

انتگرال

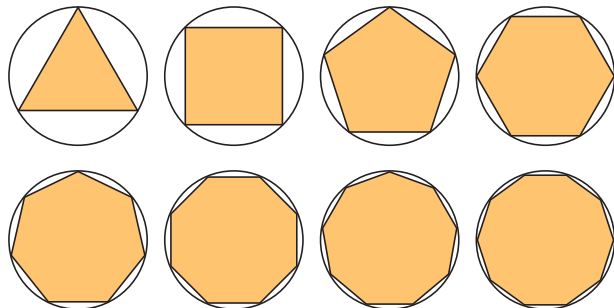
۱-۴- مسأله مساحت

فرمول‌های مربوط به مساحت چندضلعی‌ها، نظیر مربع، مستطیل، مثلث و دوزنقه از زمان‌های شروع تمدن‌های نخستین به خوبی شناخته شده بوده است. با این حال، مسأله یافتن فرمولی برای بعضی نواحی که با مرزهای منحنی‌الخط هستند (که دایره ساده‌ترین آنهاست) برای ریاضیدانان اولیه در خور مشکلاتی بوده است.

اولین پیشرفت واقع‌بینانه محاسبه چنین مساحت‌هایی توسط ریاضیدان یونانی به نام ارشمیدس صورت گرفت. ارشمیدس توانست مساحت ناحیه‌هایی با مرزهای محدود به قوس‌های دایره، سهمی و منحنی‌های دیگر را با استفاده از روش خارق‌العاده‌ای، که امروزه به روش اِفا مشهور است، محاسبه کند. در چنین روشی برای محاسبه دایره از درج چندضلعی‌های منظم در درون دایره استفاده می‌شود و تعداد اضلاع این چندضلعی‌ها متوالیاً زیاد و زیادتر شده و به نحو نامحدودی افزایش می‌یابد (شکل

(۱-۴)

۱۰۰	۳,۱۳۹۵۲۵۹۷۶۴۷
۲۰۰	۳,۱۴۱۰۷۵۹۰۷۸۱
۳۰۰	۳,۱۴۱۳۶۲۹۸۲۵۰
۴۰۰	۳,۱۴۱۴۶۳۴۶۲۳۶
۵۰۰	۳,۱۴۱۵۰۹۹۷۰۸۴
۱۰۰۰	۳,۱۴۱۵۷۱۹۸۲۷۸
۲۰۰۰	۳,۱۴۱۵۸۷۴۸۵۸۸
۳۰۰۰	۳,۱۴۱۵۹۰۳۵۶۸۳
۴۰۰۰	۳,۱۴۱۵۹۱۳۶۱۶۶
۵۰۰۰	۳,۱۴۱۵۹۱۸۲۶۷۶
۱۰,۰۰۰	۳,۱۴۱۵۹۲۴۴۶۸۸



جدول و شکل ۱-۴ هرچه تعداد اضلاع چندضلعی بیشتر شود مساحت چندضلعی به مساحت دایره نزدیک و نزدیک‌تر می‌گردد.

همچنان که تعداد اضلاع چنین چندضلعی‌هایی افزایش می‌یابد، چندضلعی به پرکردن ناحیه درون دایره متمایل شد و در نتیجه مساحت این چندضلعی‌ها تقریب‌های بهتر و بهتری از مساحت دقیق دایره به دست می‌دهد.

برای آنکه ملاحظه کنیم که چگونه این روش کار می‌کند، فرض می‌کنیم $A(n)$ نمایش مساحت چندضلعی با n ضلع بوده باشد که درون دایره به شعاع واحد محاط شده است.

جدول ۴-۱ مقادیر $A(n)$ را برای انتخاب‌های مختلف n نشان می‌دهد. می‌بینیم که برای مقادیر بزرگ n مساحت $A(n)$ ظاهراً به عدد π نزدیک می‌گردد و این چیزی است که انتظارش را داریم. این تجربه به ما می‌گوید که برای مساحت دایره‌ای به شعاع ۱، می‌توانیم روش افنا را معادل تساوی حدی ارزیابی کنیم.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A(n) = \pi$$

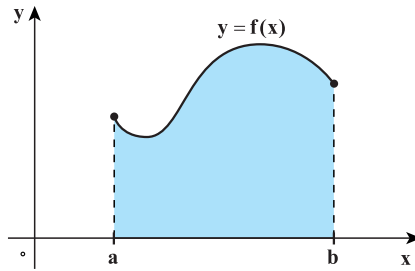
اما یونانیان باستان از مفهوم «بینهایت» خوششان نمی‌آمد و لذا در بررسی‌های مربوط به ریاضیات از آن احتراز می‌کردند؛ در نتیجه محاسبه مساحت با استفاده از روش افنا یک فرایند سرانگشتی به حساب می‌آمد. در واقع این روش تا زمان نیوتن و لایبنیتز باقی ماند - کسانی که روشی کلی برای محاسبه مساحت با استفاده ضمنی از مفهوم حد ارائه کردند. ما روش این دانشمندان را در بررسی مسأله زیر به کار خواهیم گرفت.

❖ **مسأله مساحت:** با داشتن تابع پیوسته و نامنفی f که بر بازه $[a, b]$ تعریف شده است، مساحت بین نمودار f و بازه $[a, b]$ بر محور x را پیدا کنید (شکل ۴-۲)

پرسش: همچنان که در شکل ۴-۱ ملاحظه می‌کنیم تعدادی چندضلعی منتظم در درون دایره به شعاع واحد محاسبه شده‌اند. در جدول سمت راست برای مقادیر بزرگ n که تعداد اضلاع چندضلعی را نشان می‌دهد، مساحت چندضلعی‌ها با نماد $A(n)$ نشان داده شده است. آیا می‌توان گفت که وقتی n بزرگ و بزرگ‌تر می‌شود مساحت n ضلعی محاطی با مساحت دایره برابر می‌گردد؟

به زبان دنباله‌ها، برای هر $n \geq 3$ ، $A(n)$ که مساحت n ضلعی است عددی است حقیقی. در نتیجه $\{A(n)\}_{n=3}^{\infty}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی است که جمله n ام آن مساحت n ضلعی منتظم محاط در درون دایره است. می‌دانیم که مساحت دایره $S = \pi r^2 = \pi \times 1 = \pi$ می‌باشد. آیا به زبان حدی می‌توانیم بگوییم که:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} A(n) = \pi$$



شکل ۴-۲ ناحیه تحت نمودار

تابع f محدود به محور x و دو خط $x = a$ و $x = b$

ما در این فصل به مطالعه و بررسی مسأله مساحت می پردازیم و لذا از این طریق مفهوم مهم انتگرال معین را فرمول بندی خواهیم کرد. اما ذکر این نکته نیز جالب است که گرچه انتگرال در رابطه با مسأله مساحت مفهوم سازی شده است، لکن از این مفهوم برای بررسی و مطالعه مسأله های دیگری در ریاضیات، فیزیک و سایر علوم دقیقه استفاده می شود، نظیر مسأله پتانسیل الکتریکی، مسأله کار انجام شده توسط نیروها، مطالعه و تعیین معادله مسیر متحرک ها با استفاده از سرعت های داده شده و نظایر این ها. قبل از آن که به مطالعه و بررسی مساحت بپردازیم لازم است با مجموع های متناهی و نماد سیگما آشنا شویم.

مجموع ها و نماد سیگما: در محاسبه و مطالعه مساحت ها که در بخش بعدی با آن درگیر می شویم، با مجموع هایی متناهی از مقدارهای یک تابع سروکار خواهیم داشت. در این بخش برآنیم تا نماد مناسبی برای نمایش یک مجموع با تعداد متناهی جمله معرفی کنیم. همچنین به روش هایی برای محاسبه حاصل جمع چنین مجموع هایی محتاج خواهیم بود. از نماد Σ (سیگما) برای نمایش یک مجموع استفاده می کنیم.

تعریف ۱: نماد سیگما هرگاه m و n دو عدد صحیح $m \leq n$ و همچنین f تابعی باشد که بر اعداد صحیح $f(i)$ تعریف شده باشد، نماد Σ نشانگر حاصل جمع مقادیر تابع f در این اعداد $m, m+1, m+2, \dots, n$ می باشد: $\sum_{i=m}^n f(i) = f(m) + f(m+1) + \dots + f(n)$

مجموع سمت راست این تساوی بسط مجموع تأثیر داده شده با سیگمای سمت چپ نامیده می شود.

❖ مثال:

$$\sum_{i=1}^5 i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$$

حرف i ظاهر شده در نماد $\sum_{i=m}^n f(i)$ را اندیس جمع‌بندی می‌نامیم. پس برای محاسبه $\sum_{i=m}^n f(i)$ ، اندیس i را با اعداد $n, n-1, n-2, \dots, m+1, m$ متوالیاً جایگزین کرده و مقادیر حاصله را جمع می‌کنیم. ملاحظه می‌کنیم که مقدار حاصل جمع به اندیس جمع‌بندی بستگی ندارد؛ چرا که این اندیس در سمت راست تعریف وجود ندارد.

$$\sum_{i=m}^n f(i) = \sum_{k=m}^n f(k) \quad \text{برای هر } k:$$

$$\sum_{k=1}^5 k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$$

لکن حاصل جمع $\sum_{i=m}^n f(i)$ به دو عدد جمع m و n بستگی تام دارد، این دو عدد را حدود جمع‌بندی می‌نامیم؛ m را حد پایین و n را حد بالا می‌نامیم.

❖ مثال: نمایش حاصل جمع‌ها با استفاده از نماد سیگما

$$\sum_{j=1}^{20} j = 1 + 2 + 3 + \dots + 18 + 19 + 20$$

$$\sum_{i=0}^n x^i = x^0 + x^1 + x^2 + \dots + x^{n-1} + x^n$$

$$\sum_{m=1}^n 1 = \underbrace{1+1+1+\dots+1}_n$$

$$\sum_{k=-2}^3 \frac{1}{k+8} = \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11}$$

نکته: در اکثر اوقات به جای استفاده از نماد تابعی $f(i)$ از یک متغیر اندیس‌دار مانند a_i برای

نمایش جمله i ام یک حاصل جمع عمومی استفاده می‌کنیم:

$$\sum_{i=m}^{\infty} a_i = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_n$$

به‌خصوص وقتی تعداد جملات نامتناهی باشد. چنین مجموعی را یک سری نامتناهی می‌نامیم:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

پس وقتی جمله‌ای به‌عنوان جمله آخر به دنبال سه نقطه ... نمی‌آید، باید این معنی را داشته باشد که جملات برای همیشه و به‌طور نامتناهی ادامه دارند.

پرسش: اکنون این پرسش پیش می‌آید که وقتی تعداد جملات متناهی باشد، استفاده از نماد سیگما چه ویژگی‌هایی دارد؟

چون نماد سیگما تعمیم عمل جمع به تعداد متناهی جمله است، پس ویژگی‌های اساسی عمل جمع را به ارث می‌برد. برای مثال، وقتی تعداد متناهی عدد را جمع می‌کنیم، ترتیب قرار گرفتن جملات تأثیری در مقدار حاصل جمع ندارد و یا آنکه هرگاه همه جملات دارای عامل مشترک باشند، این عامل مشترک را می‌توان از جملات جدا کرده و به صورت فاکتور ضرب در نماد سیگما لحاظ کرد همانند وقتی که تعداد جملات فقط ۲ جمله است:

$$ca + cb = c(a + b)$$

لذا قوانین اولیه حساب ویژگی‌هایی به نماد سیگما می‌دهد که اینک اهم آن را بیان می‌کنیم.

$$\sum_{i=m}^n (Af(i) + Bg(i)) = A \sum_{i=m}^n f(i) + B \sum_{i=m}^n g(i) \quad (\text{الف})$$

A ، B اعدادی ثابت و مستقل از اندیس i هستند.

(ب) دو عبارت $\sum_{i=0}^{m+n} f(i)$ و $\sum_{i=0}^m f(i) + \sum_{i=m+1}^{m+n} f(i)$ دارای یک بسط هستند؛ در واقع هر یک برابر

$$\sum_{i=0}^{m+n} f(i) = \sum_{i=0}^m f(i) + \sum_{i=m+1}^{m+n} f(i) \quad (\text{د})$$

این قانون را قانون لغزاندان اندیس‌ها می‌نامیم.

❖ **مثال:** $\sum_{i=3}^{17} \sqrt{1+i^2}$ را به صورت $\sum_{i=1}^n f(i)$ بنویسید.

حل: باید در عبارت داده شده اندیس‌های پایین و بالا را ۲ واحد کم کنیم تا اندیس پایین از ۱ شروع گردد؛ در عین حال به همان مقدار، یعنی ۲ واحد به اندیس عبارت تحت Σ باید اضافه کنیم:

$$\sum_{i=3}^{17} \sqrt{1+i^2} = \sum_{i=1}^{15} \sqrt{1+(i+2)^2}$$

نکته: ملاحظه کنید که $\sum_{i=m+1}^n f(i) = \sum_{i=1}^n f(i) - \sum_{i=1}^m f(i)$ (چرا؟)



اکنون شما عبارت $\sum_{i=a+1}^{17} (b+i)^3$ را به صورت $\sum_{i=1}^n f(i)$ بنویسید.

محاسبه مجموع‌ها: وقتی یک مجموع مانند $S = \sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + 3 + \dots + n$ داده می‌شود که درگیر تعداد زیادی جمله می‌باشد، داشتن فرمولی که مقدار این مجموع را به شکلی بسته نشان دهد بسیار ضروری می‌باشد.

منظورمان از شکل بسته چنین فرمولی آن است که از شکل بسط آن (شامل سه نقطه) استفاده نشده باشد. برای مجموع بالا فرمول به صورت $S = \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$ می‌باشد.

دانش‌آموزان، در این مورد خاص، مشکلی ندارند. می‌توانید به شکل زیر عمل کنید.

$$S = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n$$

$$S = n + (n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1$$

پس جمع را یک بار به صورت معمولی به جلو هریک بار به صورت عقب‌گرد نوشته‌ایم. دو ردیف را همچنان که زیر هم نوشته شده‌اند با هم جمع می‌کنیم:

$$2S = (n+1) + (n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) + (n+1) = n(n+1)$$

فرمول S فوق‌الاشاره با تقسیم طرفین تساوی اخیری بر ۲ به دست می‌آید.

اما همیشه محاسبه یک مجموع و یافتن فرمولی برای آن به این آسانی نخواهد بود. این مسأله یکی از مسأله‌های چالش‌برانگیز در مباحث ریاضیات است. لیکن چنین فرمول‌هایی که در بخش بعدی بدان نیاز داریم، فرمول‌هایی سراسر ساده و ساده بوده که در قضیه بعدی گردآوری شده‌اند.

قضیه ۱: فرمول‌های جمع‌بندی

$$\sum_{i=1}^n 1 = \underbrace{1+1+1+\dots+1}_n = n \quad \text{(الف)}$$

$$\sum_{i=1}^n i = 1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{(ب)}$$

$$\sum_{i=0}^n i^2 = 1^2+2^2+3^2+\dots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{(ج)}$$

$$\sum_{i=1}^n r^{i-1} = 1+r+r^2+r^3+\dots+r^{n-1} = \frac{r^n-1}{r-1}, \quad (r \neq 1) \quad \text{(د)}$$

❖ برهان:

الف) بدیهی است حاصل جمع n بار عدد ۱ برابر n است. یک راه حل برای (ب) قبلاً آرایه گردید. برای اثبات (ج) n بار اتحاد زیر را

$$(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$$

به ازای هر k که $1 \leq k \leq n$ نوشته و جمع می‌کنیم.

$$\begin{array}{rclclcl}
 k=1 & 2^3 - 1^3 & = 3 \times 1^2 & + & 3 \times 1 & +1 \\
 k=2 & 3^3 - 2^3 & = 3 \times 2^2 & + & 3 \times 2 & +1 \\
 k=3 & 4^3 - 3^3 & = 3 \times 3^2 & + & 3 \times 3 & +1 \\
 \vdots & \vdots & & & & \\
 k=n-1 & n^3 - (n-1)^3 & = 3(n-1)^2 & + & 3(n-1) & +1 \\
 k=n & (n+1)^3 - n^3 & = 3n^2 & + & 3n & +1
 \end{array}$$

با استفاده از (ب) $(n+1)^3 - 1 = 3\left(\sum_{i=1}^n i^2\right) + \frac{3n(n+1)}{2} + n$

در نتیجه به آسانی $\sum_{i=1}^n i^2$ از تساوی اخیر به دست می‌آید.

$$\begin{aligned}
 3 \sum_{i=1}^n i^2 &= (n+1)^3 - \frac{3n(n+1)}{2} - n - 1 \\
 &= n^3 + 3n^2 + 2n - \frac{3n(n+1)}{2} \\
 \sum_{i=1}^n i^2 &= \frac{n(n^2 + 3n + 2)}{3} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}
 \end{aligned}$$

(د) همان مجموع جملات یک تصاعد هندسی با قدرنسبت r می‌باشد که از قبل با آن آشنایی

دارید.

در برهان قسمت ج، قسمت‌های سمت چپ n تساوی را باهم جمع کردیم و هر جمله اول یک تساوی با جمله دوم تساوی بعدی حذف گردید (به دلیل قرینه بودن) و از همه جملات، فقط جمله اول تساوی n ام (آخر) و جمله دوم تساوی اول باقی ماندند که همان عبارت $1^3 - (n+1)^3$ سمت چپ، حاصل جمع تساوی ظاهر گردید. در واقع می‌توانستیم از نماد سیگما استفاده کنیم: هر عبارت در سمت چپ به شکل کلی $(k+1)^3 - k^3$ است که در آن $1 \leq k \leq n$. پس جمع آن به شکل $\sum_{k=1}^n ((k+1)^3 - k^3)$ است. اما حاصل آن، با حذف جملات قرینه، برابر $1^3 - (n+1)^3$ شد. بنابراین:

$$\sum_{k=1}^n ((k+1)^3 - k^3) = (n+1)^3 - 1^3 \tag{1}$$

این یک مثال از حالت کلی جمعیت است که جمعیت تلسکوپی نامیده می‌شود.

فرم جمعیت تلسکوپی به صورت کلی:

$$\sum_{i=m}^n (f(i+1) - f(i)) = f(n+1) - f(m) \quad (2)$$

می‌باشد، زیرا همه جملات آن به جز اولی و آخری حذف می‌شوند. قاعده جمعیت تلسکوپی را برخی قاعده ادغام نیز می‌نامند.

ابتدا تساوی (۱) را به استقراء ثابت کنید. سپس (۲) را به استقراء ابتدا از m ثابت کنید.

$$\sum_{k=m+1}^n (6k^2 - 4k + 3)$$

❖ مثال: محاسبه کنید:

که در آن $1 \leq m \leq n$

🚀 حل: از قواعد جمع بندی و فرمول‌های قضیه قبل استفاده می‌کنیم:

$$\sum_{k=1}^n (6k^2 - 4k + 3) = 6 \sum_{k=1}^n k^2 - 4 \sum_{k=1}^n k + 3 \sum_{k=1}^n 1$$

$$= 6 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4 \frac{n(n+1)}{2} + 3n$$

$$= 2n^3 + n^2 + 2n$$

$$\sum_{k=m+1}^n (6k^2 - 4k + 3) = \sum_{k=1}^n (6k^2 - 4k + 3) - \sum_{k=1}^m (6k^2 - 4k + 3) \quad \text{بنابراین}$$

$$= 2n^3 + n^2 + 2n - 2m^3 - m^2 - 2m$$

نکته: برنامه‌ریزی میپل (Maple) شکل بسته فرمولی برخی از جمع‌ها را به دست می‌دهد.

برای مثال:

$$> \text{Sum}(i^4, i=1..n); \text{factor}(\%);$$

$$= \frac{1}{5}(n+1)^5 - \frac{1}{2}(n+1)^4 + \frac{1}{3}(n+1)^3 - \frac{1}{3}n - \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{3}n(n+1)(2n+1)(3n^2 + 3n - 1)$$

در تمرین های ۸-۱ جمع را بسط دهید :

$$۱- \sum_{i=1}^4 i^3$$

$$۲- \sum_{j=1}^{100} \frac{j^3}{j+1}$$

$$۳- \sum_{j=1}^n 3j$$

$$۴- \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(-1)^i}{i+1}$$

$$۵- \sum_{i=3}^n \frac{(-2)^i}{(i+2)^2}$$

$$۶- \sum_{j=1}^n \frac{j^2}{n^3}$$

$$۷- \sum_{n=1}^k \sin \frac{n\pi}{3k}$$

$$۸- \sum_{k=2}^n \frac{e^{-k}}{nk}$$

جمع های زیر را با استفاده از نماد Σ بنویسید. (متذکر می شویم که جواب منحصر به فرد نمی باشد)

$$۹- ۵+۶+۷+۸+۹$$

$$۱۰- ۲+۲+۲+۲+ \dots +۲ \text{ (بار } ۲۰۰ \text{)}$$

$$۱۱- ۲^۲-۳^۲+۴^۲-۵^۲+ \dots -۹۹^۲$$

$$۱۲- ۱+۲x+۳x^۲+۴x^۳+ \dots +۱۰۰x^{۹۹}$$

$$۱۳- ۱+x+x^۲+x^۳+ \dots +x^n$$

$$۱۴- ۱-x+x^۲-x^۳+ \dots +x^{2n}$$

$$۱۵- ۱-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\dots+\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$$

$$۱۶- \frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+\dots+\frac{n}{2^n}$$

۲-۲- مساحت به عنوان حد مجموع

در فصل ۳ با استفاده از تعریف حد، مماس بر یک منحنی خاص به مطالعه و بررسی مشتق پرداختیم. در اینجا نیز بیشتر دوست داشتیم تا با استفاده از تعریفی از مساحت یک ناحیه در صفحه به مطالعه انتگرال بپردازیم. اما ارائه تعریفی از مساحت بسیار مشکل تر از تعریفی برای مماس است. بنابراین فرض می کنیم که منظورمان از مساحت به گونه ای ملموس بر ما معلوم بوده و از این رو برخی از ویژگی های آن را یادآوری می شویم.

الف) مساحت یک ناحیه در صفحه عددی حقیقی و نامنفی برحسب واحدهای سطح (مربع ها) می باشد.

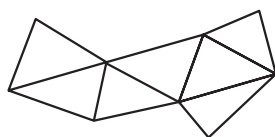
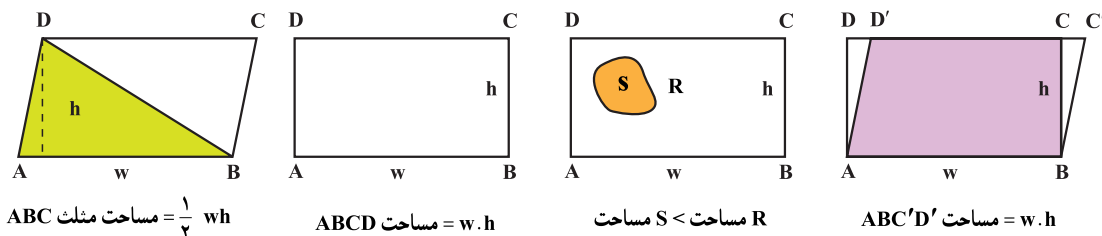
ب) مساحت یک مستطیل با عرض w و ارتفاع h برابر $A=wh$ است.

ج) مساحت ناحیه های صفحه ای که برابر باشند یکی است.

د) هرگاه ناحیه S درون ناحیه R باشد، مساحت S کمتر از مساحت R است.

ه) هرگاه ناحیه R اجتماعی متناهی از ناحیه‌های مجزا باشد، مساحت R برابر مجموع مساحت‌های این ناحیه‌های مجزا است.

با استفاده از این ویژگی‌های شهودی مساحت می‌توانیم مساحت خیلی از اشکال هندسی را بررسی و یا محاسبه کنیم. شما در شکل‌های زیر می‌توانید بگویید که نتیجه حاصله که در زیر هر شکل نوشته شده است بر طبق کدام یک از ویژگی‌های (الف) - (ه) می‌باشد.



مجموع مساحت مثلث‌ها مساوی مساحت چندضلعی

شکل ۴-۳- ویژگی مساحت‌ها

اما فراتر از چندضلعی‌ها نمی‌توان رفت، مگر آنکه از مفهوم حد کمک بگیریم. شما با مفهوم حد در سال قبل و همچنین در فصل ۲ این کتاب به خوبی آشنا شده‌اید. هرگاه یک مساحت دارای مرزی منحنی‌وار بوده باشد، محاسبه ساده آن فقط می‌تواند به صورت تقریبی با استفاده از مساحت مثلث‌ها و مستطیل‌ها به دست آید؛ محاسبه دقیق این گونه مساحت‌ها محتاج محاسبه یک حد است.

روش مستطیل برای محاسبه مساحت: در این بخش قصدمان این است که نشان دهیم چگونه می‌توان مساحت یک ناحیه مانند R را که تحت نمودار تابع پیوسته و نامنفی $y=f(x)$ و محدود به دو خط قائم $x=a$, $x=b$ است به دست آوریم.

برای این کار به طرز زیر عمل می‌کنیم. بازه $[a, b]$ را به n زیر بازه جزء با استفاده از نقاط

افزایی

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

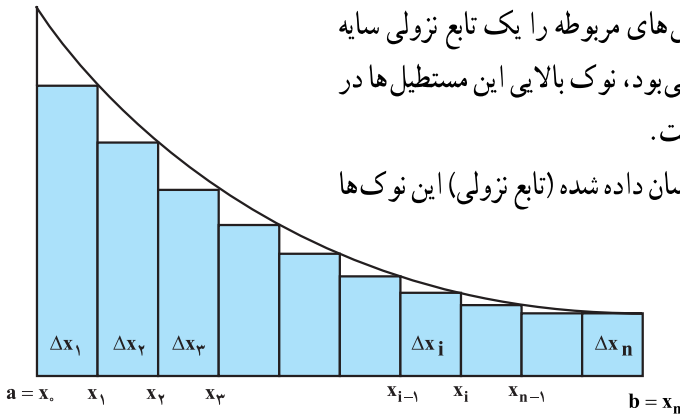
$(n+1)$ نقطه تقسیم می‌کنیم، طول بازه i ام $[x_{i-1}, x_i]$ را به Δx_i نشان می‌دهیم:

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad (i=1, 2, 3, \dots, n)$$

بر روی هر بازه جز $[x_{i-1}, x_i]$ مستطیلی با عرض Δx_i و ارتفاع $f(x_i)$ می‌سازیم. پس مساحت این مستطیل برابر $f(x_i)\Delta x_i$ می‌باشد. مجموع این مساحت‌ها را تشکیل می‌دهیم.

$$S_n = f(x_1)\Delta x_1 + f(x_2)\Delta x_2 + \dots + f(x_n)\Delta x_n$$

$$= \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x_i$$

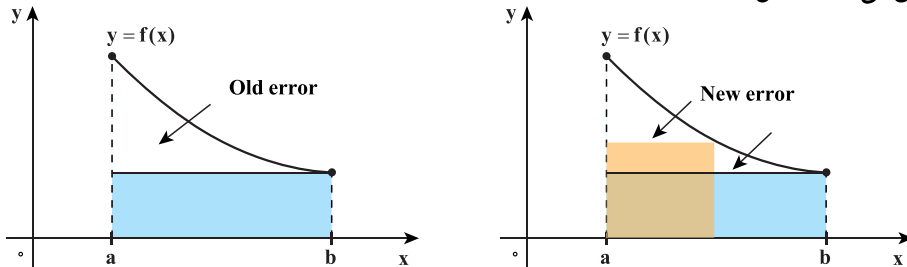


در شکل ۴-۴ مستطیل‌های مربوطه را یک تابع نزولی سایه زده ایم، اگر تابع مان صعودی می‌بود، نوک بالایی این مستطیل‌ها در بالای نمودار تابع قرار می‌گرفت. در حالی که در شکل نشان داده شده (تابع نزولی) این نوک‌ها در زیر نمودار قرار دارد.

شکل ۴-۴ حاصل جمع مساحت مستطیل‌ها برابر $\sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x_i$ است.

واضح است که S_n تقریبی از مساحت ناحیه R است و با افزایش n این تقریب به مقدار واقعی مساحت R نزدیک‌تر می‌شود، مشروط بر آنکه نقاط $x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ را چنان انتخاب کنیم که عرض Δx_i ‌ها نیز به صفر میل کند.

برای مثال، در شکل بعدی، ملاحظه می‌کنیم که تقسیم یک بازه جزء، به دو بازه کوچک‌تر خطای این تقریب را، با کاهش قسمتی از مساحت تحت نمودار که مشمول در مستطیل‌ها شده است، کاهش می‌دهد (شکل ۵-۴).



شکل ۵-۴ استفاده از مستطیل‌های بیشتر خطای محاسبه را کوچکتر می‌کند.

بنابراین برای یافتن مساحت R معقول آن است که حد دنباله S_n را وقتی $n \rightarrow \infty$ به دست آوریم (با این شرط که طول بزرگترین Δx_i ها نیز به صفر میل کند).

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \quad \text{مساحت}$$

نکته مهم: برای آنکه، در حدگیری Δx_i ها همگی به صفر میل کنند، اغلب اوقات مناسب تر آن


است که عرض همه بازه‌های جز مساوی اختیار شوند. در این صورت داریم:

$$\Delta x_i = \frac{b-a}{n} = \Delta x \quad , \quad x_i = a + i\Delta x = a + \frac{i}{n}(b-a)$$

که در آن، چون همه Δx_i ها را مساوی اختیار کرده‌ایم و طول مشترک را به Δx نشان داده‌ایم. از این نوع تقسیم بازه، به بازه‌های جزء مساوی، به عنوان افراز منظم یاد خواهیم کرد. معلوم است که در مورد افرازهای منظم، وقتی $n \rightarrow \infty$ ، $\Delta x \rightarrow 0$ ، و دیگر نیازی به شرط آن که طول بزرگترین بازه جزء به صفر میل کند، نمی‌باشد.

محاسبه برخی مساحت‌ها: در این بخش به‌عنوان نمونه به محاسبه تقریبی برخی مساحت‌ها با استفاده از روش فوق می‌پردازیم. ابتدا با ناحیه‌ای شروع می‌کنیم که مساحت آن را از قبل می‌دانیم و از این راه بیشتر قانع می‌شویم که روش توصیف شده مان مقدار دقیق را به دست می‌دهد.

❖ **مثال:** مساحت ناحیه‌ای را بیابید که تحت خط مستقیم به معادله $y=x+1$ بوده و محدود به خطوط $x=0$ ، $x=2$ می‌باشد.

 **حل:** ناحیه مورد نظر در شکل زیر هاشور زده شده است. این ناحیه یک ذوزنقه است. به‌علاوه می‌دانیم که مساحت این ناحیه ۴ واحد سطح است (چرا؟). اینک مساحت این ناحیه را به‌عنوان حد مجموع مساحت مستطیل‌هایی که به روش فوق ساخته می‌شوند به روش زیر می‌توانید حساب کنید.

۱- بازه $[0, 2]$ را به n بازه جزء با طول مساوی تقسیم کنید:

$$x_0 = 0, x_1 = \frac{2}{n}, x_2 = \frac{4}{n}, x_3 = \frac{6}{n}, \dots, x_n = \frac{2n}{n} = 2$$

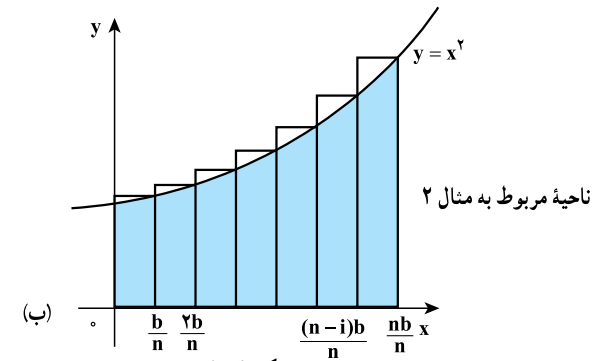
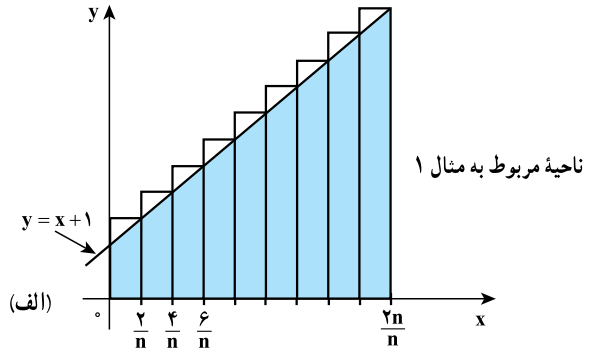
۲- پس مقدار تابع $f(x)=x+1$ در نقطه دلخواه x_i برابر است با $x_i + 1 = \frac{2i}{n} + 1$

و بازه جزء i ام $\left[\frac{2(i-1)}{n}, \frac{2i}{n} \right]$ دارای طولی برابر $\frac{2}{n}$ Δx_i است.

۳- ملاحظه می‌کنیم که مجموع مساحت‌های مستطیل‌های نشان داده در شکل ۴-۶ (الف)

برابر است با :

$$\begin{aligned}
 S_n &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{2i}{n} + 1 \right) \frac{2}{n} \\
 &= \frac{2}{n} \left[\frac{2}{n} \sum_{i=1}^n i + \sum_{i=1}^n 1 \right] \\
 &= \left(\frac{2}{n} \right) \left[\frac{2}{n} \frac{n(n+1)}{2} + n \right] \\
 &= 2 \frac{n+1}{n} + 2
 \end{aligned}$$



شکل ۴-۶

بنابراین مساحت A با حدگیری از این دنباله به دست می آید.

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 \frac{n+1}{n} + 2 \right) = 2 + 2 = 4 \quad \text{واحد سطح}$$

❖ **مثال:** مساحت ناحیه‌ای را که محدود به سهمی $y = x^2$ و خطوط $x = b > 0$ ، $x = 0$ ، $y = 0$ می باشد به دست آورید.

حل: هرگاه مساحت ناحیه مورد بررسی را A بنامیم، برای حد مجموع‌های S_n (دنباله $\{S_n\}_{n=1}$)

مربوط به مساحت مستطیل‌های نشان داده شده در شکل ۴-۶ (ب) می باشد. با استفاده از افزایش منظمی با $n+1$ نقطه افزایشی، طول هریک از بازه‌ای جز، برابر $\frac{b}{n}$ می شود. پس ارتفاع مستطیل i ام برابر $\left(\frac{ib}{n}\right)^2$ است. بنابراین بنا بر قضیه (ج)

$$S_n = \sum_{i=1}^n \left(\frac{ib}{n} \right)^2 \frac{b}{n} = \frac{b^3}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{b^3}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

از این رو مساحت مورد نظر با حدگیری به دست می آید:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b^3 \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} = \frac{b^3}{3}$$

واحد سطح

تمرین در کلاس

۱- با استفاده از اتحاد $1 + 4k + 6k^2 + 4k^3 = (k+1)^4 - k^4$ و قاعده تلسکوپی نشان دهید

$$\sum_{i=1}^k i^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2$$

که

۲- مساحت ناحیه ای را که محدود به نمودار $y = x^2$ و خطوط $x = b > 0$, $x = 0$, $y = 0$ می باشد به دست آورید. (راهنمایی: از اتحاد به دست آمده در مسأله ۱ استفاده کنید)

گرچه ممکن است به نظر باطل نما جلوه کند، اما همه علوم دقیق (علوم محض) تحت تسلط ایده تقریب هستند. (برتراند راسل - ریاضی دان انگلیسی)

یک پرسش اساسی

به لحاظ هندسی کاملاً مشهود است که مساحت تحت نمودار تابع f به شکل نمودار f بستگی دارد. نمودار هر تابع در واقع رفتار هندسی مقادیر تابع را نمایان می سازد.

پس مقدار مساحت در مرحله اول به تابع مورد نظر بستگی دارد. در مرحله بعد البته مقدار مساحت به بازه $[a, b]$ که تابع در آن تعریف شده است، یعنی خطوط $x = a$ و $x = b$ که مرزهای عمودی ناحیه را می سازند نیز بستگی خواهد داشت. برای آنکه بیشتر وارد جزئیات جبری مسأله شویم، به مثال ۲ مراجعه می کنیم. ملاحظه کردیم که مساحت ناحیه محدود به نمودار $y = x^2$ و خطوط $x = 0$ و $x = b$ (یعنی بازه $[0, b]$) برابر است با:

$$A = \frac{b^3}{3}$$

پس هرگاه بخواهیم مساحت محدود به نمودار $y = x^2$ را با پایه $[0, x]$ حساب کنیم، این مساحت برابر

$$A(x) = \frac{x^3}{3}$$

خواهد شد. حال سؤال اساسی در این جا چنین است که مدل $A(x)$ چه رابطه‌ای با تابع $y = x^2$ دارد؟

همین سؤال را در مورد مثال ۱ نیز می‌توان مطرح کرد. در این جا $f(x) = x + 1$ و برای محاسبه مساحت آن بر بازه $[0, b]$ (به جای $[0, 2]$ در مثال) داریم:

$$x_0 = 0, x_1 = \frac{b}{n}, x_2 = \frac{2b}{n}, \dots, x_n = \frac{nb}{n} = b$$

$$f(x_i) = x_i + 1 = \frac{ib}{n} + 1 \quad \text{داریم:}$$

$$S_n = \sum_{i=1}^n \left(\frac{ib}{n} + 1 \right) \frac{b}{n} \quad \text{بنابراین:}$$

$$= \frac{b}{n} \left[\frac{b}{n} \sum_{i=1}^n i + \sum_{i=1}^n 1 \right]$$

$$= \frac{b}{n} \left[\frac{b}{n} \frac{n(n+1)}{2} + n \right]$$

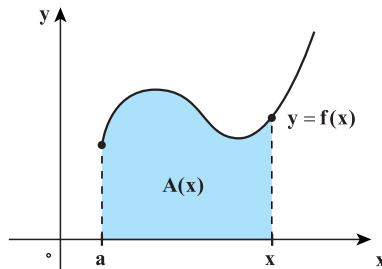
$$= \frac{(n+1)}{n} \times \frac{b^2}{2} + b$$

$$A(b) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b^2}{2} \times \frac{n+1}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} b \quad \text{و با حدگیری به دست می‌آوریم:}$$

$$= \frac{b^2}{2} + b$$

و هرگاه بخواهیم بازه $[a, x]$ را منظور کنیم مساحت مورد نظر به عنوان تابعی از x به دست

$$A(x) = \frac{x^2}{2} + x \quad \text{خواهد آمد:}$$

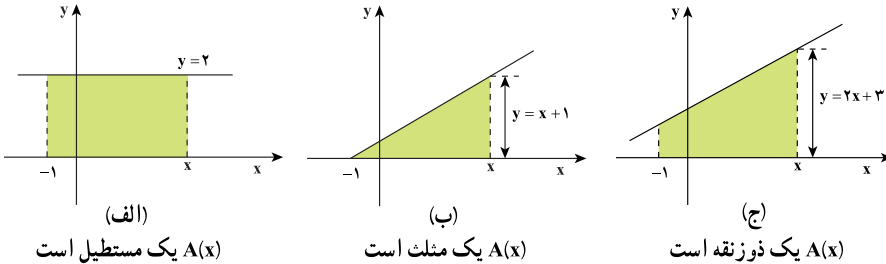


شکل ۴-۷- وقتی a ثابت باشد $A(x)$ به بستگی خواهد داشت.

برای هر یک از توابع f ، مساحت $A(x)$ محصور به نمودار f و بازه $[-1, x]$ را به دست آورید. سپس مشتق تابع A یعنی $A'(x)$ را محاسبه کرده و با تابع f مقایسه کنید.

(الف) $f(x) = 2$ (ب) $f(x) = x + 1$ (ج) $f(x) = 2x + 3$

برای راهنمایی نمودار تابع f و بازه $[-1, x]$ در هر مورد در شکل زیر نشان داده شده است.



شکل ۴-۸

مسائل

با استفاده از افرازهای مناسب همانند مثال‌های ۱ و ۲ این درس مساحت نواحی را که در تمرین‌های ۷-۱ آمده‌اند محاسبه کنید:

- ۱- ناحیه تحت $y = 3x$ ، بالای $y = 0$ از $x = 0$ تا $x = 1$.
- ۲- ناحیه تحت $y = 2x + 1$ ، بالای $y = 0$ از $x = 0$ تا $x = 3$.
- ۳- ناحیه تحت $y = 2x - 1$ ، بالای $y = 0$ از $x = 1$ تا $x = 3$.
- ۴- ناحیه تحت $y = 3x + 4$ ، بالای $y = 0$ از $x = -1$ تا $x = 2$.
- ۵- ناحیه تحت $y = x^2$ ، بالای $y = 0$ از $x = 1$ تا $x = 3$.
- ۶- ناحیه تحت $y = x^2 + 1$ ، بالای $y = 0$ از $x = 0$ تا $x = a > 0$.
- ۷- ناحیه تحت $y = x^2 + 2x + 3$ ، بالای $y = 0$ از $x = -1$ تا $x = 2$.

در تمرین‌های ۱۱-۸ مساحت‌ها را محاسبه کنید. به خاطر داشته باشید که مساحت همواره عددی مثبت خواهد بود.

- ۸- ناحیه بالای $y = x^2 - 1$ زیر $y = 0$.

۹- ناحیه بالای $y = 1 - x$ ، زیر $y = 0$ از $x = 2$ تا $x = 4$.

۱۰- ناحیه بالای $y = x^2 - 2x$ ، زیر $y = 0$.

۱۱- ناحیه تحت $y = 4x - x^2 + 1$ بالای $y = 1$.

۱۲- مساحت ناحیه محدود به $y = x^2$ را که بالای محور x بوده و بین خطوط $x = 0$ و

$x = b > 0$ است به دست آورید (راهنمایی از فرمول $\sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ استفاده کنید).

۱۳- مساحت تحت منحنی به معادله $y = \frac{1}{x}$ را که بالای $y = 0$ و محدود به $x = a > 0$ و

$x = b > a$ است به دست آورید.

۳-۴- انتگرال معین

هدفمان در این بخش تعمیم آن چیزی است که در بخش قبلی برای محاسبه مساحت‌ها به کار بردیم. با استفاده از چنین تعمیمی مفهوم انتگرال معین تابعی مانند f را که بر بازه I تعریف شده است تعریف می‌کنیم. در بخش قبلی با استفاده از روش مستطیل‌ها و تشکیل دنباله $\{S_n\}$ و حدگیری به محاسبه مساحت پرداختیم. در این بخش برای محاسبه مساحت از دو راه وارد می‌شویم: از یک طریق مستطیل‌های کوچک را طوری انتخاب می‌کنیم که همگی زیر نمودار f واقع شوند و در طریق دیگر مستطیل‌های کوچک را طوری می‌گیریم که همگی بالای نمودار f قرار گیرند. این روش به ما این امکان را می‌دهد که با تقریبات نقصانی و همچنین تقریبات اضافی به مساحت تحت نمودار نگاه کنیم. در سرتاسر این بخش فرض می‌کنیم که تابع f کراندار باشد اما به این فرض که مقادیر f نامنفی باشند نیازی نخواهیم داشت. در واقع از ایده اولیه محاسبه مساحت عدول کرده و به تابع f بر بازه $[a, b]$ عددی وابسته خواهیم کرد که انتگرال معین f بر بازه $[a, b]$ نامیده خواهد شد. در این جا، گرچه هنوز شهود و نگرش هندسی کمک‌ساز خواهد بود اما استدلال و فرایند جبری نقش مهم‌تری را عهده‌دار خواهد بود؛ و این چاشنی تعمیم در ریاضیات است که به تجربه و جبر نقش اساسی‌تری می‌دهد تا با موارد مجردتر بهتر و مؤثرتر برخورد گردد.

فرض کنیم P افزای از بازه $[a, b]$ باشد. بنابراین مجموعه‌ای از اعداد $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ است که در آن $x_0 = a, x_n = b, x_{i-1} < x_i$. عدد n که نشانگر تعداد بازه‌های جزء $[x_{i-1}, x_i]$ است به افزای P بستگی دارد. درشت‌ترین افزای P

بازه $[a, b]$ افزای است که فقط شامل یک بازه جزء یعنی خود بازه $[a, b]$ است. در این

صورت عدد n برابر ۱ است. هرچه تعداد نقاط افراز بیشتر باشد، افراز ظریفتر خواهد بود و عدد n افزایش خواهد یافت. ضمناً یادآوری می‌کنیم که عدد Δx x_1, x_2, \dots, x_n نیز پیوسته است، پس

طول بازه جزء i ام می‌باشد. چون تابع f بر هر بازه جزء $[x_{i-1}, x_i]$ ماکسیمم و مینیمم (مطلق) خود را در این بازه اختیار می‌کند. یعنی نقاطی مانند L و U از $[x_{i-1}, x_i]$ است که برای هر $x_{i-1} \leq x \leq x_i$ و $f(L) \leq f(x) \leq f(u)$

هرگاه $f(x) \geq 0$ بر $[a, b]$ ، آنگاه $f(L)\Delta x$ و $f(u)\Delta x$ نشانگر مساحت مستطیل‌های با قاعده (عرض) $[x_{i-1}, x_i]$ بوده که نوک مستطیل اول زیر نمودار f و نوک مستطیل دوم بالای نمودار f قرار دارند (شکل ۴-۹). به عبارت دیگر هرگاه ناحیه با قاعده $[x_{i-1}, x_i]$ محدود به نمودار تابع f از A بنامیم، $f(L)\Delta x$ نمایشگر مساحت مستطیلی است که درون A محاط شده، در حالی که $f(u)\Delta x$ نمایشگر مساحت مستطیلی است که محیط بر A می‌باشد. به زبان جبری:

$$f(L)\Delta x \leq A \leq f(u)\Delta x \quad (۱)$$

هرگاه f مقادیر منفی نیز اختیار کند آنگاه $f(L)\Delta x$ و $f(u)\Delta x$ یا هر دوی آنها ممکن است منفی باشند، در چنین صورتی این عبارتها نمایشگر قرینه مساحت مستطیلی هستند که زیر محور x واقع است، در هر صورت که f همواره مقادیر نامنفی اختیار کند و یا مقادیر منفی نیز بگیرد نامساوی $f(L) \leq f(u)$ برقرار بوده و لذا همواره $f(L)\Delta x \leq f(u)\Delta x$ برقرار است.

مجموع‌های بالا و پایین: اکنون به تعریف مجموع‌های بالا و پایین می‌پردازیم. قبل از این، برای ساده‌تر کردن نمادهایمان همواره فرض می‌کنیم که افراز چنان باشد که طول همه بازه‌های جزء حاصله مساوی باشند، پس هرگاه افراز P شامل $n-1$ نقطه بوده و در نتیجه n بازه جزء پدید آورد طول هر بازه جزء برابر $\frac{b-a}{n}$ می‌باشد.

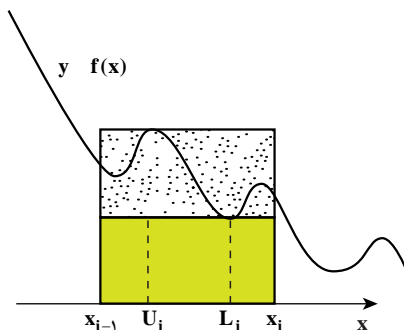
این‌گونه افرازاها را **افرازهای منظم** می‌نامیم. عدد طبیعی n مشخص کننده افرازی با $n-1$ نقطه با طول بازه‌ای جزء $\frac{b-a}{n}$ است. پس به‌جای آن‌که از افرازاها به عنوان متغیر یاد کنیم از عدد طبیعی n یاد می‌کنیم. در سرتاسر بحث f نمایشگر یک تابع است که در طول بحث ثابت فرض می‌شود.

الف) **مجموع پایین** که با نماد $L(f, p)$ و یا نماد ساده‌تر L_n نشان داده می‌شود چنین تعریف می‌گردد.

$$L_n = f(l_1)\Delta x_1 + f(l_2)\Delta x_2 + \dots + f(l_n)\Delta x_n$$

$$L_n = \sum_{i=1}^n f(l_i)\Delta x_i$$

یعنی



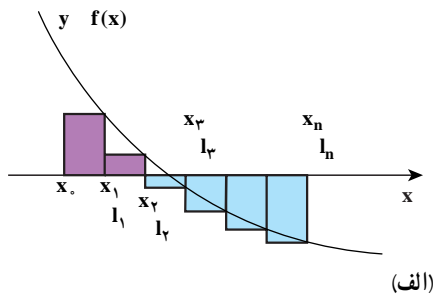
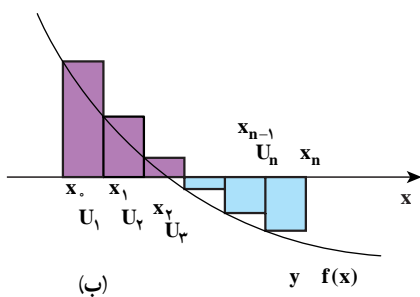
شکل ۴-۹- مستطیل کوچک‌تر سهم $f(l_i)\Delta x_i$ و مستطیل بزرگ‌تر سهم $f(u_i)\Delta x_i$ متناظر با بازه جزء $[x_{i-1}, x_i]$ را نشان می‌دهد.

(ب) مجموع بالا که با نماد $U(f, p)$ و یا نماد ساده شده U_n نشان داده می‌شود چنین تعریف

می‌گردد. $U_n = f(u_1)\Delta x_1 + f(u_2)\Delta x_2 + \dots + f(u_n)\Delta x_n$

$$U_n = \sum_{i=1}^n f(u_i)\Delta x_i$$

در شکل زیر یک حاصل جمع پایین (سمت راست) و یک حاصل جمع بالا (سمت چپ) برای یک تابع نزولی نشان داده شده است. مساحت مستطیل‌های رنگی به صورت مثبت و مساحت مستطیل‌های با رنگ آبی هاشور زده شده به صورت منفی در مقدار انتگرال لحاظ خواهند شد.



شکل ۴-۱۰- الف) یک مجموع پایین و ب) یک مجموع بالا را برای یک تابع نزولی نشان می‌دهند. ناحیه‌های رنگی سهم‌های مثبت و ناحیه‌های آبی هاشور زده سهم‌های منفی به مقدار مجموع‌ها می‌دهند.

۱- L حرف اول Lower به معنی پایین و U حرف اول Upper به معنی بالا می‌باشد.