب است مشتق $f(x) = \mathrm{Ln}(\mathrm{Ln}\sin x)$.

در جریان تصحیح پاسخ‌نامه دانش‌آموزان شرکت‌کننده در آزمون مشخص شد که اکثریت دانش‌آموزان مسأله را به‌صورت زیر حل کرده‌اند.

$$u(x) = Ln(\sin x) \Rightarrow f(x) = Ln(u(x))$$

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} \quad , \quad u'(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{Ln(\sin x)} = \frac{\cos x}{\sin x Ln(\sin x)}$$

دسته‌ای دیگر از دانش‌آموزان که در اقلیت بودند راه حل گروه اول را انجام ندادند و به شیوه‌ای کاملاً متفاوت با این مسأله برخورد کرده بودند و پاسخی متفاوت به این مسأله داده بودند.

فعالیت

الف) راه حل گروه نخست دانش‌آموزان را تجزیه و تحلیل کنید.

ب) سعی کنید راه حل گروه دوم را حدس بزنید!

پ) مستقل از این راه حل‌ها و با تفکر و اندیشه خودتان این مسأله را بررسی و حل کنید.

ت) چه نتایجی از بررسی و حل این مسأله می‌توان گرفت؟

مسائل

۱ــ در هر مورد $f'(x)$ را پیدا کنید.

الف) $f(x) = \sqrt[4]{\frac{x}{x^{۲}+۱}}$

ب) $f(x) = \sqrt[۳]{(x^{۲}+x+۱)^{۲}}$

پ) $f(x) = \sin(\cos x)$

ت) $f(x) = \sin \sqrt[۳]{x}$

ث) $f(x) = \sqrt{\tan x + \cot x}$

۲ــ نقاطی از منحنی $y = \tan(۲x)$، $(-\frac{\pi}{۴} < x < \frac{\pi}{۴})$ را تعیین کنید که در آنها مماس بر منحنی با خط $y = ۴x$ موازی باشد.

۳ــ ثابت کنید :

الف) اگر تابع f زوج و مشتق‌پذیر باشد آنگاه تابع مشتقش فرد است.

ب) اگر تابع f فرد و مشتق‌پذیر باشد آنگاه تابع مشتقش زوج است.

۴ــ با فرض اینکه تابع f زوج و تابع g فرد و $f'(1) = 2$ و $g'(1) = 3$ ، مقدار $(f+g)'(-1)$ را حساب کنید.

۵ــ با فرض این که تابع $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ در $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر از مرتبه دوم باشد و به‌ازای هر عدد حقیقی x، $g(x) = f(2 - x^2)$ و $f'(2) = 2$ مقدار $g''(0)$ را حساب کنید.

۶ــ اگر f تابعی چندجمله‌ای از درجه n و تابع fof' از درجه ۱۲ باشد مقدار $n^2 + 4n$ را حساب کنید.

۷ــ اگر $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ ، آنگاه مشتق تابع باضابطه $y = f(\cot x)$ را با شرط $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ حساب کنید.

۸ــ معادله خط مماس بر منحنی $y = \sin(x^\circ)$ در نقطه‌ای با طول $x = 45$ را به‌دست آورید.

(از رابطه $\frac{R}{\pi} = \frac{D}{180}$ نتیجه می‌شود، x° مساوی $\frac{\pi}{180}x$ رادیان است)

۹ــ با استفاده از استقرای ریاضی ثابت کنید، برای هر عدد صحیح مثبت n، تساوی‌های زیر برقرارند:

الف) $\frac{d^n}{dx^n}\sin(ax) = a^n \sin(ax + \frac{n\pi}{2})$

ب) $\frac{d^n}{dx^n}\cos(ax) = a^n \cos(ax + \frac{n\pi}{2})$

۱۰ــ معادله خط مماس بر نمودار تابع وارون، تابع $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ را در نقطه $(4,2)$ به‌دست آورید.

۱۱ــ تابع $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ در $\mathbb{R}$ وارون‌پذیر و مشتق‌پذیر است و $f'(x) = \sqrt{9 + f^2(x)}$ ، مقدار $(f^{-1})'(4)$ را پیدا کنید.

۱۲ــ معادله خط مماس بر نمودار $x^3 + y^3 = 3xy$ در نقطه $A(\frac{3}{2},\frac{3}{2})$ را بیابید و نشان دهید خط قائم بر منحنی در نقطه A از مبدأ مختصات می‌گذرد.

۱۳ــ خط $y = ax + b$ نمودار $x^2 + y^2 - xy - 1 = 0$ را در نقاط M و N قطع می‌کند. a و b را چنان حساب کنید که مماس در نقاط M و N خط عمود بر محور x باشد.

۱۴ــ در هر مورد $f'(x)$ را پیدا کنید.

الف) $f(x) = e^{\tan x}$

ب) $f(x) = \mathrm{Ln}|x^2 - 1|$

پ) $f(x) = \mathrm{Ln}|\sin x|$

ت) $f(x) = \mathrm{Ln}|\cos x|$

۱۵ــ معادله خط مماس بر منحنی $y=\frac{Lnx}{x}$ را در نقطهٔ (۱،۰) پیدا کنید.

۱۶ــ مشتق دوم تابع f با ضابطه $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\frac{x}{n})^n$ ، (به ازای هر عدد حقیقی x) را حساب کنید.

۱۷ــ در چه نقاطی نمودار $f(x)=x^2e^{-x^2}$ دارای مماس افقی است.

۱۸ــ مشتق تابع وارون، تابع f با ضابطه : $f(x)=3x+Lnx$ را در x=۳ به‌دست آورید.

۱۹ــ (مدلسازی یک بیماری همه‌گیر) تعداد (y) افرادی که به یک ویروس بسیار مسری مبتلا شده‌اند به وسیله منحنی **تدارکاتی** $y=\frac{L}{1+Me^{-kt}}$ مدلسازی شده است که در آن t از **لحظه** بروز بیماری، برحسب ماه اندازه‌گیری می‌شود.

در ابتدا تعداد مبتلایان ۲۰۰ نفر بود و یک ماه بعد، این تعداد به ۱۰۰۰ نفر افزایش یافت. سرانجام تعداد مبتلایان در عدد ۱۰۰۰۰ ثابت ماند. پارامترهای L و M و K را تعیین کنید و مشخص کنید تعداد مبتلایان ۳ ماه بعد از بروز بیماری چند نفر هستند و آهنگ رشد در آن لحظه چقدر بوده است.

۳ـ۲ـ۱ـ مقدارهای اکسترمم سراسری و مسائل بهینه‌سازی

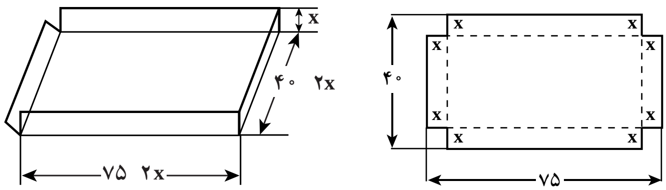
اغلب در زندگی وقتی با مسأله‌ای روبرو می‌شویم، تلاش می‌کنیم بهترین راه حل را برای آن مسأله پیدا کنیم.

برای مثال یک کشاورز می‌خواهد ترکیبی از محصولات انتخاب کند که تا حدامکان تولیدش بیشترین سود را داشته باشد. و یا یک پزشک علاقمند است که کمترین مقدار دارو را در طول درمان یک بیمار معین تجویز کند.

همچنین یک کارخانه‌دار مایل است هزینه توزیع کالاهایش را به حداقل برساند. گاهی اوقات یک مسأله از این نوع را می‌توان با نمادگذاری، رابطه‌ای (به شکل معادله) به عنوان ضابطه تابعی از یک متغیر بیان کرد تا با استفاده از روش‌های حسابان با ماکسیمم کردن یا مینیمم کردن مقدار تابع روی یک مجموعهٔ خاص ابزار لازم برای حل این مسأله فراهم شود.

به عنوان نمونه با طرح مسألهٔ ساختن یک جعبه درباز که در صنعت بسیار کاربرد دارد، شروع می‌کنیم.

مثال۱ : می‌خواهیم یک جعبهٔ درباز از یک قطعه مقوای ۷۵ × ۴۰ سانتی‌متر بسازیم با این روش که مربع‌هایی با اندازه مساوی از چهارگوشهٔ این مقوا برش می‌زنیم و جدا می‌کنیم (شکل ۳ـ۲۲).

(الف)


(ب)

شکل ۳ـ۲۲

اکنون می‌خواهیم بدانیم طول ضلع این مربع‌ها چقدر باشد تا جعبه ساخته شده بیشترین حجم ممکن را داشته باشد.

برای مدل‌سازی این مسأله نماد x را برای طول ضلع مربع‌هایی که باید از چهارگوشه مقوا بریده شود انتخاب می‌کنیم (قسمت الف شکل بالا) و نماد V را برای حجم جعبه‌ای که می‌خواهیم بسازیم، درنظر می‌گیریم (قسمت ب شکل بالا).

به بیان دیگر

x : طول (برحسب سانتی‌متر) ضلع‌های مربع‌هایی که باید بریده شود.

V : حجم (برحسب سانتی‌متر مکعب) جعبه دربازی که ساخته می‌شود.

چون از هر گوشه مقوا، یک مربع به ضلع x از هر گوشه مقوا برش می‌دهیم، ابعاد جعبهٔ در باز مطلوب عبارتند از x و $(40-2x)$ و $(75-2x)$، (شکل ۳ـ۲۲)

بنابراین حجم این جعبه که به شکل مکعب مستطیل است به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$V=(40-2x)(75-2x)\times x=4x^3-230x^2+3000x \qquad (1)$$

متغیر x در این معادله با محدودیت‌های معینی روبرو است، زیرا به دلیل اینکه x طول ضلع مربع است، نمی‌تواند منفی باشد. همچنین عرض مقوا ۴۰ سانتی‌متر است، پس x نمی‌تواند بیشتر از نصف آن باشد (چرا؟)

در نتیجه متغیر x از معادله (۱) باید در رابطه $0 \le x \le 20$ صدق کند (چرا؟)

بنابراین مسأله واقعی ما به یک مدل ریاضی تبدیل شد که در این مدل ریاضی باید مقادیری از x را در بازه $[0,20]$ پیدا کنیم که مقدار V در معادله (۱) بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.

می‌توان این مسأله‌ها را به پیدا کردن مقدارهای ماکسیمم یا مینیمم تابع‌ها تبدیل کرد. ابتدا توضیح می‌دهیم که منظورمان از مقدارهای ماکسیمم و مینیمم چیست؟

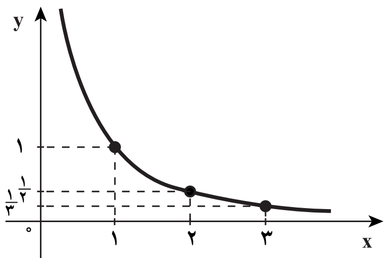
تعریف ۱ : فرض کنیم D دامنه تابع f و نقطه c عضو دامنه باشد، می‌گوییم :

الف) $f(c)$ **مقدار ماکسیمم** (ماکسیمم سراسری یا مطلق) تابع f روی D است، به شرطی که به ازای هر x عضو D داشته باشیم : $f(x) \le f(c)$

ب) $f(c)$ **مقدار مینیمم** (مینیمم سراسری یا مطلق) تابع f روی D است، به شرطی که به ازای هر x عضو D داشته باشیم : $f(c) \le f(x)$

پ) $f(c)$ **مقدار اکسترمم مطلق** تابع f روی D است که یا مقدار ماکسیمم مطلق و یا مقدار مینیمم مطلق تابع f روی D باشد.

در این بخش از کتاب (۳ـ۱۲)، مقدار ماکسیمم مطلق، مقدار مینیمم مطلق ، مقدار اکسترمم مطلق تابع را به اختصار مقدار ماکسیمم تابع، مقدار مینیمم تابع و مقدار اکسترمم تابع بیان می‌کنیم.

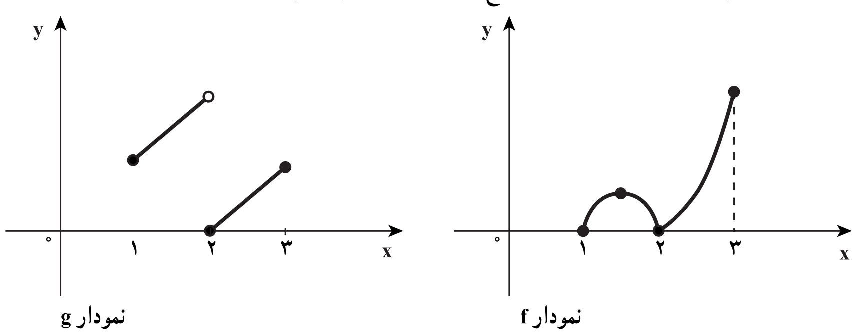


شکل ۳ـ۲۳

شکل ۳ـ۲۳ نمودار تابع f با دامنه $D = (۰, +\infty)$ و ضابطه $f(x) = (\frac{۱}{x})$ را نشان می‌دهد. تابع f در بازه $(۰, +\infty)$ نه دارای مقدار ماکسیمم است و نه مقدار مینیمم زیرا بُرد تابع مجموعه $R = (۰, +\infty)$ است و $f(x)$ می‌تواند از هر عدد مثبتی بزرگ‌تر شود (با نزدیک کردن x مثبت به صفر) و $f(x)$ با مقادیر مثبت می‌تواند به صفر نزدیک شود (با انتخاب xهای مثبت و بزرگ) ازطرف دیگر تابع f در بازه $[۱,۳]$ هم دارای ماکسیمم و هم دارای مینیمم است، مقدار ماکسیمم تابع $f(۱) = ۱$ و مقدار مینیمم تابع $f(۳) = \frac{۱}{۳}$ است و امّا تابع f در بازه $(۱,۳]$ ، مقدار مینیمم آن $f(۳) = \frac{۱}{۳}$ و در این بازه مقدار ماکسیمم ندارد (چرا؟)

فعالیت

در شکل ۳ـ۲۴ نمودارهای توابع f و g را درنظر بگیرید.



شکل ۳ـ۲۴

فعالیت

الف) پیوستگی توابع f و g را در بازه [۱,۳] بررسی نمایید.
ب) آیا توابع f و g در بازه [۱,۳] دارای مقدار ماکسیمم و مقدار مینیمم هستند و اگر جواب مثبت است آن مقادیر را مشخص کنید.

در مثال بالا دیدیم که تابع f با ضابطه $f(x)=(\frac{1}{x})$ در هر بازه بسته نظیر بازه [۱,۳] که پیوسته است دارای مقدار ماکسیمم و مقدار مینیمم است.

همچنین در این فعالیت تابع f در بازه بسته [۱,۳] پیوسته است. و تابع در این بازه دارای مقدار مینیمم و همچنین دارای مقدار ماکسیمم است. و اما تابع g در بازه [۱,۳] ناپیوسته است (چرا؟) و در این بازه مقدار ماکسیمم ندارد ولی مقدار مینیمم دارد.

دیدیم که برخی تابع‌ها مقدار اکسترمم دارند و برخی ندارند. اکنون می‌خواهیم به این سؤال پاسخ دهیم که تحت چه شرایطی می‌توانیم تضمین کنیم تابع هم دارای ماکسیمم و هم دارای مینیمم است.

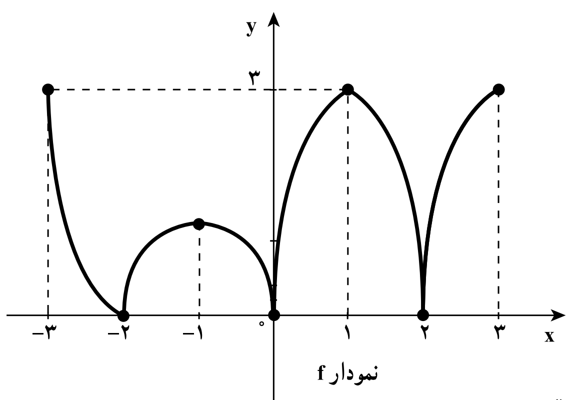
در قضیهٔ زیر شرط‌هایی را آورده‌ایم که به اعتبار آنها تابع هم مقدار ماکسیمم و هم مقدار مینیمم دارد.

۱ـ قضیه ۱ (مقدار اکسترمم مطلق): اگر تابع f در بازه بستهٔ [a, b] پیوسته باشد، آن وقت در این بازه هم مقدار ماکسیمم مطلق و هم مقدار مینیمم مطلق دارد.

برای درک بهتر قضیه مقدار اکسترمم، شکل ۳ــ۲۵ را درنظر بگیرید و به پرسش‌های زیر جواب دهید.

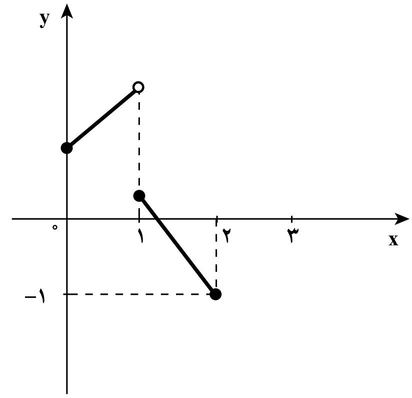
الف) تابع پیوسته f در بازه بسته [۳,۳−] در چه نقاطی مینیمم دارد؟ در صورت مثبت بودن جواب، مقدار مینیمم تابع را به‌دست آورید.

ب) تابع پیوسته f در بازه بسته [۳,۳−] در چه نقاطی ماکسیمم دارد؟ در صورت مثبت بودن جواب، مقدار ماکسیمم تابع را به‌دست آورید.

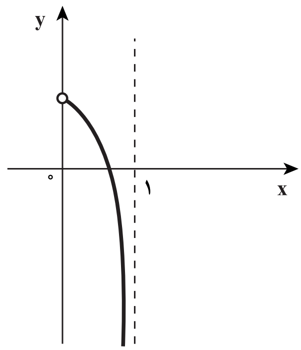


شکل ۳ــ۲۵

پرسش: آیا شرایط قضیه مقدار اکسترمم در نمودارهای شکل ۳ــ۲۶ برقرار است (چرا؟)



الف) این تابع در دامنه‌اش که بازه بسته [۰,۲] است پیوسته نیست و مقدار ماکسیمم ندارد ولی مقدار مینیمم دارد که برابر f(۲) = −۱



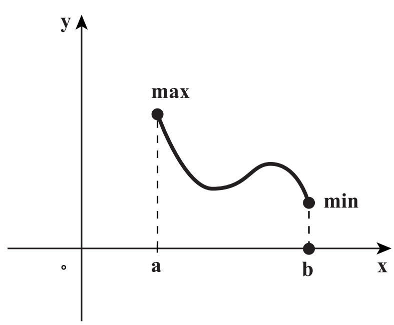
ب) این تابع در دامنه‌اش که بازه باز (۰,۱) است پیوسته است و نه ماکسیمم دارد و نه مینیمم

شکل ۳ــ۲۶

پرسش: می‌خواهیم بدانیم در چه نقاطی مقادیر اکسترمم رخ می‌دهند؟ معمولاً مقادیر اکسترمم یک تابع را در بازه‌ای مانند I از دامنهٔ آن جستجو می‌کنیم البته ممکن است بازه I شامل نقاط انتهایی خود باشد و نباشد.

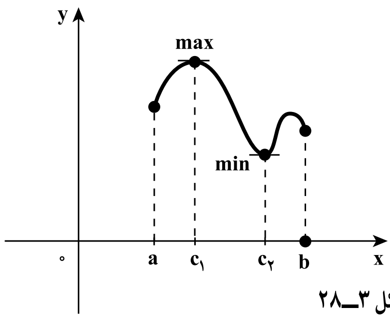
برای نمونه بازه $I = [a, b]$ شامل هردو نقطهٔ انتهایی خود است. و بازه $I = [a, b)$ فقط شامل نقطه انتهایی چپ خود می‌باشد و بازه $I = (a, b)$ شامل نقطه انتهایی خود نیست. در سه حالت زیر مقادیر اکسترمم تابع را بررسی می‌کنیم.

حالت اوّل: وقتی که مقادیر اکسترمم را در نقاط انتهایی بازه داشته باشیم. (شکل ۳ــ۲۷)



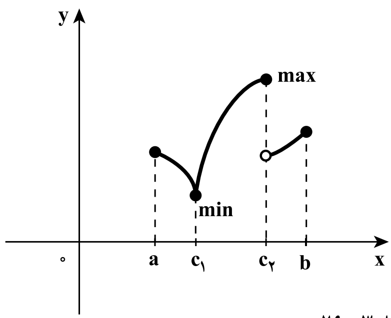
شکل ۳ــ۲۷

حالت دوم : وقتی که مقادیر اکسترمم را در نقاط درون بازه داشته باشیم و در آن نقاط مقدار مشتق صفر است.(شکل ۳ـ۲۸)



شکل ۳ـ۲۸

حالت سوم : وقتی که مقادیر اکسترمم را در نقاط درون بازه داشته باشیم و در آن نقاط تابع مشتق‌پذیر نباشد. (شکل ۳ـ۲۹) که تابع در نقطهٔ c_1 بازگشتی است و در نقطهٔ c_2 پرشی و ناپیوسته است.



شکل ۳ـ۲۹

در سه حالت بالا نقاطی را مطرح کردیم که نقاط کلیدی قضیه **مقدار اکسترمم** هستند.

نقطه‌ای از دامنه f در هر یک از حالت‌های دوم و سوم بالا که تابع مقدار اکسترمم داشت «**نقطه بحرانی**» تابع f می‌نامیم.

> **تعریف ۲ :** نقطهٔ درونی $c \in D_f$ را **نقطه بحرانی** تابع f می‌نامیم، هرگاه $f'(c)=0$ و یا $f'(c)$ موجود نباشد.

مثال : نقاط بحرانی تابع f با ضابطه $f(x)=-2x^3+3x^2$ را در بازه $[-\frac{1}{2},2]$ بیابید.

حل : تابع f به ازای هر x از بازهٔ باز $(-\frac{1}{2},2)$ مشتق‌پذیر است و $f'(x)=-6x^2+6x$ که به ازای $x=0$ و $x=1$ داریم $f'(0)=0$ و $f'(1)=0$ و در بازه $(-\frac{1}{2},2)$ نقطه‌ای وجود ندارد که تابع f مشتق نداشته باشد. بنابراین تابع f در نقاط ۱ و ۰ بحرانی است.