فصل ۱

استدلال در هندسه

تصویر مجسمهٔ «متفکّر» اثر رُودَن، مجسمه‌ساز فرانسوی (۱۹۱۷ ــ ۱۸۴۰)

۱ــ۱ــ استدلال استقرایی

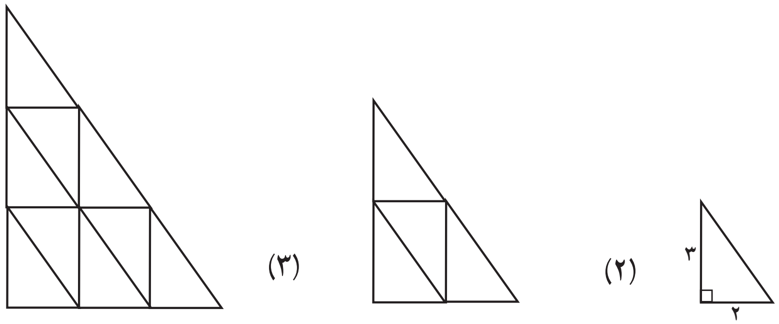
وقتی بیماری به پزشک مراجعه می‌کند، پزشک با استفاده از تجربهٔ خود، حدسهایی دربارهٔ نوع بیماری می‌زند. با این حال، او برای تشخیص قطعی بیماری، تنها به احساس تجربی خود اکتفا نمی‌کند و با انجام آزمایشهای متعدد و مشاهدهٔ علامتهای مختلف، در مورد نوع بیماری و روش درمان تصمیم نهایی را می‌گیرد. به این ترتیب، پزشک با مشاهده، جمع‌آوری اطلاعات از طریق آزمایش و اندازه‌گیری و دیدن نظمی در آنها، بیماری را تشخیص می‌دهد و راههای درمان را پیش می‌گیرد.

روش استدلال در مسائل پزشکی و علوم تجربی، استقرایی است. در ریاضی نیز از استدلال

استقرایی به عنوان یک استراتژی خوب حل مسأله استفاده می‌شود. در چنین روشی، نخست حدس می‌زنیم، سپس حدسهای خود را دقیق و دقیقتر می‌کنیم، آنگاه برای نتیجه‌گیری کلّی، با استفاده از استدلال استنتاجی، به‌طور قطع و یقین، دربارهٔ درستی آن حکم می‌کنیم.

فعالیت ۱ــ۱

مثلثهای شکلهای ۱ ، ۲ و ۳ با هم متشابه و مثلثهای کوچک همه با هم همنهشت هستند.



۱ــ تعداد مثلثهای کوچک هر شکل را تعیین و سپس جدول زیر را کامل کنید.

شماره شکل	۱	۲	۳
تعداد مثلثهای کوچک			

۲ــ رسم مثلثهای متشابه را تا پنجمین شکل ادامه دهید. در شکل پنجم چند مثلث کوچک جا می‌گیرد؟ جدول خود را تا شکل پنجم کامل کنید.

۳ــ در شکل دهم چند مثلث کوچک جا می‌گیرد؟ آیا رابطه‌ای بین شمارهٔ شکل و تعداد مثلثهای کوچک وجود دارد؟ توضیح دهید.

۴ــ در مورد شکل پانصدم چه حدسی می‌زنید؟

۵ ــ در حالت کلی حدس شما چیست؟

۶ــ آیا می‌توانید درستی حدس خود را در مورد شکل هزارم توجیه کنید؟

در این فعالیت برای بررسی رابطهٔ بین شمارهٔ شکل و تعداد مثلثهای کوچک در هر شکل، چندین مرحله را آزمایش و بررسی کردیم و سپس جدولی از اطلاعات به‌دست آمده را تنظیم نمودیم. آنگاه با دیدن نظمی در اطّلاعات به دست آمده، در مورد رابطهٔ بین شمارهٔ شکلها و تعداد مثلثهای

کوچک در هر شکل حدسی زدیم.

این فعالیت، نمونه‌ای از به کاربردن روش استدلال استقرایی برای رسیدن به یک حدس کلی است.

فعالیت ۱ــ۲

۱ــ مثلث دلخواهی را درنظر بگیرید :

الف) نیمسازهای زاویه‌های داخلی این مثلث را رسم کنید. این نیمسازها نسبت به هم چه وضعی دارند؟

ب) بند (الف) را در مورد چند مثلث دیگر تحقیق کنید.

پ) از دو بند بالا چه نتیجه‌ای را پیش‌بینی می‌کنید؟

۲ــ الف) عمودمنصف‌های ضلعهای مثلث دلخواهی را رسم کنید. عمودمنصف‌ها نسبت به هم چه وضعی دارند؟

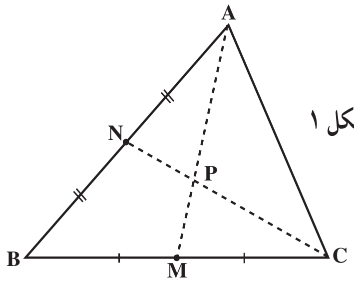
ب) بند (الف) را در مورد چند مثلث دیگر تحقیق کنید.

پ) با توجه به دو بند بالا، در حالت کلی چه حدسی می‌زنید؟ یعنی حدس شما برای وضعیّت عمودمنصف‌های ضلعهای هر مثلث دلخواه نسبت به هم چیست؟

نیمسازها، میانه‌ها و ارتفاعهای یک مثلث از ویژگیهای جالبی برخوردارند. فعالیت بعدی به شما فرصت می‌دهد تا یکی از این ویژگیها را در مورد میانه‌ها تحقیق کنید.

فعالیت ۱ــ۳

الف) مثلث دلخواه ABC را درنظر بگیرید و میانه‌های نظیر ضلعهای AB و BC را رسم کنید و نقطهٔ برخورد آنها را P بنامید (مانند شکل ۱).



شکل ۱

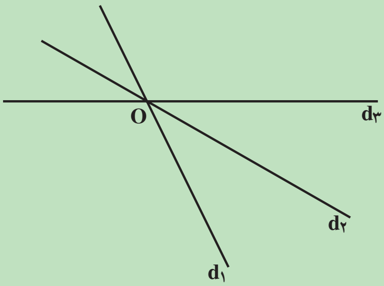
ب) با اندازه‌گیری طول پاره‌خطهای AP و PM، نسبتهای $\frac{AP}{AM}$ و $\frac{PM}{AM}$ را به‌دست آورید.

پ) با اندازه‌گیری طول پاره‌خطهای CP و PN، نسبتهای $\frac{CP}{CN}$ و $\frac{PN}{CN}$ را تعیین کنید.

ت) با توجّه به نتیجه‌های به‌دست آمده از بندهای (ب) و (پ) چه حدسی می‌زنید؟
ث) میانهٔ نظیر ضلع AC را رسم کنید. سه میانهٔ مثلث ABC چه وضعی نسبت به هم دارند؟
ج) چند مثلث دیگر رسم کنید و بندهای (الف) تا (ث) را در مورد آنها تحقیق نمایید.

خطهای همرس

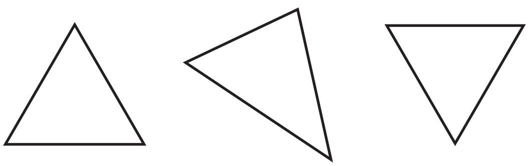
هرگاه چند خط فقط در یک نقطه همدیگر را قطع کنند، **همرَس** نامیده می‌شوند.



با انجام سه فعالیت بالا، نتیجه‌های جالبی به‌دست آوردید. امّا می‌دانید که این نتیجه‌ها قابل استناد نیستند زیرا فقط براساس استدلال استقرایی حاصل شده‌اند.

فعالیت ۱ــ۴

۱ــ سه ارتفاع هر یک از مثلثهای زیر را رسم کنید.



الف) نقطهٔ همرسی ارتفاعها نسبت به مثلثها چه وضعی دارند؟
ب) حدس شما دربارهٔ نقطهٔ همرسی ارتفاعهای هر مثلث دلخواه چیست؟
پ) حدس خود را در مورد مثلثی به ضلعهای ۴ ، ۵ و ۶ آزمایش کنید. آیا این آزمایش حدس قبلی شما را تأیید می‌کند؟
۲ــ مثلثی به ضلعهای ۶، ۸ و ۱۲، و سه ارتفاع آن را رسم کنید.
الف) نقطهٔ همرسی ارتفاعهای این مثلث در کجا قرار می‌گیرد؟
ب) آیا حدس شما دربارهٔ نقطهٔ همرسی ارتفاعهای مثلث تأیید شد؟

پ) با توجّه به بندهای الف و ب، حدس شما در مورد محل همرَسی ارتفاعها در هر مثلث دلخواه چیست؟

۳ــ یک مثلث قائم‌الزاویهٔ دلخواه رسم کنید. سپس ارتفاعهای آن‌را رسم نمایید.

الف) نقطهٔ همرَسی ارتفاعها کجا قرار دارد؟

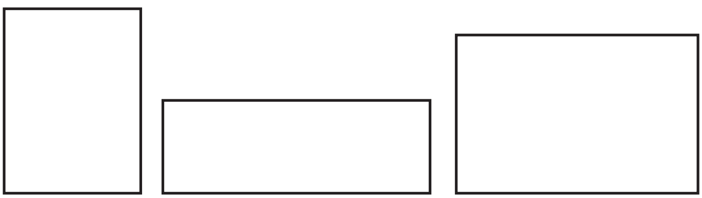
ب) حدس شما در مورد محل نقطهٔ همرسی ارتفاعها در هر مثلث تأیید یا رد شد؟ چرا؟ توضیح دهید.

تمرین ــ وسط ضلعهای یک چهارضلعی دلخواه را به‌طور متوالی به هم وصل کنید و با استفاده از استدلال استقرایی، ویژگیهای شکل حاصل را بررسی نمایید. اگر چهارضلعی اوّلیه مستطیل، مربع، لوزی یا متوازی‌الاضلاع باشد، حدس شما دربارهٔ ویژگی چهارضلعی پدید آمده از وصل کردن وسطهای ضلعهای آنها چیست؟ چرا؟

فعالیت ۱ــ ۵

اگر نیمسازهای زاویه‌های یک مربع را رسم کنیم، یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند (آزمایش کنید!) زیرا در مربع، قطرها نیمساز زاویه‌ها هستند. حال اگر به جای مربع یک مستطیل در نظر بگیریم، وضعیت نیمسازها چگونه خواهد شد؟ در این فعالیت، به بررسی این سؤال می‌پردازیم.

الف) در زیر سه مستطیل رسم شده است :



(۳) (۲) (۱)

نیمسازهای زاویه‌های داخلی هریک را رسم کرده، ویژگیهای شکل پدید آمده از برخورد نیمسازها را با اندازه‌گیری (با خط‌کش و نقاله) در جدولی یادداشت کنید.

ب) براساس این سه تجربه، در مورد شکل حاصل از برخورد نیمسازهای زاویه‌های داخلی مستطیل چه حدسی می‌زنید؟

پ) مستطیل دلخواه دیگری رسم کنید و درستی حدس خود را تحقیق نمایید.

آیا تا به حال به شباهت قسمتهای مختلف گل کلم و خود آن توجّه کرده‌اید؟ اگر از یک تکه گل‌کلم عکس بگیرید و آن‌را بزرگ کنید، تصویر حاصل تقریباً فرقی با خود گل کلم ندارد! یعنی هر تکه گل‌کلم شبیه کلّ آن است. تشابه که یکی از پرکاربردترین مفهومهای هندسی است، در پدیده‌های طبیعی بسیار مشاهده می‌شود. ویژگی این‌گونه پدیده‌ها خود ــ متشابه بودن آنها است.

اگر قسمتی از یک شکل با کل شکل متشابه باشد، آن شکل **خود ــ متشابه** نامیده می‌شود.

فعالیت ۱ــ۶

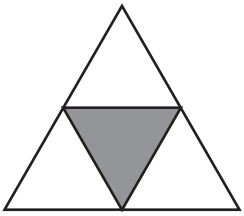
یک مثلث متساوی‌الاضلاع در نظر بگیرید.

دستور ترسیم:

الف) وسط ضلعها را همانطورکه نشان داده شده است به هم وصل کنید.

ب) سه مثلثی را که در گوشه‌ها ایجاد می‌شوند، نگه دارید و مثلث میانی را با سیاه کردن حذف کنید.

۱ــ این فرآیند را روی سه مثلث جدید تکرار کنید. به این ترتیب ۹ مثلث همنهشت تولید می‌شود.

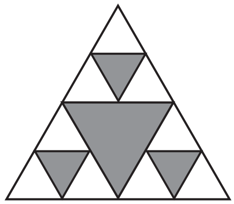


۲ــ فرآیند بالا را تا سه مرحلهٔ دیگر، تکرار کنید.

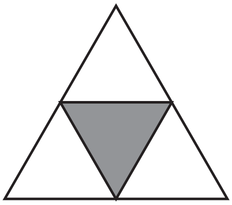
۳ــ شکلی را که از تکرار این فرآیند ایجاد می‌شود در ذهن خود مجسم کنید و آن‌را توصیف نمایید. چنین شکلی **مثلث سِرپینسکی** نامیده می‌شود.

فعالیت ۱ــ۷

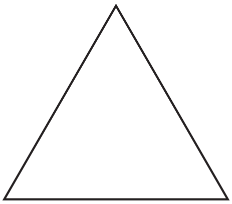
چهار مرحلهٔ اول رسم مثلث سرپینسکی در زیر نشان داده شده است. مرحله‌های بعدی، با تقسیم مثلثها به مثلثهای کوچکتر ادامه پیدا می‌کند.



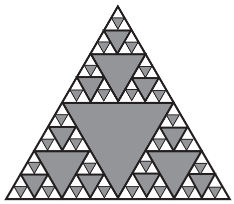
مرحله ۲



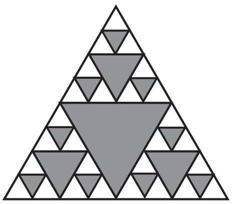
مرحله ۱



مرحله ۰



مرحله ۴



مرحله ۳

۱. تعداد مثلثهای جدیدی را که در هریک از مراحل ۱ تا ۴ ایجاد شده‌اند، بشمارید و در جدول زیر یادداشت کنید.

مرحله	۰	۱	۲	۳	۴	۵	...	n
تعداد	۱							

۲. در مورد تعداد مثلثها در مرحلهٔ ۵ چه حدسی می‌زنید؟ در هر مرحله، تعداد مثلثها چگونه تغییر می‌کند؟

۳. برای یافتن تعداد مثلثها در مرحلهٔ n، چه الگویی را پیشنهاد می‌کنید؟

۴. اگر n بزرگ و بزرگتر شود، تعداد مثلثها چگونه تغییر می‌کند؟

۵ . اگر مساحت مثلث در مرحلهٔ صفر برابر ۱ باشد، مساحت باقی‌مانده را در مرحله‌های ۱ تا ۴ به‌دست آورید.

مرحله	۰	۱	۲	۳	۴	۵	...	n
مساحت	۱							

۶. در مورد مساحت باقی‌مانده در مرحلهٔ ۵، چه حدسی می‌زنید؟

۷. در هر مرحله مساحت باقی‌مانده‌چگونه تغییر می‌کند؟

۸. برای یافتن مساحت باقی‌مانده در مرحلهٔ n، چه الگویی را پیشنهاد می‌کنید؟

۹. اگر n بزرگ و بزرگتر شود، مساحت مثلثهای باقی‌مانده چگونه تغییر می‌کند؟

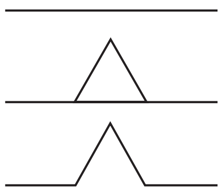
فعالیت ۱ــ۸

دستور ترسیم زیر را درنظر بگیرید :

الف) پاره‌خط را به سه قسمت مساوی تقسیم کنید ؛

ب) روی قسمت میانی، یک مثلث متساوی‌الاضلاع بنا کنید ؛

پ) پاره‌خط میانی را حذف کنید.



۱. یک مثلث متساوی‌الاضلاع رسم کنید.

۲. دستور ترسیم را بر روی هریک از ضلعهای مثلث اجرا نمایید. توجه کنید که در این حالت، هر پاره‌خط به چهار پاره‌خط کوچکتر با طولهای مساوی تبدیل می‌شود.

۳. دستور فوق را در دو مرحلهٔ دیگر، روی هریک از پاره‌خطهای ایجاد شده تکرار کنید.

۴. تعداد پاره‌خطهای ایجاد شده در مرحله‌های ۱ تا ۳ را بشمارید و در جدول زیر یادداشت نمایید.

مرحله	۰	۱	۲	۳	۴	...	n
تعداد پاره‌خطها	۳	۱۲					

۵. در مورد تعداد پاره‌خطها در مرحلهٔ ۴ چه حدسی می‌زنید؟ در هر مرحله تعداد پاره‌خطها چگونه تغییر می‌کند؟

۶. برای یافتن تعداد پاره‌خطها در مرحلهٔ n، چه الگویی را پیشنهاد می‌کنید؟

۷. اگر n بزرگ و بزرگتر شود، تعداد پاره‌خطها چگونه تغییر می‌کند؟

۸. اگر طول ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع در مرحلهٔ صفر برابر ۱ باشد، محیط شکل حاصل در مرحله‌های ۲،۱ و ۳ را به‌دست آورید و در جدول زیر یادداشت کنید.

مرحله	۰	۱	۲	۳	۴	...	n
محیط	۳						

۹. حدس شما در مورد محیط شکل در مرحلهٔ ۴ چیست؟ محیط شکل در هر مرحله با چه ضریبی تغییر می‌کند؟

۱۰. برای یافتن محیط شکل در مرحلهٔ n، چه الگویی را پیشنهاد می‌کنید؟

۱۱. اگر n بزرگ و بزرگتر شود، محیط شکل حاصل چگونه تغییر می‌کند؟

اگر دستور فوق روی ضلعهای مثلث تا بینهایت تکرار شود شکلی به نام **برف دانهٔ کُخ** ایجاد می‌شود. نکتهٔ شگفت آور در مورد این شکل آن است که با وجود سطح محدود، محیط آن از هر عدد بزرگی بزرگتر می‌شود، تا جایی که گفته می‌شود محیط این شکل به بینهایت میل می‌کند.

در فعالیت زیر، با استفاده از استراتژی **تغییردیدگاه**، به بررسی مثالی از استدلال استقرایی بپردازید.

فعالیت ۱ــ۹

هرگاه دو رأس غیرمجاور در یک چندضلعی محدّب به وسیلهٔ یک پاره‌خط به هم وصل شود، یک قطر از آن چندضلعی به‌دست می‌آید.

الف) چند ضلعیهای محدّب را تا هشت‌ضلعی رسم کنید.

ب) قطرهای هریک از این چندضلعیها را رسم کنید و جدول زیر را کامل نمایید.

جدول ۱

تعداد ضلعها	۳	۴	۵	۶	۷	۸
تعداد قطرها	۰	۲	۵			

پ) آیا رابطه‌ای بین تعداد ضلعها و تعداد قطرها وجود دارد؟

همانطور که تجربه کردید، به‌سادگی نمی‌توان رابطه‌ای بین داده‌های جدول ۱ پیدا کرد تا به شما در پیدا کردن الگویی برای پیش‌بینی رابطه‌ای بین تعداد ضلعها و تعداد قطرهای چندضلعیها در هر

مرحله، که هدف این فعالیت بود، کمک کند. بنابراین دیدگاه خود را تغییر دهید و به جمع‌آوری داده‌های متفاوت برای رسیدن به هدف این فعالیت و حل این مسأله بپردازید.

ت) جدول ۲ را تکمیل کنید :

جدول ۲

تعداد ضلعها	۳	۴	۵	۶	۷	۸
تعداد قطرهای رسم شده از یک رأس	۰	۱				

ث) در چندضلعیهای جدول ۲، آیا رابطه‌ای بین **تعداد ضلعها** و **تعداد قطرهای رسم شده از یک رأس** وجود دارد؟

ج) آیا می‌توانید رابطه‌ای بین تعداد ضلعها و تعداد قطرهایی که از تمام رأسهای چندضلعیهای صفحهٔ قبل رسم می‌شوند، حدس بزنید؟

چ) آیا رابطه‌ای بین تعداد ضلعها و تعداد قطرهای رسم شده از هر رأس یک **n ضلعی** وجود دارد؟

ح) اگر در قسمت (چ) رابطه‌ای پیدا کردید، آیا می‌توانید با استفاده از آن،رابطهٔ بین تعداد ضلعها و تعداد قطرهایی که از تمام رأسهای یک **nضلعی** می‌گذرند را حدس بزنید؟

خ) چگونه **استراتژی تغییر دیدگاه** به شما کمک کرد تا رابطه‌ای برای تعیین تعداد قطرهای چندضلعیها به‌دست آورید؟

مسأله‌ها

۱. با استفاده از استدلال استقرایی، رابطه‌ای که مجموع زاویه‌های داخلی یک **n** ضلعی محدّب را بیان می‌کند حدس بزنید و مراحل انجام کار را توضیح دهید.

۲. با استفاده از استدلال استقرایی، ویژگیهای شکل حاصل از برخورد نیمسازهای یک متوازی‌الاضلاع را پیش‌بینی کنید و چگونگی رسیدن به حدسهای خود را توضیح دهید.

۳. در مسأله قبل به جای متوازی‌الاضلاع یک ذوزنقه متساوی‌الساقین در نظر می‌گیریم. چه حدسی در مورد شکل حاصل از برخورد نیمسازهای زاویه‌های داخلی آن می‌زنید؟

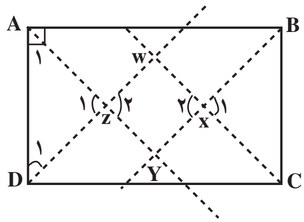
۴. یک نقطهٔ دلخواه روی قاعدهٔ یک مثلث متساوی الساقین در نظر بگیرید. از این نقطه به موازات دو ساق مثلث خطوطی رسم کنید. طول دو پاره‌خط را اندازه‌گیری کرده سپس مجموع آنها را به دست آورید. با جابه‌جا کردن این نقطه روی قاعده، چه تغییری در اندازهٔ این مجموع ایجاد

می‌شود؟ آیا رابطه‌ای بین این مجموع و اجزای مثلث وجود دارد؟

۱ــ۲ــ استدلال استنتاجی

در فعالیت ۱ــ۵ دربارهٔ **شکل حاصل از برخورد نیمسازهای زاویه‌های داخلی مستطیل** حدسهایی زدیم و با آزمایش دیدیم که آن شکل، یک مربع است. با این حال، نمی‌توانیم فقط با استناد به نتیجهٔ چند آزمایش یک نتیجه‌گیری کلّی کنیم و بگوییم که از **برخورد نیمسازهای هر مستطیل، یک مربع حاصل می‌شود.** اگر بخواهیم درستی این نتیجه را برای هر مستطیلی نشان دهیم، باید از روش استدلال استنتاجی استفاده کنیم. درستی حدسی را که در فعالیت ۱ــ۵ با کمک استدلال استقرایی زدیم، با روش استدلال استنتاجی نشان می‌دهیم :

مستطیل دلخواه ABCD را در نظر گرفته، نیمسازهای زاویه‌های داخلی آن‌را رسم می‌کنیم.



شکل ۲

گام ۱

ــ AY نیمساز زاویهٔ A است و زاویهٔ A قائمه است. پس :

$$\hat{A}_۱ = ۴۵^\circ$$

ــ DW نیمساز زاویهٔ D است و زاویهٔ D قائمه است. پس :

$$\hat{D}_۱ = ۴۵^\circ$$

بنابراین، مثلث AZD متساوی‌الساقین است و در زاویهٔ Z قائمه می‌باشد. در نتیجه

$$\hat{Z}_۱ = \hat{Z}_۲ = ۹۰ \;,\; AZ = DZ \qquad (۱)$$

گام ۲

با استدلالی مشابه گام ۱ نتیجه می‌شود مثلث BXC متساوی‌الساقین و قائم‌الزاویه است. پس :

$$\hat{X}_۱ = \hat{X}_۲ = ۹۰^\circ \;,\; BX = CX \qquad (۲)$$

با توجه به رابطه‌های (۱) و (۲) و مستطیل بودن ABCD، نتیجه می‌شود که دو مثلث ADZ و BXC همنهشت هستند. بنابراین ؛

$$DZ = CX$$

با استدلالی مشابه گام ۱، نتیجه می‌گیریم که مثلث CWD نیز متساوی‌الساقین و قائم‌الزاویه است. یعنی :

$$\hat{W} = ۹۰ \ , \ DW = CW \qquad (۳)$$

گام ۳

از رابطه‌های (۱)، (۲) و (۳) نتیجه می‌گیریم که چهارضلعی WXYZ مستطیل است (چرا؟) باتوجّه به رابطه‌های (۲) و (۳) می‌توان نوشت :

$$DW - DZ = CW - CX$$

یا

$$WZ = WX \qquad (۴)$$

رابطهٔ (۴) نشان می‌دهد که طول و عرض مستطیل WXYZ با هم برابر است، پس WXYZ یک مربع است. درنتیجه در حالت کلی نشان دادیم که :

شکل حاصل از برخورد نیمساز زاویه‌های داخلی هر مستطیل یک مربع است.

در اثبات بالا، از حکمهایی (حقایقی) استفاده کردیم که درستی آنها را قبلاً دیده بودیم. آن حکمها عبارتند از :

ــ مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث ۱۸۰ درجه است ؛

ــ مثلثی که دو زاویهٔ برابر دارد، متساوی‌الساقین است ؛

ــ زاویه‌های متقابل به رأس برابرند ؛

ــ اگر از طرفین یک تساوی، دومقدار یکسان کم کنیم، حاصل با هم برابر است.

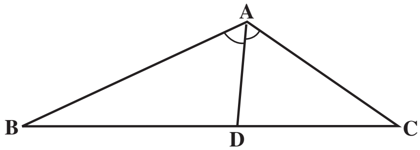
مثال بالا، نمونه‌ای از روش استدلال استنتاجی است.

تمرین ــ مشخّص کنید هریک از حکمهای بالا در چه قسمتهایی از اثبات بالا مورد استفاده قرار گرفته است؟

با رسم نیمساز هر زاویهٔ مثلث، ضلع مقابل به آن زاویه به دو پاره خط تقسیم می‌شود. طول دو پاره خط ایجاد شده رابطهٔ جالبی با طول دو ضلع آن زاویه دارند. این رابطه را در قضیه بعدی بیان کرده و با استفاده از استدلال استنتاجی، درستی آن را نشان می‌دهیم.

قضیه: در هر مثلث، نیمساز هر زاویهٔ داخلی، ضلع روبه‌رو به آن زاویه را به نسبت دو ضلع زاویه قطع می‌کند.

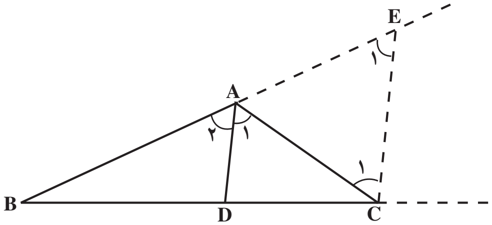
یعنی با توجّه به شکل اگر AD نیمساز زاویهٔ داخلی A باشد، باید ثابت کنیم :



شکل ۳

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$$

برهان: ضلعهای BA و BC را امتداد می‌دهیم و از رأس C خطی به موازات نیمساز زاویهٔ A (یعنی AD) رسم می‌کنیم تا امتداد BA را در E قطع کند.



شکل ۴

چون AD موازی CE است اگر AC را به عنوان خط مورب در نظر بگیریم آنگاه

$$\hat{A}_1 = \hat{C}_1 \qquad (۱)$$

و اگر BE را به عنوان خط مورب آنها درنظر بگیریم آنگاه

$$\hat{A}_2 = \hat{E}_1 \qquad (۲)$$

از طرفی طبق فرض مسأله، AD نیمساز است در نتیجه

$$\hat{A}_1 = \hat{A}_2 \qquad (۳)$$

حال از رابطه‌های (۱)، (۲) و (۳) می‌توان نتیجه گرفت

$$\hat{C}_1 = \hat{E}_1$$

پس مثلث AEC متساوی الساقین است و

$$AE = AC \qquad (۴)$$

در مثلث BEC، AD موازی EC است، پس طبق قضیهٔ تالس داریم

$$\frac{AB}{AE} = \frac{BD}{DC} \qquad (۵)$$

با توجه به رابطهٔ (۴) اگر در رابطهٔ (۵) به جای AE مساوی آن AC را جایگزین کنیم، خواهیم داشت

$$\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}$$

که حکم ثابت می‌شود.

ادّعایی که درستی آن‌را در قضیهٔ قبل نشان دادیم، محدود به مثلث خاصی نیست. زیرا یک مثلث را بدون هیچ شرطی رسم کردیم و نشان دادیم که **نیمساز هر زاویهٔ داخلی مثلث، ضلع روبه‌رو به آن زاویه را به نسبت دو ضلع آن زاویه تقسیم می‌کند.** نمادهایی را هم که برای نامگذاری امتداد ضلعها و رأسهای مثلث در شکل به کار بردیم، هیچ ویژگی خاصّی نداشتند و می‌توانستیم آنها را با هر نماد دیگری عوض کنیم و با روش استدلال استنتاجی، ادّعای فوق را ثابت نماییم.

تمرین: ثابت کنید نیمساز هر زاویهٔ خارجی مثلث،ضلع روبه‌رو به آن زاویه را به نسبت دو ضلع آن زاویه تقسیم می‌کند.

تا کنون، با استفاده از روش استدلال استنتاجی ثابت کردیم که :

ــ از تلاقی نیمسازهای هر مستطیل، یک مربع پدید می‌آید ؛

ــ هر زاویه خارجی مثلث برابر مجموع دو زاویه داخلی غیرمجاور آن است ؛

ــ نیمساز هر زاویهٔ داخلی مثلث ضلع روبه‌رو به آن زاویه را به نسبت دو ضلع آن زاویه تقسیم می‌کند.

این نتیجه‌های کلّی که همیشه درست هستند، نمونه‌هایی از **قضیه** می‌باشند.

به مثالهای بیشتری توجّه کنید :

۱ــ یکی از مهمترین قضیه‌های ریاضی قضیه فیثاغورس است :

در هر مثلث قائم‌الزاویه، مربع وتر برابر مجموع مربعهای دو ضلع دیگر است.

۲ــ اگر وتر و یک ضلع از یک مثلث قائم‌الزاویه با وتر و یک ضلع از مثلث قائم‌الزاویهٔ دیگری نظیر به نظیر برابر باشند، آنگاه آن دو مثلث همنهشت هستند[۱].

۳ــ برای هر زاویهٔ α، رابطهٔ زیر برقرار است :

$$\sin^{۲}\alpha+\cos^{۲}\alpha=۱$$

۴ــ برای هر دو عدد حقیقی مثبت x و y،

$$\frac{x+y}{۲}\geq\sqrt{xy}$$

۱ ــ ۲ ــ ۱ ــ مثال نقض: در فعالیت ۱ــ۴، پس از چند آزمایش، چنین به نظر آمد که همیشه نقطهٔ همرسی ارتفاعها در داخل مثلث قرار دارد. امّا وقتی که این حدس را با مثلثی به

۱ــ اثبات این قضیه در هندسه ۱ آمده است.

ضلعهای ۶، ۸ و ۱۲ آزمودید، مشاهده کردید که ارتفاعها بیرونِ مثلث یکدیگر را قطع می‌کنند. این مثلث خاص، مثال نقضی برای آن حدس کلی بود.

شاید با این مثال نقض، حدس خود را کامل‌تر نمودید و ادّعا کردید که نقطهٔ همرسی ارتفاعها یا داخل مثلث قرار می‌گیرد یا خارج آن. با این حال، ادامهٔ فعالیّت ۱ــ ۴ و بررسی نقطهٔ همرسی ارتفاعهای مثلث قائم‌الزاویه به شما نشان داد که حدس جدید نیز یک نتیجه‌گیری کلی نمی‌باشد زیرا با یک مثال، عمومیّت نتیجه‌گیری کلّی از بین رفت.

به مثالی که نشان دهد یک نتیجه‌گیری یا یک حدس کلی نادرست است **مثال نقض** گفته می‌شود.

توجّه: درستی یک نتیجه‌گیری کلّی به وسیلهٔ استدلال استنتاجی اثبات می‌گردد، یا نادرستی آن با یک مثال نقض نشان داده می‌شود.

مثال: حاصل جمع هر دو عدد گنگ همواره عددی گنگ است.

حل : برای رد این ادعای کلی، کافی است دو عدد گنگ را به‌صورت زیر انتخاب کنیم

$$x=\sqrt{۲}$$
$$y=-\sqrt{۲}$$

در این صورت،

$$x+y=\sqrt{۲}+(-\sqrt{۲})=۰$$

یعنی اگر چه موارد زیادی وجود دارد که در آنها، مجموع دو عدد گنگ، عددی گنگ است ولی با این حال، با مثال نقض بالا، نادرستی نتیجه‌گیری کلّی **مجموع دو عدد گنگ همواره عددی گنگ است** را نشان دادیم.

در هندسه، مثال نقض کاربردهای فراوانی دارد.

فعالیت ۱ــ ۱۰

برای رد حدسهای کلی زیر مثال نقض ارائه کنید.

الف) نقطه همرسی عمودمنصف‌های سه ضلع یک مثلث همواره داخل مثلث قرار می‌گیرد.

ب) نقطه همرسی عمودمنصف‌های سه ضلع یک مثلث یا داخل مثلث یا خارج آن واقع است.

پ) ارتفاعهای هر مثلث داخل مثلث واقع است.

ت) هر زاویهٔ خارجی یک چندضلعی، از هر زاویه داخلی آن بزرگتر است.

۱ ــ ۲ ــ ۲ ــ قضیه‌های شرطی: زبان فارسی سرشار از ضرب‌المثلهای شیرین و آموزنده است و هدف آنها، آگاه کردن مردم از پیامدهای کارهایشان است. ضرب‌المثلهای «درخت تو گر بار دانش بگیرد، به زیر آوری چرخ نیلوفری را»، «تا نبارد ابر، کِی خندد چمن» و «سحرخیز باش تا کامروا باشی» تأکید می‌کنند که **اگر** « گرفتن بارِ دانش»، «باریدن»، و «سحرخیزی» باشد، **آنگاه** «به زیر آوردن چرخ نیلوفری»، «خندیدن چمن»، و «کامروایی» میسّر خواهد شد.

در ریاضیات، بسیاری از قضیه‌ها به‌صورت جمله‌های شرطی هستند. به مثالهای زیر توجّه کنید :

الف) اگر عدد حقیقی x بزرگتر از ۵ باشد، آنگاه $۴x$ بزرگتر از ۲۰ است یا اگر $x > ۵$ آنگاه $۴x > ۲۰$

ب) اگر مثلثی متساوی‌الساقین باشد، آنگاه زاویه‌های روبه‌رو به ساقها با هم برابرند.

پ) اگر چهارضلعی مستطیل باشد، آنگاه از برخورد نیمسازهای زاویه‌های داخلی آن یک مربع به‌وجود می‌آید.

این گونه جمله‌های شرطی **قضیه‌های شرطی** نامیده می‌شوند.

در قضیه‌های شرطی، جملهٔ شرط یا جمله‌ای که بعد از «اگر» می‌آید، «فرض قضیه» و جملهٔ نتیجه که بعد از کلمه «آنگاه» می‌آید، «حکم قضیه» نامیده می‌شود. در مثالهای بالا، فرض و حکم از این قرارند :

الف) $x > ۵$ ، فرض قضیه و $۴x > ۲۰$ ، حکم قضیه است.

ب) **مثلث متساوی‌السّاقین است،** فرض قضیه و **زاویه‌های روبه‌رو به ساق‌ها برابرند،** حکم قضیه است.

پ) **چهارضلعی مستطیل است،** فرض قضیه و **مربع بودن شکل حاصل از برخورد نیمسازهای زاویه‌های داخلی،** حکم قضیه است.

دو کلمهٔ **اگر** و **آنگاه** نقش تعیین‌کننده‌ای در قضیه‌های شرطی دارند و در هر قضیهٔ شرطی، حکم از فرض نتیجه می‌شود. برای مثال، از فرض $x > ۵$ نتیجه می‌شود که $۴x > ۲۰$. این رابطه را می‌توان به زبان نمادین به‌صورت زیر نوشت :

$$x > ۵ \Rightarrow ۴x > ۲۰$$

این عبارت به دو صورت زیر خوانده می‌شود :

ــ $x > ۵$ نتیجه می‌دهد $۴x > ۲۰$

ــ اگر $x > ۵$ ، آنگاه $۴x > ۲۰$

بنابراین، علامت «$\Rightarrow$» به‌دو صورت **نتیجه می‌دهد** و **آنگاه** خوانده می‌شود. در حالت کلی، یک قضیه شرطی به‌صورت $p \Rightarrow q$ بیان می‌گردد که در آن p فرض قضیه و q حکم قضیه است. هر قضیهٔ کلی را می‌توان به صورت قضیه‌های شرطی بیان کرد. به مثال‌های زیر توجّه کنید :

۱ــ در هر مثلث قائم‌الزاویه، مربع وتر برابر مجموع مربعهای دو ضلع دیگر است.

این قضیه را می‌توان به‌صورت یک قضیه شرطی نوشت :

اگر مثلثی قائم‌الزاویه باشد، **آنگاه** مربع وتر برابر مجموع مربعهای دو ضلع دیگر آن مثلث است.

۲ــ مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث ۱۸۰° است.

این قضیه را می‌توان به‌صورت قضیهٔ شرطی زیر بیان کرد :

اگر شکلی مثلث باشد، آنگاه مجموع زاویه‌های داخلی آن ۱۸۰° است.

قضیه‌های شرطی در هندسه دارای نقش مهمّی هستند و اغلب برای سادگی بیان، قضیه شرطی، **قضیه** نامیده می‌شود.

هرگاه در یک عبارت شرطی، فرض برقرار باشد ولی حکم درست نباشد، این عبارت شرطی یک قضیه شرطی نخواهد بود. برای مثال عبارت شرطی زیر را در نظر بگیرید :

اگر $x > ۰$، آنگاه $x^۲ > x$.

اگر $x = \frac{۱}{۲}$ را در رابطهٔ بالا قرار دهیم، آنگاه $x^۲ = \frac{۱}{۴}$. در اینجا، فرض $x > ۰$ برقرار است ولی حکم $x^۲ > x$ یعنی $\frac{۱}{۴} > \frac{۱}{۲}$ نادرست است. بنابراین، این عبارت شرطی یک قضیه نیست.

۱ ــ ۲ ــ ۳ ــ عکس قضیه: در ریاضیات، بعضی از قضیه‌های شرطی مانند قضیهٔ فیثاغورس از قضیه‌های شرطی دیگر مهم‌تر و با ارزش‌تر هستند. در **قضیهٔ فیثاغورس**، **فرض** آن است که مثلث قائم‌الزاویه است و **حکم** آن است که مربع وتر برابر مجموع مربعهای دو ضلع دیگر مثلث است.

حالا به عبارت شرطی زیر توجّه کنید :

اگر در مثلثی مربع یک ضلع برابر مجموع مربعهای دو ضلع دیگر باشد، آنگاه آن مثلث قائم‌الزاویه است.

در این عبارت، فرض آن است که در مثلثی مربع یک ضلع برابر مجموع مربعهای دو ضلع دیگر است و حکم آن است که آن مثلث قائم‌الزاویه است.

مشاهده می‌شود که در این عبارتِ شرطی، فرض و حکم برعکس فرض و حکم در قضیه فیثاغورس است. دراین حالت می‌گوییم این عبارت شرطی، عکس قضیهٔ فیثاغورس است.

اگر جای فرض و حکم در یک قضیهٔ شرطی عوض شود، عبارت شرطی حاصل **عکس قضیهٔ شرطی** نامیده می‌شود.

در مثال قبل، عکس قضیهٔ فیثاغورس خود یک قضیهٔ شرطی است. آیا همیشه عکس یک قضیهٔ شرطی، یک قضیهٔ شرطی است؟ به آن فکر کنید!

فعالیت ۱ــ۱۱

۱ــ قضیه‌های شرطی زیر را در نظر بگیرید :

الف) مساحتهای هر دو مثلث همنهشت با هم برابرند.

ب) اگر در دو مثلث، طول ضلعها نظیر به نظیر با هم برابر باشند، آنگاه زاویه‌ها نظیر به نظیر با هم برابرند.

پ) اگر سه ضلع مثلث برابر باشند، آنگاه هر زاویهٔ آن 60° است.

ت) مثلثی که دو زاویه برابر دارد، دارای دو ضلع برابر است.

۲ــ عکس قضیه‌های شرطی بند (۱) را بنویسید.

۳ــ عکس کدامیک از قضیه‌های شرطی بند (۱) خود یک قضیه شرطی است و کدامیک از آنها قضیه شرطی نیست؟ چرا؟ دلیل آن را توضیح دهید.

اگر عکس یک قضیه شرطی خود یک قضیه شرطی باشد، آنگاه این دو قضیه شرطی را می‌توان به‌صورت یک قضیه بیان کرد. چنین قضیه‌ای، **قضیه دوشرطی** نامیده می‌شود.

چنانچه در قضیه فیثاغورس، فرض قضیه یعنی «مثلث قائم‌الزاویه است» را با p و حکم قضیه یعنی «مربع وتر برابر مجموع مربعهای دو ضلع دیگر است» را با q نمایش دهیم، آنگاه، با این نمادگذاری قضیهٔ فیثاغورس به‌صورت

$$p \Rightarrow q$$

و عکس قضیه فیثاغورس به‌صورت

$$q \Rightarrow p$$

نمایش داده می‌شود. چون قضیه فیثاغورس و عکس آن هر دو برقرار هستند، با استفاده از نمادگذاری بالا می‌نویسیم

$$p \Leftrightarrow q$$

و می‌گوییم **p هم‌ارز (معادل) q است** و می‌خوانیم

p اگر و تنها اگر q

یعنی :

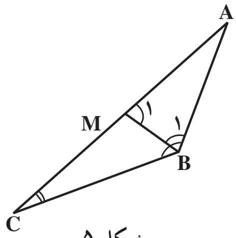
مثلث قائم‌الزاویه است اگر و تنها اگر مربع یک ضلع برابر مجموع مربعهای دو ضلع دیگر باشد.

بنابراین، برای اثبات قضیه دوشرطی $p \Leftrightarrow q$ ، بایستی قضیه‌های شرطی $p \Rightarrow q$ و $q \Rightarrow p$ را ثابت کنیم.

حال از طریق استدلال استنتاجی یک قضیهٔ شرطی را ثابت می‌کنیم.

قضیه: اگر در مثلثی دو ضلع نابرابر باشند، آنگاه زاویهٔ مقابل به ضلع بزرگتر، بزرگتر است از زاویهٔ مقابل به ضلع کوچکتر.

یعنی در مثلث ABC (شکل ۵)



شکل ۵

فرض: $AC > AB$ ، و **حکم:** $\hat{B} > \hat{C}$

برهان: چون طبق فرض، $\mathbf{AC > AB}$، بنابراین پاره‌خط AM را به اندازهٔ AB روی AC جدا می‌کنیم و از نقطهٔ M به B وصل می‌کنیم.

چون $AB = AM$ ، پس مثلث ABM متساوی‌الساقین است، درنتیجه ؛

$$\hat{B}_1 = \hat{M}_1 \qquad (۱)$$

از طرفی چون زاویهٔ M_1 یک زاویهٔ خارجی مثلث MBC است، درنتیجه از هریک از زاویه‌های داخلی غیرمجاورش بزرگتر خواهد بود. بنابراین ؛

$$\hat{M}_1 > \hat{C} \qquad (۲)$$

با توجه به دو رابطهٔ (۱) و (۲)

$$\hat{B}_1 > \hat{C} \qquad (۳)$$

از طرفی، نقطهٔ M بین دو نقطهٔ A و C واقع است، بنابراین BM نیم‌خطی داخل زاویهٔ B است و درنتیجه زاویهٔ B_1 جزیی از زاویهٔ B است، یعنی :

$$\hat{B} > \hat{B}_1 \qquad (۴)$$

از مقایسهٔ (۳) و (۴) نتیجه می‌شود :

$$\hat{B} > \hat{C}$$

با عوض کردن جای فرض و حکم در قضیهٔ شرطی، عکس قضیه را می‌توان بیان کرد.

اگر در مثلثی دو زاویه نابرابر باشند، ضلع روبه روی زاویهٔ بزرگتر، بزرگتر است از ضلع روبه‌روی زاویهٔ کوچکتر.

تمرین ــ از طریق استدلال استقرایی، پیش‌بینی کنید که آیا عکس قضیهٔ فوق برقرار است؟

مسأله‌ها

۱. با استفاده از استدلال استنتاجی، نتایج زیر را کامل کنید.

الف) در هر مثلث ارتفاعها همرسند. ABC یک مثلث قائم‌الزاویه است.

نتیجه : ارتفاعهای $\boxed{}$ همرسند.

ب) لازمهٔ اشتغال در قرن ۲۱ میلادی داشتن سواد ریاضی است. علی در سال ۱۳۷۰ خورشیدی به‌دنیا آمده است.

نتیجه : علی برای پیدا کردن شغل، باید $\boxed{}$.

پ) برای اینکه بتوانیم مسأله‌ای را حل کنیم ابتدا باید مسأله را بفهمیم. محمود می‌خواهد مسأله حل کند.

نتیجه : محمود باید $\boxed{}$.

۲. آیا نتایج زیر از عبارتهای داده شده حاصل می‌شوند؟ جواب خود را توضیح دهید.

الف) همهٔ دانش‌آموزان توانایی یادگرفتن ریاضی را دارند.

گلنار دانش‌آموز است.

نتیجه : گلنار می‌تواند ریاضی یاد بگیرد.

ب) بعضی از متوازی‌الاضلاعها مربع هستند.

چهارضلعی ABCD یک متوازی‌الاضلاع است.

نتیجه : ABCD یک مربع است.

۳. کدامیک از عبارتهای زیر درست و کدامیک نادرست است. در صورت نادرست بودن یک مثال نقض پیدا کنید.

الف) اگر دو زاویه مکمل یکدیگر باشند، آنگاه هر دو زاویه قائمه هستند.

ب) اگرسه نقطه‌روی یک خط باشند، آنگاه از این سه نقطه فقط یک صفحه می‌گذرد.

۴. قضیه‌های زیر را به‌صورت قضیه‌های شرطی بنویسید و سپس تعیین کنید عکس آنها قضیه شرطی است یا نه درصورتی که یک قضیه نباشد یک مثال نقض بیاورید.

الف) هر مستطیل یک متوازی‌الاضلاع است.

ب) هر دو مثلث همنهشت دارای مساحتهای برابر هستند.

پ) در دو مثلث متشابه، ضلعهای متناظر، متناسب هستند.

ت) در مثلث قائم‌الزاویه عمودمنصف‌های ضلعها در وسط وتر همرس می‌شوند.

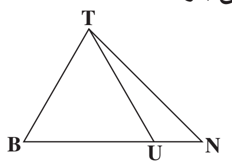
ث) هرکس در شیراز زندگی می‌کند، در استان فارس است.

۵. قضیهٔ تالس را به‌صورت قضیهٔ دوشرطی بنویسید.

۶. در شکل مقابل :

فرض کنیم $BT = BU$

ثابت کنید $B\hat{T}N > T\hat{U}B$



۷. درستی حدس به دست آمده از انجام فعالیت ۱ــ۱ را با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید.

۸. با استفاده از استدلال استنتاجی ثابت کنید مجموع فاصله‌های هر نقطه درون مثلث متساوی‌الاضلاع از سه ضلع آن مقداری ثابت است. سپس آن مقدار ثابت را به‌دست آورید.

۹. با استفاده از استدلال استقرایی پیش‌بینی کردید که از تقاطع نیمسازهای زاویه‌های داخلی یک متوازی‌الاضلاع، یک مستطیل پدید می‌آید. این حدس را با استفاده از استدلال استنتاجی ثابت کنید.

۱۰. با استفاده از استدلال استنتاجی ثابت کنید اگر از یک نقطهٔ اختیاری روی قاعده یک مثلث متساوی‌الساقین دو خط به موازات دو ساق رسم کنیم تا آنها را قطع کند، آنگاه مجموع طول پاره‌خطهای ایجاد شده برابر طول ساق مثلث خواهد بود.

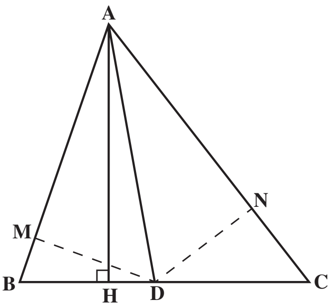
۱۱. از تقاطع نیمسازهای زاویه‌های داخلی یک مستطیل، یک مربع پدید می‌آید. رابطهٔ بین طول ضلع این مربع و اضلاع مستطیل را به‌دست آورید.

۱۲. مثلث متساوی‌الساقین ABC را در نظر بگیرید. نقطهٔ دلخواه P را روی قاعدهٔ BC اختیار کنید سپس مجموع فاصله‌های نقطهٔ P از دو ساق AB و AC را به‌دست آورید. با جابه‌جا کردن نقطهٔ P روی قاعده این مجموع چگونه تغییر می‌کند؟ درستی حدس خود را با استفاده از استدلال استنتاجی ثابت کنید.

۱۳. مسأله ۱۲ را در حالتی که نقطهٔ P روی امتداد BC قرار داشته باشد در نظر بگیرید و نشان دهید تفاضل فاصله‌های نقطهٔ P از دو ساق مقدار ثابتی خواهد بود.

۱۴. سه ضلع مثلثی ۸ ، ۱۲ و ۱۵ سانتی‌مترند، اندازهٔ پاره‌خطهایی که نیمساز درونی زاویهٔ بزرگتر مثلث بر ضلع مقابل آن پدید می‌آورد، را تعیین کنید.

۱۵. در مثلث ABC میانهٔ AM و نیمسازهای دو زاویه AMB و AMC را رسم کنید، این دو نیمساز اضلاع AB و AC را قطع می‌کنند، این نقاط را به ترتیب P و Q بنامید. سپس ثابت کنید دو خط PQ و BC با هم موازیند.



۱۶. در مثلث ABC، AH ارتفاع و AD نیمساز است.

مساحت مثلث ABD و ACD را به‌ترتیب با S و S′ نشان می‌دهیم.

الف) با در نظر گرفتن BD و DC به عنوان قاعدهٔ این مثلثها، نسبت $\frac{S}{S'}$ را به‌دست آورید.

ب) از D عمودهایی بر اضلاع AB و AC رسم کنید و پای آنها را M و N بنامید. DM و DN چه رابطه‌ای با هم دارند؟

پ) با در نظر گرفتن AB و AC به عنوان قاعدهٔ مثلثهای ABD و ADC، نسبت $\frac{S}{S'}$ را به‌دست آورید.

ت) از مقایسهٔ نسبتها در بند (الف) و (پ) چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

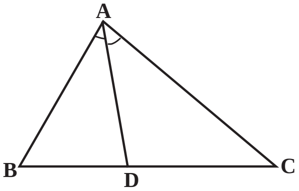
۱ــ ۳ ــ اثبات غیرمستقیم یا برهان خلف

معمولاً برای اثبات قضیه‌ها، **به‌طور مستقیم** از داده‌ها که همان فرض‌ها هستند شروع می‌کنیم و با استفاده از سایر **قضیه‌ها** و **اصلها** و **تعریفها** یعنی **حقایقی که درستی آنها را پذیرفته‌ایم**، برقراری حکم را نشان می‌دهیم. با این حال، به سادگی نمی‌توانیم بعضی از قضیه‌ها را به‌طور **مستقیم** اثبات کنیم و بهتر است راه **غیرمستقیم** را پیش بگیریم.

در زندگی روزانه از **استدلال غیرمستقیم** استفادهٔ زیادی می‌کنیم. برای مثال، در یک آزمون سه گزینه‌ای، اگر مطمئن نباشید که پاسخ درست، کدام گزینه است امّا بتوانید دربارهٔ نادرستی دو گزینه با اطمینان قضاوت کنید و به دلیل نادرستی آنها را حذف نمایید، آنگاه با اعتماد به نفس احساس می‌کنید که گزینهٔ باقی‌مانده پاسخ درست است. استدلال غیرمستقیم پایهٔ **اثبات غیرمستقیم** است که در آن، تمام نتیجه‌گیری‌های ممکن به جز نتیجه‌گیری‌های مورد نظر حذف می‌شوند. بنابراین، نتیجه‌گیری

باقی‌مانده باید درست باشد!

مثال: در مثلث ABC (شکل ۶)، AD نیمساز زاویه A است. اگر $BD \neq DC$ ثابت کنید $AB \neq AC$.


شکل ۶

حل: با **فهمیدن مسأله** ؛ می‌توانیم فرض و حکم آن‌را بنویسیم :

فرض: درمثلث داده شدهٔ ABC، $BD \neq DC$

حکم: $AB \neq AC$

دو پاره‌خط AB و AC نسبت به هم فقط دو حالت دارند : یا با هم مساوی نیستند یا با هم مساوی هستند. اگر با هم مساوی نباشند، این همان **نتیجهٔ مطلوب** بوده و حکم ثابت است. با استفاده از **اثبات غیرمستقیم** می‌خواهیم امکان وجود حالت دوم یعنی تساوی این دو پاره‌خط را حذف کنیم. برای این کار، با قبول فرض مسأله، خلاف یا نقیض حکم را در نظر می‌گیریم و نشان می‌دهیم که با وجود فرض مسأله، برقراری نقیض حکم امکان‌پذیر نیست.

اگر نقیض حکم یعنی $AB = AC$ برقرار باشد، در این صورت مثلث ABC متساوی‌الساقین است و می‌دانیم که در مثلث متساوی‌الساقین، نیمساز زاویهٔ رأس، میانهٔ ضلع مقابل به آن نیز هست، $BD = DC$. امّا طبق فرض مسأله، $BD \neq DC$ یعنی وجود نقیض حکم با فرض داده شده در تناقض است، یعنی $AB = AC$ نمی‌تواند درست باشد. (چرا؟) پس $AB \neq AC$ باید برقرار باشد و حکم ثابت است.

این حقیقت که یک عبارت ریاضی نمی‌تواند همزمان هم درست و هم نادرست باشد اساس روش اثبات غیر مستقیم است. به بیان دقیقتر روش اثبات غیرمستقیم بر مبنای دو اصل منطقی استوار است :

۱ــ یک عبارت ریاضی و خلاف (نقیض) آن، هر دو درست نیستند ؛

۲ــ فقط یکی از دو عبارت ریاضی که یکی از آنها خلاف (نقیض) دیگری است، درست است.

اثبات غیرمستقیم، **برهان خلف** نیز نامیده می‌شود. برای استفاده از برهان خلف یا اثبات غیرمستقیم، گامهای زیر را بر می‌داریم :

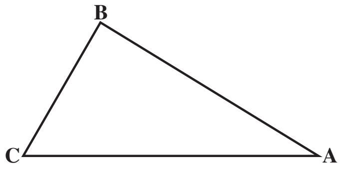
گام ۱: فرض می‌کنیم نقیض حکم درست باشد.

گام ۲: نشان می‌دهیم که نقیض حکم با حقایق دانسته شده یا فرض اولیه در تناقض است.

گام ۳: با نادرست بودن نقیض حکم، نتیجه می‌گیریم که حکم درست است.

مثال: قضیهٔ زیر را با استفاده از روش برهان خلف ثابت کنید :

اگر در مثلثی دو زاویه نابرابر باشند، ضلع روبه رو به زاویه بزرگتر، بزرگتر از ضلع روبه روی زاویه کوچکتر است.



شکل ۷

حل: ابتدا شکلی رسم می‌کنیم که شرایط فرض مسأله را داشته باشد، یعنی مثلثی با دو زاویهٔ نابرابر رسم می‌کنیم و آن‌را ABC می‌نامیم. اگر در مثلث ABC، زاویهٔ B بزرگتر از زاویه C باشد، آنگاه باید نشان دهیم ضلع AC بزرگتر از ضلع AB است. به زبان نمادین.

فرض: $\hat{B} > \hat{C}$ ،

حکم: $AC > AB$.

گام ۱: فرض می‌کنیم نتیجهٔ مطلوب درست نباشد یعنی $AC \ngtr AB$.

گام ۲: در این صورت $AC \leq AB$.

ــ اگر $AC = AB$ ، آنگاه مثلث متساوی‌الساقین است و درنتیجه $\hat{B} = \hat{C}$ که با فرض قضیه یعنی $\hat{B} > \hat{C}$ در تناقض است ؛

ــ اگر $AC < AB$، طبق قضیه ۱ بخش قبل، $\hat{B} < \hat{C}$ که با فرض قضیه یعنی $\hat{B} > \hat{C}$ درتناقض است.

بنابراین به یک تناقض رسیدیم.

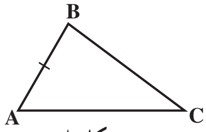
گام ۳: این تناقض نشان می‌دهد که نقیض حکم یعنی $AC \ngtr AB$ نادرست است. درنتیجه حکم قضیه درست می‌باشد.

این مثال نشان می‌دهد که عکس قضیه ۱ برقرار است، یعنی قضیه ۱، یک قضیه دوشرطی است. پس می‌توان گفت :

در مثلث، یک ضلع از ضلع دیگر بزرگتر است اگر و تنها اگر زاویهٔ روبه‌رو به ضلع بزرگتر، بزرگتر از زاویه روبه‌رو به ضلع کوچکتر باشد.

قضیه نامساوی مثلث: در هر مثلث، مجموع طولهای هر دو ضلع از طول ضلع سوم بزرگتر است.

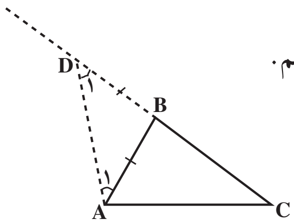
توجه: با فرض مثلث بودن ABC، می‌خواهیم درستی حکم زیر را نشان دهیم :



شکل ۸

حکم :
$$\begin{cases} AB + BC > AC \\ AB + AC > BC \\ BC + AC > AB \end{cases}$$

کافی است یکی از سه نامساوی حکم را ثابت کنیم (اثبات دو قسمت دیگر کاملاً مشابه این قسمت است).



شکل ۹

برهان: مسأله را به مسأله‌ای تبدیل می‌کنیم که حل آن را می‌دانیم.

برای این کار، ضلع BC را از رأس B امتداد می‌دهیم و به اندازهٔ AB روی آن جدا می‌کنیم تا نقطه D به دست آید. سپس، D را به A وصل می‌کنیم.

در مثلث ADB، چون

(۱) $DB = AB$

درنتیجه (۲) $\hat{D}_۱ = \hat{A}_۱$

همچنین، در مثلث ADC

(۳) $DC = DB + BC$

با توجّه به (۱)،

(۴) $DC = AB + BC$

و با توجه به شکل،

(۵) $D\hat{A}C > \hat{A}_۱ = \hat{D}_۱$

طبق (۵) و قضیه ۱،

$DC > AC$

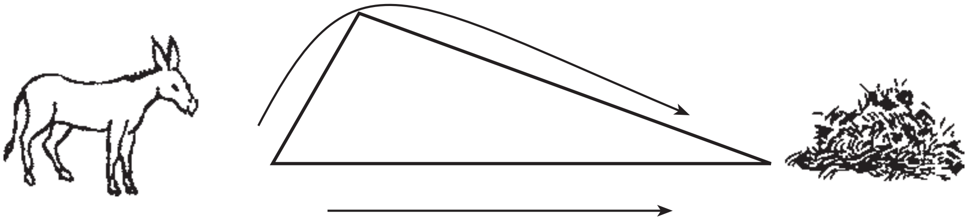
با استفاده از (۴)،

$AB + BC > AC$

و حکم ثابت است.

نکته: این قضیه در ریاضیات ایرانی به «قضیه حِمار» مشهور است و دلیل این نامگذاری این

است که اگر برای رسیدن به علوفه دو راه به‌صورت زیر ممکن باشد، حیوان به‌طور غریزی و طبیعی راه کوتاهتر را انتخاب می‌کند که حاکیِ از بدیهی بودن قضیه نامساوی مثلث است.



شکل ۱۰

در اثبات قضیهٔ بالا، ابتدا آن را به قضیه‌ای تبدیل کردیم که اثبات آن‌را می‌دانستیم و سپس با استفاده از آن، حکم را ثابت کردیم. این استراتژی، **تبدیل مسأله به مسألهٔ خویشاوند**[۱] است که استفاده از آن در حل بعضی مسأله‌ها و اثبات بعضی قضیه‌ها، بسیار مفید است.

عکس قضیه بالا نیز یک قضیه است که به **قضیهٔ وجود مثلث** معروف است.

قضیهٔ وجود مثلث: سه عدد حقیقی مثبت a، b و c داده شده‌اند، اگر هریک از این عددها از مجموع دو عدد دیگر کوچکتر باشد، آنگاه مثلثی وجود دارد که ضلعهای آن a، b و c هستند[۲].

مثال: آیا مثلثی با ضلعهای ۱۲، ۲۰ و ۳۰ وجود دارد؟

حل: برای اثبات وجود مثلث، رابطه‌های زیر باید برقرار باشند :

$$۱۲ < ۲۰ + ۳۰ = ۵۰$$

$$۲۰ < ۱۲ + ۳۰ = ۴۲$$

$$۳۰ < ۲۰ + ۱۲ = ۳۲$$

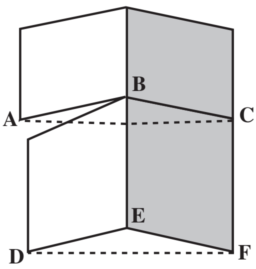
از برقراری نامساوی بالا، طبق قضیهٔ وجود مثلث نتیجه می‌گیریم که مثلثی با ضلعهای ۱۲، ۲۰ و ۳۰ وجود دارد.

تمرین ــ ثابت کنید در هر مثلث طول هر ضلع از تفاضل طول دو ضلع دیگر بزرگتر است.

۱ــ خلاقیت ریاضی نوشتهٔ جورج پولیا ترجمهٔ پرویز شهریاری

۲ــ اثبات این قضیه خارج از برنامهٔ رسمی درس است و در مجلهٔ ریاضی آورده شده است.

قضیهٔ لولا (قضیه قیچی)

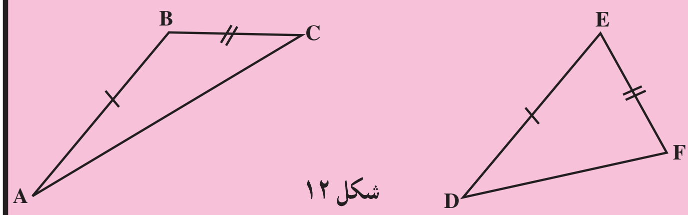

شکل ۱۱

قضیهٔ لولا را می‌توانید به‌صورت یک درِ دو قسمتی تصور کنید. اگر قسمت بالاییِ در از قسمت پایینی بیشتر باز باشد، مثلثی که توسط زاویه‌های ABC و DEF تشکیل می‌شود دارای دوجفت ضلع همنهشت است، یعنی $AB=DE$ و $BC=EF$. امّا

$$A\hat{B}C > D\hat{E}F$$

ضلع AC را با DF مقایسه کنید. به نظر می‌آید که $AC > DF$.

قضیهٔ لولا: اگر دو ضلع از مثلثی با دو ضلع از مثلث دیگر نظیر به نظیر مساوی باشند و زاویهٔ بین این دو ضلع در مثلث اول بزرگتر از زاویهٔ بین دو ضلع نظیر از مثلث دوم باشد، آنگاه ضلع سوم از مثلث اول بزرگتر از ضلع سوم از مثلث دوم است.

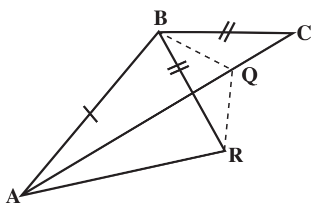

شکل ۱۲

توجه : برای ساده‌تر شدن، فرض و حکم قضیه را می‌نویسیم :

فرض: مثلثهای ABC و DEF داده شده‌اند به‌طوری‌که

$$AB=DE \text{ و } BC=EF \text{ و } A\hat{B}C > D\hat{E}F$$

حکم: $AC > DF$


شکل ۱۳

برهان: چون $A\hat{B}C > D\hat{E}F$ ، از B خط BR را طوری رسم می‌کنیم که $A\hat{B}R = D\hat{E}F$ و $BR=EF$ باشد.

با رسم AR، مثلث ABR با مثلث DEF همنهشت می‌شود.(چرا؟) درنتیجه ؛

$AR=DF$

چون $BC=EF$

و $BR=EF$

پس $BC=BR$

حال Q را روی AC طوری انتخاب می‌کنیم که BQ نیمساز زاویهٔ RBC باشد. با رسم QR، دو مثلث BQR و BQC همنهشت هستند. چرا؟ درنتیجه ؛

$$QR = QC \qquad (۱)$$

همچنین در مثلث AQR، با توجه به نامساوی مثلث ؛

$$AQ + QR > AR \qquad (۲)$$

با استفاده از (۱)،

$$AQ + QC > AR \qquad (۳)$$

چون Q بر پاره‌خط AC قرار دارد، بنابراین :

$$AQ + QC = AC \qquad (۴)$$

از (۳) و (۴) نتیجه می‌شود

$$\mathbf{AC > AR}$$

چون $AR = DF$ پس $AC > DF$ و حکم ثابت است.

عکس قضیهٔ لولا : اگر دو ضلع از مثلثی با دو ضلع از مثلث دیگر نظیر به نظیر مساوی باشد و ضلع سوم مثلث اوّل بزرگتر از ضلع سوم مثلث دوم باشد، آنگاه زاویهٔ بین دو ضلع از مثلث اوّل بزرگتر از زاویهٔ بین دو ضلع نظیر از مثلث دوم است.

تمرین ــ با استفاده از روش اثبات غیرمستقیم، عکس قضیهٔ لولا را ثابت کنید.

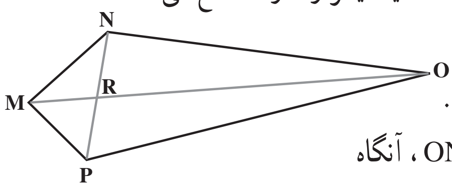
مسأله‌ها

۱. حسن در دادگاه تخلّفات رانندگی اظهار داشت «من نمی‌توانم عامل این تصادف باشم زیرا در زمان وقوع تصادف، در محل کارم بوده‌ام و برای این ادّعا، شاهد هم دارم.» نوع استدلال حسن را توضیح دهید.

با استفاده از برهان خلف، مسأله‌های ۲ تا ۶ را حل کنید.

۲. اگر a، b و c سه خط راست باشند که $a \| b$ و $c \| b$، آنگاه $a \| c$.

۳. در چهارضلعی MNOP، دو قطر MO و NP یکدیگر را در R قطع می‌کنند.



الف) نشان دهید اگر $MP = MN$ و $ON \neq OP$، آنگاه MO نیمساز زاویهٔ PMN نیست.

ب) نشان دهید اگر $MP = MN$ و $ON \neq OP$، آنگاه

OM بر NP عمود نیست.

۴. در دو مثلث ABC و $A'B'C'$ ، اگر $AB = A'B'$ و $AC = A'C'$ و $\hat{A} \neq \hat{A'}$ ، ثابت کنید $BC \neq B'C'$.

۵. در هر مثلث

الف) هر دو نیمساز زاویه‌های داخلی متقاطعند.

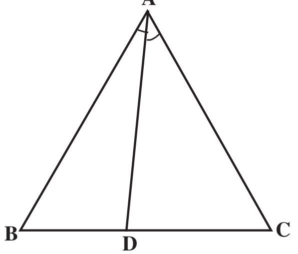
ب) هر دو میانه متقاطعند.

پ) هر دو ارتفاع متقاطعند.

ت) عمودمنصف‌های هر دو ضلع متقاطعند.

۶. عمود منصف هر پاره‌خط یکتاست.

۷. سه پاره‌خط با طولهای ۶x، $x + ۷$ ، $۴(x - ۱)$ داده شده‌اند. اگر مجموع این طولها ۳۶ باشد، آیا این پاره‌خطها می‌توانند ضلعهای یک مثلث باشند؟ توضیح دهید.



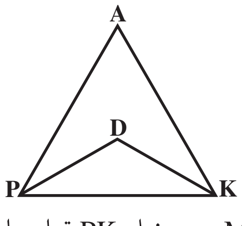
۸. مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است.

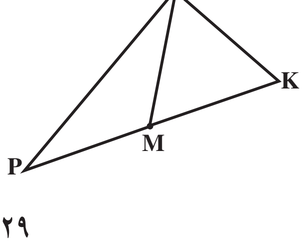
اگر $BD < DC$، ثابت کنید $B\hat{A}D < D\hat{A}C$.

۹. ثابت کنید در هر مثلث، هر میانه از نصف مجموع دو ضلع مجاور آن کوچکتر است.

۱۰. ثابت کنید مجموع فاصله‌های هر نقطه داخل مثلث از سه رأس، از نصف مجموع سه ضلع مثلث بزرگتر است.

۱۱. نقطه D را به دلخواه در درون مثلث PAK انتخاب می‌کنیم ثابت کنید زاویه PDK از زاویه PAK بزرگتر است.

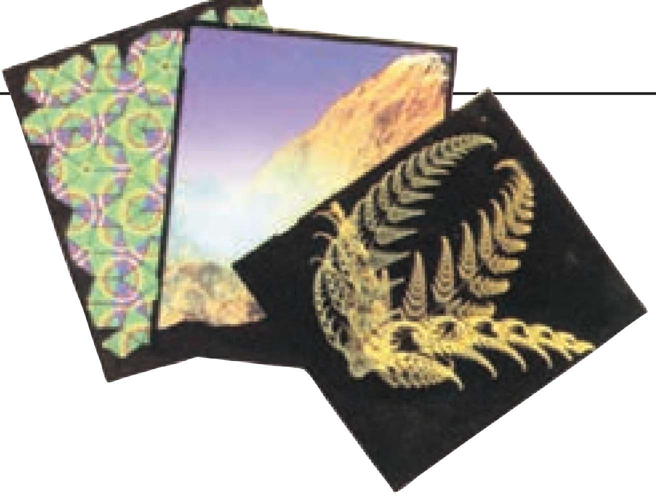




۱۲. در مثلث PAK، نقطه Mروی ضلع PK قرار دارد.

الف) ثابت کنید اگر $PM = AK$ آنگاه $AP > MK$

ب) ثابت کنید اگر $AM = AK$ آنگاه $AP > AK$



مجلهٔ ریاضی

هرچند گالیله گفته است «کتاب عظیم طبیعت را به‌زبان ریاضی نوشته‌اند» و افزوده است که «الفبای این زبان، مثلثها، دایره‌ها و سایر شکلهای هندسی‌اند که بدون آنها انسان در هزارتوی ظلمانی سردرگم می‌شود»، اما این شکلهای هندسهٔ اقلیدسی در الگوسازی دستگاههای نامنظم به هیچ کار نمی‌آیند. این پدیده‌ها به هندسه‌هایی نیاز دارند که از مثلثها و دایره‌ها بسیار دورند. در مورد آنها باید از ساختارهای نااقلیدسی و بخصوص از هندسهٔ نوینی به نام **هندسهٔ فراکتالها** استفاده کرد.

واژهٔ فراکتال را در سال **۱۹۷۵** ازکلمهٔ لاتینی فراکتوس به معنی سنگی که به شکل نامنظم شکسته و خرد شده است، ساخته‌اند. فراکتالها شکلهایی هستند که برعکس شکلهای هندسهٔ اقلیدسی به هیچ وجه منظم نیستند. این شکلها اولاً سراسر نامنظم‌اند، ثانیاً، **میزان بی نظمی آنها در همهٔ مقیاسها یکسان است**. جسم فراکتالی از دور و از نزدیک یکسان دیده می‌شود و به تعبیر دیگر، **خود ــ متشابه** است. وقتی به یک جسم نزدیک شویم، می‌بینیم که تکه‌های کوچکی از آن که از دور همچون دانه‌های بی‌شکلی به نظر می‌رسید به‌صورت جسم مشخصی درمی‌آید که شکلش کم و بیش مثل همان شکل کلّی است که از دور دیده می‌شد.

در طبیعت نمونه‌های فراوانی از فراکتالها دیده می‌شوند که سرخسها و انواع گوناگون گل کلم از آن جمله‌اند زیرا به هر شاخه ازگیاه که نگاه کنیم، تصوّری از کل گیاه در ذهن ما ایجاد می‌شود. قانونهای حاکم بر رشد این گیاهان موجب می‌شود که خصوصیتی که در مقیاس کوچک وجود دارد به مقیاسهای بزرگ نیز منتقل شود.

بنوا مندلبرات ــ هندسهٔ فراکتالها، توصیفگر طبیعت، ترجمهٔ محمد باقری ــ مجله دانشمند شمارهٔ ۳۳۸ــ آذر ۱۳۷۰.

۱ ــ ۴ ــ مکان هندسی

وقتی پرّه‌های یک هلیکوپتر[1] در حال چرخیدن هستند، نوک پره‌ها **مجموعهٔ نقطه‌هایی** از فضای اطراف هلیکوپتر را مشخص می‌کنند که دارای ویژگی **مشترکی** هستند. ویژگی این نقطه‌ها آن است که همگی از محور چرخش پرّه‌ها به یک فاصله‌اند. همچنین، نوک عقربهٔ ثانیه‌شمار ساعتهای عقربه‌ای، مجموعهٔ نقطه‌هایی از صفحهٔ دایره ساعت را تشکیل می‌دهند که دارای ویژگی مشترکی هستند و آن این که همگی از مرکز صفحهٔ ساعت به یک فاصله‌اند. این مجموعهٔ نقطه‌ها نمونه‌هایی از **مکان هندسی**‌اند.

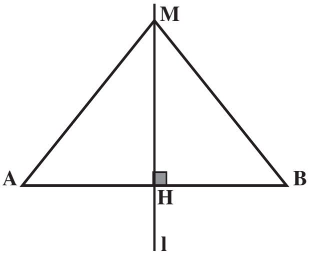
> **مکان هندسی، مجموعهٔ همهٔ نقطه‌های صفحه یا فضا است که دارای ویژگی مشترکی هستند ؛ یعنی هر نقطه در این مجموعه دارای این ویژگی است و هر نقطه که آن ویژگی را دارد عضو این مجموعه می‌باشد.**

مثال ۱: می‌خواهیم ثابت کنیم عمودمنصف یک پاره‌خط، مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه است که از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است. در اینجا ویژگی مشترکی که در تعریف مکان هندسی ذکر کردیم، **یکسان بودن فاصلهٔ نقطه از دو سر پاره‌خط** است. پس برای اثبات این مطلب باید نشان دهیم :

الف) هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط، از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است ؛

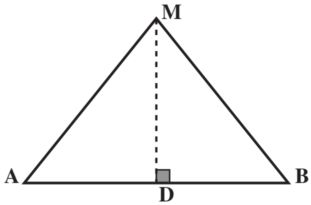
۱ــ به تازگی، واژهٔ چرخ بال برای هلیکوپتر انتخاب شده است.

ب) هر نقطه که از دو سر پاره‌خط به یک فاصله باشد، روی عمودمنصف آن پاره‌خط واقع است.



شکل ۱۴

حل: برای اثبات (الف) فرض می‌کنیم نقطه M روی عمودمنصف پاره‌خط AB (خط l) باشد. چون l عمودمنصف است، در H بر وسط AB عمود است. دو مثلث قائم‌الزاویهٔ AMH و BMH به حالت برابری دو ضلع و زاویهٔ بین آنها، همنهشت هستند. درنتیجه، $MA = MB$ یعنی M از A و B به یک فاصله است.



شکل ۱۵

برای اثبات (ب) فرض می‌کنیم نقطهٔ M از A و B به یک فاصله باشد، یعنی در مثلث MAB، داریم $MA = MB$. از M به نقطهٔ D وسط پاره‌خط AB وصل می‌کنیم. دو مثلث MAD و MBD به دلیل تساوی سه ضلع $(MD = MD, DA = DB, MA = MB)$ همنهشت هستند. پس $M\hat{D}A = M\hat{D}B = ۹۰^\circ$. یعنی MD عمود بر AB و درنتیجه، MD عمود منصف پاره‌خط AB است. بنابراین، M روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارد.

قضیه: نقطهٔ M روی عمودمنصف پاره‌خط AB است اگر و فقط اگر فاصلهٔ M از A و B مساوی باشد.

نقطه‌هایی که روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارند، مجموعه‌ای از نقطه‌های صفحه هستند که آنها را با $S_۱$ نشان می‌دهیم. نقطه‌هایی از صفحه که از دو سر پاره‌خط AB به یک فاصله‌اند نیز مجموعه‌ای از نقطه‌های صفحه است که آن را با $S_۲$ نشان می‌دهیم. در قسمت (الف) مثال ۱، عضوی از مجموعهٔ $S_۱$ را مثل M درنظر گرفتیم و نشان دادیم M عضوی از مجموعهٔ $S_۲$ است. در قسمت (ب) عضوی از مجموعهٔ $S_۲$ را انتخاب کردیم و ثابت کردیم آن نقطه عضوی از مجموعهٔ $S_۱$ است. درواقع، هر عضو مجموعهٔ $S_۱$ عضوی از مجموعهٔ $S_۲$ و هر عضو مجموعهٔ $S_۲$ عضوی از مجموعهٔ $S_۱$ نیز هست. یعنی؛

$$S_۱ = S_۲$$

پس دو مرحلهٔ اثبات مکان هندسی بودن یک مجموعه، معادل این است که تساوی دو مجموعه را ثابت کنیم.

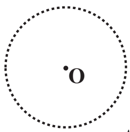
برای مشخص کردن مکان هندسی، برداشتن سه گام زیر سودمند است. این گامها براساس استدلال استقرایی است :

گام اول: به اندازهٔ کافی نقطه‌هایی را که در ویژگیِ داده شده صدق می‌کنند بیابید ؛
گام دوم: آن نقطه‌ها را به یکدیگر وصل کنید تا تصوّری شهودی از مکان هندسی مورد نظر پیدا کنید ؛
گام سوم: مکان هندسی را توصیف کنید. سپس بررسی کنید که آیا هر نقطه در مجموعهٔ نقطه‌هایی که یافته‌اید در ویژگی داده شده صدق می‌کند و برعکس، آیا هر نقطه که در این ویژگی صدق کند، در مجموعه‌ای که یافته‌اید قرار دارد؟

مثال ۲: می‌خواهیم مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه را بیابیم که از یک نقطهٔ ثابتِ داده شده به فاصلهٔ واحد باشد. دراینجا، ویژگی مشترک، **هم فاصله‌بودن از یک نقطهٔ ثابت** است.

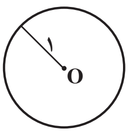
حل:

گام اول: نقطهٔ ثابت را O می‌نامیم و تعدادی از نقطه‌ها را با ویژگی بیان شده پیدا می‌کنیم. این نقطه‌ها در شکل زیر نشان داده شده‌اند.



گام دوم: شکل حاصل یک دایره به نظر می‌رسد.

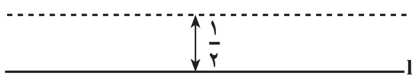
گام سوم: مکان هندسی مورد نظر، یک دایره به مرکز O و شعاع «یک» است. فاصلهٔ هر نقطه روی این دایره از مرکز آن یعنی O، برابر واحد است. همچنین اگر فاصلهٔ نقطه‌ای مانند M از O برابر واحد باشد،آنگاه $OM = ۱$ پس OM یک شعاع دایره خواهد بود، درنتیجه M روی دایره است.



مثال ۳: مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه را پیدا کنید که از یک خط داده شدهٔ l به فاصلهٔ $\frac{۱}{۲}$ باشد.

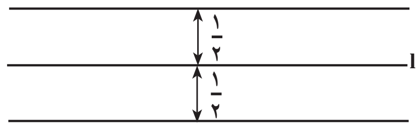
حل:

گام اول: ابتدا تعدادی از نقطه‌هایی را که در این ویژگی صدق می‌کنند، پیدا می‌کنیم.



گام دوم: با وصل کردن هر مجموعه از نقطه‌هایی که در یک طرف خط l قرار دارند، دو خط راست به دست می‌آوریم. پس به نظر می‌رسد این مکان هندسی، دو خط باشد.

گام سوم: مکان هندسی نقطه‌ای که به فاصلهٔ $\frac{1}{2}$ از خط داده شدهٔ l قرار دارد، دو خط راست موازی با l است.



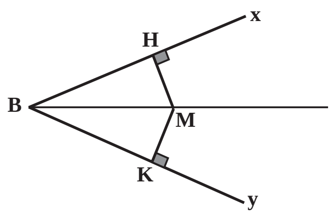
دو نتیجه‌ای را که در مثالهای ۲ و ۳ براساس استدلال استقرایی به دست آوردیم، به صورت زیر می‌توان بیان کرد.

۱: مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه که به فاصلهٔ R از نقطهٔ ثابت O درون همان صفحه قرار دارد، دایره‌ای به مرکز O و شعاع R است.

۲: مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه که از یک خط راست داده شده در همان صفحه به فاصلهٔ d قرار دارد، دو خط راست موازی با آن خط و در دو طرف آن است.

قضیه: نیمساز یک زاویه، مکان هندسی نقطه‌ای در صفحهٔ آن زاویه است که فاصلهٔ آن از دو ضلع زاویه برابر باشد.

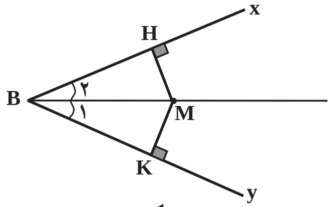
برهان: در این قضیه، ویژگی مشترکی که مکان هندسی را مشخص می‌کند «یکسان بودن فاصله نقطه از دو ضلع زاویه» است. براساس تعریف مکان هندسی، اثبات دو مرحله دارد :



شکل ۱۶

مرحله اول: ثابت می‌کنیم هر نقطه روی نیمساز زاویه از دو ضلع زاویه به یک فاصله است. نقطهٔ M را روی نیمساز زاویهٔ $X\hat{B}Y$ در نظر می‌گیریم. از M خطهایی بر ضلعهای BX و BY عمود می‌کنیم تا آنها را به ترتیب در H و K قطع کنند. دو مثلث BMH و BMK به حالت برابری دو زاویه و ضلع بین آنها، همنهشت هستند، پس :

$$MH = MK$$



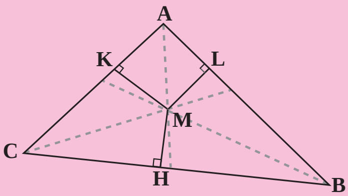
شکل ۱۷

مرحله دوم: اگر نقطهٔ M از دو ضلع BX و BY به فاصلهٔ یکسان باشد، چون دو مثلث قائم‌الـزاویهٔ BMH و BMK به حالت تساوی وتر و یک ضلع همنهشت هستند، پس :

$$\hat{B}_1 = \hat{B}_2$$

یعنی خطی که از B و M می‌گذرد، نیمساز زاویه است. درنتیجه، M روی نیمساز زاویه B واقع و از این، درستی حکم نتیجه می‌شود.

قضیه: سه نیمساز زاویه‌های داخلی هر مثلث همرسند.



شکل ۱۸

برهان: در مثلث ABC نیمسازهای زاویه‌های داخلی B و C را رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطهٔ M قطع کنند. از M بر ضلعهای AB، AC و BC عمود می‌کنیم تا به ترتیب آنها را در نقطه‌های L، K و H قطع نمایند. چون M روی نیمساز زاویهٔ B است، پس :

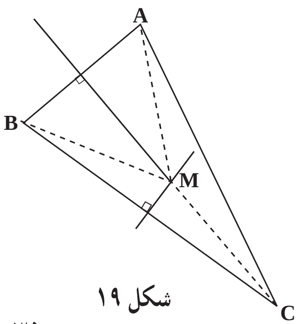
$$MH = ML \qquad (۱)$$

و چون M روی نیمساز زاویهٔ C قرار دارد، پس :

$$MH = MK \qquad (۲)$$

از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود MK = ML . بنابراین، M روی نیمساز زاویه A نیز قرار دارد. پس M محل تلاقی سه نیمساز مثلث ABC است، یعنی **سه نیمساز زاویه‌های داخلی هر مثلث همرسند.**

قضیه: عمودمنصف‌های ضلعهای هر مثلث همرسند.



شکل ۱۹

برهان: عمودمنصف‌های دو ضلع AB و BC از مثلث ABC را رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در M قطع کنند. چون M روی عمودمنصف BC است، پس

$$MB = MC \qquad (۳)$$

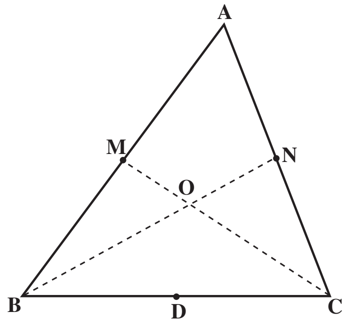
و چون M روی عمودمنصف AB است پس

$$MA = MB \qquad (۴)$$

از (۳) و (۴) نتیجه می‌شود که $MA = MC$. بنابراین، نقطهٔ M از دو سر پاره‌خط AC به یک فاصله است. یعنی نقطهٔ M روی عمودمنصف AC است. درنتیجه، هرسه عمود منصف از نقطهٔ M می‌گذرند. بنابراین، عمودمنصف‌های ضلعهای هر مثلث همرسند.

فعالیت ۱ــ۱۲

هدف این فعالیت آن است که درستی حدسی را که در فعالیت ۱ــ۳ از طریق استدلال استقرایی با بررسی چند حالت خاص ارائه کردید، با استفاده از استدلال استنتاجی در حالت کلّی نشان دهید. برای این کار، مثلث دلخواه ABC و دو میانهٔ CM و BN را رسم کنید و محل تقاطع آنها را O بنامید.



شکل ۲۰

الف) وسط BO را P و وسط CO را Q بنامید و پاره‌خط PQ را رسم کنید.

ب) با استفاده از عکس قضیهٔ تالس و این خاصیت که دو خط موازی با یک خط، خود موازیند، نشان دهید که MN موازی PQ است.

پ) با استفاده از قضیهٔ تالس، نشان دهید $MN = PQ$.

ت) ثابت کنید که چهارضلعی MNQP متوازی‌الاضلاع است.

ث) نشان دهید

$$\frac{BO}{ON} = \frac{CO}{OM} = \frac{۲}{۱}$$

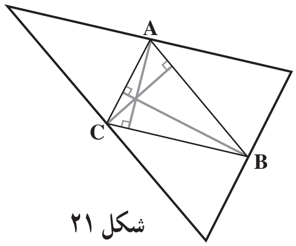
چون میانه‌های CM و BN به دلخواه انتخاب شده بودند، پس این رابطه برای هر دو میانهٔ دلخواه دیگر نیز درست است.

از اینجا نتیجه می‌گیریم که سه میانه همرسند (چرا؟) و همدیگر را به نسبت ۱ و ۲ قطع می‌کنند.

توجه: نقطهٔ همرسی میانه‌های مثلث، **مرکز ثقل** آن است.

قضیه: سه میانه هر مثلث همرسند.

قضیه: سه ارتفاع هر مثلث همرسند.



شکل ۲۱

تمرین ــ قضیه بالا را ثابت کنید.
(**راهنمایی:** از رأسهای مثلث خط‌هایی به موازات سه ضلع مثلث رسم کنید تا مثلث جدیدی تشکیل شود. آنگاه ثابت کنید ارتفاعهای مثلث اوّلیه، عمودمنصف‌های مثلث جدید هستند.)

مسأله‌ها

در هریک از موارد زیر مکان هندسی را به کمک استدلال استقرایی حدس بزنید.

۱. مکان هندسی مرکز توپی که روی یک سطح صاف در امتداد یک خط مستقیم می‌غلتد.

۲. مکان هندسی مرکز دایره‌ای که در خارج یک دایرهٔ داده شده واقع است و روی محیط آن می‌غلتد.

۳. مکان هندسی نقطه‌ای در فضا که از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله است.

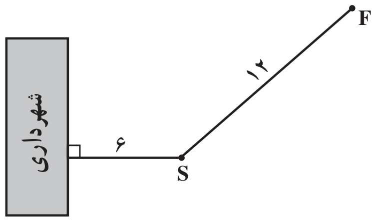
۴. مکان هندسی نقطه‌ای در فضا که از دو صفحهٔ موازی به یک فاصله باشد.

۵. مکان هندسی نقطه‌ای در فضا که از دو صفحهٔ موازی M و R به یک فاصله باشد و از نقطهٔ ثابت P، به فاصلهٔ d باشد.

۶. مکان هندسی نقطه‌ای در فضا که از یک خط داده شده به فاصله d باشد.

۷. مکان هندسی مرکز دایره‌هایی که در یک نقطهٔ مشخص بر یک خط داده شده مماس باشد.

۸. سکه‌ای به شعاع ۲ سانتی‌متر را بر روی صفحهٔ مربع شکلی به ضلع ۱۰ سانتی‌متر پرتاب می‌کنیم. مکان هندسی نقطه‌ای درون مربع را تعیین کنید که اگر مرکز سکه در آنجا قرار گیرد، سکه کاملاً داخل مربع واقع می‌شود.



۹. نمودار مقابل محل قرارگرفتن ساختمان شهرداری، مجسمه S و فوارهٔ F را نشان می‌دهد. می‌خواهیم میلهٔ پرچم را در محلی نصب کنیم که از مجسمه و فواره به یک فاصله باشد و از مقابل ساختمان شهرداری به فاصلهٔ ۹ متر باشد. مکان هندسی محل نصب میلهٔ پرچم را تعیین کنید.

۱ ــ ۵ ــ ترسیم با خط‌کش و پرگار

«رسم یا ساختن شکلهای هندسی به کمک پرگار و خط کش، به طور سنتی جای نمایانی را در آموزش هندسهٔ مسطحه گرفته است. ساده‌ترین این ترسیمها آنهایی است که به‌طور وسیع مورد استفادهٔ صنعتگران قرار می‌گیرد. ولی در سایر موردها، ارزش عملی ترسیمهای هندسی قابل توجه نیست و اهمیت نظری چندان زیادی هم ندارد. با همهٔ اینها، کاملاً به حق می‌توان این ارزش را برای این‌گونه ترسیمها در آموزش قایل شد، چرا که این ترسیمها، مناسب‌ترین وسیله برای آشنایی با شکلهای هندسی هستند و بهتر از هر وسیلهٔ دیگری، زمینه را برای فراگرفتن حل مسألهٔ ریاضی فراهم می‌کنند[۱].»

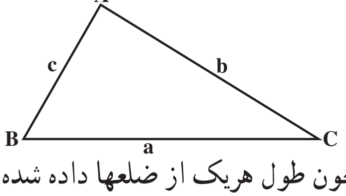
ترسیمهای هندسی به زمان اقلیدس برمی‌گردد. در مسألهٔ اوّل از کتاب اوّل اصول اقلیدس، پیشنهاد شده است که «روی یک پاره‌خط، یک مثلث متساوی‌الاضلاع بنا کنید.»، در واقع حل این مسأله به سادگیِ حل مسألهٔ تعمیم‌یافتهٔ زیر است :

مثلثی رسم کنید که سه ضلع آن داده شده باشد.

با تجزیه و تحلیل این مسأله، می‌توانیم یک روش کلی برای حل مسأله‌های ترسیمهای هندسی پیدا کنیم :

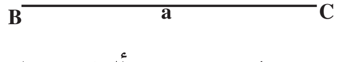
در هر مسأله یک **مجهول** وجود دارد. اگر همه چیز دانسته شده باشد، دیگر موردی برای جست و جو و کاری برای انجام دادن باقی نمی‌ماند. در این مسأله، چیزی که به دنبال آن هستیم، **یعنی مجهول، یک شکل هندسی و در اینجا، یک مثلث است.** با این حال، در هر مسأله باید چیزی معلوم باشد که به آن داده می‌گوییم. **داده‌های این مسأله، طول ضلعهای مثلث هستند** که آنها را a، b و c می‌نامیم.

استراتژی حل مسأله: مسأله را حل شده فرض می‌کنیم.



شکل ۲۲

با توجه به شکل، چون طول هریک از ضلعها داده شده‌اند، پس می‌توانیم یکی از ضلعها مثلاً BC را با طول معلوم a رسم کنیم :



بنابراین، برای رسم مثلث ABC که مجهول مسأله است، باید رأس A را طوری پیدا کنیم تا در

۱ــ جورج پولیا، خلاقیت ریاضی، ترجمهٔ پرویز شهریاری

شرطهای **مسألهٔ** ما صدق کند یعنی

شرط (۱) $AC = b$

شرط (۲) $AB = c$

یعنی مجهول مسأله ما تبدیل به نقطه مجهول A گردید.

با توجه به شرط (۱)، نقطهٔ A باید به فاصلهٔ b از C قرار داشته باشد، پس مکان هندسی نقطهٔ A در صفحه، دایره‌ای به مرکز C و شعاع b است. همچنین، طبق شرط (۲)، نقطهٔ A به فاصلهٔ c از B قرار می‌گیرد، پس مکان هندسی نقطهٔ A در صفحه، دایره‌ای به مرکز B و شعاع c است.

بنابراین، هرکدام از این دو شرط، یک مکان هندسی برای رأس A که مجهول مسأله بود مشخص کرد. پس نقطهٔ A به ناچار به این دو مکان هندسی تعلّق دارد. درنتیجه، برای یافتن نقطهٔ A دو دایره به مرکزهای B و C و به‌ترتیب با شعاعهای c و b رسم می‌کنیم، نقطهٔ برخورد آنها نقطهٔ A است. **این مسأله چند جواب دارد؟**

حل این مسأله به ما نشان داد که نقطهٔ A، رأس سوم مثلث، به وسیلهٔ دو مکان هندسی مشخّص می‌شود. از این یافته، به عنوان **استراتژی دو مکان هندسی**[1] در حل مسأله‌های ترسیمی استفاده می‌کنیم.

راهبرد حل مسأله‌های ترسیمهای هندسی

گام اوّل: مسألهٔ ترسیم را حل شده فرض می‌کنیم.

گام دوم: مسألهٔ ترسیم را تبدیل به یافتن یک نقطهٔ مجهول می‌کنیم.

گام سوم: شرطهای مسأله را به دو جزء تقسیم می‌کنیم به‌طوری‌که هرکدام از شرطها، به یک مکان هندسی برای نقطهٔ مجهول تبدیل شود و هر یک از این دو مکان هندسی، باید **خط راست** یا **دایره** باشد.

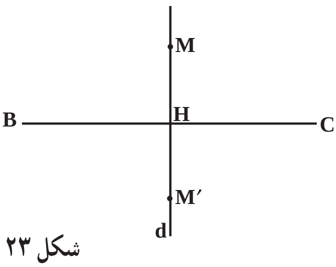
گام چهارم: نقطهٔ مجهول، فصل مشترک این دو مکان هندسی است.

مسألهٔ ۱: رسم عمودمنصف یک پاره‌خط

پاره‌خط BC داده شده است. می‌خواهیم عمودمنصف این پاره‌خط را رسم کنیم.

حل:

گام اول: مسأله را حل شده فرض می‌کنیم یعنی فرض می‌کنیم که خط d عمودمنصف پاره‌خط BC باشد.



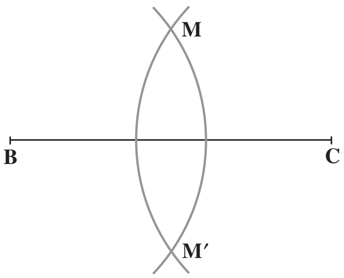
شکل ۲۳

۱ــ جورج پولیا، خلاقیت ریاضی

گام دوم: برای مشخص شدن خط d، کافی است دو نقطه متمایز از آن را پیدا کنیم. پس مجهول ما پیدا کردن دو نقطهٔ متمایز از خط d است. این دو نقطه می‌تواند هر دو نقطهٔ دلخواه مانند M و M′ روی خط d باشد که در دو طرف پاره‌خط BC قرار دارند و از C و B به یک فاصله‌اند.

گام سوم: حال به پیدا کردن شرطهای این نقطه می‌پردازیم و سعی می‌کنیم که این شرطها را به دو جزء تقسیم کنیم به طوری‌که هرکدام از این شرطها، به یک مکان هندسی برای نقطهٔ مجهول M تبدیل شود. چون M روی عمودمنصف پاره‌خط BC است و عمودمنصف هر پاره‌خط مکان هندسی نقطه‌ای است که از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله باشد، پس نقطه مجهول M روی دو دایره با شعاع یکسان و به مرکزهای B و C قرار دارد، یعنی این مسأله تبدیل به مسألهٔ دو مکان هندسی شد.

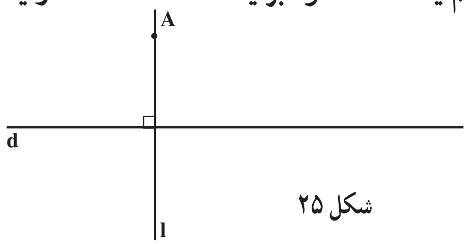
گام چهارم: این دو مکان هندسی، دو دایره به شعاع دلخواه بزرگتر از نصف BC است زیرا می‌خواهیم که فصل مشترک دو دایره دو نقطه باشد. بنابراین، به مرکز B و شعاع دلخواه بیش از نصف BC دایره‌ای رسم می‌کنیم و با همین شعاع، دایرهٔ دیگری به مرکز C رسم می‌کنیم. این دو دایره همدیگر را در دو نقطهٔ M و M′ قطع می‌کنند. چون نقطه‌های M و M′ روی دو دایره با شعاعهای مساوی هستند، بنابراین روی عمودمنصف BC قرار می‌گیرند. پس با وصل کردن M به M′، عمودمنصف خواسته شده رسم می‌شود.



شکل ۲۴

تمرین ــ مراحل رسم نیمساز یک زاویهٔ داده شده را با استفاده از استراتژی حل مسأله‌های ترسیمهای هندسی توضیح دهید.

مسألهٔ ۲: رسم یک خط عمود بر یک خط داده شده از یک نقطهٔ خارج آن

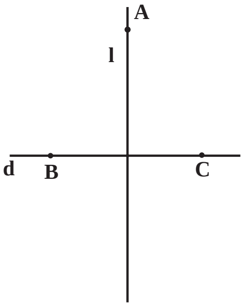


شکل ۲۵

حل: خط d و نقطهٔ A خارج آن داده شده‌اند. می‌خواهیم از A خطی رسم کنیم که بر d عمود باشد[1].

۱ــ این مراحل را در هندسه ۱ انجام داده‌اید.

فرض می‌کنیم مسأله حل شده و خط l از نقطهٔ A بر خط d عمود شده است.

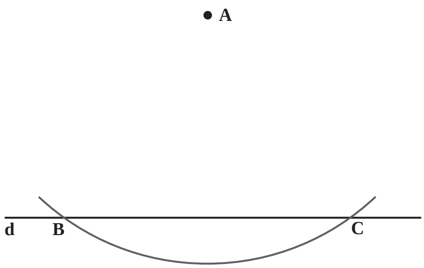


شکل ۲۶

اگر بتوانیم از مسأله‌هایی که تا به حال حل کرده‌ایم استفاده کنیم، کار آسانتر می‌شود. در مسأله۱ با رسم عمودمنصف یک پاره‌خط آشنا شدیم. اگر خط l عمودمنصف یک پاره‌خط باشد که روی d قرار گرفته است، در این صورت هر نقطه روی l از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است. یعنی فرض کنیم دو نقطه B و C روی d چنان وجود دارد که l عمود منصف BC باشد.

پس اگر B و C را پیدا کنیم و عمودمنصف آن‌را رسم نماییم، عمودمنصف حاصل از A می‌گذرد و بر d عمود است.

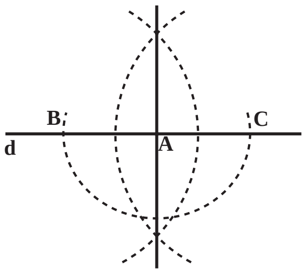
حالا مسألهٔ ما تبدیل به پیدا کردن نقطه‌های B و C روی خط d شده است که خط l عمودمنصف آنها می‌باشد. چون A روی عمودمنصف BC قرار دارد، بنابراین A از B و C به یک فاصله است یا به عبارتی، B و C روی دایره‌ای به مرکز A قرار دارند. این دایره یکی از **دو مکان هندسی** ما است.امّا چون B و C روی خط d قرار دارند، پس خط d مکان هندسی دیگر است. حال با استفاده از استراتژی دو مکان هندسی،B و C روی این دو مکان قرار دارند. برای پیدا کردن B و C، به مرکز A و به شعاع دلخواه دایره‌ای رسم می‌کنیم تا d را در دو نقطه قطع کند، آنها را B و C می‌نامیم. حال B و C نقاط مطلوب هستند و مسأله حل شده است، زیرا عمودمنصف BC خط مورد نظر است.



شکل ۲۷

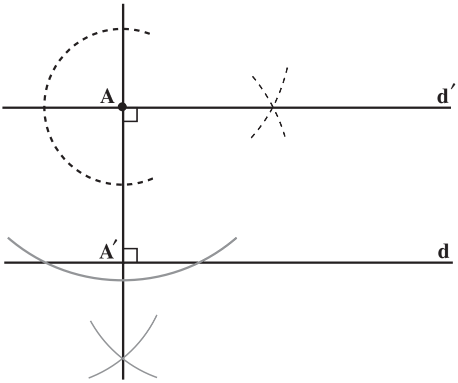
مسألهٔ ۳ : رسم خطی عمود بر خط داده شده از یک نقطه روی آن

یعنی فرض کنیم خط d و نقطه A روی آن داده شده‌اند. می‌خواهیم از A عمودی بر d رسم کنیم این مسأله را با روشی مانند مسأله قبلی حل می‌کنیم، یعنی نقطه‌های B و C را روی d



شکل ۲۸

طوری پیدا می‌کنیم که A وسط آنها باشد. بنابراین، دایره‌ای به مرکز A و شعاع اختیاری رسم می‌کنیم تا d را در دو نقطهٔ B و C قطع کند. حال طبق مسألهٔ قبلی، عمودمنصف BC را رسم می‌کنیم. این عمودمنصف از A می‌گذرد و بر d عمود است.



مسألهٔ ۴ : رسم خطی موازی یک خط از یک نقطه خارج آن خط

خط d و نقطهٔ A خارج آن داده شده است. می‌خواهیم از نقطهٔ A خطی به موازات d رسم کنیم. برای این منظور ابتدا از نقطهٔ A بر خط d عمودی رسم می‌کنیم تا آن را در نقطهٔ A′ قطع کند. سپس از نقطهٔ A خطی عمود بر AA′ رسم می‌کنیم و آن را d′ می‌نامیم. حال می‌توان ادعا کرد که d و d′ موازی یکدیگرند (چرا؟).

با توجه به چهار مسأله حل شده فوق، می‌توان تعداد زیادی از مسأله‌های ترسیمهای هندسی را حل کرد.

مسأله‌ها

۱. خط d و نقطهٔ A غیر واقع بر آن، داده شده‌اند. نقطه‌ای روی خط d تعیین کنید که از نقطهٔ A به فاصلهٔ معلوم R باشد. با توجه به اندازهٔ R روی تعداد جوابهای مسأله بحث کنید.

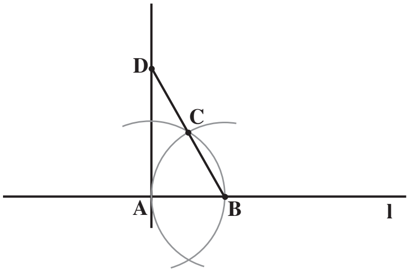
۲. دو نقطهٔ A و B و خط d در یک صفحه واقعند. نقطه‌ای روی خط d بیابید که از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله باشد. آیا مسأله همواره جواب دارد؟

۳. دایرهٔ (C) و خط Δ در یک صفحه داده شده‌اند. نقطه‌ای روی دایرهٔ (C) تعیین کنید که از خط Δ به فاصلهٔ معلوم l باشد. مسأله چند جواب دارد؟

۴. از مثلث ABC، اندازهٔ ضلعهای $AB = c$ ، $AC = b$ و طول ارتفاع $AH = h_a$ معلوم است. مثلث را رسم کنید.

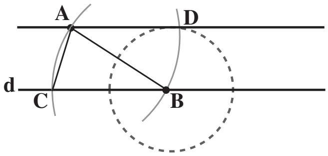
۵. مثلث ABC را با معلوم بودن اندازه‌های : ضلع $BC = a$ ، میانه‌های $BB' = m_b$ و $CC' = m_c$ ، رسم کنید.

۶. ابوالوفاء بوزجانی (۳۸۸ــ۳۲۸ هـ.ق) ریاضیدان ایرانی برای رسم خط عمود از نقطه A واقع بر خط مفروض l روش زیر را به کار برده است : نقطهٔ دلخواه B را روی خط l اختیار می‌کنیم.



دهانهٔ پرگار را به اندازهٔ پاره‌خط AB باز می‌کنیم دو دایره به مرکزهای A و B و به شعاع AB رسم می‌کنیم یک نقطهٔ برخورد این دو دایره را C می‌نامیم. از B به C وصل می‌کنیم و پاره‌خط BC را از طرف نقطهٔ C به اندازهٔ خودش تا نقطه D امتداد می‌دهیم. از D به A وصل می‌کنیم. خط AD در نقطهٔ A بر خط l عمود است.

دلیل درستی روش ابوالوفاء را بنویسید.

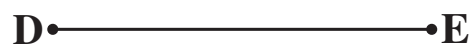


۷. خط d و نقطهٔ A خارج آن، داده شده‌اند. از نقطهٔ A خطی به موازات خط d رسم کنید.

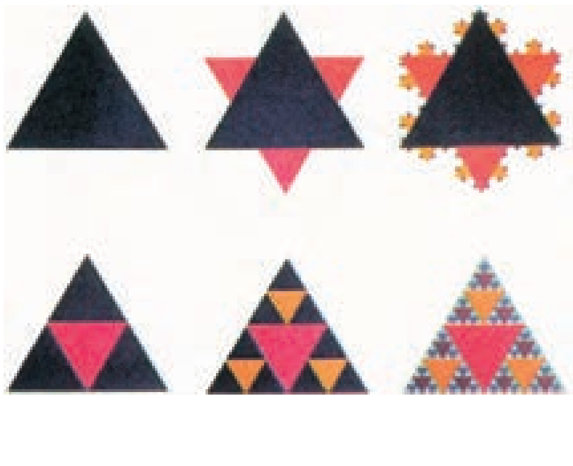
ابوالوفاء بوزجانی مسأله را چنین حل می‌کند :

نقطهٔ دلخواه B را روی خط d اختیار می‌کنیم و دهانهٔ پرگار را به اندازهٔ پاره‌خط AB می‌گشاییم. به مرکز B و به شعاع BA یک دایره رسم می‌کنیم تا خط d را در نقطهٔ C قطع کند، آنگاه به مرکز A و با همان شعاع قبلی دایرهٔ دیگری رسم می‌نماییم. سپس به مرکز B و به شعاعی برابر پاره‌خط AC دایرهٔ دیگری رسم می‌کنیم و نقطهٔ برخورد دو دایره به مرکزهای B و A را D می‌نامیم. از A به D وصل می‌کنیم. AD، خطی است که از نقطهٔ A به موازات خط d رسم می‌شود. دلیل درستی روش ابوالوفاء را بنویسید.

۸. مربعی رسم کنید که پاره‌خط مفروض DE قطر آن باشد.



۹. زاویهٔ XOY داده شده است روی نیم‌خط O′X′ زاویه‌ای به رأس O′ و مساوی زاویهٔ XOY رسم کنید.



قضیه وجود مثلث

در ریاضیات معمولاً مسأله‌ها یا قضیه‌هایی که با اثبات وجود شیء یا ویژگی، سروکار دارند دارای برهانی مشکل هستند و معمولاً در فرآیند اثبات به روندی ساختنی نیاز است. در آموزش ریاضیات دبیرستانی به خاطر پیچیدگی برهان آن از دامن زدن به این گونه قضیه‌ها و مسائل پرهیز می‌شود و در صورت لزوم بصورت یک حکم بدیهی پذیرفته می‌شود. قضیه وجود مثلث نمونه‌ای از اینگونه قضیه‌هاست که با اثبات وجود (مثلث) سروکار دارد.

بررسی اثبات این قضیه و پی بردن به پیچیدگی اثبات می‌تواند مفید باشد.

قضیه وجود مثلث: سه عدد حقیقی و مثبت a ، b و c داده شده‌اند. اگر هر یک از این عددها از مجموع دو عدد دیگر کوچکتر باشد، آنگاه مثلثی وجود دارد که ضلعهای آن a ، b و c هستند. ابتدا (با فهمیدن مسأله) فرض و حکم آن را مشخص می‌کنیم.

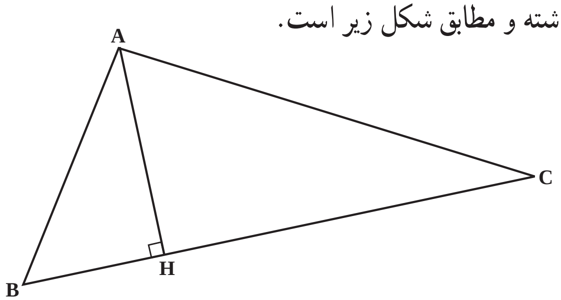
فرض: a ، b و c سه عدد حقیقی مثبت و $a+b>c$ ، $a+c>b$ ، $c+b>a$

حکم: مثلثی چون ABC وجود دارد به‌طوری که a ، b و c اندازه اضلاع آن هستند.

برهان: برای سادگی و بدون کاستن از کلّیت می‌توان فرض کرد $a \geq b \geq c > 0$. چرا؟

پاره‌خط BC را به اندازه a انتخاب می‌کنیم. در این صورت حکم قضیه معادل است با یافتن نقطه‌ای مانند A طوری که $AC=b$ و $AB=c$.

«مسأله را حل شده فرض می‌کنیم» یعنی فرض می‌کنیم مثلث ABC مورد نظر وجود داشته و مطابق شکل زیر است.



H را پای ارتفاع وارد بر BC می‌گیریم

نقطه H بین B و C است (چرا؟). قرار می‌دهیم

$$BH = x \;,\;\; AH = y$$

در این صورت $HC = a - x$.

طبق قضیه فیثاغورس روابط زیر برقرارند.

$$y^۲ = c^۲ - x^۲ \qquad (۱)$$

$$y^۲ = b^۲ - (a - x)^۲ \qquad (۲)$$

با اندکی محاسبه (محاسبات را انجام دهید!) از روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌شود.

$$x = \frac{a^۲ + c^۲ - b^۲}{۲a} \qquad (۳)$$

$$y = \sqrt{c^۲ - x^۲} \qquad (۴)$$

رابطه‌های (۴) و (۱) با رابطه‌های (۳) و (۲) معادل است (نشان دهید!) یعنی اگر x و y در (۱) و (۲) صدق کنند آنگاه در (۳) و (۴) نیز صدق می‌کنند و برعکس.

اکنون به شروع کار بازمی‌گردیم. سه عدد حقیقی و مثبت a ، b و c با شرط $a \geq b \geq c > ۰$ داده شده‌اند. قرار می‌دهیم $x = \frac{a^۲ + c^۲ - b^۲}{۲a}$ و $y = \sqrt{c^۲ - x^۲}$.

باتوجه به فرض قضیه x و y هر دو اکیداً مثبت هستند. (بعنوان یک تمرین سر راست ثابت کنید $x > ۰ \;,\;\; y > ۰$) برای رسم مثلث به کمک خط‌کش و پرگار ضلع BC را به‌طول a رسم می‌کنیم و روی آن BH را به اندازه x جدا می‌کنیم. سپس از نقطه H عمودی رسم کرده و روی آن به اندازه y جدا می‌کنیم نقطه A (نقطه مطلوب) به‌دست می‌آید. به آسانی می‌توان دید که

$$AC = b \;,\;\; AB = c$$