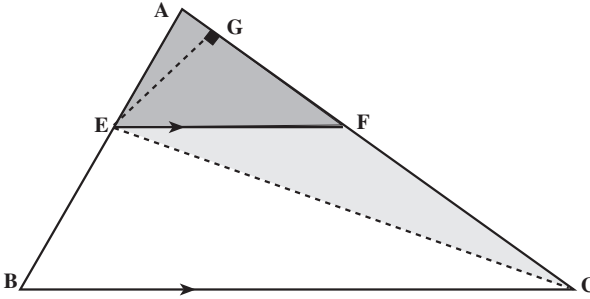


در نتیجه :

$$\frac{\text{مساحت مثلث AFE}}{\text{مساحت مثلث EFB}} = \frac{AE}{EB} \quad (۱)$$

مرحله ۲: از E به C وصل کرده، سپس پاره خط EG را بر AC عمود می کنیم، در این صورت



شکل ۵

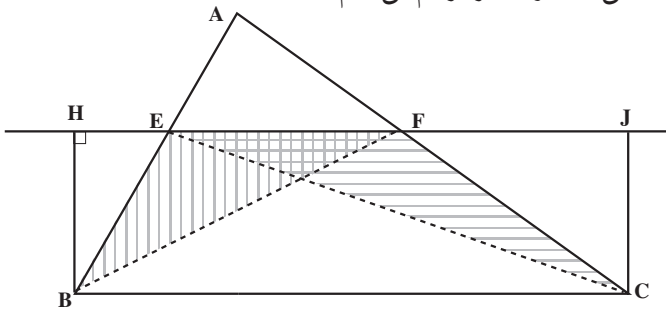
$$\frac{\text{مساحت مثلث AFE}}{\text{مساحت مثلث EFC}} = \frac{AF}{FC}$$

(۲)

دلیل درستی تساوی (۲) را توضیح دهید.

مرحله ۳: پاره خط EF را از دو طرف امتداد می دهیم. سپس ارتفاع های نظیر قاعده ی EF

در دو مثلث EFB و EFC ، یعنی BH و CJ را رسم می کنیم.



شکل ۶

چهارضلعی BHJC یک مستطیل است. (چرا؟) بنابراین

$$BH = CJ$$

از طرفی

$$\text{مساحت مثلث EFB} = \frac{1}{2} EF \times BH$$

$$\text{مساحت مثلث EFC} = \frac{1}{2} EF \times CJ$$

در نتیجه :

$$\text{مساحت مثلث EFC} = \text{مساحت مثلث EFB} \quad (3)$$

مرحله‌ی ۴: در رابطه‌ی (۲) می‌توان در مخرج کسر سمت چپ با استفاده از رابطه‌ی (۳) مساحت مثلث EFB را قرار داد. یعنی :

$$\frac{\text{مساحت مثلث AFE}}{\text{مساحت مثلث EFB}} = \frac{AF}{FC} \quad (4)$$

مقایسه‌ی (۴) و (۱) نشان می‌دهد که سمت چپ تساوی‌ها با هم برابرند. در نتیجه :

$$\frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC} \quad (5)$$

و به این ترتیب قضیه‌ی تالس ثابت می‌شود.

تمرین: در شکل ۲، اگر $DB = 30\text{m}$ ، $DE = 20\text{m}$ و $DM = 100\text{m}$ باشد، با استفاده از قضیه‌ی تالس، طول BA را پیدا کنید.

نتیجه‌ی ۱: چون از تناسب $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ تناسب $\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$ به دست می‌آید، پس از تناسب (۵) نتیجه می‌شود.

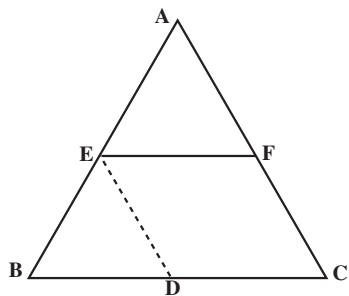
$$\frac{AE}{AE + EB} = \frac{AF}{AF + FC}$$

یعنی :

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} \quad (6)$$

نتیجه‌ی ۲: در مثلث ABC، پاره خط EF موازی BC است. اگر از نقطه‌ی E، پاره خط ED موازی AC رسم کنیم، با دو بار استفاده از قضیه‌ی تالس در مثلث ABC، نتیجه‌ی مهم زیر به دست می‌آید.

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC} \quad (7)$$

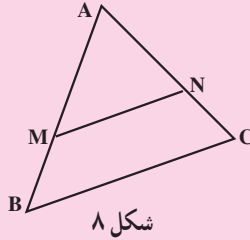


شکل ۲

تمرین: رابطه‌ی (۷) را ثابت کنید.

راهنمایی: چهارضلعی EDCF متوازی الاضلاع است، در نتیجه $EF = DC$.

نتیجه‌ی ۳: (عکس قضیه تالس) اگر در مثلث ABC (شکل ۸) نقطه‌های M و N طوری روی ضلع‌های AB و AC انتخاب شوند که $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$ ، آنگاه می‌توان نتیجه گرفت که پاره خط MN موازی ضلع BC است.

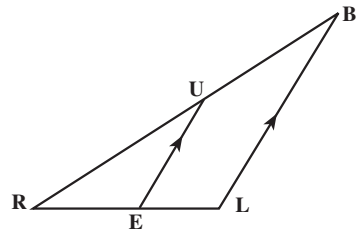
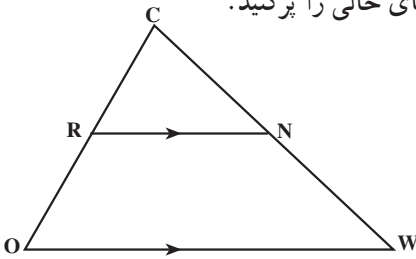


شکل ۸

تمرین: برای اثبات نتیجه‌ی ۳ از نقطه‌ی B خطی به موازات MN رسم کنید تا AC را در D قطع کند. سپس با استفاده از قضیه‌ی تالس نشان دهید D و C بر هم منطبقند.

مسائل

۱. با توجه به شکل‌ها، در هر کدام از موارد زیر جای خالی را پر کنید.



در مثلث COW، پاره خط RN با پاره خط OW موازی است:

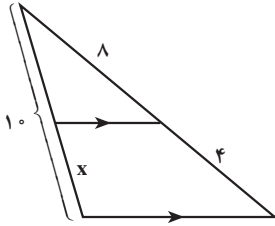
$$\frac{NW}{CW} = \square \text{ (ب)}$$

$$\frac{OR}{RC} = \square \text{ (الف)}$$

در مثلث RBL، پاره خط EU با پاره خط LB موازی است:

$$\frac{RU}{RB} = \square \text{ (ت)}$$

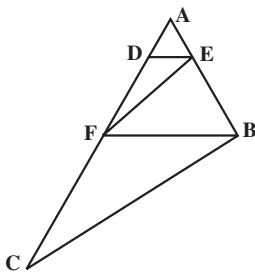
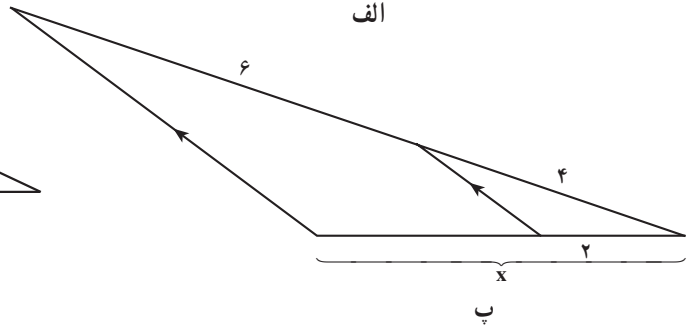
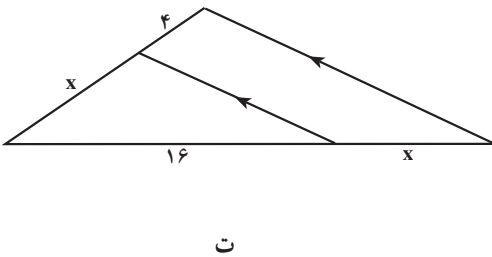
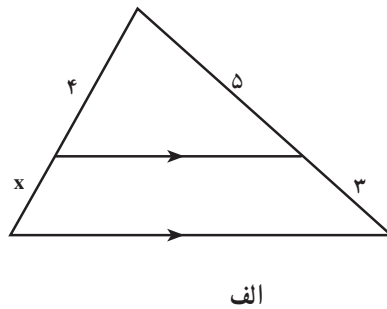
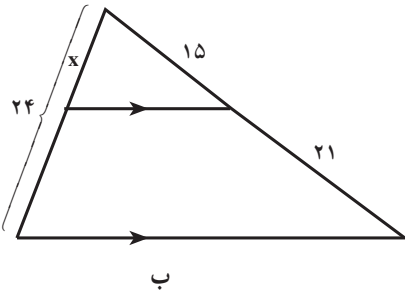
$$\frac{EL}{RE} = \square \text{ (پ)}$$



۲. دو دانش‌آموز تصمیم گرفتند به کمک قضیه‌ی تالس طول x را در شکل روبه‌رو به دست آورند.

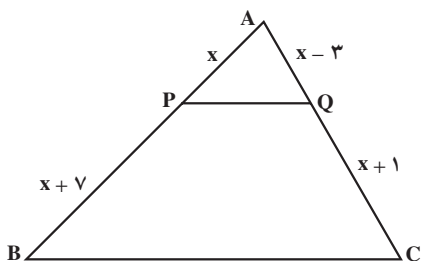
دانش‌آموز اول تناسب $\frac{x}{10} = \frac{4}{8}$ و دانش‌آموز دوم تناسب $\frac{x}{10-x} = \frac{4}{8}$ را نوشت. کدامیک

از این دو تناسب صحیح است؟ به نظر شما تناسب درستی که x را به دست می‌دهد کدام است؟
 ۳. در هر یک از شکل‌های زیر طول مجهول x را محاسبه کنید:

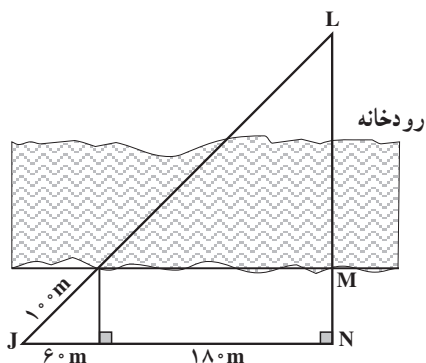


۴. در مثلث ABC ، در شکل روبه‌رو، DE با FB موازی است و EF با BC با دو بار استفاده از قضیه‌ی تالس ثابت کنید

$$\frac{AD}{DF} = \frac{AF}{FC}$$



۵. در شکل روبه‌رو PQ با BC موازی است. به کمک قضیه‌ی تالس طول x را حساب کنید.



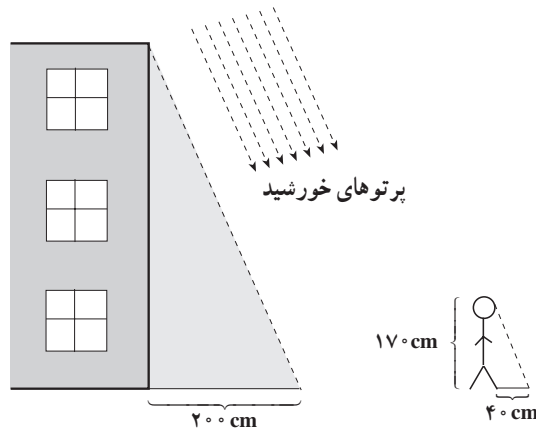
۶. دهکده‌ای در یک سوی رودخانه و دکل‌های سراسری انتقال نیرو در سوی دیگر رودخانه واقع است. با توجه به فاصله‌های داده شده در شکل، طول سیم لازم برای برق‌رسانی به دهکده یعنی JL را محاسبه کنید.

۳-۳- مثلث‌های متشابه

معلم درس هندسه‌ی آرش تصمیم گرفت به دانش‌آموزی که بتواند فقط به کمک یک خط‌کش ارتفاع ساختمان مدرسه را اندازه‌گیری کند، جایزه بدهد. آرش اندیشید که چگونه باید این کار را انجام دهد؟ ارتفاع ساختمان مدرسه خیلی بلندتر از خط‌کش او بود. او از خود پرسید آیا می‌توان راه راحت‌تری برای محاسبه‌ی ارتفاع ساختمان بدون اندازه‌گیری مستقیم آن پیدا کرد؟ ظهر در راه منزل،

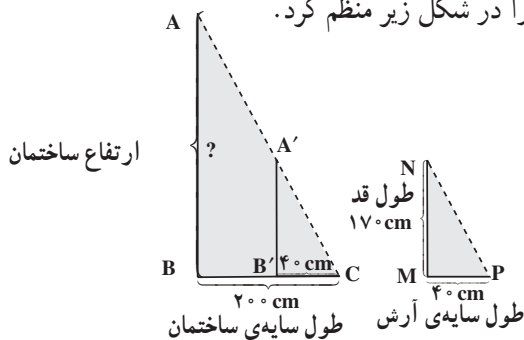


در حالی که به زمین خیره شده بود ناگهان متوجه این نکته جالب شد که طول سایه در ظهر خیلی کوتاه است و اندازه گیری آن با خط کش امکان پذیر می باشد! آرش فوراً به مدرسه بازگشت و طول سایه ی ساختمان مدرسه که بر زمین عمود بود و طول سایه ی خود را در حالت ایستاده به وسیله ی خط کش اندازه گرفت. او سپس قامت و سایه ی خود همچنین ساختمان و سایه ی آن را ضلع های دو مثلث قائم الزاویه در نظر گرفت.



شکل ۹

آیا این اطلاعات برای تعیین اندازه ی ارتفاع ساختمان مدرسه کافی بود؟ آرش اطلاعات خود را در شکل زیر منظم کرد.



شکل ۱۰

آنگاه $B'C$ را روی ضلع BC به اندازه ی MP جدا کرد و $A'B'$ را نیز بر BC عمود نمود. چون دو خط $A'B'$ و AB بر BC عمودند، پس با هم موازی هستند. بنابراین، با استفاده از نتیجه ی ۲

۱- شعاع های تابش با هم موازیند.

قضیه ی تالس

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C} = \frac{AC}{A'C} \quad (۱)$$

آرش همچنین از همنهستی دو مثلث $A'B'C$ و NMP (به حالت ضرز) تساوی $A'B' = NM$ را به دست آورد و در (۱) جایگزین کرد:

$$\frac{AB}{NM} = \frac{BC}{MP} \quad (۲)$$

$$\frac{AB}{۱۷۰} = \frac{۲۰۰}{۴۰} \quad \text{یا}$$

در نتیجه:

$$AB = \frac{۱۷۰ \times ۲۰۰}{۴۰}$$

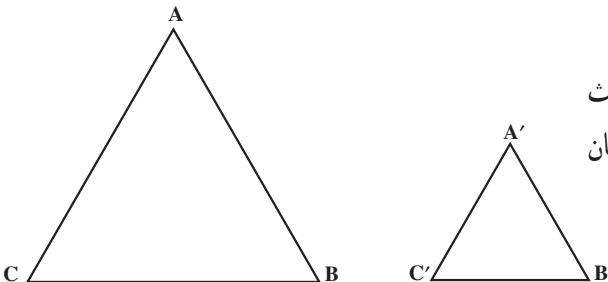
$$AB = ۸۵ \text{ cm} = \text{ارتفاع ساختمان}$$

در شکل ۱۰، زاویه ی C در دو مثلث ABC و $A'B'C$ مشترک است و زاویه های B و B' هر دو قائمه و برابرند. پس زاویه های A و A' نیز مساوی اند. همچنین دو مثلث $A'B'C$ و NMP همنهست هستند، در نتیجه زاویه های نظیر دو مثلث ABC و NMP نیز با هم مساوی اند. از طرف دیگر، چون $MN = A'B'$ ، $MP = B'C$ و $NP = A'C$ ، رابطه ی (۱) را می توان به صورت

$$\frac{AB}{MN} = \frac{BC}{MP} = \frac{AC}{NP}$$

نوشت، یعنی ضلع های نظیر در دو مثلث متناسبند. در این حالت، دو مثلث را متشابه می نامند.

دو مثلث را متشابه گویند، اگر زاویه های نظیر در آنها برابر و ضلع های نظیر متناسب باشد.



مثال ۵: در شکل ۱۱ دو مثلث متساوی الاضلاع ABC و $A'B'C'$ نشان داده شده اند.

چون هر زاویه مثلث متساوی الاضلاع 60° است، بنابراین زاویه‌های این دو مثلث با هم برابرند. از طرف دیگر، چون طول ضلع‌های هر مثلث متساوی الاضلاع نیز مساوی هستند، هر سه نسبت $\frac{AB}{A'B'}$ ، $\frac{AC}{A'C'}$ و $\frac{BC}{B'C'}$ با هم برابر خواهند بود زیرا دارای صورت‌های مساوی و مخرج‌های مساوی هستند. پس دو مثلث متساوی الاضلاع به دلیل تناسب ضلع‌های نظیر و تساوی سه زاویه، طبق تعریف با هم متشابه هستند.

هر دو مثلث متساوی الاضلاع، متشابه هستند.

۳-۴- حالت‌های تشابه دو مثلث

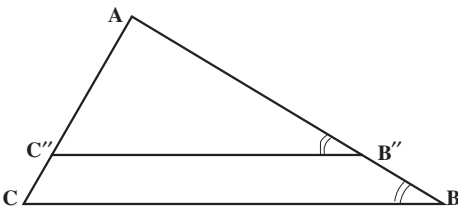
دو مثلث در سه حالت با هم متشابه‌اند.

۳-۴-۱- تشابه دو مثلث در حالت تساوی دو زاویه

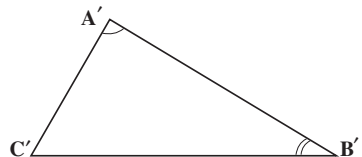
آرش فقط با استفاده از تساوی دو زاویه‌ی \hat{P} و \hat{C} ، تشابه دو مثلث قائم‌الزاویه ABC و NMP را نتیجه گرفت، پس اگر یک زاویه‌ی حاده از یک مثلث قائم‌الزاویه با یک زاویه حاده از مثلث قائم‌الزاویه دیگر برابر باشد، آن دو مثلث با هم متشابه‌اند. چون زاویه‌های قائمه در این دو مثلث نیز با هم برابرند، پس دو زاویه از یک مثلث قائم‌الزاویه با دو زاویه از مثلث قائم‌الزاویه دیگر برابرند. این مطلب نه فقط برای دو مثلث قائم‌الزاویه بلکه برای هر دو مثلثی درست است، یعنی:

اگر دو زاویه از یک مثلث، با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشند، آن دو مثلث متشابه‌اند.

برای نشان دادن درستی این حالت، شکل ۱۲ را در نظر می‌گیریم. در این شکل، زاویه‌های A و A' با هم و زاویه‌های B و B' نیز با هم برابرند.



شکل ۱۲



نقطه‌ی B' را روی ضلع AB طوری انتخاب می‌کنیم که $AB' = A'B'$ و از آن پاره‌خطی موازی BC رسم می‌کنیم تا AC را در C' قطع کند. دو مثلث $A'B'C'$ و $AB'C'$ به حالت (زضز) همنهشت هستند (چرا؟) بنابراین $AC' = A'C'$ و $B'C' = B'C'$.

چون پاره‌خط $B'C'$ موازی ضلع BC است، در مثلث ABC بنابر قضیه‌ی تالس داریم:

$$\frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'} = \frac{BC}{B'C'}$$

همچنین، $AB' = A'B'$ ، $AC' = A'C'$ و $B'C' = B'C'$ پس

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$$

یعنی ضلع‌های دو مثلث متناسب هستند. از طرف دیگر، زاویه‌های سوم دو مثلث ABC و

$A'B'C'$ با هم برابرند، زیرا $\hat{A} = \hat{A}'$ ، $\hat{B} = \hat{B}'$ و چون $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$ و $\hat{A}' + \hat{B}' + \hat{C}' = 180^\circ$

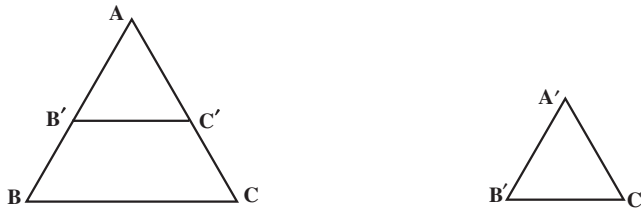
پس $\hat{C} = \hat{C}'$. در نتیجه طبق تعریف تشابه، دو مثلث ABC و $A'B'C'$ متشابه‌اند.

۳-۴-۲- تشابه دو مثلث در حالت متناسب بودن دو ضلع و تساوی زاویه‌ی بین

آنها: در دو مثلث ABC و $A'B'C'$ (شکل ۱۳)

$$\hat{A} = \hat{A}'$$

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} \quad (1)$$



شکل ۱۳

برای نشان دادن تشابه دو مثلث در این حالت، باید تساوی دو زاویه‌ی دیگر و متناسب بودن ضلع سوم آن‌ها را نتیجه بگیریم. برای این کار، نقطه‌ی C' را روی ضلع AC طوری انتخاب می‌کنیم که $AC' = A'C'$. از C' خطی موازی ضلع BC رسم می‌کنیم تا AB را در نقطه‌ی B' قطع کند (شکل ۱۳). بنابر قضیه‌ی تالس در مثلث ABC

۱- B' را «ب زَنُود» بخوانید.

$$\frac{AC}{AC''} = \frac{AB}{AB''} = \frac{BC}{B''C''} \quad (۲)$$

مقدار مساوی AC'' یعنی $A'C'$ را در (۲) جایگزین می‌کنیم:

$$\frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{AB''} \quad (۳)$$

از (۱) و (۳) نتیجه می‌گیریم که

$$AB'' = A'B' \quad (۴)$$

بنابراین، دو مثلث $A'B'C'$ و $AB''C''$ به حالت (ض ز ض) هم‌نهشت هستند، پس سایر

اجزای نظیر آنها نیز با هم برابرند، یعنی:

$$B''C'' = B'C' , \hat{B}' = \hat{B}'' , \hat{C}' = \hat{C}'' \quad (۵)$$

از طرفی چون پاره‌خط $B''C''$ با BC موازی است، پس:

$$\hat{C} = \hat{C}'' , \hat{B} = \hat{B}'' \quad (۶)$$

از (۵) و (۶) نتیجه می‌شود که $\hat{B} = \hat{B}'$ و $\hat{C} = \hat{C}'$ ، یعنی سه زاویه‌ی دو مثلث ABC و

$A'B'C'$ نظیر به نظیر با هم مساویند.

با در نظر گرفتن $AC'' = A'C'$ ، $AB'' = A'B'$ و $B''C'' = B'C'$ ، رابطه‌ی (۲) را دوباره

می‌نویسیم:

$$\frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} \quad (۷)$$

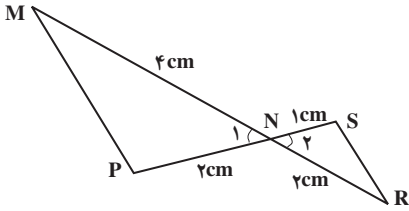
رابطه‌ی (۷) متناسب بودن ضلع‌های نظیر دو مثلث ABC و $A'B'C'$ را نشان می‌دهد، پس

این دو مثلث متشابه‌اند.

اگر یک زاویه از یک مثلث با یک زاویه از مثلث دیگر برابر و ضلع‌های نظیر این زاویه‌ها متناسب باشند، آنگاه آن دو مثلث متشابه‌اند.

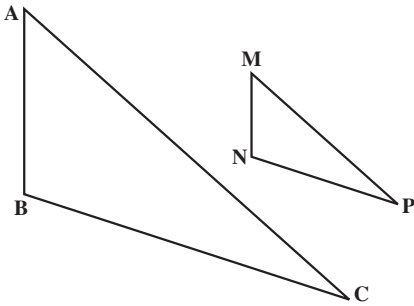
مثال ۶: در دو مثلث NPM و NSR

$$\frac{MN}{NR} = \frac{NP}{NS} = 2$$



شکل ۱۴

و چون زاویه‌های N_1 و N_2 متقابل به‌رأس هستند، در نتیجه $\hat{N}_1 = \hat{N}_2$. بنابراین، دو مثلث NSR و NPM در حالت متناسب بودن دو ضلع و تساوی زاویه‌ی بین آن‌ها، متشابه‌اند.



شکل ۱۵

۳-۴-۳ تشابه دو مثلث در حالت

متناسب بودن سه ضلع: تشابه دو مثلث را از متناسب بودن سه ضلع آن‌ها نیز می‌توان نتیجه گرفت. یعنی اگر در دو مثلث ABC و MNP

$$\frac{AB}{MN} = \frac{BC}{NP} = \frac{AC}{MP}$$

آنگاه می‌توان نتیجه گرفت که این دو مثلث متشابه‌اند.

هرگاه سه ضلع از مثلثی با سه ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند آن دو مثلث متشابه‌اند.

تمرین ۱: با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید، هرگاه سه ضلع از مثلثی، با سه ضلع از

مثلث دیگر متناسب باشند، آنگاه آن دو مثلث متشابه‌اند (شکل ۱۵).

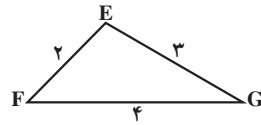
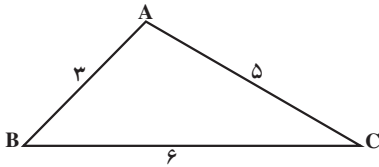
راهنمایی: به اندازه‌ی MN روی AB جدا کرده آن را B' بنامید و به اندازه‌ی MP روی AC

جدا کنید و آن را C' بنامید. سپس $B'C'$ را رسم کرده، با استفاده از عکس قضیه‌ی تالس نتیجه را به‌دست آورید.

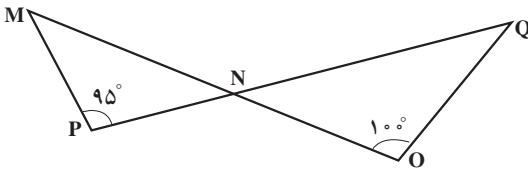
تمرین ۲: نشان دهید در هر مثلث قائم الزاویه ارتفاع وارد بر وتر، میانگین هندسی بین دو قطعه‌ی ایجاد شده روی وتر است.

مسائل

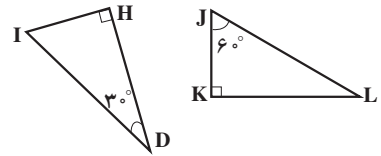
۱. در کدامیک از موارد زیر دو مثلث متشابه‌اند؟



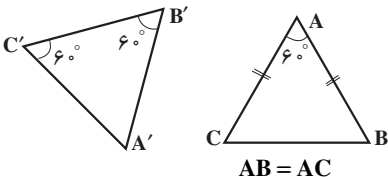
(الف)



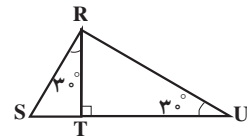
(ب)



(ب)

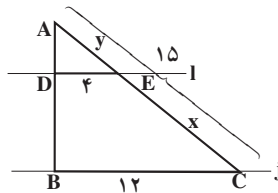


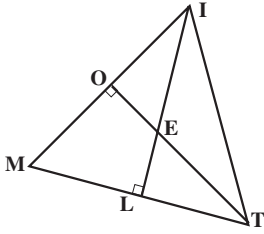
(ث)



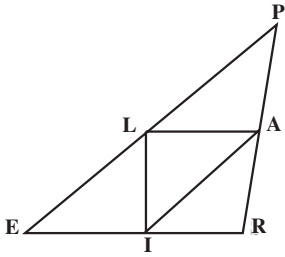
(ت)

۲. در شکل زیر، خط l با خط z موازی است. طول‌های x و y را بیابید.





۳. در شکل روبه‌رو، ارتفاع‌های مثلث MIT هستند. چرا دو مثلث IOE و ELT متشابه هستند؟



۴. در شکل روبه‌رو، نقاط A، L و I به ترتیب نقاط وسط ضلع‌های PR، PE و ER هستند. چرا دو مثلث ALI و PRE متشابه‌اند؟ دلیل خود را توضیح دهید.

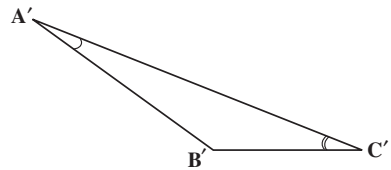
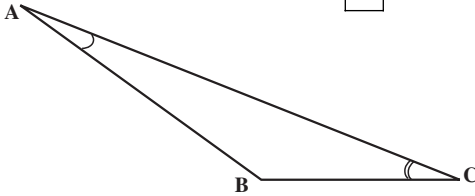
۵. اگر دو مثلث ABC و A'B'C' متشابه باشند، در هریک از عبارات‌های زیر، جای خالی را پر کنید:

ب) $\hat{B} = \square$ ؛

الف) $\frac{CB}{C'B'} = \frac{AC}{\square}$ ؛

ت) $\hat{C} = \square$.

پ) $\frac{A'C'}{AC} = \frac{B'A'}{\square}$ ؛

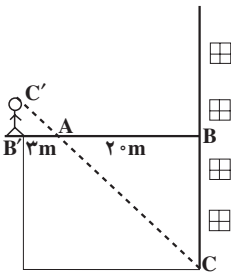


۶. دو قسمت مختلف یک بیمارستان به وسیله‌ی

یک پل هوایی به هم مرتبط شده‌اند. محسن برای پیدا کردن ارتفاع این پل مانند شکل در یک انتهای آن ایستاد و شعاع دید خود را بر رأس زاویه بین سطح زمین و ساختمان قرار داد.

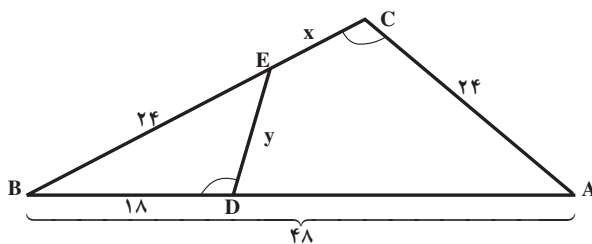
الف) چرا دو مثلث ABC و A'B'C'

متشابه‌اند؟

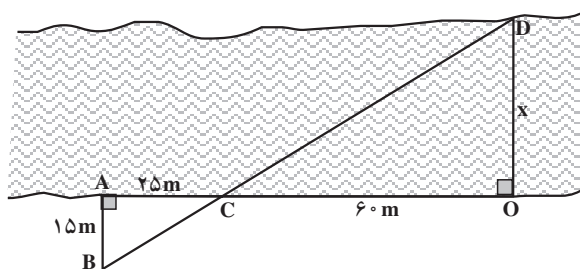


ب) با توجه به اندازه‌های مشخص شده در شکل و طول قد محسن که $\frac{1}{8}$ متر می‌باشد، ارتفاع پل یعنی اندازه‌ی BC را به دست آورید.

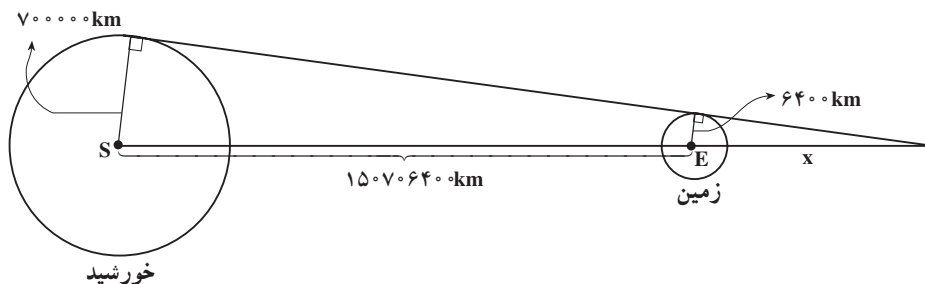
۷. در شکل زیر، $\hat{C} = \hat{BDE}$. طول x و y را پیدا کنید.



۸. شکل زیر توسط یک نقشه بردار برای محاسبه‌ی عرض رودخانه رسم شده است. به کمک اندازه‌های مشخص شده در شکل، عرض رودخانه را حساب کنید.



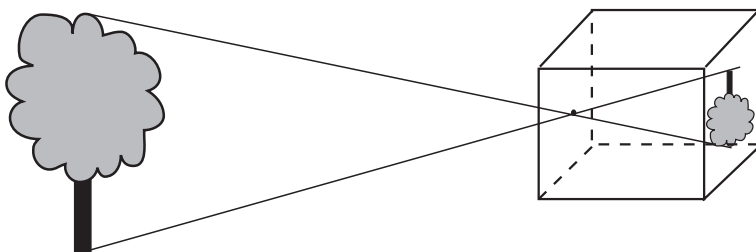
۹. در شکل زیر، شعاع‌های تقریبی زمین و خورشید و فاصله‌ی تقریبی مرکز زمین از مرکز خورشید داده شده است. به کمک یک ماشین حساب، طول تقریبی سایه‌ی زمین (x) را حساب کنید.



۱- اندازه‌های AB و AB' تقریبی هستند.

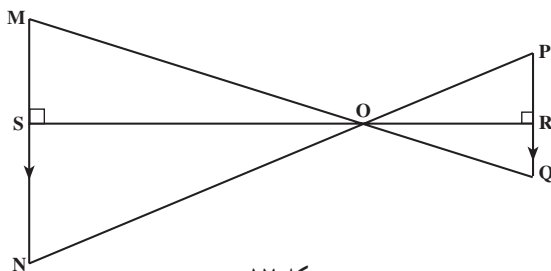
۳-۵- پاره‌خط‌های متناسب در دو مثلث متشابه

با ایجاد سوراخی در مرکز دیواره‌ی یک جعبه‌ی مکعب‌شکل و قراردادن یک کاغذ مات در درون جعبه درست روبه‌روی سوراخ، می‌توان آن‌را به یک دوربین عکاسی ساده به نام جعبه‌ی تاریک تبدیل نمود^۱.



شکل ۱۶

همان‌طور که در شکل ۱۶ می‌بینید، تصویری که از یک شیء در جعبه‌ی تاریک بر روی صفحه‌ی مات ایجاد می‌شود وارونه است. پرتوهای نور که از شیء می‌تابند و از سوراخ جعبه عبور می‌نمایند، دو مثلث ایجاد می‌کنند که در شکل ۱۷ نشان داده شده است. طول تصویری که در جعبه‌ی تاریک ایجاد می‌گردد با فاصله‌ی شیء از سوراخ متناسب است. این فاصله، ارتفاع OS از مثلث OMN است.



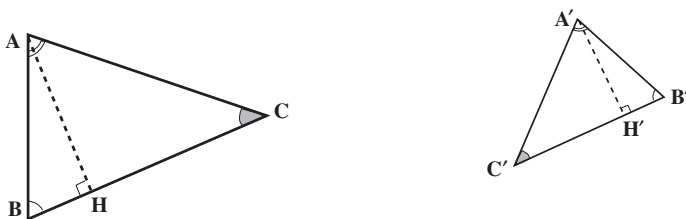
شکل ۱۷

فاصله‌ی سوراخ تا صفحه‌ی مات نیز ارتفاع OR از مثلث OPQ است. اگر دو ارتفاع OS و OR و نیز طول تصویر را بدانیم، آیا می‌توانیم طول شیء را به دست آوریم؟

۱- برای آشنایی بیشتر با طرز کار جعبه‌ی تاریک به کتاب آزمایشگاه فیزیک ۱ مراجعه نمایید.

فعالیت ۲-۳

در دو مثلث متشابه ABC و $A'B'C'$ ، $\hat{A} = \hat{A}'$ ، $\hat{B} = \hat{B}'$ و $\hat{C} = \hat{C}'$. پاره‌خط‌های AH و $A'H'$ به ترتیب ارتفاع‌های نظیر ضلع‌های BC و $B'C'$ هستند.



شکل ۱۸

۱. نسبت تشابه ضلع‌های متناظر دو مثلث ABC و $A'B'C'$ را بنویسید.
۲. چرا دو مثلث AHC و $A'H'C'$ متشابه هستند؟
۳. نسبت تشابه ضلع‌های متناظر دو مثلث AHC و $A'H'C'$ را بنویسید.
۴. از مقایسه‌ی ۱ و ۳ نتیجه می‌گیریم:

در دو مثلث متشابه ABC و $A'B'C'$ ، نسبت ارتفاع‌های نظیر برابر با نسبت تشابه است، یعنی:

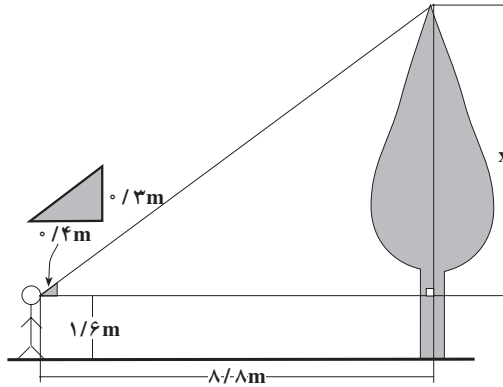
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AH}{A'H'}$$

۵. چرا دو مثلث MNO و QPO در شکل ۱۷ متشابه‌اند؟ دلیل آن را توضیح دهید.
۶. نتیجه‌ی به‌دست آمده در قسمت ۴ را برای دو مثلث متشابه MNO و QPO بنویسید (شکل ۱۷).

۷. اگر OS یعنی فاصله‌ی درخت تا سوراخ جعبه ۲۲ متر، OR فاصله‌ی تصویر درخت تا سوراخ $\frac{1}{2}$ متر و PQ طول تصویر درخت $\frac{1}{10}$ متر باشد، طول درخت را پیدا کنید.

مثال ۷: مریم برای پیدا کردن ارتفاع درخت مقابل خانه‌ی خودشان، یک تکه مقوا به شکل

مثلث قائم الزاویه با اندازه‌ی اضلاع زاویه‌ی قائمه‌ی 3° و 4° متر ساخت. اگر او در فاصله‌ی $8/8$ متر از درخت بایستد می‌تواند، با نگاه کردن در امتداد وتر مثلث، نوک درخت را ببیند. فاصله‌ی چشم او از زمین $1/6$ متر است. مریم برای به‌دست آوردن ارتفاع تقریبی درخت به این صورت عمل کرد:



حل: دو مثلث قائم الزاویه در یک زاویه‌ی حادّه با هم مشترک هستند، پس با هم متشابه‌اند. در نتیجه ضلع‌های نظیر آن‌ها با هم متناسب‌اند. در نتیجه:

$$\frac{8/8}{0/4} = \frac{x}{0/3}$$

و

$$x = \frac{0/3 \times 8/8}{0/4}$$

$$x = 6/6 \text{ m}$$

اما چون فاصله‌ی چشم مریم از زمین $1/6$ متر است، پس

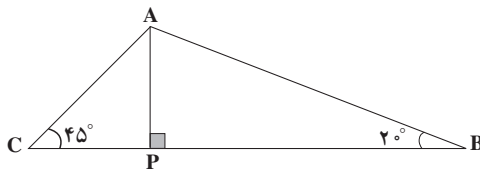
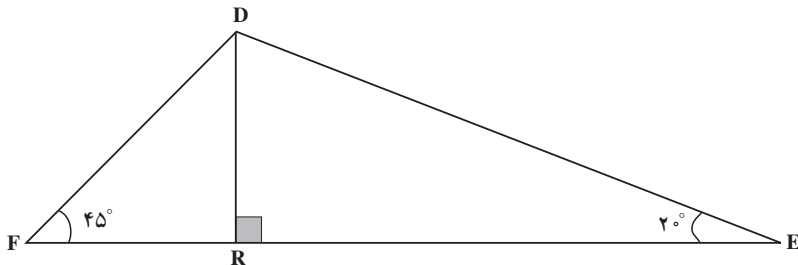
$$\text{ارتفاع درخت} = 6/6 + 1/6$$

$$\text{ارتفاع درخت} = 8/2 \text{ m}$$

با استفاده از روش بالا می‌توان ارتفاع بلندی‌های مختلف از جمله برج میدان آزادی تهران را اندازه گرفت.

مسائل

۱. در شکل زیر:



الف) اگر $DF = 6\sqrt{2}$ ، $DR = 6$ و $AP = 2$ ، طول AC را بیابید.

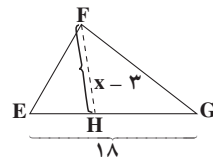
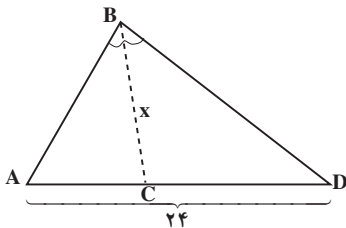
ب) اگر $BC = 15$ ، $EF = 21$ و $AP = 4$ ، طول DR چقدر است؟

۲. اگر دو مثلث متشابه باشند، ثابت کنید نسبت نیمسازهای نظیر در آنها برابر است با نسبت

تشابه دو مثلث.

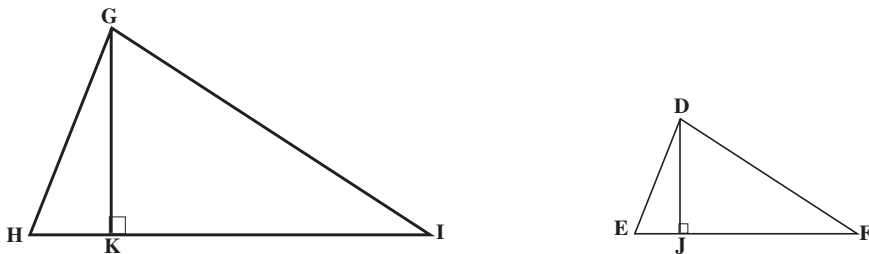
۳. در شکل زیر دو مثلث متشابه‌اند و BC نیمساز زاویه B و FH نیمساز زاویه F نظیر B

یعنی F است. با استفاده از مقادیر داده شده، x را حساب کنید.



۴. اگر دو مثلث متشابه باشند، ثابت کنید نسبت میانه‌های نظیر در آن‌ها برابر است با نسبت تشابه دو مثلث.

۵. در شکل زیر دو مثلث DEF و GHI متشابه‌اند و $GK = \frac{3}{4}DJ$. اگر $HI = 20$ طول EF را حساب کنید.

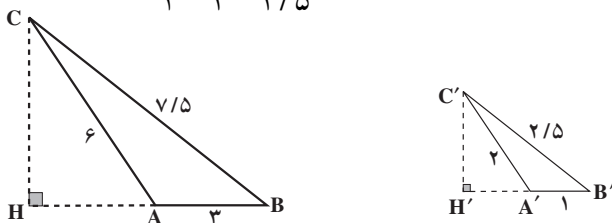


۳-۶- محیط و مساحت شکل‌های متشابه

نقشه‌ها تصویرهای مشابهی از وضعیت واقعی را نشان می‌دهند. در کنار هر نقشه معمولاً مقیاس آن نوشته می‌شود. برای مثال، اگر مقیاس نقشه‌ای $\frac{1}{50,000}$ باشد، یعنی طول فاصله‌ها روی نقشه، ۵۰,۰۰۰ بار کوچک‌تر از فاصله‌ی واقعی است. به کمک مقیاس داده شده می‌توان اطلاعاتی از قبیل مساحت یک استان کشور، محیط یا طول خط مرزی یک استان، یا فاصله‌ی بین دو شهر را اندازه‌گیری کرد. چون نقشه با شکل واقعی کشور متشابه و مقیاس داده شده برای نقشه همان نسبت تشابه است، دانستن نسبت محیط‌ها و مساحت‌های شکل‌های متشابه برحسب نسبت تشابه اهمیت پیدا می‌کند.

مثال ۸: در شکل ۱۹ دو مثلث ABC و A'B'C' متشابه هستند، زیرا ضلع‌های نظیر آن‌ها متناسبند. نسبت تشابه برابر است با

$$\frac{3}{1} = \frac{6}{2} = \frac{7/5}{2/5} = 3$$



شکل ۱۹

محیط مثلث ABC ، یعنی مجموع طول‌های ضلع‌های آن

$$3 + 6 + 7/5 = 16/5$$

و محیط مثلث A'B'C'

$$1 + 2 + 2/5 = 5/5$$

است. چون $3 = \frac{16/5}{5/5}$ ، بنابراین

$$\frac{\text{محیط مثلث ABC}}{\text{محیط مثلث A'B'C'}} = \frac{16/5}{5/5} = 3 = \text{نسبت تشابه}$$

پس در این دو مثلث، نسبت محیط مثلث بزرگ‌تر به محیط مثلث کوچک‌تر برابر با نسبت تشابه است.

مثال ۹: در شکل ۱۹، ارتفاع‌های CH از مثلث ABC و C'H' از مثلث A'B'C' را رسم می‌کنیم. طبق نتیجه‌ی فعالیت ۳ - ۲،

$$\frac{CH}{C'H'} = \text{نسبت تشابه} = 3 \quad (1)$$

از طرفی

$$\begin{aligned} \text{مساحت مثلث ABC} &= \frac{1}{2} CH \times AB \\ &= \frac{1}{2} CH \times 3 \\ &= \frac{3}{2} CH \end{aligned}$$

همچنین:

$$\begin{aligned} \text{مساحت مثلث A'B'C'} &= \frac{1}{2} C'H' \times A'B' \\ &= \frac{1}{2} C'H' \times 1 = \frac{1}{2} C'H' \end{aligned}$$

از تساوی (۱) نتیجه می‌گیریم که $CH = 3C'H'$. بنابراین

$$\text{مساحت مثلث ABC} = \frac{3}{2} CH = \frac{9}{2} C'H'$$

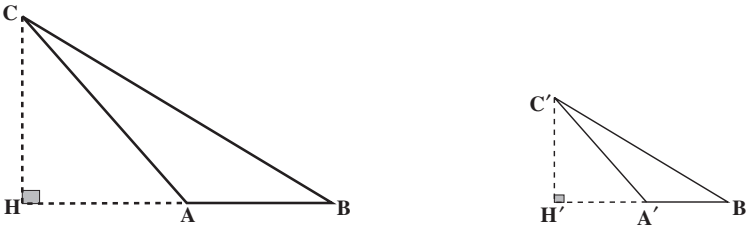
در نتیجه :

$$\frac{\text{مساحت مثلث } ABC}{\text{مساحت مثلث } A'B'C'} = \frac{\frac{9}{2}C'H'}{\frac{1}{2}C'H'}$$

$$= \frac{9}{\frac{1}{2}} = 9 = 3^2$$

پس در این دو مثلث، نسبت مساحت مثلث بزرگ تر به مساحت مثلث کوچک تر، توان دوم نسبت تشابه است. آیا دو نتیجه ی به دست آمده از این دو مثال، برای هر دو مثلث متشابه درست است؟ یعنی آیا اگر دو مثلث متشابه باشند، نسبت محیط های آن ها برابر نسبت تشابه و نسبت مساحت ها برابر توان دوم نسبت تشابه است؟

در شکل ۲۰، دو مثلث ABC و $A'B'C'$ متشابه اند. پس طبق تعریف تشابه



شکل ۲۰

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$$

محیط های این دو مثلث از جمع کردن طول های ضلع های آن ها به دست می آید. پس

$$\text{محیط مثلث } ABC = AB + AC + BC$$

و

$$\text{محیط مثلث } A'B'C' = A'B' + A'C' + B'C'$$

بنابر ویژگی ۴ تناسب ها،

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AB + AC + BC}{A'B' + A'C' + B'C'} = \frac{\text{محیط مثلث } ABC}{\text{محیط مثلث } A'B'C'}$$

یعنی :

در دو مثلث متشابه، نسبت محیط‌ها با نسبت تشابه برابر است.

در دو مثلث ABC و A'B'C' ،

$$\text{مساحت مثلث ABC} = \frac{1}{2} CH \times AB$$

$$\text{مساحت مثلث A'B'C'} = \frac{1}{2} C'H' \times A'B'$$

از طرفی

$$\frac{CH}{C'H'} = \frac{AB}{A'B'} = \text{نسبت تشابه}$$

در نتیجه :

$$\begin{aligned} \frac{\text{مساحت مثلث ABC}}{\text{مساحت مثلث A'B'C'}} &= \frac{\frac{1}{2} CH \times AB}{\frac{1}{2} C'H' \times A'B'} \\ &= \frac{CH \times AB}{C'H' \times A'B'} \\ &= \left(\frac{CH}{C'H'}\right) \left(\frac{AB}{A'B'}\right) \\ &= \left(\frac{AB}{A'B'}\right)^2 \end{aligned}$$

چون $\frac{AB}{A'B'}$ همان نسبت تشابه دو مثلث است. به این ترتیب،

در دو مثلث متشابه، نسبت مساحت‌ها برابر توان دوم نسبت تشابه است.

مثال ۱۰: نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه، ۱۶ است. نسبت محیط‌های آن‌ها را به دست

آورید.

حل: اگر نسبت تشابه دو مثلث k باشد،

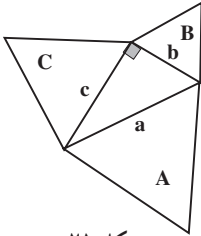
$$k^2 = \text{نسبت مساحت‌ها}$$

پس $k^2 = 16$ و در نتیجه $k = 4$. چون

نسبت تشابه = نسبت محیط‌ها

پس

$4 =$ نسبت محیط‌ها



شکل ۲۱

مثال ۱۱: مثلث قائم الزاویه‌ای به طول ضلع‌های a ، b و c را در نظر بگیرید. آنگاه سه مثلث متساوی الاضلاع بر روی این سه ضلع بسازید (شکل ۲۱).

چه رابطه‌ای بین مساحت‌های سه مثلث متساوی الاضلاع A ، B و C وجود دارد؟

حل: چون مساحت هر مثلث متساوی الاضلاع برابر $\frac{\sqrt{3}}{4}$ مجذور طول ضلع است، پس:

$$\text{مساحت } A = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

$$\text{مساحت } B = \frac{\sqrt{3}}{4} b^2$$

$$\text{مساحت } C = \frac{\sqrt{3}}{4} c^2$$

از طرف دیگر، در هر مثلث قائم الزاویه، رابطه‌ی فیثاغورس برقرار است، پس:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

دو طرف رابطه‌ی بالا را در $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} b^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} c^2$$

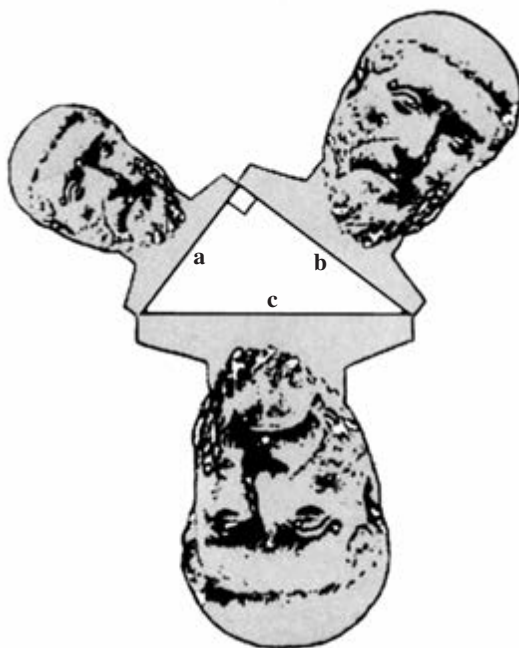
چون

$$\text{مساحت } A = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \text{ و } \text{مساحت } B = \frac{\sqrt{3}}{4} b^2 \text{ و } \text{مساحت } C = \frac{\sqrt{3}}{4} c^2$$

$$\text{مساحت } C + \text{مساحت } B = \text{مساحت } A$$

بنابراین اگر به جای مربع‌هایی که روی سه ضلع مثلث قائم‌الزاویه ساختیم، سه مثلث متساوی‌الاضلاع بر روی سه ضلع مثلث قائم‌الزاویه بسازیم، باز هم همان رابطه بین مساحت‌ها برقرار است، یعنی مجموع مساحت‌های مثلث‌های ساخته شده روی ضلع‌های زاویه‌ی قائمه برابر با مساحت مثلث ساخته شده روی وتر است.

آیا در مورد مساحت‌های هر سه شکل مشابهی که روی سه ضلع مثلث قائم‌الزاویه ساخته می‌شود، باز هم رابطه‌ی فوق برقرار است؟ به آن فکر کنید!



شکل ۲۲

مجله‌ی ریاضی

در دو مثلث متشابه، نسبت اجزای^۱ متناظر مانند ارتفاع‌ها، نیمسازها و میانه‌ها با نسبت تشابه برابر است و نسبت مساحت‌ها برابر توان دوم نسبت تشابه است. این مطلب در مورد هر دو شکل متشابه درست است. به طور کلی دو شکل را متشابه گویند هرگاه بین نقاط دو شکل، یک تناظر برقرار باشد و مثلثی که با هر سه نقطه از یک شکل ساخته می‌شود، با مثلثی که با سه نقطه‌ی متناظر از شکل دیگر ساخته می‌شود، متشابه باشد.^۲ برای مثال، می‌توان دو چند ضلعی متشابه را به مثلث‌های متشابه تقسیم کرد و نتایج مربوط به مثلث‌های متشابه را برای آن‌ها به کار برد. بنابراین، در دو شکل متشابه، نسبت تمام اجزای آن مقدار ثابتی است که برابر با نسبت تشابه است. در نتیجه، نسبت مساحت‌های دو شکل متشابه برابر با توان دوم نسبت تشابه است.

برای مثال، چون هر دو دایره با هم متشابه‌اند، می‌توان مساحت دایره O به شعاع r را به وسیله‌ی دایره‌ی O' به شعاع واحد محاسبه کرد:

$$\frac{\text{مساحت دایره‌ی } O}{\text{مساحت دایره‌ی } O'} = (\text{نسبت تشابه})^2 = \left(\frac{r}{1}\right)^2 = r^2$$

و چون مساحت دایره‌ی واحد برابر π است،

$$\pi r^2 = \text{مساحت دایره به شعاع } r$$

با همین استدلال، در شکل ۲۲ (تصویر فیثاغورس) چون هر سه شکل متشابه‌اند (دلیل آن را توضیح دهید) پس:

$$\frac{\text{مساحت شکل روی ضلع } b}{\text{مساحت شکل روی ضلع } c} = \left(\frac{b}{c}\right)^2 \quad (۱)$$

$$\frac{\text{مساحت شکل روی ضلع } a}{\text{مساحت شکل روی ضلع } c} = \left(\frac{a}{c}\right)^2 \quad (۲)$$

۱- اجزای مورد نظر شامل زاویه‌ها نمی‌باشد.

۲- در این تعریف، منظور از شکل، مجموعه نقاطی از صفحه است که بر یک خط قرار ندارند.

از طرفی، طبق قضیه‌ی فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه‌ی شکل ۲۲،

$$c^2 = a^2 + b^2$$

دو طرف رابطه‌ی فوق را بر c^2 تقسیم می‌کنیم؛

$$1 = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2}$$

یا

$$1 = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 \quad (3)$$

رابطه‌ی (۱) و (۲) را در (۳) جایگزین می‌کنیم:

$$1 = \frac{\text{مساحت شکل روی ضلع } a}{\text{مساحت شکل روی ضلع } c} + \frac{\text{مساحت شکل روی ضلع } b}{\text{مساحت شکل روی ضلع } c}$$

از رابطه‌ی فوق مخرج مشترک می‌گیریم:

$$1 = \frac{\text{مساحت شکل روی ضلع } a + \text{مساحت شکل روی ضلع } b}{\text{مساحت شکل روی ضلع } c}$$

طبق خاصیت تناسب، حاصل ضرب جمله‌های کناری برابر با حاصل ضرب جمله‌های میانی است. در نتیجه؛

$$\text{مساحت شکل روی ضلع } a + \text{مساحت شکل روی ضلع } b = \text{مساحت شکل روی ضلع } c$$

مسائل

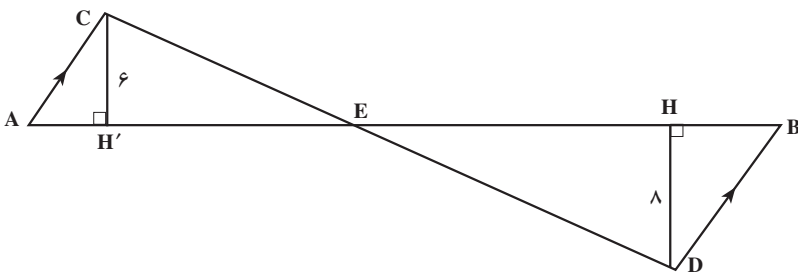
۱. اگر ضلع‌های کوچک‌تر دو مثلث متشابه ۵ و ۶ سانتی‌متر باشد، نسبت مساحت‌های آن‌ها را به‌دست آورید.
۲. مساحت‌های دو مثلث متشابه ۱۶ و ۲۵ سانتی‌متر مربع است. نسبت اضلاع متناظر را به دست آورید.

۳. در دو مثلث متشابه مساحت یکی ۱۱ برابر دیگری است. اگر طول یک ضلع از مثلث کوچکتر ۷ سانتی متر باشد، طول ضلع متناظر در مثلث بزرگتر را بیابید.

۴. نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه $\frac{81}{121}$ است. نسبت محیط‌ها را پیدا کنید.

۵. محیط‌های دو مثلث متشابه ۲۵ و ۴۵ سانتی متر است. اگر مساحت مثلث کوچکتر، 50° سانتی متر مربع باشد، مساحت مثلث بزرگتر را بیابید.

۶. با توجه به اندازه‌های روی شکل و $AB = 35$ ، به سؤالات زیر پاسخ دهید.

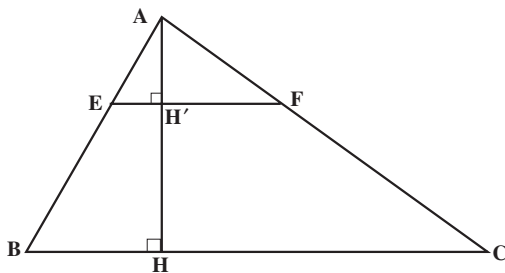


الف) نسبت مساحت‌های مثلث‌های ACE و BDE را بیابید.

ب) مساحت مثلث BDE را به دست آورید.

۷. در شکل زیر، $EF \parallel BC$. اگر نسبت مساحت‌های مثلث‌های AEF و ABC برابر $\frac{1}{9}$ باشد،

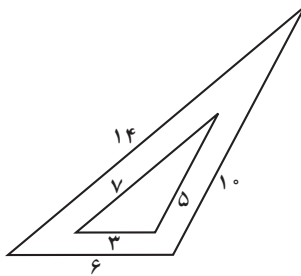
نسبت ارتفاع‌های متناظر را به دست آورید.



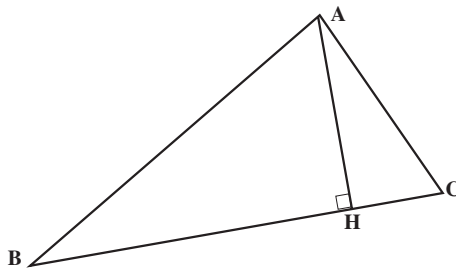
۸. مثلث‌های ABC و $A'B'C'$ متشابه‌اند. اگر طول ضلع‌های مثلث ABC، ۵، ۸ و ۱۱

سانتی متر و محیط مثلث $A'B'C'$ برابر 60° سانتی متر باشد، طول ضلع‌های مثلث $A'B'C'$ را به دست آورید.

۹. طول ضلع‌های مثلث ABC، ۷، ۹ و ۱۴ سانتی‌متر است. مثلث PQR با مثلث ABC متشابه است و طول بزرگ‌ترین ضلع آن ۲۱ سانتی‌متر است. محیط مثلث PQR را به دست آورید.
 ۱۰. در شکل زیر نسبت مساحت‌ها را بیابید.



۱۱. در شکل زیر زاویه‌ی BAC قائمه است و AH ارتفاع نظیر وتر می‌باشد مراحل زیر را در نظر بگیرید.



۱. مساحت مثلث ACH + مساحت مثلث ABH = مساحت مثلث ABC

$$۲. ۱ = \frac{\text{مساحت مثلث ABH}}{\text{مساحت مثلث ABC}} + \frac{\text{مساحت مثلث ACH}}{\text{مساحت مثلث ABC}}$$

۳. مثلث‌های ABC و ABH و ACH متشابه‌اند.

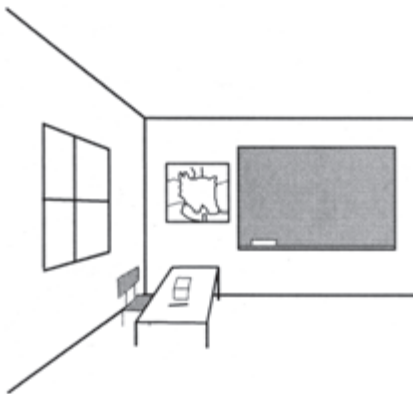
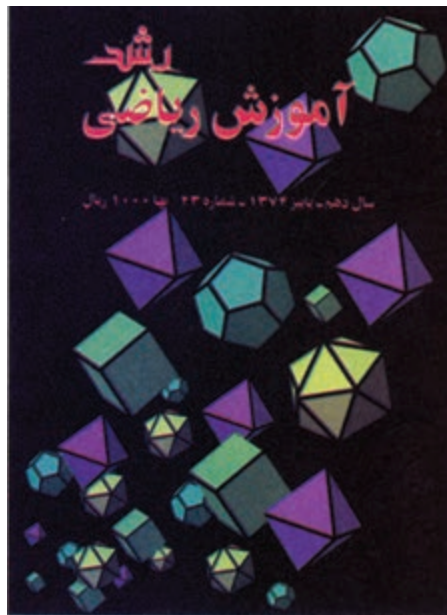
$$۴. ۱ = \left(\frac{AB}{BC}\right)^2 + \left(\frac{AC}{BC}\right)^2$$

$$۵. BC^2 = AB^2 + AC^2$$

الف) دلیل درستی هر مرحله را توضیح دهید.

ب) آیا پنج مرحله بالا اثبات دیگری برای قضیه فیثاغورس است؟ (چرا؟).

شکل‌های فضایی



ما در فضای سه بُعدی زندگی می‌کنیم و اشیای اطراف ما، سه بُعدی هستند. کلاس درس یا اتاق منزلی که در آن زندگی می‌کنیم نمودهایی از فضای سه بُعدی هستند. میز و صندلی درون کلاس هم اشیای سه بُعدی می‌باشند.

در این فصل می‌خواهیم درباره‌ی بعضی از شکل‌های فضایی صحبت کنیم و ویژگی‌های مقدماتی آن‌ها را بشناسیم.