

## کاربردهای مشتق

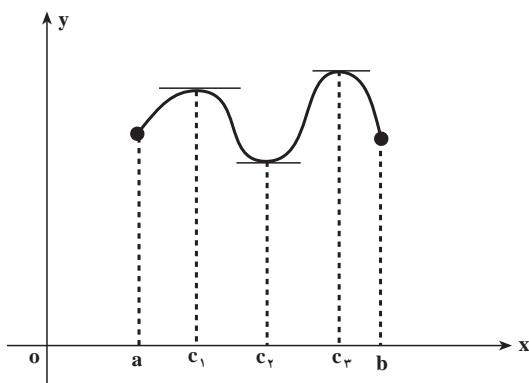
همان‌گونه که در فصل قبل ملاحظه شد تفسیر آهنگ تغییر از مشتق ریشه در مسائل فیزیکی و پدیده‌های طبیعی دارد و تعبیر هندسی مشتق رویکردی نظری و انتزاعی را ارائه می‌دهد. دامنه کاربردهای مشتق در هر دو حیطه توسعه یافته است. کاربردهای مشتق در داخل ریاضیات به بررسی رفتار و شناسایی ویژگی‌های تابع‌ها مربوط می‌شود. مدلسازی مسائل زندگی و پدیده‌های طبیعی و حل و بررسی آن‌ها نیز با مفهوم مشتق در رابطه است. نمونه بارزی از این‌گونه پدیده‌ها، پدیدهٔ رشد و زوال می‌باشد که هم در ارتباط با مشتق و هم در رابطه با انتگرال است که در فصل آخر از آن صحبت خواهیم کرد. در این فصل بعضی از کاربردهای مشتق ارائه می‌شوند.

## ماکزیم و می‌نیم یک تابع

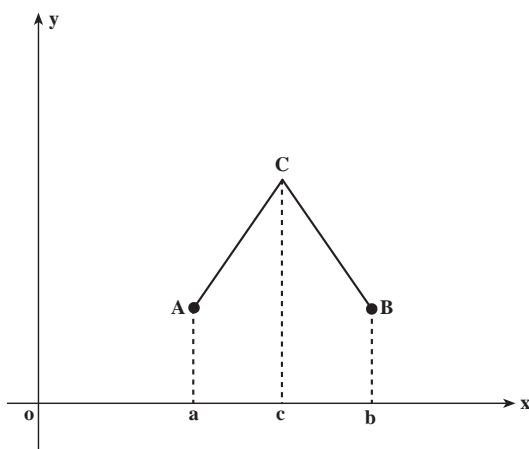
در این بخش نقاط ماکزیم و می‌نیم نمودار یک تابع را تعیین می‌کنیم و بررسی می‌کنیم که در کدام بازه تابع صعودی است و در چه بازه‌ای تابع نزولی است. با به‌دست آوردن این اطلاعات می‌توانیم منحنی نمایش یک تابع را دقیق‌تر رسم کنیم.

**ماکزیم و می‌نیم نسبی و مطلق یک تابع:** تابع  $y = f(x)$  با دامنه  $[a, b]$  مفروض است، فرض می‌کنیم  $(e, g)$  یک بازه شامل  $c$  در دامنه  $f$  است به طوری که به ازای هر  $x \in (e, g)$   $f(x) \leq f(c)$  در این صورت می‌گوییم تابع  $f$  در  $c$  **ماکزیم نسبی** است. اگر به ازای هر  $x \in (e, g)$  داشته باشیم  $f(x) \geq f(c)$  می‌گوییم  $f$  در  $c$  **می‌نیم نسبی** است. اگر به ازای هر  $x \in [a, b]$  داشته باشیم  $f(x) \leq f(c)$  می‌گوییم  $f$  در بازه  $[a, b]$  در نقطه  $c$  **ماکزیم مطلق** است. همچنین اگر به ازای هر  $x \in [a, b]$   $f(x) \geq f(c)$  در بازه  $[a, b]$  در  $c$  **می‌نیم مطلق** است.

ممکن است یک تابع در یک بازه دارای چندین ماکزیم و می‌نیم نسبی باشد ولی مقدار ماکزیم و می‌نیم مطلق آن در صورت وجود منحصر به فرد هستند.



در شکل مقابل منحنی نمایش تابع در  $c_1$ ، ماکزیمم نسبی است، در  $c_2$  می‌نیمم مطلق است، در  $c_3$  نیز ماکزیمم مطلق است. در این شکل تابع داده شده در این سه نقطه مشتق پذیر است، به عبارت دیگر، خطوط مماس بر منحنی در این سه نقطه وجود دارند و با محور  $x$  موازی هستند، در نتیجه شیب خطوط مماس در این سه نقطه صفر است. ممکن است تابعی در  $c \in (a, b)$  ماکزیمم یا می‌نیمم باشد ولی در  $c$  مشتق پذیر نباشد، به شکل مقابل توجه کنید:



تابع  $y = f(x)$  با دامنه  $[a, b]$  که منحنی نمایش آن از دو پاره خط  $AC$  و  $BC$  تشکیل یافته است را ملاحظه می‌کنیم، این تابع در  $c$  ماکزیمم مطلق است ولی تابع در  $c$  مشتق پذیر نیست. مشتق چپ آن شیب خط  $AC$  است و مشتق راست آن شیب خط مستقیم  $BC$  می‌باشد، بنابراین، مشتق‌های

چپ و راست تابع در  $c$  یکی نیستند. در نتیجه تابع در  $c$  مشتق پذیر نیست.

چگونه می‌توان ماکزیمم و می‌نیمم یک تابع را تعیین نمود؟ در قضیه زیر تا حدودی به این پرسش پاسخ داده می‌شود. این قضیه را بدون اثبات می‌پذیریم.

**قضیه ۱:** تابع  $f(x)$  با دامنه  $[a, b]$  مفروض است، فرض کنیم در  $c \in (a, b)$  ماکزیمم نسبی (می‌نیمم نسبی) است، علاوه بر آن فرض می‌کنیم  $f$  در  $c$  مشتق پذیر باشد، در این صورت  $f'(c) = 0$ .  
با توجه به قضیه ۱ و آنچه که در بالا گفته شد نقاط ماکزیمم و می‌نیمم نسبی یا مطلق یک تابع نقاطی هستند که مقدار مشتق در آن نقاط صفر است، یا مشتق وجود ندارد.

**تعریف:** تابع  $f$  با دامنه  $[a, b]$  مفروض است، نقاطی از بازه  $(a, b)$  که مشتق  $f$  در آن نقاط صفر است یا نقاطی از این بازه که مشتق  $f$  در آن نقاط وجود ندارد را **نقاط بحرانی** تابع  $f$  می‌نامند.

قضیه زیر یک خاصیت دیگر توابع پیوسته را بیان می‌کند، از این قضیه برای اثبات قضیه‌های بعدی استفاده می‌کنیم، خود این قضیه را بدون اثبات می‌پذیریم.

**قضیه ۲:** اگر تابع  $f$  بر بازه بسته  $[a, b]$  پیوسته باشد،  $f$  در این بازه دارای ماکزیمم مطلق و می‌نیمم مطلق خواهد بود.

با توجه به این قضیه اگر تابع  $f$  بر بازه بسته  $[a, b]$  پیوسته باشد آنگاه  $f$  در این بازه دارای ماکزیمم مطلق و می‌نیمم مطلق است. چگونه می‌توان این ماکزیمم مطلق و می‌نیمم مطلق را به دست آورد؟ ابتدا نقاط بحرانی تابع  $f$  را به دست می‌آوریم و مقادیر تابع  $f$  را به ازای این نقاط بحرانی محاسبه می‌کنیم، سپس  $f(a)$  و  $f(b)$  را محاسبه می‌کنیم، در این مقادیرها، کوچکترین آن‌ها می‌نیمم مطلق تابع و بزرگترین آن‌ها ماکزیمم مطلق تابع خواهد بود.

**مثال ۱:** تابع  $f(x) = x^{\frac{5}{3}} - x^{\frac{2}{3}}$  با دامنه  $[-8, 27]$  را در نظر بگیرید، ماکزیمم و می‌نیمم مطلق آن را به دست آورید.

**حل:** ابتدا نقاط بحرانی این تابع را به دست می‌آوریم. توجه داریم که

$$f'(x) = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} - \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$$

بنابراین،  $f'(x) = 0$  نتیجه می‌دهد

$$\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} - \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = 0$$

و از آنجا  $4x^2 - 1 = 0$  در نتیجه

$$x = \pm \frac{1}{2}$$

از  $f'(x) = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} - \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$  دیده می‌شود که مشتق تابع در  $x = 0$  وجود ندارد بنابراین، مجموعه

نقاط بحرانی تابع عبارت است از  $\{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\}$ .

توجه داریم که  $f(\frac{1}{2}) = f(-\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})^{\frac{5}{3}} - (\frac{1}{2})^{\frac{2}{3}}$  و از آنجا  $f(\frac{1}{2}) = f(-\frac{1}{2}) = -\frac{3}{4\sqrt[3]{4}}$ ،

در ضمن  $f(0) = 0$ . حال مقادیر تابع  $f$  را در دو نقطه انتهایی بازه  $[-8, 27]$  محاسبه می‌کنیم، و از آنجا

$$f(27) = 6561 - 9 = 6552 \text{ و } f(-28) = 252. \text{ بنابراین}$$

$$\min \left\{ -\frac{3}{4\sqrt[3]{4}}, 0, 252, 6552 \right\} = -\frac{3}{4\sqrt[3]{4}}, \quad \max \left\{ -\frac{3}{4\sqrt[3]{4}}, 0, 252, 6552 \right\} = 6552$$

یعنی می‌نیمم مطلق این تابع برابر  $-\frac{3}{4\sqrt[3]{4}}$  و ماکزیمم مطلق آن برابر ۶۵۵۲ است.

مثال ۲: ماکزیمم مطلق تابع  $f(x) = x\sqrt{a^2 - x^2}$  را، که در آن  $-a \leq x \leq a$  و مقدار مثبتی

است، پیدا کنید.

$$f'(x) = \sqrt{a^2 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad \text{حل:}$$

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad \text{از حل معادله } f'(x) = 0 \text{ نتیجه می‌شود که}$$

$$x^2 = \frac{a^2}{2} \quad \text{یا} \quad a^2 - x^2 = x^2 \quad \text{بنابراین}$$

پس  $x = \pm \frac{a\sqrt{2}}{2}$ ، ملاحظه می‌کنیم که تابع مورد بحث در  $x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$  ماکزیمم مطلق و در

$$x = -\frac{a\sqrt{2}}{2} \text{ می‌نیمم مطلق دارد.}$$

## مسائل

در مسایل ۱ تا ۵ نقاط بحرانی توابع داده شده را به دست آورید.

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 6 \quad -1$$

$$g(x) = 2x^3 - 2x^2 - 16x + 1 \quad -2$$

$$g(x) = x^{\frac{6}{5}} - 12x^{\frac{1}{5}} \quad -3$$

$$f(x) = (x^3 - 3x^2 + 4)^{\frac{1}{3}} \quad -4$$

$$f(x) = x^{\frac{5}{6}} - \frac{5}{2}x^{\frac{2}{3}} + 5 \quad -5$$

در مسایل ۶ تا ۱۱ مقادیر ماکزیمم و می‌نیمم مطلق توابع مفروض بر بازه داده شده را در صورت

وجود محاسبه کنید.

$$[-1, 4] \quad ; \quad g(x) = x^2 - 8x^2 + 16 \quad -6$$

$$[-3, -1] \quad ; \quad f(x) = x^2 + 5x - 4 \quad -7$$

$$[-2, 1] \quad : \quad f(x) = (x+1)^{\frac{2}{3}} \quad \text{—۸}$$

$$[-5, 4] \quad : \quad f(x) = 1 - (x-3)^{\frac{2}{3}} \quad \text{—۹}$$

$$[0, 64] \quad : \quad f(x) = x^{\frac{1}{6}} - \frac{1}{4}x^{\frac{2}{3}} + 5 \quad \text{—۱۰}$$

$$[-2, 3] \quad : \quad f(x) = 2x^2 - 9x + 12x + 6 \quad \text{—۱۱}$$

دیدیم که اگر تابع  $f(x)$  در نقطه درونی  $x = x_0$  دارای یک ماکزیمم یا می نیمم نسبی (مطلق) باشد و  $f'(x_0)$  موجود باشد آنگاه  $f'(x_0) = 0$ ، چگونه می توان تشخیص داد که تابع  $f(x)$  در  $x = x_0$  دارای یک ماکزیمم نسبی است یا یک می نیمم نسبی؟ برای پاسخ به این پرسش از آزمون مشتق اول استفاده می کنیم. قبل از بیان قضیه مربوطه متذکر می شویم که اگر تابع  $f$  در بازه  $(a, b)$  تعریف شده باشد و  $x_0 \in (a, b)$  موجود باشد به طوری که  $f(x_0) = 0$  و به ازای هر  $x \in (a, x_0)$  داشته باشیم  $f(x) > 0$  و به ازای هر  $x \in (x_0, b)$  داشته باشیم  $f(x) < 0$  می گویند تابع  $f$  در  $x_0$  تغییر علامت می دهد و از مثبت به منفی می رود. اگر به ازای هر  $x \in (a, x_0)$  داشته باشیم  $f(x) < 0$  و به ازای هر  $x \in (x_0, b)$  داشته باشیم  $f(x) > 0$  باز هم می گویند در  $x_0$  تغییر علامت می دهد و از منفی به مثبت می رود.

**قضیه ۳ (تشخیص ماکزیمم نسبی از می نیمم نسبی با استفاده از آزمون مشتق اول):**

فرض می کنیم تابع  $f$  در بازه بسته  $[a, b]$  پیوسته و در بازه  $(a, b)$  مشتق پذیر باشد، عدد  $x_0 \in (a, b)$  به گونه ایست که  $f'(x_0) = 0$  و  $f'$  در  $x_0$  تغییر علامت می دهد و از مثبت به منفی می رود آنگاه  $f$  در  $x_0$  دارای یک ماکزیمم نسبی است.

چنانکه هنگام عبور از  $x_0$  تابع  $f'$  از منفی به مثبت برود به طریق مشابه می توان ثابت نمود که  $f$  در  $x_0$  دارای یک می نیمم نسبی است.

**مثال:** ماکزیمم و می نیمم نسبی تابع  $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{4}x^2 + 6x + 10$  را به دست آورید، آیا این

تابع ماکزیمم و می نیمم مطلق دارد؟ چرا؟

**حل:** از  $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{4}x^2 + 6x + 10$  نتیجه می شود  $y' = x^2 - 5x + 6$ ، حال سعی می کنیم

این  $y'$  را به حاصل ضرب چند جمله ای های درجه اول یا دوم تجزیه کنیم، برای این منظور ابتدا ریشه های معادله  $0 = x^2 - 5x + 6$  را محاسبه می کنیم، این ریشه ها عبارتند از  $x = 2$  و  $x = 3$ ، بنابراین،  $y' = (x-2)(x-3)$  حال  $y'$  را تعیین علامت می کنیم.

x	-∞	۲	۳	+∞
$y' = x^2 - 5x + 6$	+	۰	-	۰
			+	

با توجه به این جدول دیده می‌شود که در  $x = 2$ ,  $y' > 0$  از مثبت به منفی می‌رود و با توجه به قضیه قبل در  $x = 2$  تابع دارای یک ماکزیمم نسبی است، در  $x = 3$ ,  $y' < 0$  از منفی به مثبت می‌رود و به موجب قضیه قبل تابع داده شده در  $x = 3$  دارای یک می‌نیمم نسبی است. توجه داریم که

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x + 10 \right) = -\infty$$

و

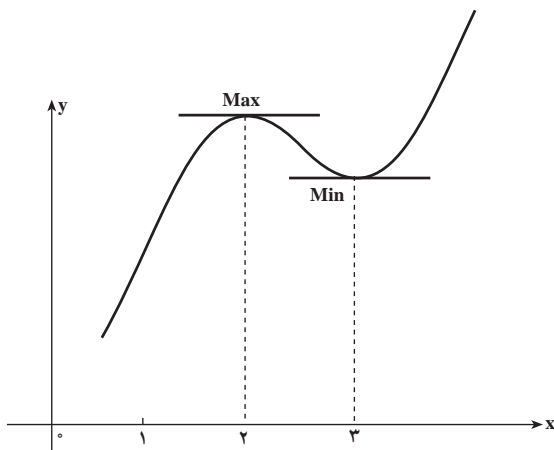
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x + 10 \right) = +\infty$$

بنابراین، تابع  $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x + 10$  ماکزیمم و می‌نیمم مطلق ندارد. جدول تغییرات این تابع به شکل زیر است

x	-∞	۲	۳	+∞
y'	+	۰	-	۰
y	-∞	↗ $\frac{44}{3}$	↘ $\frac{29}{2}$	↗ +∞

با توجه به این جدول دیده می‌شود که در بازه  $(-\infty, 2)$  داریم  $y' > 0$  و با توجه به قضیه‌ای که داشتیم در این بازه تابع صعودی است، در بازه  $(2, 3)$  داریم  $y' < 0$  و به موجب همان قضیه تابع در این بازه نزولی است. در بازه  $(3, +\infty)$  نیز تابع صعودی است. با توجه به این جدول، منحنی نمایش تغییرات

تابع  $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x + 10$  به شکل مقابل است:



در تمرین‌های ۱ تا ۴ ماکزیمم و می‌نیمم نسبی توابع داده شده را به دست آورید.

$$y = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 3^0 \quad -1$$

$$y = 3x^5 - 25x^2 + 60x + 1^0 \quad -2$$

$$y = x^4 - 8x^2 + 22x^2 - 24x + 10^0 \quad -3$$

$$y = x^4 - 12x^2 + 52x^2 - 96x + 10^0 \quad -4$$

۵- در تمرین‌های ۱ تا ۴، آیا توابع داده شده دارای ماکزیمم یا می‌نیمم مطلق هستند؟ چرا؟

۶- ثابت کنید تابع  $y = x^2$  همواره صعودی است و از آنجا نتیجه بگیرید که این تابع ماکزیمم و

می‌نیمم ندارد.

۷- در تابع  $y = 2x^2 - 9x^2 + 12x + 3^0$  ثابت کنید پاره خطی که نقاط ماکزیمم و می‌نیمم روی

نمودار تابع را به هم وصل می‌کند توسط منحنی نمایش تابع به دو قسمت مساوی تقسیم می‌شود.

۸- ضرایب ثابت  $a$  و  $b$  را چنان تعیین کنید که تابع با ضابطه  $f(x) = x^2 + ax^2 + b$  در  $(2, 3)$

یک ماکزیمم یا می‌نیمم نسبی داشته باشد.

۹- ضرایب  $a$ ،  $b$ ،  $c$  را چنان تعیین کنید که تابع با ضابطه  $f(x) = ax^2 + bx + c$  در  $x = 1$

دارای مقدار ماکزیمم نسبی ۷ باشد و نمودار تابع  $y = f(x)$  از نقطه  $(2, -2)$  بگذرد.

۱۰- تابع  $f(x) = x^{2n+1}$  مفروض است که در آن  $n$  یک عدد صحیح و مثبت است، ثابت کنید

که این تابع صعودی است و از آنجا نتیجه بگیرید که ماکزیمم و می‌نیمم نسبی ندارد.

۱۱- تابع  $y = x^{2n}$  مفروض است که در آن  $n$  یک عدد صحیح و مثبت است، ثابت کنید که این

تابع در  $x = 0$  دارای یک می‌نیمم مطلق است.

### مشتقات مراتب بالاتر

چنانکه تابع  $y = f(x)$  مشتق پذیر باشد، مشتق مرتبه اول آن را با علامت  $y' = f'(x)$  نشان می‌دهند.

اگر تابع  $f'(x)$  نیز مشتق پذیر باشد مشتق آن را با  $y'' = f''(x)$  نشان می‌دهند، چنانکه تابع  $f''(x)$  باز هم

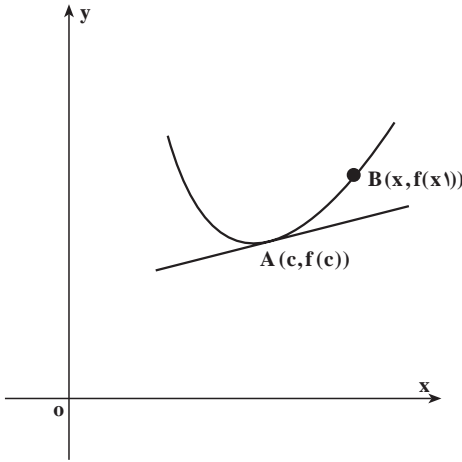
مشتق پذیر باشد مشتق آن را با  $y''' = f'''(x)$  نشان می‌دهند. به طور کلی، مشتق مرتبه  $n$ ام تابع

$$y = f(x) \text{ را با علامت } y^{(n)} = f^{(n)}(x) \text{ نشان می‌دهند. توجه داریم که } f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)}(x))'$$

## تقعر منحنی و نقاط عطف آن

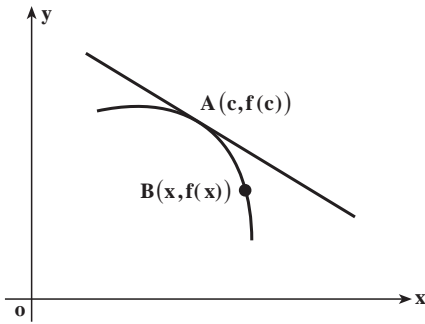
تعریف ۱: می‌گویند تقعر منحنی نمایش

تابع  $y = f(x)$  در نقطه  $A(c, f(c))$  رو به بالا است هرگاه  $f'(c)$  موجود باشد و بازه بازی مانند  $I$  شامل  $c$  یافت شود که به ازای هر  $x \neq c$  در  $I$ ، نقطه  $B(x, f(x))$  روی منحنی، بالای خط مماس بر منحنی در نقطه  $A(c, f(c))$  باشد (شکل مقابل).



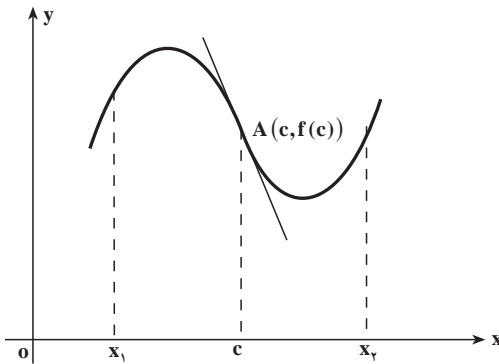
تعریف ۲: می‌گویند تقعر منحنی نمایش

تابع  $y = f(x)$  در نقطه  $A(c, f(c))$  رو به پایین است هرگاه  $f'(c)$  موجود باشد و بازه بازی مانند  $I$  شامل  $c$  یافت شود که به ازای هر  $x \neq c$  در  $I$ ، نقطه  $B(x, f(x))$  روی منحنی، پایین خط مماس بر منحنی در نقطه  $A(c, f(c))$  باشد (شکل مقابل).



تعریف ۳: می‌گویند نقطه  $A(c, f(c))$

یک نقطه عطف منحنی نمایش تابع  $y = f(x)$  است هرگاه خط مماس بر منحنی در نقطه  $A$  موجود باشد و دو عدد  $x_1 < c$  و  $x_2 > c$  موجود باشد به طوری که تقعر منحنی در هر نقطه  $B(x, f(x))$ ،  $x \in (x_1, c)$  با تقعر آن در هر نقطه  $C(x, f(x))$ ،  $x \in (c, x_2)$  متفاوت باشد (شکل مقابل).



فرض می‌کنیم تابعی مانند  $f$  روی یک بازه باز شامل  $c$  مشتق پذیر باشد. آنگاه ثابت می‌کنند:

- ۱) اگر  $f''(c) > 0$  تقعر منحنی نمایش تابع  $y = f(x)$  در نقطه  $A(c, f(c))$  رو به بالا است.
- ۲) اگر  $f''(c) < 0$  تقعر منحنی نمایش تابع  $y = f(x)$  در نقطه  $A(c, f(c))$  رو به پایین است.



۳) اگر  $C(d, f(d))$  یک نقطه عطف منحنی نمایش تابع  $y = f(x)$  باشد، آنگاه اگر  $f''(d)$  موجود باشد ثابت می‌کنند  $f''(d) = 0$ .

بنابراین، طول نقاط عطف نمایش تابع  $y = f(x)$  از حل معادله  $f''(x) = 0$  به دست می‌آیند، البته همه  $x$ هایی که از حل این معادله به دست می‌آیند نشان‌دهنده نقاط عطف منحنی نیستند، آن‌هایی نقاط عطف را نشان می‌دهند که در آنها  $f''(x)$  تغییر علامت بدهد.

به عنوان مثال، منحنی نمایش تابع  $y = x^3 + 2x^2 + 3x + 1$  را در نظر می‌گیریم، ملاحظه می‌کنیم که  $y' = 3x^2 + 4x + 3$  و  $y'' = 6x + 4$  بنابراین،  $y'' = 0$  نتیجه می‌دهد  $x = -\frac{2}{3}$ ، ملاحظه می‌کنیم که تابع  $y'' = 6x + 4$  در نقطه  $x = -\frac{2}{3}$  تغییر علامت می‌دهد، بنابراین،  $x = -\frac{2}{3}$  طول نقطه عطف منحنی است. منحنی نمایش تابع  $y = (x-1)^4$  را در نظر می‌گیریم، ملاحظه می‌کنیم که  $y' = 4(x-1)^3$  و  $y'' = 12(x-1)^2$  بنابراین،  $y'' = 0$  نتیجه می‌دهد  $x = 1$ ، در  $x = 1$  تابع  $y'' = 12(x-1)^2$  تغییر علامت نمی‌دهد، در نتیجه  $x = 1$  طول نقطه عطف منحنی نیست.

مثال: ثابت کنید نقطه عطف منحنی نمایش تابع  $y = x^3 - 4x^2 - 3x + 1$  مرکز تقارن آن است.

حل: از  $y = x^3 - 4x^2 - 3x + 1$  نتیجه می‌شود  $y' = 3x^2 - 8x - 3$  و  $y'' = 6x - 8$ . از حل معادله  $y'' = 0$  نتیجه می‌شود  $6x - 8 = 0$  و از آنجا  $x = \frac{4}{3}$ ، چون  $y'' = 6x - 8$  درجه اول است، در  $x = \frac{4}{3}$  تغییر علامت می‌دهد و از منفی به مثبت می‌رود، بنابراین  $x = \frac{4}{3}$  طول نقطه عطف منحنی است. با قرار دادن  $x = \frac{4}{3}$  در معادله  $y = x^3 - 4x^2 - 3x + 1$  داریم

$$y = \left(\frac{4}{3}\right)^3 - 4\left(\frac{4}{3}\right)^2 - 3\left(\frac{4}{3}\right) + 1$$

و از آنجا

$$y = \frac{34}{27}$$

بنابراین، نقطه عطف منحنی است. حال مبدأ مختصات را به نقطه  $A\left(\frac{4}{3}, \frac{34}{27}\right)$  انتقال

می‌دهیم در نتیجه  $x = X + \frac{4}{3}$  و  $y = Y + \frac{34}{27}$  با قرار دادن در معادله منحنی داده شده داریم

$$Y + \frac{34}{27} = \left(X + \frac{4}{3}\right)^3 - 4\left(X + \frac{4}{3}\right)^2 - 3\left(X + \frac{4}{3}\right) + 1$$

و از آنجا

$$Y = X^3 - \frac{25}{3}X$$

با تبدیل  $X \rightarrow -X$  و  $Y \rightarrow -Y$  این معادله تغییر نمی‌کند، پس مبدأ مختصات جدید با همان نقطهٔ عطف  $A(\frac{4}{3}, \frac{34}{27})$  مرکز تقارن منحنی نمایش تابع  $y = x^3 - 4x^2 - 3x + 1$  است.

## مسائل

در مسایل ۱ تا ۵، تعیین کنید که در چه بازه‌ای تقعر منحنی تابع داده شده رو به بالا است، در چه بازه‌ای تقعر آن رو به پایین است، و نقاط عطف را نیز در صورت وجود به دست آورید.

$$1- \quad y = 16x^4 + 32x^3 + 24x^2 - 5x - 2$$

$$2- \quad y = x^4 - 8x^2 + 24x$$

$$3- \quad y = \frac{x}{x^2 - 1}$$

$$4- \quad y = \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{6}x^3 - x^2$$

$$5- \quad y = x^2 + 3x^2 - 3x + 3$$

۶- نقاط ماکزیمم و می‌نیمم نسبی و نقطهٔ عطف منحنی نمایش تابع  $y = x^3 - 4x^2 - 3x + 1$  به دست آورید. ثابت کنید که این سه نقطه بر یک استقامت هستند و نقطه عطف وسط پاره خطّ واصل بین نقاط ماکزیمم و می‌نیمم نسبی است.

۷-  $y = ax^2 + bx^2 + cx + d$  ضرایب  $a, b, c, d$  را چنان تعیین کنید که این تابع در  $(3, 0)$  دارای یک ماکزیمم یا می‌نیمم نسبی باشد و منحنی نمایش آن در  $(-1, 1)$  یک نقطهٔ عطف داشته باشد.

۸- اگر  $y = ax^2 + bx^2 + cx + d$  ضرایب ثابت  $a$  و  $b$  را چنان تعیین کنید که منحنی نمایش این تابع در نقطهٔ  $(1, 2)$  دارای یک نقطهٔ عطف باشد.

۹- طول نقاط عطف یک منحنی به معادلهٔ  $y = (x^2 - 7x + 14)e^x$  را بدست آورید.

## رسم نمودار یک تابع

پیش از این با رسم نمودار توابع از طریق نقطه‌یابی و انتقال آشنا شده‌ایم. این روش محدودیت‌های بسیاری دارد و فقط در مورد توابع ساده قابل به‌کار بردن است. علاوه بر این رسم نمودار تابع با این

روش دقت بسیار کمی دارد.

برای توابع مشتق پذیر، از طریق مشتق تابع می توان بازه هایی که تابع در آن ها صعودی یا نزولی است، تشخیص داد و می توان جاهایی که تابع تغییر جهت می دهد و از حالت صعودی به نزولی و از حالت نزولی به صعودی تغییر وضعیت می دهد تشخیص داد و با مشتق دوم جهت تقعر نمودار تابع را مشخص کرد و با رسم جدول تغییرات تابع، چگونگی تغییرات تابع را با دقت کافی به دست آورد. برای توابع پیوسته با دامنه IR که مشتق پذیری هم دارند، تعیین علامت مشتق تابع و نقاط بحرانی تابع نقش اصلی را در رسم تابع بازی می کنند.

مثال: نمودار تابع  $y = -x^2 + 2x + 3$  را رسم کنید.

حل: داریم  $y' = -2x + 2$  در  $x = 1$  صفر است و علامت  $y'$  و وضعیت صعودی و نزولی

این تابع در جدول زیر مشخص شده است.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'		+	-
y		↗ 4 ↘	

برای دقت بیشتر لازم است حد تابع در  $+\infty$  و  $-\infty$  نیز معلوم گردد. در این مثال

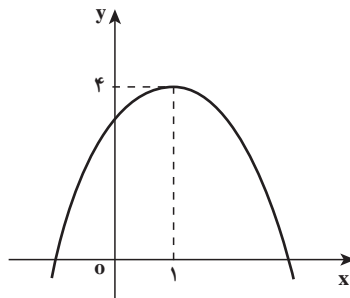
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -x^2 + 2x + 3 = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} -x^2 + 2x + 3 = -\infty$$

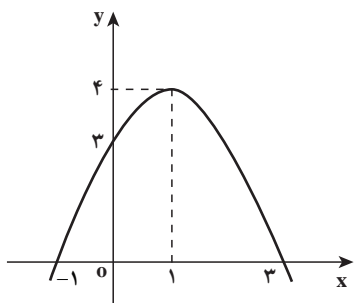
پس جدول به شکل زیر در می آید.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'		+	-
y	$-\infty$	↗ 4 ↘	$-\infty$

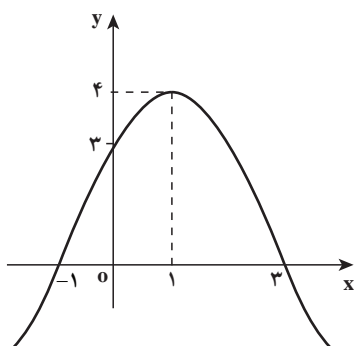
این جدول نشان می دهد که با تغییر x از  $-\infty$  تا 1، مقدار تابع از  $-\infty$  تا 4 صعود می کند و سپس

با تغییر x از 1 تا  $+\infty$ ، مقدار تابع از 4 تا  $-\infty$  نزول می کند.





برای رسم بهتر، می‌توانیم محل تلاقی نمودار را با محور  $x$  ها و  $y$  ها به دست آوریم. جواب‌های معادله  $y = -x^2 + 2x + 3 = 0$ ، نشان‌دهنده محل‌های برخورد نمودار با محور  $x$  ها هستند (چرا؟). جواب‌های این معادله  $x = -1$  و  $x = 3$  هستند. به ازای  $x = 0$  داریم  $y = 3$  که محل برخورد نمودار تابع با محور  $y$  ها را نشان می‌دهد (چرا؟)



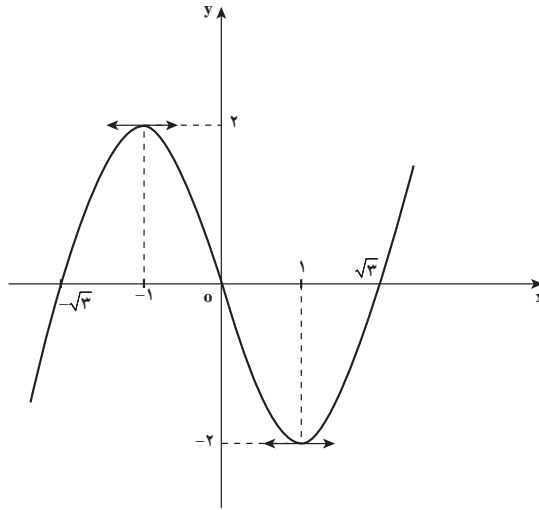
هنوز هم منحنی‌های زیادی هستند که می‌توانند از این نقاط بگذرند و به همین شکل صعود و نزول کنند، مثلاً منحنی مقابل. از کجا مطمئن هستیم که این منحنی نادرست است؟ با بررسی وضعیت تقعر نمودار تابع می‌توان تشخیص داد که کدام نمودار درست است. بنابراین مناسب است که در جدول تغییرات تابع علامت  $y''$  را نیز مشخص کنیم. داریم  $y'' = -2$ . پس تقعر نمودار تابع همواره به سمت پایین است و نمودار

بالایی صحیح نیست. علاوه بر این در هر نقطه از نمودار تابع با محاسبه مقدار  $y'$  وضعیت خط مماس را می‌توان تشخیص داد و معلوم می‌شود نمودار تابع در هر نقطه با چه زاویه‌ای نسبت به محور  $x$  ها در حال تغییر است.

مثال: نمودار تابع  $y = x^3 - 3x$  را رسم کنید.

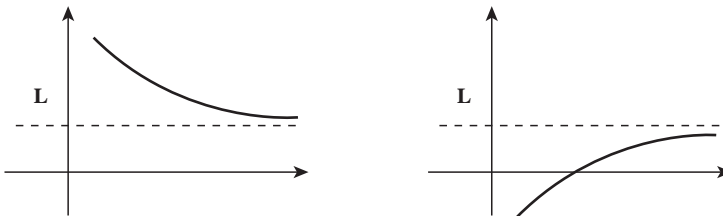
حل: داریم  $y' = 3x^2 - 3$  و  $y'' = 6x$  و معادله  $x^3 - 3x = 0$  دارای سه جواب  $x = 0$  و  $x = \pm\sqrt{3}$  است و نمودار تابع در سه نقطه محور  $x$  ها را قطع می‌کند. به ازای  $x = 0$  داریم  $y = 0$  و نمودار تابع در همین نقطه محور  $y$  ها را قطع می‌کند. حد این تابع در  $+\infty$ ،  $+\infty$  است و حد این تابع در  $-\infty$ ،  $-\infty$  است. جدول تغییرات تابع به شکل زیر است.

$x$	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	$-1$	$0$	$1$	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$y'$	$+$	$+$	$0$	$-$	$-$	$0$	$+$
$y$	$-\infty$	$\nearrow$	$0$	$\nearrow$	$2$	$\searrow$	$0$
$y''$	$-$	$-$	$-$	$0$	$+$	$+$	$+$
	تقعر رو به پایین			عطف	تقعر رو به بالا		

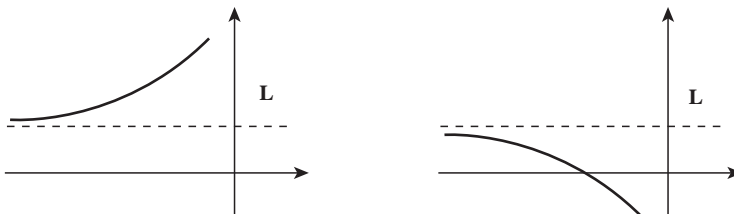


### مجانب‌های نمودار توابع

در توابعی که حد آن‌ها در  $+\infty$  عددی مانند  $L$  شود، نمودار تابع به گونه‌ای خواهد شد که در مقادیر بزرگ  $x$  به خط افقی  $y = L$  نزدیک می‌شود. در این حالت گوییم خط  $y = L$  مجانب افقی تابع در  $+\infty$  است. شکل‌های زیر نمونه‌ای از مجانب افقی در  $+\infty$  است.



به‌طور مشابه اگر حد تابعی در  $-\infty$  برابر عدد  $L$  شود، نمودار تابع در مقادیر منفی  $x$  که از لحاظ قدر مطلق بزرگ هستند، به خط افقی  $y = L$  نزدیک می‌شود و در این حالت گوییم خط  $y = L$  مجانب افقی نمودار تابع در  $-\infty$  است. شکل‌های زیر نمونه‌هایی از مجانب افقی در  $-\infty$  است.

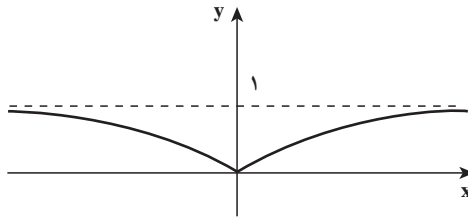


مثال: نمودار تابع  $y = \frac{x^2}{x^2 + 1}$  را رسم کنید.

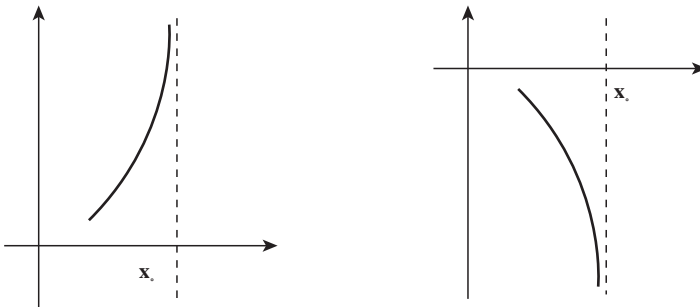
حل: داریم 
$$y' = \frac{2x(x^2 + 1) - 2x \times x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$$

$y' = 0$  در  $x = 0$  صفر است و علامت آن همان علامت  $2x$  است. حد این تابع در  $\pm\infty$  برابر ۱ است. پس  $y = 1$  مجانب افقی آن در  $\pm\infty$  است.

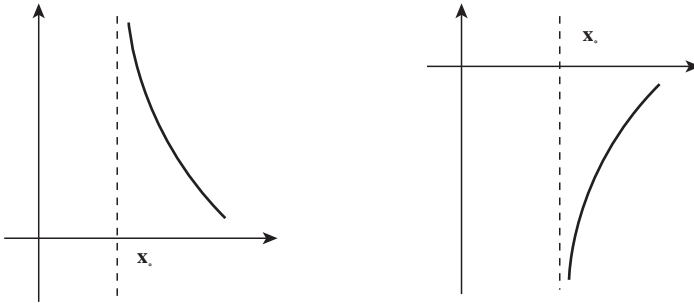
$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$y'$		$-$	$+$
$y$	$1$	$0$	$1$



در برخی توابع ممکن است حد چپ تابعی در نقطه  $x_0$ ،  $+\infty$  (یا  $-\infty$ ) شود. در این موارد خط عمودی  $x = x_0$  به گونه‌ای است که نمودار تابع با نزدیک شدن  $x$  به  $x_0$  از چپ، به این خط در مقادیر بزرگ مثبت (یا مقادیر منفی از لحاظ قدرمطلق بزرگ) نزدیک می‌شود. در این حالت گوییم خط عمودی  $x = x_0$  یک مجانب قائم نمودار تابع است. شکل‌های زیر نمونه‌ای از مجانب قائم در قسمت چپ  $x_0$  را نشان می‌دهد.



در حالتی که حد راست تابع در  $x_0$ ،  $+\infty$  (یا  $-\infty$ ) باشد، مجدداً خط عمودی  $x = x_0$  را یک مجانب قائم نمودار تابع می‌نامند و شکل‌های زیر نمونه‌هایی از این حالت را نشان می‌دهند.



مثال: نمودار تابع  $y = \frac{1}{x^2 - 1}$  را رسم کنید.

حل: دامنه این تابع نقاط  $\pm 1$  را ندارد و در این نقاط داریم

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x^2 - 1} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x^2 - 1} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{x^2 - 1} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{x^2 - 1} = +\infty$$

بنابراین خط‌های  $x = 1$ ،  $x = -1$  از مجانب‌های قائم این تابع می‌باشند.

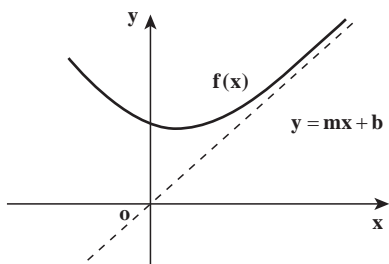
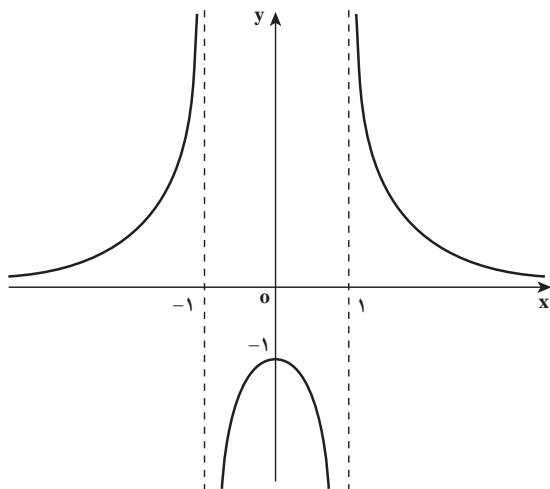
از آن‌جا که  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^2 - 1} = 0$ ، خط  $y = 0$  نیز مجانب افقی تابع در  $\pm\infty$  است. هیچ‌گاه

صفر نمی‌شود، پس نمودار تابع محور  $x$ ها را قطع نمی‌کند. به ازای  $x = 0$  داریم  $y = 1$ ، پس نمودار تابع در  $y = 1$  محور  $y$ ها را قطع می‌کند.

همچنین داریم  $y' = \frac{-2x}{(x^2 - 1)^2}$ ، پس در  $x = 0$ ،  $y'$  صفر می‌شود و علامت آن همان علامت

$-2x$  است. جدول تغییرات این تابع به صورت زیر است.

$x$	$-\infty$		$-1$		$0$		$1$		$+\infty$
$y'$		$+$		$+$	$0$	$-$		$-$	
$y$	$0$		$+\infty$		$-1$		$+\infty$		$0$



مجانِب مایل: در حالت‌هایی که حد تابع  $f(x)$

در  $+\infty$  یا  $-\infty$  برابر بینهایت شود ممکن است بتوان خطی به صورت  $y = mx + b$  یافت به گونه‌ای که مقادیر  $f(x)$  و  $mx + b$  در  $+\infty$  یا  $-\infty$  نزدیک هم باشند و نمودار  $f(x)$  و خط  $y = mx + b$  در  $+\infty$  یا  $-\infty$  به هم نزدیک شوند، مانند شکل مقابل.

در این حالت خط  $y = mx + b$  را یک مجانب مایل نمودار تابع  $f$  می‌نامند. به‌طور دقیق‌تر گوییم خط  $y = mx + b$  یک مجانب نمودار تابع در  $+\infty$  است هرگاه

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (mx + b)) = 0$$

شکل بالا نشان‌دهنده همین وضعیت می‌باشد. گوییم خط  $y = mx + b$  یک مجانب نمودار  $f$  در  $-\infty$  است هرگاه

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (mx + b)) = 0$$

در حالت  $m \neq 0$  این مجانب‌ها را مجانب مایل می‌نامند.

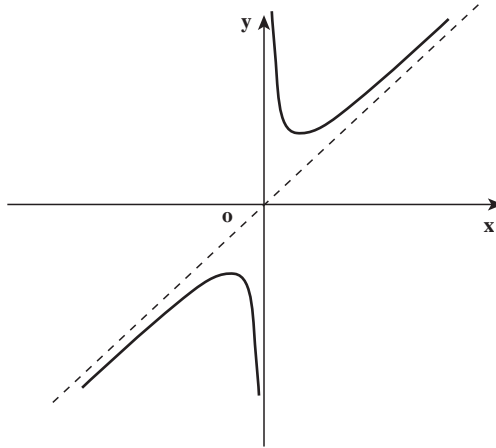
مثال: در تابع  $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$ ، خط  $x = 0$  مجانب قائم و خط  $y = x$  در  $+\infty$  و  $-\infty$  مجانب

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{x^2 + 1}{x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$$

مایل است زیرا

با رسم جدول تغییرات تابع دیده می‌شود نمودار تابع به شکل زیر است.



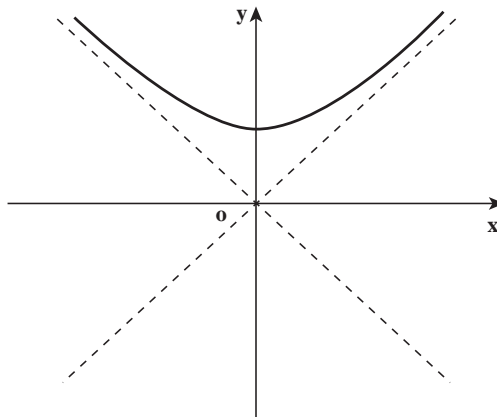


مثال: در تابع  $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ ، خط  $y = x$  در  $+\infty$  مجانب مایل نمودار تابع است و خط  $y = -x$  در  $-\infty$  مجانب مایل نمودار تابع است زیرا

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1+x^2} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{1+x^2} - x)(\sqrt{1+x^2} + x)}{\sqrt{1+x^2} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^2} + x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{1+x^2} - (-x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{1+x^2} + x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^2} - x} = 0$$

با رسم جدول تغییرات تابع دیده می‌شود که نمودار تابع به شکل زیر است.



یکی از راه‌های یافتن مجانب مایل نمودار تابع  $f$  آن است که با محاسبات جبری، ضابطه  $f(x)$  را به صورت  $f(x) = g(x) + mx + b$  دریاوریم به گونه‌ای که  $g(x)$  تابعی باشد که در  $+\infty$  یا  $-\infty$  حد صفر داشته باشد.

روشن است که در این حالت شرط  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (mx + b)) = 0$  خود به خود برقرار می‌شود و  $y = mx + b$  یک مجانب مایل نمودار  $f$  خواهد بود.

مثال: مجانب‌های مایل تابع  $f(x) = \frac{x^3 + x^2 + 2x}{x^2 + 1}$  را بیابید.

حل: با تقسیم صورت بر مخرج داریم:

$$f(x) = x + 1 + \frac{x-1}{x^2+1}$$

چون  $\frac{x-1}{x^2+1}$  در  $+\infty$  و  $-\infty$  حد صفر دارد خط  $y = x + 1$  در  $+\infty$  و  $-\infty$  مجانب مایل نمودار  $f$  است.

در حالت کلی برای یافتن مجانب مایل باید عملیات زیر را به کار ببریم. اگر نمودار  $f$  در  $+\infty$

دارای خط مجانبی به صورت  $y = mx + b$  باشد از شرط  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (mx + b)) = 0$  می‌توان با

تقسیم تابع  $f(x) - (mx + b)$  بر  $x$  نتیجه گرفت  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = m$ . پس حد  $\frac{f(x)}{x}$  در  $+\infty$  را بررسی

می‌کنیم، در صورتی که این حد موجود باشد، ضریب زاویه خط مجانب به دست می‌آید. با به دست آمدن

$m$ ، حد  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx)$  را بررسی می‌کنیم، در صورتی که این حد موجود باشد، مقدار  $b$  نیز

به دست می‌آید و خط مجانب مایل موجود خواهد بود. همین عملیات را در  $-\infty$  می‌توان انجام داد تا خط مجانب مایل (در صورت وجود) در  $-\infty$  به دست آید.

مثال: خط مجانب مایل تابع  $f(x) = \frac{\sqrt{1+x^4}}{1+x}$  را (در صورت وجود) در  $+\infty$  و  $-\infty$  به دست آورید.

حل: حد  $\frac{f(x)}{x}$  را در  $+\infty$  بررسی می‌کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+x^4}}{(1+x)x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{1+x^4}{(1+x)^2 x^2}} = 1$$

پس ضریب زاویه خط مجانب مایل در  $+\infty$  (در صورت وجود) برابر ۱ است.

حد  $f(x) - x$  را در  $+\infty$  بررسی می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+x^4} - x}{1+x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+x^4} - x - x^2}{1+x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+x^4 - (x+x^2)^2}{(1+x)(\sqrt{1+x^4} + x + x^2)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-x^2-2x^3}{(1+x)(\sqrt{1+x^4} + x + x^2)} = -1 \end{aligned}$$

پس خط  $y = x - 1$  مجانب مایل این تابع در  $+\infty$  است. این حدگیری‌ها در  $-\infty$  نیز دقیقاً مانند بالا هستند و خط  $y = x - 1$  مجانب مایل این تابع در  $-\infty$  نیز می‌باشد.

در توابعی که دامنه آن‌ها تمام IR نباشد، ابتدا لازم است به دامنه آن‌ها دقت شود و جدول تغییرات فقط در محدوده دامنه تابع رسم شود.

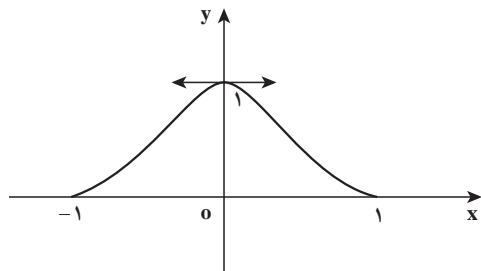
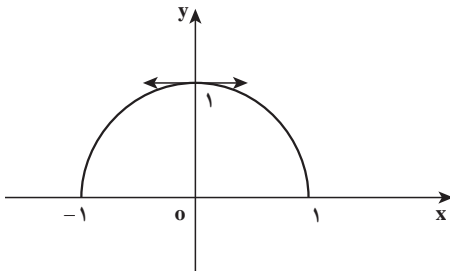
مثال: نمودار تابع  $y = \sqrt{1-x^2}$  را رسم کنید.

حل: دامنه این تابع بازه  $[-1, 1]$  است. در این حالت بحثی درباره مجانب افقی وجود ندارد زیرا حد تابع در  $\pm\infty$  معنا ندارد. این تابع دارای حد  $+\infty$  یا  $-\infty$  در هیچ نقطه‌ای نیست پس مجانب قائم ندارد. مقدار  $y$  به ازای  $x = \pm 1$  صفر می‌شود که نشان می‌دهد نمودار تابع در این نقاط محور  $x$ ها را قطع می‌کند. به ازای  $x = 0$  داریم  $y = 1$ ، پس نمودار تابع در  $y = 1$  محور  $y$ ها را قطع می‌کند. داریم  $y' = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$  و به ازای  $x = 0$ ،  $y'$  صفر می‌شود و علامت  $y'$  همان علامت  $-x$  است. جدول

تغییرات تابع به شکل زیر است

$x$	$-1$		$0$		$1$	
$y'$		$+$	$0$	$-$		
$y$	$0$	↗		$1$	↘	

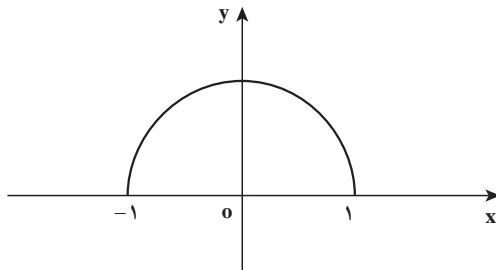
شکل تابع می‌تواند به صورت‌های زیر باشد:



برای تشخیص بهتر شکل تابع لازم است بدانیم، نمودار تابع با چه زاویه‌ای از نقطه  $1-$  خارج و به نقطه  $1$  وارد می‌شود (زاویه خط مماس با محور  $x$ ها) و جهت تقعر منحنی چگونه است.  $y'$  در  $\pm 1$  تعریف نشده است ولی حد  $y'$  در  $\pm 1$  مقادیر  $\pm\infty$  دارد که نشان می‌دهد خط مماس بر نمودار تابع در این نقاط عمودی است. پس نمودار تابع به‌طور عمودی از این نقاط خارج یا به آن داخل می‌شود. همچنین

$$y'' = \frac{-1 \times \sqrt{1-x^2} + x \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{-1}{(\sqrt{1-x^2})^3}$$

یعنی  $y''$  همواره منفی است و جهت تقعر روبه پایین است. بنابراین شکل صحیح به صورت زیر باید باشد.



به آسانی می‌توانید تحقیق کنید که نمودار این تابع دقیقاً یک نیم‌دایره به شعاع  $1$  است. فاصله نقاط نمودار این تابع را تا مبدأ حساب کنید.

با توجه به این مثال‌ها، می‌توان روش رسم نمودار یک تابع را به شکل زیر خلاصه کرد:

(۱) دامنه تابع را مشخص کنید.

(۲) اگر حد تابع در  $\pm\infty$  معنا دارد، آن را حساب کنید تا رفتار تابع در  $+\infty$  و  $-\infty$  مشخص شود (در صورت وجود) مجانب‌های افقی و مایل تعیین شوند.

(۳) در صورت وجود، نقاطی که حد چپ یا راست تابع در این نقاط  $+\infty$  یا  $-\infty$  است مشخص شوند، تا مجانب‌های قائم نمودار تابع تعیین شوند.

(۴) نقاط برخورد نمودار تابع با محور  $x$ ها و محور  $y$ ها تعیین شوند.

(۵)  $y'$  در نقاط مشتق‌پذیری محاسبه شود و تعیین علامت شود و نقاط ماکزیمم و می‌نیمم تعیین

شوند.

(۶)  $y''$  در صورت امکان محاسبه شود و تعیین علامت شود و نقاط عطف در صورت وجود

تعیین شوند.

۷) اطلاعات به دست آمده از بندهای قبل را در جدول تغییرات تابع وارد می‌کنیم تا بازه‌هایی که تابع صعودی یا نزولی است مشخص شود و معلوم شود تابع از چه نقاطی به چه نقاطی صعود یا نزول می‌کند و در چه نقاط ماکزیمم یا می‌نیمم می‌شود.

۸) نمودار تابع طبق جدول رسم شود و در نقاطی که ابهام دارد که با چه زاویه‌ای وارد یا خارج می‌شود، مقدار  $y'$  در این نقاط محاسبه شوند.  
به چند مثال زیر توجه کنید :

مثال ۱ : نمودار نمایش تغییرات تابع  $y = \frac{x}{x^2 - 1}$  را رسم کنید.

حل : خطوط مستقیم به معادلات  $x = -1$ ،  $x = 1$  و  $y = 0$  مجانب‌های منحنی نمایش این

تابع هستند. (چرا؟) حال با مشتق‌گیری از تابع  $y = \frac{x}{x^2 - 1}$  داریم  $y' = \frac{x^2 - 1 - 2x^2}{(x^2 - 1)^2}$  و از آنجا

$y' = \frac{-x^2 - 1}{(x^2 - 1)^2} < 0$  بنابراین، همواره  $y' < 0$  و در نتیجه تابع همواره نزولی است. برای به دست آوردن تقعر

منحنی  $y''$  را محاسبه می‌کنیم، با مشتق‌گیری از طرفین رابطه

$$y' = \frac{-x^2 - 1}{(x^2 - 1)^2}$$

$$y'' = \frac{2x(x^2 - 1)(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^4}$$

داریم

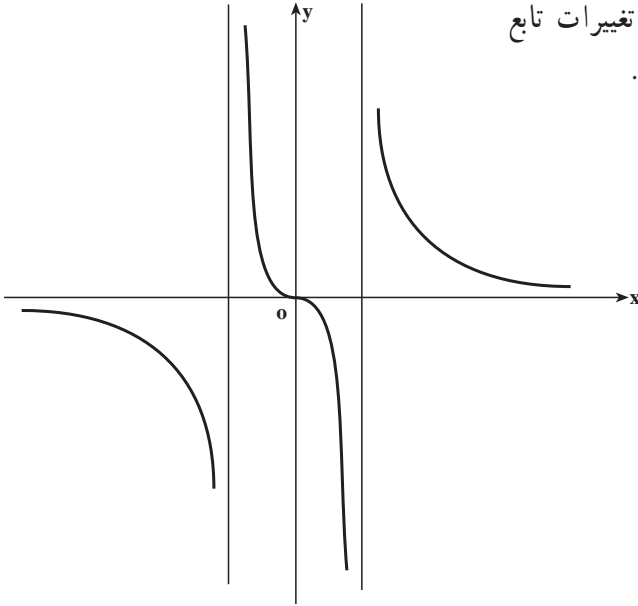
چون  $> 0$  ،  $y''$  با  $x(x^2 - 1)$  هم علامت است. جدول تغییرات تابع را به شکل زیر

تنظیم می‌کنیم :

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$1$	$+\infty$
$y'$	-	-	-	-	-
$y$	$0 \rightarrow -\infty$	$+\infty \rightarrow 0$	$0 \rightarrow -\infty$	$-\infty \rightarrow 0$	$+\infty \rightarrow 0$
$y''$	-	+	-	+	+

تقعر رو به بالا    تقعر رو به پایین    تقعر رو به بالا    تقعر رو به پایین

بنابراین، منحنی نمایش تغییرات تابع  
 $y = \frac{x}{x^2 - 1}$  به شکل مقابل است.



با تبدیل  $x \rightarrow -x$  و  $y \rightarrow -y$  معادله  $y = \frac{x}{x^2 - 1}$  تغییر نمی‌کند، پس مبدأ مختصات مرکز تقارن آن است.

مثال ۲: منحنی نمایش تغییرات تابع  $y = \frac{1}{1+x^2}$  را رسم کنید.

حل: ملاحظه می‌کنیم که  $\frac{1}{1+x^2} > 0$  در نتیجه  $y > 0$  بنابراین، همه نقاط منحنی در بالای محور

ها واقع هستند. با مشتق‌گیری از طرفین رابطه  $y = \frac{1}{1+x^2}$  داریم  $y' = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$ ،  $y' = 0$  نتیجه

می‌دهد  $x = 0$ . با تبدیل  $x \rightarrow -x$  معادله  $y = \frac{1}{1+x^2}$  تغییر نمی‌کند و محور  $y$ ها محور تقارن منحنی

نمایش آن است. ملاحظه می‌کنیم  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{1+x^2} = 0$  بنابراین، خط  $y = 0$  (محور  $x$ ها) مجانب افقی

منحنی است. چون  $x^2 \geq 0$ ،  $y = \frac{1}{1+x^2} \leq 1$  در نتیجه  $0 < y \leq 1$ ، بنابراین، منحنی نمایش تابع بین

دو خط  $y = 0$  و  $y = 1$  واقع است. با مشتق‌گیری از طرفین رابطه  $y' = \frac{-2x}{(x^2 - 1)^2}$  داریم

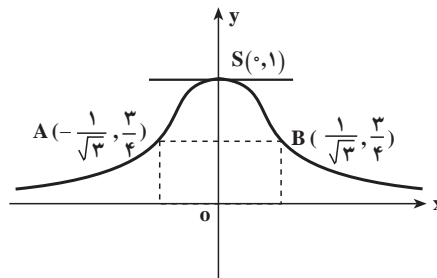
$$y'' = \frac{(1+x^2)(-2x^2 - 2 + 4x^2)}{(1+x^2)^4}$$

در نتیجه  $y'' = \frac{6x^2 - 2}{(1+x^2)^3}$ ،  $y' = 0$  نتیجه می‌دهد و از آنجا  $x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ ، چون

$(1+x^2)^3 > 0$ ،  $y''$  با  $6x^2 - 2$  هم علامت است. جدول تغییرات تابع به شکل زیر است:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$+\infty$
y'	+	+	-	-	
y	$\circ \rightarrow \frac{3}{4}$	$\rightarrow 1$	$\rightarrow \frac{3}{4}$	$\rightarrow \circ$	
y''	+	-	-	+	
	تقعر رو به بالا	تقعر رو به پایین	تقعر رو به بالا		

بنابراین، منحنی نمایش تغییرات تابع  $y = \frac{1}{1+x^2}$  به شکل زیر است.



در  $x = 0$ ،  $y'$  تغییر علامت می‌دهد و از مثبت به منفی می‌رود بنابراین،  $S(0, 1)$  نقطهٔ ماکزیمم

مطلق تابع است. ملاحظه می‌کنیم که به ازای  $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$  و  $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ ،  $y'' = 0$  و در این نقاط  $y''$  تغییر

علامت می‌دهد، بنابراین،  $A(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{3}{4})$  و  $B(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{3}{4})$  نقاط عطف منحنی هستند.

مثال ۳: منحنی نمایش تابع  $y = \frac{2x+3}{3x+5}$  را رسم کنید.

حل: ابتدا مجانب‌های این منحنی را به دست می‌آوریم، توجه داریم که

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x+3}{3x+5} = \frac{2}{3}$$

بنابراین، خط  $y = \frac{2}{3}$  مجانب افقی است. ریشه مخرج کسر عبارت است از  $x = -\frac{5}{3}$

بنابراین،

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{5}{3}} \frac{2x+3}{3x+5} = \pm\infty$$

در نتیجه خط  $x = -\frac{5}{3}$  مجانب قائم است. حال از طرفین  $y = \frac{2x+3}{3x+5}$  نسبت به  $x$  مشتق می‌گیریم

$$y' = \frac{1}{(3x+5)^2}$$

و از آنجا  $y' > 0$  در نتیجه تابع صعودی است. با توجه به  $y' = \frac{1}{(3x+5)^2}$

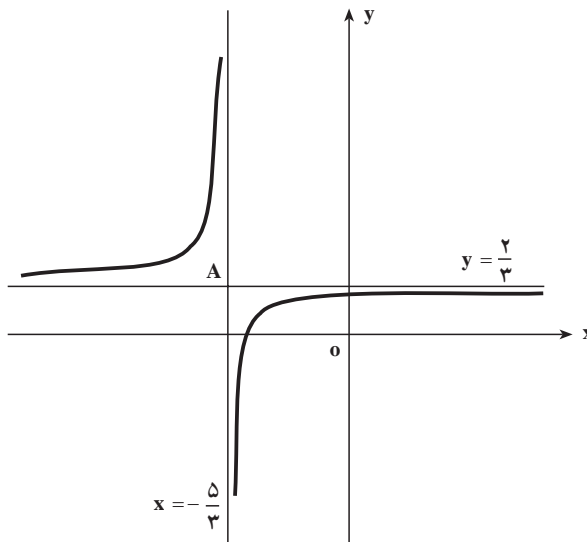
ملاحظه می‌شود که  $y'' = \frac{-6(3x+5)}{(3x+5)^4}$  چون مخارج این کسر  $(3x+5)^4 > 0$ ،  $y''$  با  $-6(3x+5)$

هم علامت است. حال جدول تغییرات این تابع را به شکل زیر تنظیم می‌کنیم:

x	$-\infty$	$-\frac{5}{3}$	$+\infty$	
y'	+		+	
y	$\frac{2}{3}$	$+\infty$	$-\infty$	
y''	+		-	

تقعر رو به بالا                      تقعر رو به پایین

بنابراین، منحنی نمایش تغییرات تابع  $y = \frac{2x+3}{3x+5}$  به شکل زیر است:





در این شکل  $A(-\frac{5}{3}, \frac{2}{3})$  محل تلاقی مجانب‌های منحنی می‌باشد. چنان که مبدأ مختصات را

به نقطه  $A(-\frac{5}{3}, \frac{2}{3})$  انتقال دهیم به سادگی می‌توان تحقیق نمود که محل تلاقی دو مجانب یعنی همان

نقطه  $A(-\frac{5}{3}, \frac{2}{3})$  مرکز تقارن منحنی است.

تابع  $y = \frac{2x+3}{3x+5}$  را یک تابع هموگرافیک می‌نامند. صورت کلی توابع هموگرافیک به شکل

$y = \frac{ax+b}{cx+d}$  می‌باشد که در آن ضرایب  $a, b, c, d$  اعداد ثابت هستند و  $a$  و  $c$  توأمأً صفر نیستند.

## مسائل

منحنی نمایش توابع زیر را رسم کنید.

$$1- y = x^2 + 4x^2 - 3x + 10$$

$$2- y = x^4 + x^2 + 1$$

$$3- y = \frac{2x-3}{3x-5}$$

$$4- y = \frac{x}{x^2+1}$$

$$5- y = \frac{x^2}{x-1}$$

$$6- y = \sqrt{x^2-1}$$

$$7- y = \frac{x^2}{\sqrt{x-1}}$$