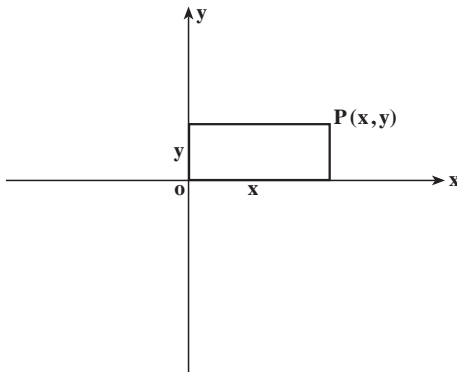


هندسه مختصاتی و منحنی‌های درجه دوم

۱- هندسه مختصاتی

یادآوری و تکمیل



برای تعیین یک نقطه در صفحه از دستگاه‌های مختصات استفاده می‌کنند. یکی از این دستگاه‌ها دستگاه مختصات دکارتی است.

در این دستگاه به هر نقطه P از صفحه یک زوج مرتب (x, y) از اعداد حقیقی متناظر می‌شود، x را طول نقطه و y را عرض آن می‌نامند. محورهای مختصات x و y بر هم عمودند؛ این محورها صفحه را به چهار ناحیه تقسیم می‌کنند که هر کدام از آن‌ها را یک ربع می‌نامند، ربع اول ناحیه ایست که در آن x و y نقاط هر دو مثبت هستند، در ربع دوم x نقاط منفی است و y نقاط مثبت، در ربع سوم x و y نقاط هر دو منفی هستند، بالاخره ربع چهارم متشکل است از نقاطی است که x آنها مثبت و y آنها منفی است.

معادله خط

معادله یک خط در دستگاه مختصات دکارتی به شکل $ax + by + c = 0$ است که در آن a و b

همزمان صفر نیستند یعنی $a^2 + b^2 \neq 0$. اگر $b \neq 0$ با تقسیم طرفین معادله $ax + by + c = 0$ بر b داریم

زاویه α زاویه ایست که $\tan \alpha = -\frac{a}{b}$ را چنان انتخاب می‌کنیم که $-\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{4}$ ، $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ خط به معادله $ax + by + c = 0$ با جهت مثبت محور x ها می‌سازد. $-\frac{a}{b}$ را شیب یا ضریب زاویه خط $ax + by + c = 0$ می‌نامند. اگر معادله خط به صورت $y = mx + h$ داده شده باشد، m همان شیب خط می‌باشد.

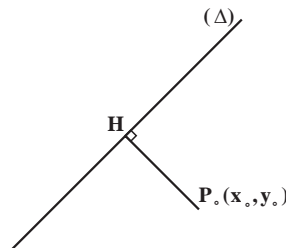
معادله خطی که از نقطه $P_0(x_0, y_0)$ می‌گذرد و شیب آن m است عبارتست از:

$y - y_0 = m(x - x_0)$. شیب خط مستقیمی که از نقاط $A(a_1, b_1)$ و $B(a_2, b_2)$ می‌گذرد برابر

است با $m = \frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1}$. بنابراین، معادله خطی که از این دو نقطه می‌گذرد عبارتست از:

$$y - b_2 = \frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1}(x - a_2)$$

فاصله یک نقطه از یک خط



فرض می‌کنیم (Δ) یک خط مستقیم باشد که معادله آن $ax + by + c = 0$ است، نقطه $P_0(x_0, y_0)$ را خارج از خط (Δ) در نظر می‌گیریم، از این نقطه خطی بر (Δ) عمود می‌کنیم، شیب خط (Δ) برابر است با $-\frac{a}{b}$ بنابراین، شیب این خط عمود برابر است با $\frac{b}{a}$ در نتیجه معادله این یک عمود عبارتست از:

$$y - y_0 = \frac{b}{a}(x - x_0)$$

حال مختصات نقطه H محل برخورد این دو خط را تعیین می‌کنیم، برای این کار باید دستگاه دو

معادله دو مجهولی $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ y - y_0 = \frac{b}{a}(x - x_0) \end{cases}$ را حل کنیم. از معادله دوم این دستگاه نتیجه می‌شود

$$y = y_0 + \frac{b}{a}(x - x_0)$$

با قرار دادن در معادله اول دستگاه

$$ax + b(y_0 + \frac{b}{a}(x - x_0)) + c = 0$$

و از آنجا

$$(a + \frac{b^2}{a})x = -by_0 + \frac{b^2}{a}x_0 - c$$

در نتیجه

$$x = \frac{b^2 x_0 - aby_0 - ca}{a^2 + b^2}$$

با قرار دادن در معادله اول دستگاه داریم:

$$a(\frac{b^2 x_0 - aby_0 - ca}{a^2 + b^2}) + by_0 + c = 0$$

و از آنجا

$$y = \frac{-abx_0 - a^2 y_0 - bc}{a^2 + b^2}$$

$$H = (\frac{b^2 x_0 - aby_0 - ca}{a^2 + b^2}, \frac{-abx_0 + a^2 y_0 - bc}{a^2 + b^2})$$

بنابراین،

حال باید فاصله بین دو نقطه $P_0(x_0, y_0)$ و

$$H = (\frac{b^2 x_0 - aby_0 - ca}{a^2 + b^2}, \frac{-abx_0 + a^2 y_0 - bc}{a^2 + b^2})$$

را بدست بیاوریم، این فاصله برابر است با:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

یادآوری می‌کنیم که اگر دو خط (Δ) و (Δ') به معادلات $y = mx + a$ و $y = m'x + a'$ بر هم عمود

باشند آنگاه $mm' = -1$. اگر دو خط مستقیم به معادلات $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ و $a_2x + b_2y + c_2 = 0$

متعامد باشند آنگاه $a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0$.

مثال: اگر $A(-1, 2)$ و $B(3, 0)$ و $C(1, -2)$ سه رأس مثلث ABC باشند، معادله ارتفاع AH و طول آن را بدست آورید.

حل: ارتفاع AH بر ضلع BC عمود است. ابتدا شیب BC را به دست می آوریم.

$$m_{BC} = \frac{-2 - 0}{1 - 3} = 1$$

$$m_{AH} \cdot m_{BC} = -1 \Rightarrow m_{AH} \times 1 = -1 \Rightarrow m_{AH} = -1$$

$$\text{معادله ارتفاع } AH: y - 2 = -1(x + 1)$$

$$y = -x + 1$$

برای محاسبه طول ارتفاع AH معادله ضلع BC را به دست آورده و فاصله نقطه A از این خط را محاسبه می کنیم.

$$\text{معادله ضلع } BC: y - 0 = 1(x - 3) \Rightarrow y = x - 3 \Rightarrow x - y - 3 = 0$$

$$AH = \frac{|-1 - 2 - 3|}{\sqrt{1+1}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$$

نقطه وسط یک پاره خط: اگر روی محور طول ها نقطه M وسط پاره خط AB باشد خواهیم

داشت:



$$AM = MB$$

و از آنجا

$$x_M - x_A = x_B - x_M$$

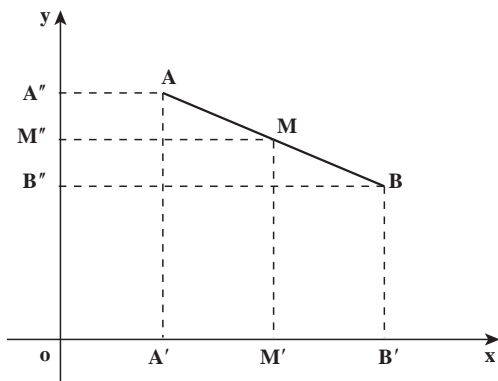
$$2x_M = x_A + x_B$$

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$$

بنابراین، طول مختصات وسط یک پاره خط برابر است با میانگین مجموع طول های ابتدا و

انتهای پاره خط. همچنین اگر پاره خط AB در صفحه مختصات داده شده باشد مطابق شکل صفحه

بعد می توان نشان داد:



$$\begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$$

مثال: اگر $A(-2, 3)$ و $B(2, 0)$ و $C(0, -2)$ سه رأس مثلث ABC باشند، طول میانه AM را به دست آورید.

حل: ابتدا نقطه M وسط ضلع BC را به دست می آوریم

$$\begin{cases} x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{2 + 0}{2} = 1 \\ y_M = \frac{0 + (-2)}{2} = -1 \end{cases} \Rightarrow M(1, -1)$$

$$\begin{aligned} AM &= \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2} = \sqrt{(1 + 2)^2 + (-1 - 3)^2} \\ &= \sqrt{9 + 16} = 5 \end{aligned}$$

خطوط موازی

دو خط مستقیم به معادلات $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ و $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ موازی هستند اگر فقط اگر شیبشان یکی باشد و از آنجا $-\frac{a_1}{b_1} = -\frac{a_2}{b_2}$ در نتیجه $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$. به عبارت دیگر $a_1b_2 = a_2b_1$ بدیهی است که اگر $b_1 = b_2 = 0$ در این صورت هر دو خط بر محور x ها عمود بوده و با هم موازی خواهند بود.

فاصله بین دو خط موازی

فرض کنیم دو خط موازی (Δ_1) و (Δ_2) به ترتیب به معادله $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$

باشند، $P(x_0, y_0)$ را نقطه‌ای واقع بر خط (Δ_1) می‌گیریم بنابراین، $ax_0 + by_0 + c = 0$ ، چنان‌که قبلاً ملاحظه کردیم، فاصله این نقطه از خط (Δ_2) از دستور زیر بدست می‌آید:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

در بالا داشتیم $ax_0 + by_0 + c = 0$ و از آنجا $ax_0 + by_0 = -c$ ؛ با قرار دادن این مقدار در رابطه بالا داریم:

$$d = \frac{|c' - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

این دستور فاصله بین دو خط موازی به معادلات $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$ را به دست می‌دهد.

دستگاه معادلات خطی

در کتاب ریاضی (۱) با حل دستگاه دو معادله دو مجهولی آشنا شده‌ایم. هرگاه

$$\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 5x + y = 4 \end{cases}$$

یک دستگاه دو معادله دو مجهولی باشد، با روش حذفی، یعنی مثلاً ضرب معادله دوم در عدد ۳ و جمع آن با معادله اول، یک معادله یک مجهولی، یعنی

$$17x = 17$$

را به دست می‌آوریم که از حل آن $x = 1$ حاصل می‌شود. وقتی این مقدار x را در یکی از معادلات دستگاه اولیه مان قرار دهیم $y = -1$ به دست می‌آید.

به‌طور کلی هر معادله به صورت:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b \quad (1)$$

را، که در آن a_1, a_2, \dots, a_n و b اعدادی ثابت و x_1, x_2, \dots, x_n متغیرهایی باشند، یک معادله خطی نامیده می‌شود. x_1, x_2, \dots, x_n را مجهول‌های معادله نیز می‌نامند، در حالت $n = 2$ ، مجموعه (x_1, x_2) ‌هایی که در معادله

$$a_1x_1 + a_2x_2 = b$$

صدق می‌کند یک خط راست در صفحه مختصات تشکیل می‌دهد و دلیل نامگذاری معادله خطی

مثال : دستگاه خطی

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 = -7 \\ 2x_1 + x_2 = 7 \end{cases} \quad (4)$$

فقط جواب $x_1 = 2, x_2 = 3$ را دارد. دستگاه خطی

$$\begin{cases} 8x_1 - 3x_2 = 7 \\ 3x_1 - 2x_2 = 0 \\ 10x_1 - 2x_2 = 14 \end{cases} \quad (5)$$

نیز فقط جواب $x_1 = 2, x_2 = 3$ را دارد. پس (4) و (5) هم‌ارز هستند.

یکی از رایج‌ترین مسائل عملی تقریباً تمام شاخه علوم، نظیر ریاضیات، فیزیک، زیست‌شناسی، شیمی، اقتصاد، جغرافیا، رشته‌های مختلف مهندسی، تحقیق در عملیات، و علوم اجتماعی حل دستگاه‌های معادلات خطی است.

شما در سال اول با حل دستگاه دو معادله دو مجهولی خطی آشنا شده‌اید. با ذکر مثال‌هایی مروری بر روش حل این نوع دستگاه‌ها می‌کنیم.

مثال : دستگاه خطی

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 = -3 \\ 2x_1 + x_2 = 8 \end{cases} \quad (6)$$

را در نظر می‌گیریم. برای حذف x_2 اگر دو برابر معادله اول را از دوم کم کنیم داریم

$$7x_2 = 14$$

که معادله‌ای است بدون جمله شامل x_1 . پس مجهول x_1 را حذف کرده‌ایم. حال با حل این معادله نسبت به x_2 داریم :

$$x_2 = 2$$

و با گذاشتن این مقدار در معادله اول (6) خواهیم داشت

$$x_1 = 3$$

پس $x_1 = 3, x_2 = 2$ تنها جواب دستگاه خطی فوق است.

مثال : دستگاه خطی

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 = 7 \\ 2x_1 - 6x_2 = 7 \end{cases} \quad (7)$$

را در نظر می‌گیریم. باز تصمیم می‌گیریم x_1 را حذف کنیم. برای این کار اگر دو برابر معادله اول را از معادله دوم کم کنیم داریم

$$0 = 7$$

که به روشنی برقرار نیست. پس دستگاه (۷) جواب ندارد و ناسازگار است.

مثال: دستگاه خطی

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 14 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = -2 \end{cases} \quad (8)$$

را در نظر می‌گیریم. برای حذف x_1 اگر دو برابر معادله اول را از معادله دوم و سه برابر معادله اول را از معادله سوم کم کنیم، خواهیم داشت

$$\begin{cases} -7x_2 - 4x_3 = 2 \\ -5x_2 - 10x_3 = -20 \end{cases} \quad (9)$$

این یک دستگاه دو معادله و دو مجهول است، با تقسیم معادله دوم (۹) بر ۵- داریم

$$\begin{cases} -7x_2 - 4x_3 = 2 \\ x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$$

که آن را با تعویض جای معادلات، به شکل

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 = 4 \\ -7x_2 - 4x_3 = 2 \end{cases} \quad (10)$$

می‌نویسیم. حال برای حذف x_2 در (۱۰) اگر ۷ برابر معادله اول را به معادله دوم بیافزاییم داریم

$$10x_3 = 30$$

یا

$$x_3 = 3 \quad (11)$$

با گذاردن مقدار x_3 در معادله اول (۱۰) معلوم می‌شود که $x_2 = -2$ ، و با گذاردن مقادیر x_2 و x_3 در معادله اول (۸) خواهیم داشت $x_1 = 1$ ، ملاحظه می‌کنیم که روش حذف در عمل دستگاه خطی

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ x_2 + 2x_3 = 4 \\ x_3 = 3 \end{cases} \quad (12)$$

را، که از معادله‌های اول (۸) و (۱۰)، معادله (۱۱) تشکیل شده است، ایجاد می‌کند. اهمیت این روش در آن است که علاوه بر اینکه دستگاه‌های خطی (۸) و (۱۲) هم‌ارز هستند، (۱۲) این مزیت را دارد که ساده‌تر حل می‌شود.

مثال : دستگاه خطی

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -4 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 4 \end{cases} \quad (13)$$

را در نظر می‌گیریم. برای حذف x_1 اگر دو برابر معادله اول را از معادله دوم کم کنیم داریم

$$-3x_2 + 3x_3 = 12 \quad (14)$$

حال باید معادله (۱۴) را برای x_2 و x_3 حل کنیم. یک جواب

$$x_2 = x_3 - 4$$

است، که در آن x_3 می‌تواند هر عدد حقیقی باشد. پس از معادله اول (۱۳) داریم

$$\begin{aligned} x_1 &= -4 - 2x_2 + 3x_3 \\ &= -4 - 2(x_3 - 4) + 3x_3 \\ &= x_3 + 4 \end{aligned}$$

بنابراین، یک جواب دستگاه (۱۳) عبارت است از

$$x_1 = x_3 + 4$$

$$x_2 = x_3 - 4$$

یک عدد حقیقی دلخواه x_3

این به معنی آن است که دستگاه خطی (۱۳) بینهایت جواب دارد. زیرا هر بار که به x_3 مقدار بدیم جوابی مشخص (عددی) از (۱۳) را به دست می‌آوریم. مثلاً اگر $x_3 = 1$,

$$x_1 = 5, x_2 = -3, x_3 = 1$$

یک جواب دستگاه است. حال آنکه اگر $x_3 = -2$,

$$x_1 = 2, x_2 = -6, x_3 = -2$$

جوابی دیگر از دستگاه خواهد بود. سه جواب دیگر این دستگاه را با مقدار دادن به x_3 حساب کنید.

نتیجه می‌گیریم که :

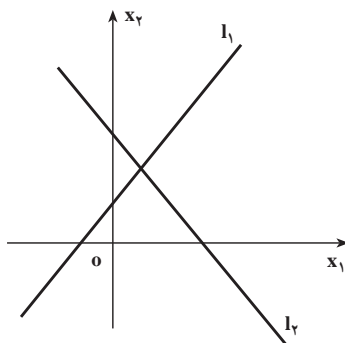
یک دستگاه خطی ممکن است جوابش منحصر به فرد باشد (فقط یک جواب داشته باشد) یا آنکه بدون جواب باشد، یا بینهایت جواب داشته باشد.

حل دستگاه دو معادله با دو مجهول از راه هندسی

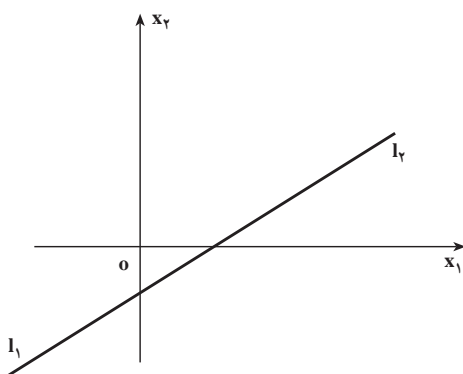
دستگاه خطی دو معادله و دو مجهول x_1 و x_2 به صورت کلی

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 = c_1 \\ b_1x_1 + b_2x_2 = c_2 \end{cases} \quad (15)$$

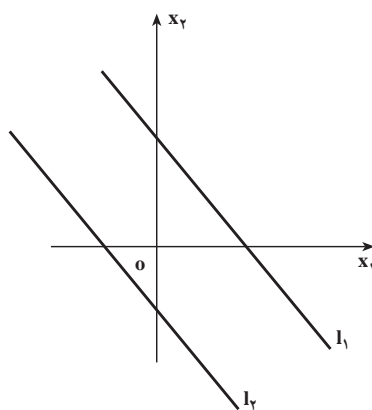
را در نظر می‌گیریم. وقتی در هریک از این معادله‌ها x_1 را مختص اول یعنی طول و x_2 را مختص دوم یعنی عرض یک نقطه در صفحه مختصات تلقی کنیم، نمودار هریک از این معادله‌ها خطی راست است، که به ترتیب آن‌ها را با I_1 و I_2 نشان می‌دهیم. اگر نقطه به مختصات (s_1, s_2) محل تلاقی دو خط I_1 و I_2 باشد آنگاه $x_1 = s_1$ و $x_2 = s_2$ یک جواب دستگاه (15) خواهد بود.



(الف) جواب منحصر به فرد است. مختصات نقطه تقاطع جواب دستگاه است.



(ب) دو خط بر هم منطبق و دستگاه بینهایت جواب دارد.



(ب) دستگاه بدون جواب است.

هرگاه دو خط I_1 و I_2 بر هم منطبق باشند دستگاه بینهایت جواب دارد، درحالی که اگر این دو خطی موازی باشند دستگاه بدون جواب است. از راه هندسی نیز به همان سه حالت فوق خواهیم رسید.

۱- مثلث ABC با سه رأس $A(1,4)$ و $B(-2,-2)$ و $C(4,2)$ مفروض است.

الف) معادله میانه وارد بر ضلع BC را به دست آورید.

ب) طول میانه AM را محاسبه کنید.

ج) معادله ارتفاع BH را محاسبه کنید.

د) نقطه تلاقی میانه AM و ارتفاع BH را به دست آورید.

۲- طول قطر مربعی که یک ضلع آن واقع بر خط $x + y = 5$ و مختصات یک رأس آن

$A(-2,1)$ باشد را به دست آورید.

۳- نقاط $A(4,2)$ و $B(1,-1)$ و $C(6,-1)$ سه رأس مثلث ABC هستند. اگر H و M به ترتیب

پای ارتفاع AH و میانه AM باشند طول MH را به دست آورید.

۴- دستگاه‌های خطی زیر را حل کنید.

$$\text{الف) } \begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 = 10 \end{cases}$$

$$\text{ب) } \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 = -12 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -5 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

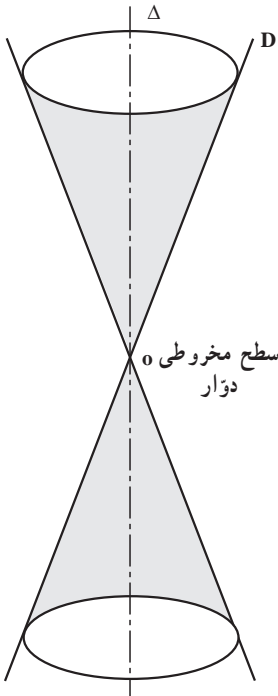
$$\text{ج) } \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 8 \\ 6x_1 + 8x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}$$

$$\text{د) } \begin{cases} x + 4y - z = 12 \\ 3x + 8y - 2z = 4 \\ x + y + 3z = 12 \end{cases}$$

۲- منحنی‌های درجه دوم

نمودار معادلات درجه دوم از x و y را منحنی‌های درجه دوم می‌نامند. این منحنی‌ها از برخورد یک صفحه با یک مخروط دوار نیز قابل به دست آوردن هستند، و به همین علت آن‌ها را مقاطع مخروطی نیز می‌نامند.

وجه نامگذاری مقاطع مخروطی به زمان کشف تاریخی آن‌ها به‌عنوان محل تقاطع یک صفحه با یک مخروط قائم دوار برمی‌گردد (شکل زیر). هر صفحه که عمود بر محور مخروط باشد مقطعی پدید می‌آورد که دایره نامیده می‌شود. صفحه را کمی مایل می‌کنیم، مقطع حاصل یک بیضی است. صفحه را باز هم بیشتر کج می‌کنیم تا موازی یکی از یال‌های مخروط شود، مقطع تشکیل شده یک سهمی است.



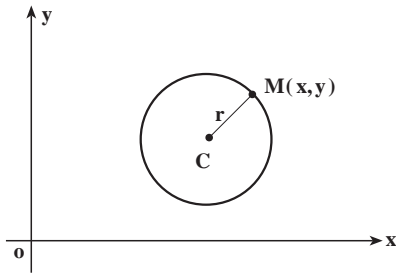
به کج کردن صفحه ادامه می‌دهیم تا آنکه صفحه قاطع سطح مخروطی دوار را در دو طرف رأس قطع کند. مقطع حاصل یک هذلولی است؛ هذلولی یک منحنی با دو شاخه است.

دایره، بیضی، سهمی و هذلولی از قرن چهارم قبل از میلاد (مسیح) توسط هندسه‌دان یونانی به نام آپولونیوس مورد بررسی و مطالعه قرار گرفته‌اند. آپولونیوس به‌طور کامل این منحنی‌ها را مورد تحقیق قرار داد و حاصل کارهای خود را در مجموعه‌ای متشکل از هشت کتاب ارائه کرد. کاربردهای عملی مقاطع مخروطی توسط ریاضیدان و دانشمند آلمانی یوهانز کیپلر شروع شده است. کیپلر فرضیه‌ای ارائه کرد که بیان می‌داشت که سیاره‌ها در مدارهایی بیضی شکل به دور خورشید می‌چرخند که خورشید در یکی از کانون‌های این بیضی‌ها قرار دارد. امروزه تئوری مقاطع مخروطی در مطالعه مدار سیاره‌ها، ستاره‌های دنباله‌دار، و قمرهای مصنوعی کاربردهای فراوانی دارند. مدارهای بسته شامل دایره و بیضی‌اند، درحالی‌که مدارهای باز (یا مدارهای فزّار) شامل

سهمی‌ها و هذلولی‌ها می‌باشند. مقاطع مخروطی در مطالعه ساختار اتم‌ها، سیستم‌های راهنمای هواپیماها، ساختن عدسی‌ها، وسایل نوری و وسایل پیش‌بینی هوا، ارتباطات قمرهای مصنوعی، و نیز در ساختن پل‌ها به‌کار می‌روند. سطوحی که از دوران مقاطع مخروطی تشکیل می‌شوند نیز دارای کاربردهایی در شاخه‌هایی از علوم هستند که با نور، صدا و امواج رادیویی سروکار دارند.

در این بخش از دستگاه مختصات دکارتی به عنوان چارچوبی برای مطالعه سهمی، دایره، بیضی و هذلولی استفاده می‌کنیم. معادله این منحنی‌ها به صورت عبارت درجه دومی از x و y هستند.

دایره



دایره مکان هندسی نقاطی از صفحه است که فاصله آن‌ها از یک نقطه ثابت مفروض در صفحه، مقداری ثابت باشد.

نقطه ثابت را مرکز و مقدار ثابت فاصله را شعاع

دایره می‌نامند.

معادله دایره: فرض کنیم نقطه ثابت $C(h, k)$ مرکز دایره و فاصله ثابت r شعاع دایره باشد.

همچنین فرض کنیم $M(x, y)$ یکی از نقاط دایره باشد. در این صورت

$$CM = r$$

یا

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r$$

بنابراین

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \quad (1)$$

(۱) معادله دایره با ویژگی‌های داده شده می‌باشد.

نامعادله

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 < r^2 \quad (2)$$

نقاطی از صفحه را مشخص می‌کند که فاصله آن‌ها تا نقطه $C(h, k)$ کوچکتر از r است. بنابراین (۲) قسمت درونی دایره به مرکز $C(h, k)$ و شعاع r را توصیف می‌کند. به عبارت دیگر، مختصات مجموعه نقاط درون دایره در رابطه (۲) صدق می‌کنند.

مثال: معادله دایره‌ای را بنویسید که از نقطه $O(0, 0)$ گذشته و $C(2, -1)$ مرکز آن باشد.

حل: با محاسبه CO شعاع دایره را حساب می‌کنیم.

$$CO = \sqrt{(2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$$

بنابراین معادله دایره عبارت است از:

$$(x-2)^2 + [y-(-1)]^2 = (\sqrt{5})^2$$

یا

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 5$$

نکته: معادله (۱) را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0$$

هرگاه قرار دهیم $D = -2h$ ، $E = -2k$ و $F = h^2 + k^2 - r^2$ ، معادله دایره را به صورت

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (3)$$

نیز می‌توانیم بیان کنیم. هرگاه معادله دایره به صورت (۳) عرضه شده باشد، مرکز آن نقطه $C\left(\frac{-D}{2}, \frac{-E}{2}\right)$ و شعاع آن از دستور $r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$ به دست می‌آید.

مثال: مقدار F را طوری تعیین کنید که معادله $x^2 + y^2 - 2x - 6y + F = 0$ دایره‌ای به شعاع ۲ را مشخص کند.

داریم $r = 2$. پس

$$2 = \frac{1}{2}\sqrt{4 + 36 - 4F}$$

$$40 - 4F = 16$$

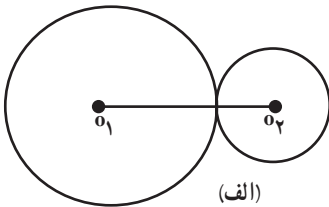
$$F = 6$$

وضع دو دایره نسبت به هم: می‌دانیم هر دایره با مرکز و شعاع آن مشخص می‌شود. فرض

کنیم (C_1) دایره‌ای به مرکز O_1 و شعاع r_1 ، و (C_2) دایره‌ای به مرکز O_2 و شعاع r_2 باشد.

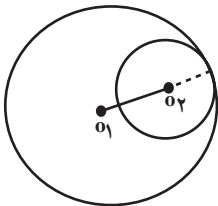
هرگاه $O_1O_2 = r_2 + r_1$ ، یعنی فاصله مراکز دو دایره برابر

حاصل جمع شعاع‌های آن‌ها باشند، این دو دایره مماس خارج هستند (شکل الف).



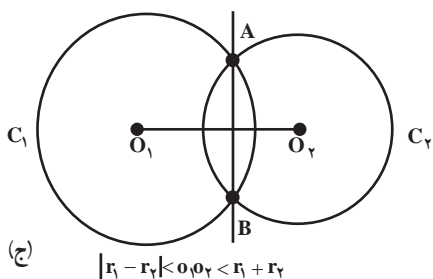
هرگاه $r_2 > r_1$ و $O_1O_2 = r_2 - r_1$ ، یعنی فاصله مراکز دو

دایره برابر تفاضل شعاع‌های آن‌ها باشند، این دو دایره بر هم مماس داخل هستند (شکل ب).



هرگاه $|r_2 - r_1| < O_1O_2 < r_1 + r_2$ دو دایره متقاطع اند. دو

دایره متقاطع یکدیگر را در دو نقطه قطع می‌کنند. خط گذرنده



بر این دو نقطه را وتر مشترک دو دایره می‌نامیم (شکل ج).

هرگاه $O_1O_2 > r_1 + r_2$ دو دایره را متخارج و درحالتی $O_1O_2 < |r_1 - r_2|$ دو دایره را متداخل می‌گویند.

سؤال: اکنون این سؤال پیش می‌آید که با معلوم

بودن مشخصات جبری دو دایره (مختصات مرکز و شعاع، یا معادله دایره) چگونه می‌توانیم معادله وتر مشترک را به دست آوریم.

فرض کنیم $x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + d_1 = 0$ و $x^2 + y^2 + a_2x + b_2y + d_2 = 0$ معادله دایره (C_1) معادله دایره (C_2) باشد. همچنین فرض کنیم این دو دایره متقاطع باشند. چون نقاط A و B (شکل ج) روی هر دو دایره هستند، مختصات این نقاط در معادله هر دو دایره صدق می‌کند. در نتیجه مختصات نقاط A و B در دستگاه معادلات

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + d_1 = 0 \\ x^2 + y^2 + a_2x + b_2y + d_2 = 0 \end{cases}$$

صدق می‌کنند. پس مختصات A و B در معادله

$$(x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + d_1) - (x^2 + y^2 + a_2x + b_2y + d_2) = 0$$

نیز صدق می‌کند. بنابراین مختصات این نقاط در معادله

$$(a_1 - a_2)x + (b_1 - b_2)y + d_1 - d_2 = 0$$

صدق می‌کند. اما این معادله نسبت به x و y از درجه اول است، و معادله یک خط مستقیم است. پس این معادله، معادله وتر مشترک دو دایره است. چون از نقاط A و B فقط یک خط مستقیم می‌گذرد، که وتر مشترک می‌باشد،

معادله

$$(a_1 - a_2)x + (b_1 - b_2)y + d_1 - d_2 = 0$$

(*)

معادله وتر مشترک دو دایره به معادله‌های زیر می‌باشد.

$$x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + d_1 = 0$$

$$x^2 + y^2 + a_2x + b_2y + d_2 = 0$$

مثال: معادله وتر مشترک دو دایره به معادله‌های صفحه بعد را به دست آورید.

$$x^2 + y^2 + 6x + 8y = 0 \quad \text{و} \quad x^2 + y^2 - 4x - 6y - 14 = 0$$

حل : مطابق دستور (*) داریم

$$(6 - (-4))x + (8 - (-6))y + 0 - (-14) = 0$$

که پس از ساده کردن می‌توانیم آن را به صورت زیر بنویسیم

$$5x + 7y + 7 = 0$$

این معادله وتر مشترک دو دایره مفروض می‌باشد.

مسائل

۱- مرکز و شعاع دایره‌های زیر را پیدا کنید. سپس دایره را در صفحه مختصات رسم کنید.

$$x^2 + y^2 + 2x + 2y - 1 = 0 \quad \text{(الف)} \quad 3x^2 + 3y^2 + 6x - 1 = 0 \quad \text{(ب)}$$

$$x^2 + y^2 - 6x + 2y + 1 = 0 \quad \text{(ج)} \quad 7x^2 + 7y^2 + 143y = 0 \quad \text{(د)}$$

۲- چه نقاطی در نابرابری‌های زیر صدق می‌کنند؟

$$x^2 + 4x + y^2 - 12 \leq 0 \quad \text{(الف)} \quad 2x^2 + 2y^2 + x + y > 0 \quad \text{(ب)}$$

۳- معادله دایره‌ای را بنویسید که از نقاط $(1, 0)$ و $(6, 0)$ گذشته و بر خط $y = 1$ مماس باشد.

۴- اگر فاصله نقطه $M(x, y)$ تا نقطه $A(6, 0)$ دو برابر فاصله‌اش تا نقطه $B(0, 3)$ باشد، نشان

دهید که مکان M یک دایره خواهد بود. مرکز و شعاع این دایره را تعیین کنید.

۵- معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکزش $C(1, 2)$ و بر خط به معادله $3x + 4y + 1 = 0$ مماس

باشد.

۶- معادله دایره‌ای را بنویسید که از نقاط $(0, 0)$ و $(17, 7)$ گذشته و مرکزش بر خط $6x - 5y = 0$

واقع باشد.

۷- معادله دایره‌ای را بنویسید که از نقاط $(7, 1)$ و $(0, 0)$ و $(-1, 6)$ بگذرد. مرکز و شعاع این

دایره را بیابید.

۸- معادله وتر مشترک دو دایره به معادله زیر را به دست آورید :

$$x^2 + y^2 + 4x + 6y + 10 = 0 \quad \text{و} \quad x^2 + y^2 + 8x + 2y - 82 = 0$$

۹- ابتدا معادله وتر مشترک دو دایره به معادله‌های زیر را به دست آورید.

$$x^2 + y^2 + 4x + 2y - 10 = 0 \quad \text{و} \quad x^2 + y^2 + 2x + 2y - 24 = 0$$

سپس با استفاده از معادله وتر مشترک مختصات نقاط تقاطع دو دایره را به دست آورید.

۱۰- برای هر دسته از معادله دایره‌های زیر مشخص کنید که آیا این دایره‌ها بر هم مماس داخل، مماس خارج، یا متقاطع اند؟

(الف) $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 4$ و $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$

(ب) $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$ و $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$

(ج) $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 4$ و $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 9$

(د) $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 7$ و $x^2 + (y - 5)^2 = 5$

۱۱- معادله دو دایره را بنویسید که برای آن‌ها یکی از حالت‌های زیر برقرار باشد.

(الف) $O_1 O_2 = 0$ (دو دایره هم‌مرکز)

(ب) $O_1 O_2 > r_1 + r_2$ (دو دایره متخارج)

سهمی

در طبیعت تعداد زیادی از توابع خطی و درجه دوم مشاهده می‌شود. شیئی که به‌طور مستقیم به‌سوی بالا پرتاب می‌شود چنانچه دارای سرعت اولیه‌ای برابر ۱۲۸ متر بر ثانیه باشد، فاصله آن پس از t ثانیه از مدل $d = -16t^2 + 128t$ (یا آنکه چنانچه ثانیه را به x و مسافت را به y نشان دهیم از $y = -16x^2 + 128x$ خواهد بود) به‌دست می‌آید. همچنین فرمول $C = 20t^2 - 200t + 640$ نشان‌دهنده تعداد باکتری‌های یک جمعیت در یک سانتیمتر مکعب آب پس از t روز از کنترل رشد باکتری‌ها می‌باشد. ما با معادله درجه دوم به اختصار در فصل دوم آشنا شدیم. نمودار هر معادله به‌صورت $y = ax^2 + bx + c$ را سهمی می‌نامیم. ابتدا با پیدا کردن نقاطی خاص از نمودار چنین توابعی سعی می‌کنیم طریقه رسم نمودار آن‌ها را به روشی سریعتر توضیح دهیم.

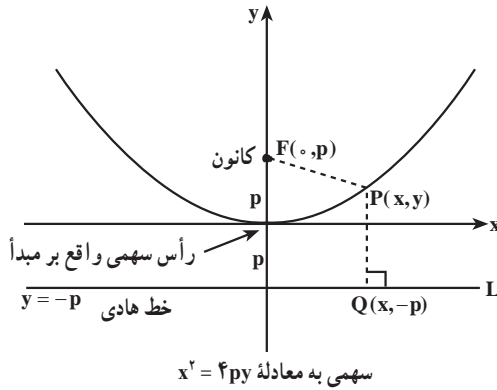
مجموعه تمام نقاطی از صفحه که فاصله آن‌ها از یک نقطه ثابت داده شده و یک خط ثابت داده شده یکسان می‌باشد، سهمی نامیده می‌شود. نقطه ثابت، کانون سهمی و خط ثابت، خط هادی سهمی نامیده می‌شود.

در شکل صفحه بعد سهمی به کانون $F(0, p)$ و خط هادی L به معادله $y = -p$ رسم شده است. طبق تعریف، نقطه $P(x, y)$ واقع بر سهمی است اگر و فقط اگر $PF = PQ$. با محاسبه پاره‌خط‌های

$$PF = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - p)^2} = \sqrt{x^2 + (y - p)^2}$$

$$PQ = \sqrt{(x - x)^2 + (y - (-p))^2} = \sqrt{(y + p)^2}$$

و



و با توجه به تساوی $PF = PQ$ داریم:

$$\sqrt{(y + p)^2} = \sqrt{x^2 + (y - p)^2}$$

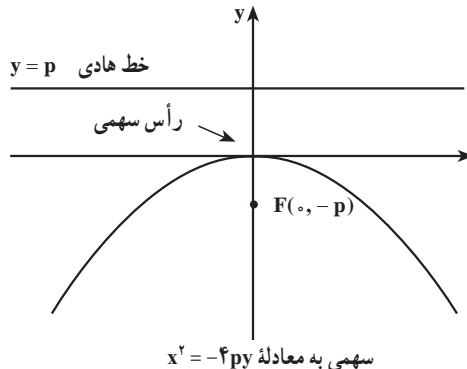
طرفین رابطه بالا را به توان ۲ می‌رسانیم و پس از ساده کردن داریم:

$$x^2 = 4py \quad \text{یا} \quad y = \frac{x^2}{4p} \quad \text{معادله (۱)}$$

این معادله‌ها نشان می‌دهند که سهمی نسبت به محور y تقارن دارد. محور y محور سهمی یا محور تقارن سهمی نامیده می‌شود.

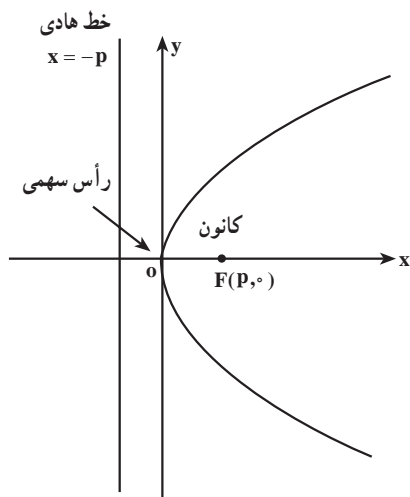
نقطه تلاقی سهمی و محور تقارن را رأس سهمی می‌نامیم. عدد مثبت p را فاصله کانونی سهمی می‌نامند.

رأس سهمی $x^2 = 4py$ (در شکل فوق) بر مبدأ مختصات واقع است. در حالتی که رأس سهمی بر مبدأ مختصات واقع باشد، سهمی ساده‌ترین معادله خود را دارد. اگر سهمی رو به پایین باز شود و کانون $(0, -p)$ و خط هادی به معادله $y = p$ باشد، معادله ۱ به شکل زیر خواهد بود:

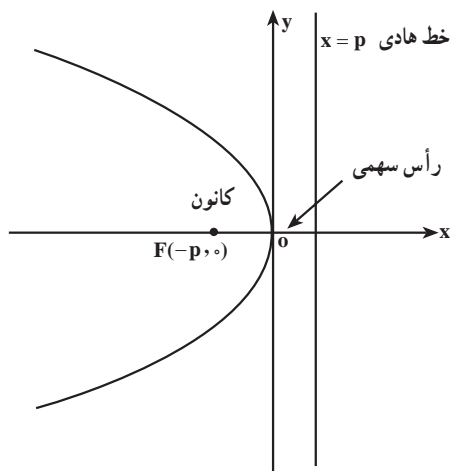


معادله (۲) $x^2 = -4py$ یا $y = -\frac{x^2}{4p}$

می‌توان معادله‌های مشابهی برای سهمی‌هایی که رو به راست، یا رو به چپ باز می‌شوند، به دست آورد.



سهمی به معادله $y^2 = 4px$



سهمی به معادله $y^2 = -4px$

فرم‌های استاندارد معادله سهمی با رأس واقع در مبدأ ($p > 0$)

معادله	کانون	خط هادی	محور سهمی	دهانه سهمی
$x^2 = 4py$	$(0, p)$	$y = -p$	محور y	رو به بالا
$x^2 = -4py$	$(0, -p)$	$y = p$	محور y	رو به پایین
$y^2 = 4px$	$(p, 0)$	$x = -p$	محور x	رو به راست
$y^2 = -4px$	$(-p, 0)$	$x = p$	محور x	رو به چپ

مثال: کانون و خط هادی سهمی به معادله $y^2 = 10x$ را پیدا کنید.

حل: ابتدا مقدار p را از معادله استاندارد $y^2 = 4px$ پیدا می‌کنیم.

$$4p = 10 \Rightarrow p = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

در نتیجه کانون و خط هادی به صورت زیر به دست می‌آید :

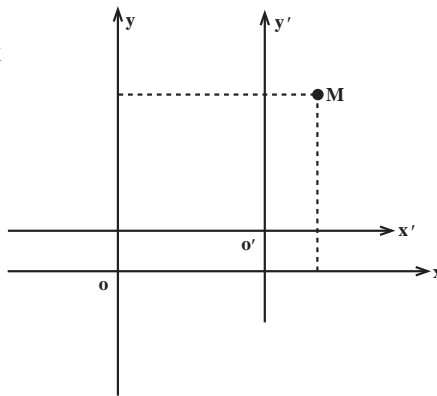
$$\text{کانون} : (p, 0) = \left(\frac{5}{4}, 0\right)$$

$$\text{خط هادی} : x = -p \text{ یا } x = \frac{-5}{4}$$

انتقال محورها

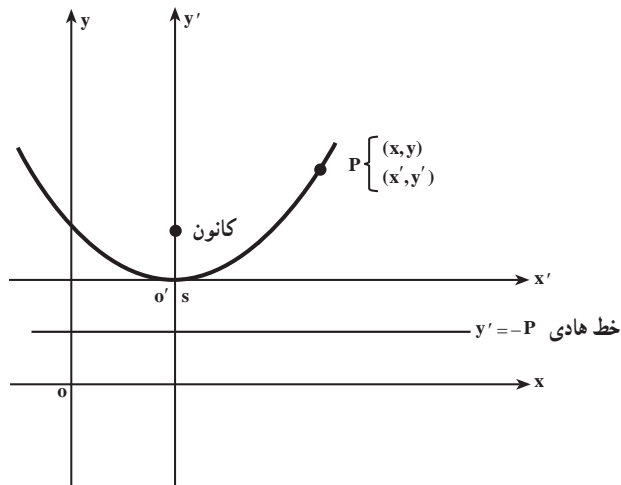
در دستگاه مختصات xOy نقطه $M(x, y)$ را در نظر می‌گیریم، اگر محورهای مختصات را به موازات خود انتقال داده تا مبدأ جدید $O'(h, k)$ باشد در این صورت مختصات M در دستگاه مختصات جدید می‌شود :

$$X' = x - h, \quad Y' = y - k$$



حال فرض کنیم یک سهمی با رأس $S(h, k)$ داده شده باشد که رو به بالا باز شود (نظیر شکل زیر)، معادله سهمی در مختصات $x'O'y'$ می‌شود :

$$X'^2 = 4pY'$$



محور تقارن

را به یکی از چهار صورت متعارف تبدیل نمود.

مثال: سهمی به معادله $y^2 - 4y - 8x - 4 = 0$ داده شده کانون و معادله خط هادی سهمی را

مشخص نمایید.

$$y^2 - 4y = 8x + 4 \Rightarrow (y - 2)^2 = 8(x + 1)$$

$$4p = 8 \Rightarrow p = 2$$

بنابراین رأس سهمی و معادله خط هادی $x = -3$ می باشد.

رسم سهمی: برای رسم سهمی ابتدا معادله آن را به صورت استاندارد نوشته و کانون، رأس و خط هادی آن را به دست می آوریم. و برحسب نوع سهمی (قائم یا افقی) محور کانونی، کانون و رأس سهمی و خط هادی را رسم می کنیم سپس در طرفین محور کانونی و از نقطه کانون F به اندازه $2p$ واحد به سمت چپ و راست (بالا و پایین) جدا کرده A و B می نامیم در صورت امکان محل تلاقی نمودار با محورهای مختصات را هم به دست آورده و نقاط به دست آمده را با توجه به نوع سهمی به هم وصل کرده و شکل را کامل می کنیم.

مثال: نمودار سهمی $y^2 + 4y + 4x = 0$ را رسم کنید.

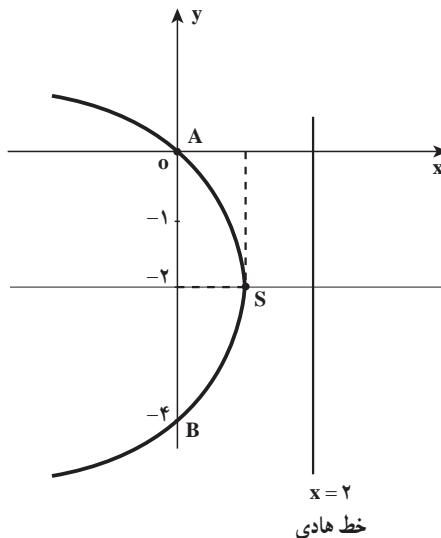
حل: ابتدا معادله سهمی را به صورت استاندارد می نویسیم

$$(y + 2)^2 = -4x + 4 \Rightarrow (y + 2)^2 = -4(x - 1)$$

رأس سهمی نقطه $S(1, -2)$ و $p = 1$ و نوع سهمی افقی و دهانه آن به سمت چپ باز می شود.

کانون سهمی $F(-1, -2)$ و خط هادی $x = 2$ است (در این جا نقاط A و B همان نقاط محل تلاقی

محور y ها و نمودار است).



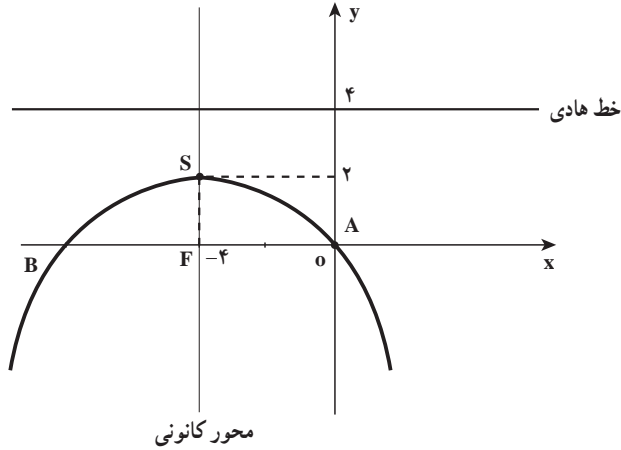
مثال: نمودار سهمی $x^2 + 8x + 16y = 0$ را رسم کنید.

حل:

$$x^2 + 8x + 16 = -8y + 16$$

$$(x + 4)^2 = -8(y - 2)$$

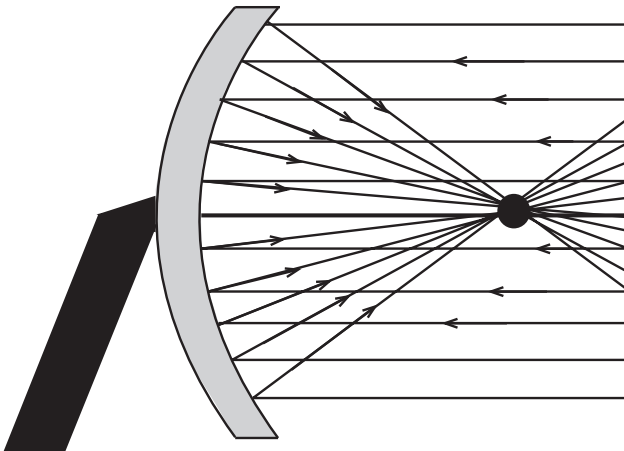
رأس سهمی $S(-4, 2)$ و $p = 2$ همچنین کانون $F(-4, 0)$ و خط هادی $y = 4$ می‌باشند.



آنتن‌های سهموی

آنتن‌های سهموی امواج رادیویی یا تلویزیونی ورودی را در کانون خود منعکس می‌کنند. با نصب دریافت‌کننده (گیرنده) در کانون امواج دریافت می‌شوند.

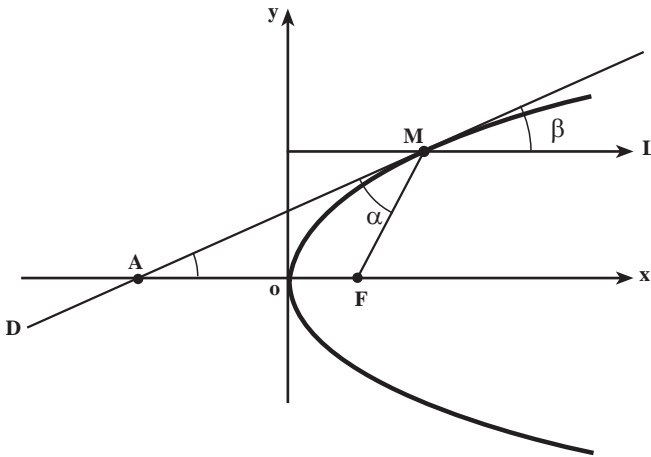
انرژی و قدرت سهموی



نقطه نشان داده شده کانون سهمی است. اشعه‌های نور که موازی محور سهمی به جسم سهموی می‌تابد پس از انعکاس در کانون سهموی متمرکز می‌شوند. از این ایده برای استفاده از انرژی خورشیدی استفاده می‌شود.

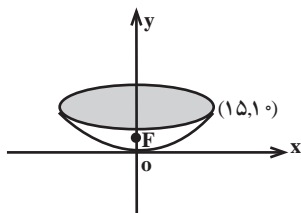
ویژگی بازتابندگی سهمی‌ها

سهمی‌ها ویژگی جالبی دارند که در ساختن انواع آینه‌های سهموی، تلسکوپ‌ها، چراغ‌های جلوی اتومبیل، آنتن‌های سهموی رادار و میکروویو و در گیرنده‌های «بشقابی» تلویزیون استفاده می‌شود و کاربرد عمده سهمی بازتابان نور و امواج رادیویی است. پرتوهایی که از کانون سهمی به سهمی برخورد کنند، موازی با محور از سهمی خارج می‌شوند و پرتوهایی که موازی با محور به سهمی می‌تابند در کانون سهمی جمع می‌شوند. در شکل زیر سهمی به معادله $y^2 = 4px$ را در نظر گرفته و خط D در نقطه $M(x_0, y_0)$ بر سهمی مماس شده است ثابت می‌شود که α و β برابرند، پس هر پرتویی که از F به نقطه‌ای از سهمی مانند M بتابد در امتداد ML خارج می‌شود و به همین ترتیب، هر پرتویی که در امتداد ML به سهمی بتابد، به طرف F باز می‌تابد.



مثال: عمق یک آینه سهموی در مرکز آن 10° سانتیمتر و قطر قاعده آن (در بالای آینه) 30° سانتیمتر است فاصله رأس تا کانون را حساب کنید.

حل: محورهای مختصات را طوری انتخاب می‌کنیم که رأس سهمی در مبدأ و محور تقارن سهمی در امتداد محور y ‌ها، و دهانه سهمی به طرف بالا باشد. بنابراین



معادله سهمی می‌شود $x^2 = 4py$ و از طرفی نقطه $(15, 10)$ متعلق به

سهمی است بنابراین $10 = 4p \times 15$ و $p = \frac{45}{8}$ بنابراین فاصله

رأس تا کانون سهمی $5\frac{5}{8}$ سانتیمتر است.

۱- مختصات کانون و رأس و خط هادی هر یک از سهمی‌های زیر را به دست آورده و نمودار آن‌ها را رسم کنید.

الف) $y^2 - 2y + x - 1 = 0$

ب) $8y = 4 + 4x - x^2$

پ) $y^2 - 8x - 8 = 0$

ت) $3y^2 + 6x - 4y = 0$

۲- معادله یک سهمی را بنویسید که $x = 4$ خط هادی و $y = 4$ محور تقارن آن و از نقطه $A(9, 7)$ بگذرد.

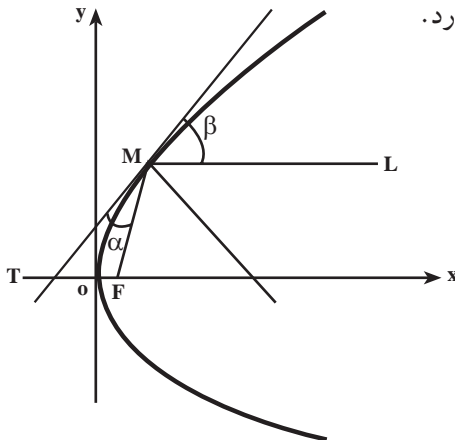
۳- معادله سهمی را بنویسید که کانون آن $F(3, 5)$ و معادله خط هادی آن $x = -3$ باشد.

۴- معادله سهمی قائم مماس بر محور x ‌ها که دارای کانون $F(3, 1)$ باشد را بنویسید. سپس نمودار آن را رسم کنید.

۵- چه نواحی‌ای از صفحه در نابرابری‌های $y^2 > x$ و $y^2 < x$ صدق می‌کنند؟ «با رسم شکل».

۶- ثابت کنید معادله خط مماس بر سهمی به معادله $y^2 = 4px$ در نقطه $M(x_0, y_0)$ واقع بر آن به صورت $yy_0 = 2p(x + x_0)$ می‌باشد.

۷- از نقطه $M(x_0, y_0)$ روی سهمی به معادله $y^2 = 4px$ مماس و قائم بر سهمی را رسم کرده‌ایم (شکل زیر). ثابت کنید $\alpha = \beta$. از اینجا نتیجه بگیرید که هر پرتویی که موازی محور سهمی بر سهمی بتابد از کانون سهمی می‌گذرد.



[راهنمایی: از مسأله ۶ و این ویژگی سهمی که فاصله هر نقطه آن تا کانون برابر فاصله آن از

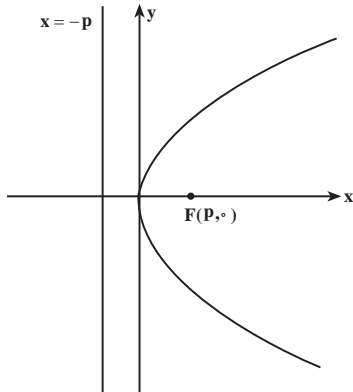
خط هادی است استفاده کنید.]

۸- یک تلسکوپ انعکاسی دارای آینه‌ای سهموی است که فاصله رأس آن تا کانونش ۷۵ سانتیمتر

می‌باشد. اگر قطر قاعده آینه 16° سانتیمتر باشد، عمق آینه در مرکز آن چقدر است؟

۹- ثابت کنید دایره‌ای که قطرش وتری از سهمی است که از کانون بر محور تقارن آن عمود

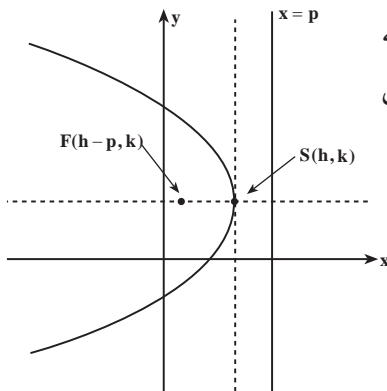
است، مماس بر خط هادی این سهمی است.



۱۰- با توجه به شکل مقابل نشان دهید $y^2 = 4px$ معادله

سهمی است که رأس آن واقع بر مبدأ مختصات است و دهانه

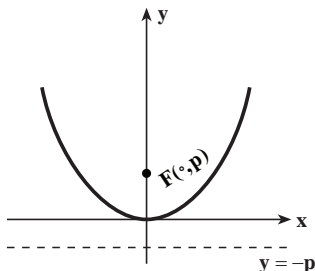
آن رو به راست باز می‌شود.



۱۱- با توجه به شکل مقابل نشان دهید که

معادله سهمی $(y - k)^2 = -4p(x - h)$ است که رأس

$S(h, k)$ و دهانه آن رو به چپ باز می‌شود.



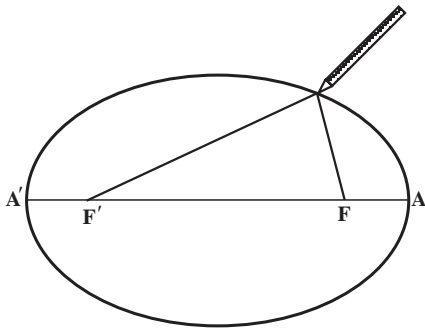
۱۲- به شکل مقابل توجه کنید. کانون F را به خط هادی

L نزدیک و نزدیکتر می‌کنیم. در حالتی که F بر خط L منطبق

شود، شکل سهمی چگونه تغییر می‌یابد؟

بیضی

تعریف: بیضی مکان هندسی نقاطی از صفحه است که مجموع فواصل آن نقطه از دو نقطه ثابت واقع در صفحه مقدار ثابتی باشد. دو نقطه ثابت را کانون‌های بیضی می‌نامند.



رسم بیضی: اگر نقاط F و F' کانون‌های بیضی اختیار شوند، دو سر نخ را به دو سنجاق می‌بندیم و دو سنجاق را در نقاط F و F' نصب می‌کنیم (شکل مقابل) نوک مدادی را به نخ می‌متکی کرده و آن را طوری حرکت می‌دهیم که نخ همواره کشیده باشد، از حرکت نوک مداد بر روی کاغذ، بیضی رسم می‌شود، زیرا نوک مداد در هر وضعی مانند M باشد، همواره

$MF + MF'$ برابر طول نخ یعنی مساوی مقدار ثابتی است. واضح است که باید طول نخ، از فاصلهٔ دو کانون بیضی بیشتر باشد.

معادله بیضی: اگر کانون‌های بیضی نقاط $F(c, 0)$ و $F'(-c, 0)$ باشند و مجموع فواصل نقطه M متعلق به بیضی از دو کانون با $2a$ نمایش داده شود؛ داریم:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

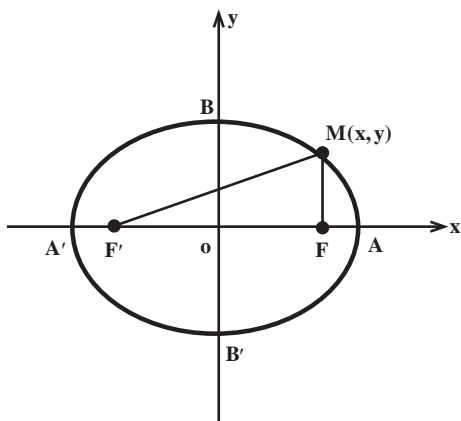
پس از دو بار به توان دو رسانیدن و خلاصه کردن نتیجه می‌گیریم:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

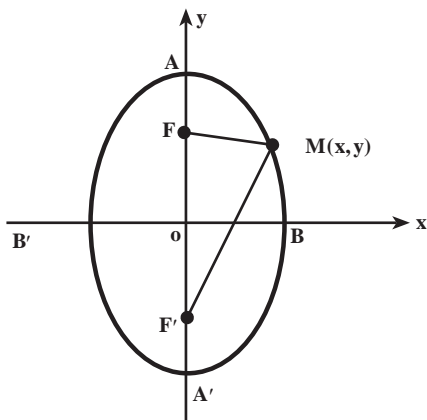
چون در مثلث $MF'F$ ، $MF + MF' = 2a$ از $FF' = 2c$ بزرگتر است عبارت $a^2 - c^2$ مثبت است و قرار می‌دهیم $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ ، بنابراین:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1)$$

معادله (۱) نشان می‌دهد که این منحنی نسبت به هر دو محور مختصات متقارن است و داخل مستطیلی محصور به خطوط $x = a$ و $x = -a$ و $y = b$ و $y = -b$ قرار دارد.



نقاط تقاطع بیضی با محور x ها $(\pm a, 0)$ و با محور y ها $(0, \pm b)$ است $AA' = 2a$ قطر بزرگ بیضی و $BB' = 2b$ قطر کوچک بیضی است. نکته: اگر در معادله بیضی افقی یعنی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ جای x و y را با هم عوض کنیم، معادله یک بیضی به دست می‌آید که مرکزش همان مبدأ مختصات و قطر بزرگش (AA') بر محور x عرض‌ها منطبق خواهد بود (بیضی قائم).



با توجه به $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ همواره رابطه $a^2 = b^2 + c^2$ برقرار است نظیر سهمی اگر مرکز بیضی نقطه (h,k) و اقطارش با محورهای مختصات موازی باشند با استفاده از انتقال محورهای مختصات معادلات متعارف بیضی به صورت زیرند.

۱- بیضی افقی

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

کانون‌ها $(h \pm c, k)$ ، رأس‌های A و A' $(h \pm a, k)$

۲- بیضی قائم

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

کانون‌ها $(h, k \pm c)$ ، رأس‌های A و A' و $(h, k \pm a)$

مثال: معادله یک بیضی به صورت زیر نوشته شده است. مرکز، رأس‌های A و A' و کانون‌های

بیضی را بیابید و سپس نمودار بیضی را رسم کنید.

$$9x^2 + 4y^2 - 18x + 8y - 23 = 0$$

حل:

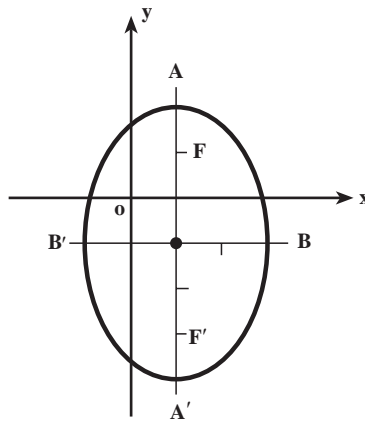
$$9(x^2 - 2x + 1) + 4(y^2 + 2y + 1) = 9 + 4 + 23$$

$$\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$$

مرکز بیضی نقطه $(1, -1)$ و $a^2 = 9$ و $b^2 = 4$ بنابراین بیضی قائم است و رأس‌ها $A(1, 2)$ و

$A'(1, -4)$ و $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{5}$ در نتیجه $c = \sqrt{5}$ و کانون‌ها، $(1, -1 \pm \sqrt{5})$. نمودار این بیضی در

شکل زیر رسم شده است:



خروج از مرکز بیضی: با توجه به معادله بیضی نسبت $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ را $(a > b > 0)$

خروج از مرکز بیضی می‌نامند، این عدد بین صفر و یک تغییر می‌کند و میزان اختلاف شکل بیضی با

دایره را نشان می‌دهد، حال اگر a را ثابت نگه داریم و c را در بازه $(0, a)$ تغییر دهیم، شکل بیضی‌های

حاصل تغییر خواهد کرد. وقتی c به صفر نزدیک می‌شود بیضی بیشتر شبیه دایره است و وقتی به مقدار

c افزوده شود، بیضی کشیده‌تر می‌شود.

سیارات منظومه شمسی در مدارهایی بیضوی که خورشید در یکی از کانون‌های آن‌ها واقع است، حول خورشید می‌گردند. خروج از مرکز بیشتر سیارات منظومه شمسی به قدری کوچک است که مدار آن‌ها را می‌توان به طور تقریبی دایره تصور کرد. برای نمونه خروج از مرکز زمین برابر 2×10^{-5} است.

مثال: خروج از مرکز یک بیضی $\frac{4}{5}$ و مرکزش $(-4, -1)$ و طول نقطه A رأس کانونی آن برابر یک است و قطر بزرگ بیضی موازی محور xها است، معادله بیضی را به دست آورید.

$$\frac{(x+4)^2}{a^2} + \frac{(y+1)^2}{b^2} = 1$$

$$A(h+a, k) \Rightarrow h+a=1 \Rightarrow a=5$$

$$\frac{c}{a} = \frac{4}{5} \Rightarrow \boxed{c=4} \quad c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow b^2 = 9$$

$$\boxed{\frac{(x+4)^2}{25} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1}$$

معادله بیضی

معادلات مماس و قائم بر بیضی

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2 = 0$$

$$x b^2 + y a^2 y' = 0 \Rightarrow y' = \frac{-b^2 x}{a^2 y} \Rightarrow m = \frac{-b^2 x_0}{a^2 y_0} \quad \text{شیب مماس:}$$

$$y - y_0 = \frac{-b^2 x_0}{a^2 y_0} (x - x_0) \quad (1)$$

با توجه به تساوی $b^2 x_0^2 + a^2 y_0^2 = a^2 b^2$ از (1) به معادله زیر می‌رسیم.

$$\boxed{\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1}$$

معادله مماس در بیضی

$$\boxed{\frac{a^2 x}{x_0} - \frac{b^2 y}{y_0} = c^2}$$

و معادله قائم بر بیضی می‌شود

۱- معادله یک بیضی را بنویسید که نقاط $F(2, -2)$ و $F'(-4, -2)$ کانون‌های آن و خروج از مرکز آن $e = \frac{3}{5}$ باشد.

۲- بیضی به معادله $4x^2 + y^2 + 8x - 2y + 1 = 0$ مفروض است. مختصات مرکز، طول اقطار، فاصله کانونی و مختصات دو کانون این بیضی را حساب کنید.

۳- نقطه $M \begin{cases} x = 1 + 3 \sin t \\ y = 2 \cos t \end{cases}$ مفروض است اولاً: ثابت کنید مکان هندسی نقطه M وقتی t تغییر کند، بیضی است. ثانياً: نقطه‌ای از بیضی را که به ازای $t = \frac{\pi}{4}$ به دست می‌آید، N می‌نامیم معادله خط مماس بر بیضی را در نقطه N بنویسید.

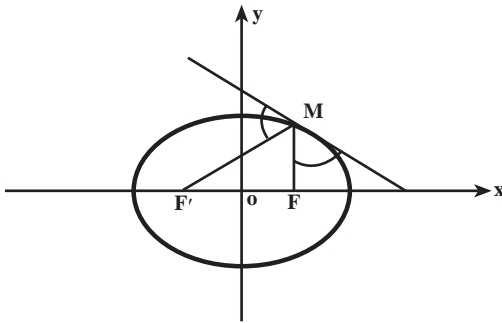
۴- شکل ناحیه‌ای را رسم کنید که مختصات نقاطش در نابرابری زیر صدق می‌کند.

$$4x^2 + 9y^2 \leq 36$$

۵- به ازای چه مقادیر ثابت a و b و c ، بیضی $4x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ در مبدأ مختصات بر محور x مماس است و از نقطه $(-1, 2)$ می‌گذرد؟

۶- ویژگی بازتابندگی بیضی: بیضی‌وار از دوران بیضی حول قطر بزرگش پدید می‌آید. آینه‌ها با نقره اندود کردن درون رویه بیضی‌وار می‌سازند. نشان دهید پرتویی از نور که از یکی از کانون‌ها ساطع

شود به کانون دیگر باز می‌تابد. امواج صوتی هم این مسیر را طی می‌کنند و از این ویژگی بیضی‌وار برای ساختن برخی از تالارهای هنری استفاده می‌کنند. مطابق شکل مقابل نشان دهید که خطوط گذرنده از نقطه M واقع بر بیضی و دو کانون آن با خط مماس بر بیضی در M زوایای برابر تشکیل می‌دهند.



۷- معادله مکان هندسی نقاطی را تعیین کنید که عرض نقطه‌های واقع بر دایره $x^2 + y^2 = 16$ را به نسبت $\frac{3}{4}$ تقسیم کنند.

هذلولی

تعریف: هذلولی مکان هندسی نقاطی از صفحه است که قدر مطلق تفاضل فواصل آن نقطه از دو

نقطه ثابت عدد ثابتی باشد. دو نقطه ثابت F و F' کانون‌های هذلولی می‌نامند و قرار می‌دهیم $FF' = 2c$ و مقدار ثابت را با $2a$ نشان می‌دهیم و داریم $c > a$.

معادله هذلولی: اگر $M(x,y)$ بر هذلولی واقع باشد و کانون‌های هذلولی $F(c,0)$ و $F'(-c,0)$

و مقدار ثابت $2a$ باشد. آنگاه نقطه $M(x,y)$ بر هذلولی واقع است اگر و فقط اگر

$$\left| \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right| = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

یکی از رادیکال‌ها را به طرف راست معادله منتقل، دو طرف را مجذور، و نتیجه را ساده کرده،

سپس یک رادیکال باقی مانده را در یک طرف نگه می‌داریم و نتیجه را باز هم مجذور می‌کنیم و به معادله

زیر می‌رسیم:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1$$

با فرض $c^2 - a^2 = b^2$ معادله هذلولی به صورت $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ می‌باشد.

هذلولی هم مانند بیضی نسبت به هر دو محور و نسبت به مبدأ متقارن است اما با محور y ها

تقاطع ندارد و هیچ قسمتی از نمودار هذلولی بین خطوط $x = -a$ و $x = a$ قرار نمی‌گیرد. در هذلولی

یک نامساوی کلی شامل a و b وجود ندارد که متناظر با نامساوی $a > b$ در مورد بیضی باشد.

یعنی در یک هذلولی ممکن است $a < b$ یا $a > b$ باشد. اگر در یک هذلولی $a = b$ ، آن هذلولی را

متساوی الساقین گویند.

مجانِب‌های هذلولی: نشان می‌دهیم هذلولی به معادله $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ دارای مجانب‌هایی

به صورت $y = \frac{\pm b}{a}x$ است.

معادله هذلولی را بر حسب x مرتب می‌کنیم:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}x^2 - b^2$$

در این صورت $f(x)$ به یکی از صورت‌های زیر است :

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}, \quad y = -\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) - \frac{b}{a}x \right] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{b}{a}x \right] \\ &= \frac{b}{a} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - a^2} - x)(\sqrt{x^2 - a^2} + x)}{\sqrt{x^2 - a^2} + x} = \frac{b}{a} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-a^2}{\sqrt{x^2 - a^2} + x} = 0 \end{aligned}$$

پس بنا به تعریف مجانب، خط $y = \frac{b}{a}x$ مجانب نمودار $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ است. به طور مشابه،

می‌توان نشان داد که خط $y = \frac{b}{a}x$ نیز مجانب نمودار $y = -\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ است در نتیجه خط $y = \frac{b}{a}x$

مجانب هذلولی $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ خواهد بود و با همین روش می‌توان ثابت کرد خط $y = \frac{-b}{a}x$ نیز مجانب

همین هذلولی است. برای به یاد سپردن معادلات مجانب‌های هذلولی به صورت زیر عمل می‌کنیم :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right) \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0 \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0 \end{cases} \quad \text{مجانب‌ها}$$

طریقه رسم هذلولی : ابتدا مستطیلی به رئوس (a,b) و $(a,-b)$ و $(-a,b)$ و $(-a,-b)$ رسم می‌کنیم

قطرهای مستطیل خطوط مجانب هذلولی‌اند و رئوس هذلولی نقاط تقاطع محور اصلی و مستطیل رسم

شده‌اند و هر شاخه هذلولی از رأس مربوطه و مماس بر ضلع مستطیل رسم شده به طوری که امتداد شاخه

هذلولی به طور مجانبی به خطی که قطر مستطیل روی آن قرار دارد نزدیک می‌شود.

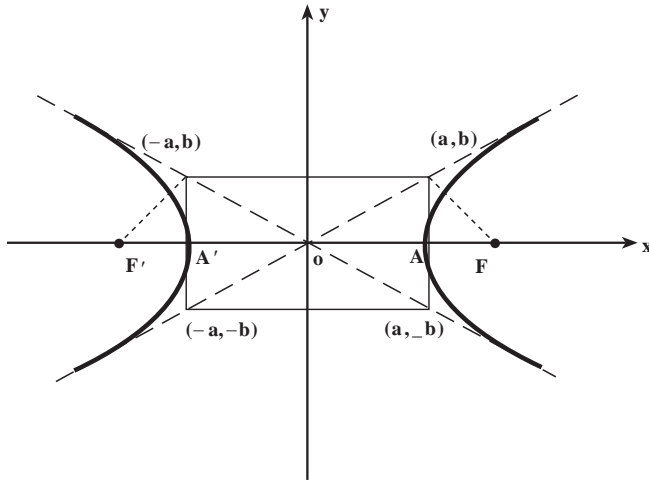
مثال : هذلولی به معادله $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ را رسم کنید.

$$a^2 = 9 \quad \text{و} \quad b^2 = 2$$

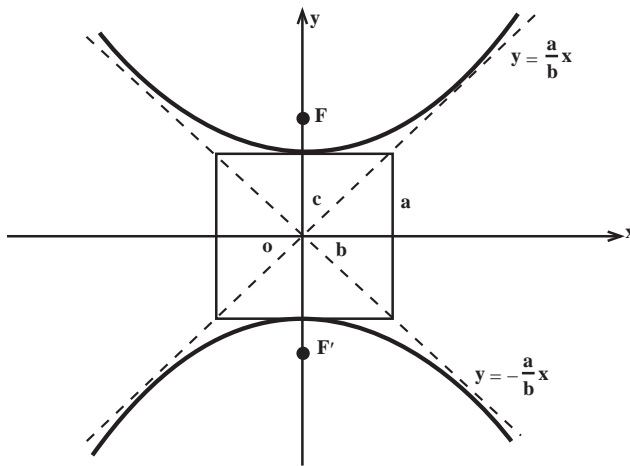
$$c^2 = a^2 + b^2 = 13$$

$$F(\sqrt{13}, 0)$$

$$F' = (-\sqrt{13}, 0)$$



اگر به مرکز O و به شعاع $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ دایره رسم کنیم محور تقارن هذلولی (محور x ها) را در کانون ها، F و F' قطع می کند.
 اگر در معادله $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ جای x و y را عوض کنیم، معادله جدید $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ یک هذلولی را نشان می دهد که کانون هایش بر محور y ها واقع اند (مانند شکل زیر).



وقتی مرکز هذلولی مبدأ مختصات نباشد: مرکز یک هذلولی محل تقاطع محورهای تقارن آن است. فهرست زیر معادلات هذلولی هایی را نشان می دهد که محورهایشان با محورهای مختصات موازی اند، و مرکزشان در نقطه (h, k) واقع است.

۱- هذلولی افقی (خط گذرنده از کانون‌ها موازی با محور xها)

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

رأس‌ها $(h \pm a, k)$ و کانون‌ها $(h \pm c, k)$:

$$\frac{x-h}{a} \pm \frac{y-k}{b} = 0 \quad \text{مجانِب‌ها}$$

۲- هذلولی قائم (خط گذرنده از کانون‌ها موازی با محور yها)

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

رأس‌ها $(h, k \pm a)$ و کانون‌ها $(h, k \pm c)$:

$$\frac{y-k}{a} \pm \frac{x-h}{b} = 0 \quad \text{مجانِب‌ها}$$

مثال : مرکز، رأس‌ها، کانون‌ها و مجانِب‌های هذلولی زیر را به دست آورید.

$$x^2 - 4y^2 - 2x + 8y - 7 = 0 \quad \text{حل : داریم}$$

$$(x^2 - 2x + 1 - 1) - 4(y^2 - 2y + 1 - 1) - 7 = 0$$

$$(x-1)^2 - 1 - 4(y-1)^2 + 4 - 7 = 0$$

$$(x-1)^2 - 4(y-1)^2 = 4$$

$$\frac{(x-1)^2}{4} - (y-1)^2 = 1$$

پس مختصات مرکز $(1, 1)$ و چون $a = 2$ و $b = 1$ پس $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{5}$. پس رأس‌ها

نقاط $(3, 1)$ و $(-1, 1)$ و کانون‌ها $(1 + \sqrt{5}, 1)$ و $(1 - \sqrt{5}, 1)$ و مجانِب‌ها عبارتند از :

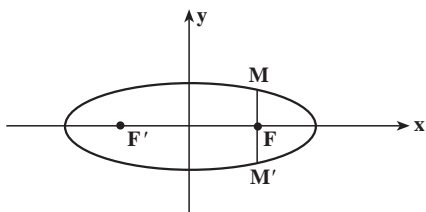
$$\frac{x-1}{2} \pm (y-1) = 0$$

خروج از مرکز هذلولی : نظیر خروج از مرکز بیضی، $e = \frac{c}{a}$ را خروج از مرکز هذلولی می‌نامند

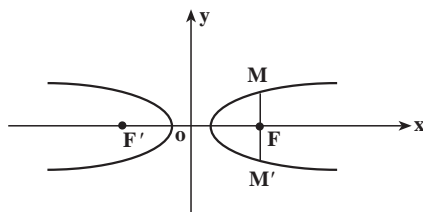
و چون در هذلولی $c > a$. خروج از مرکز هر هذلولی همیشه عددی بزرگتر از یک می‌باشد.

وتر کانونی : وترى که از کانون هذلولی (یا بیضی) می‌گذرد و بر محور کانونی عمود است و تر کانونی

هذلولی (بیضی) نامیده می‌شود (شکل زیر). ثابت می‌شود که طول چنین وترى برابر $\frac{2b^2}{a}$ می‌باشد.



MM' یک وتر کانونی بیضی است.



MM' یک وتر کانونی هذلولی است.

مثال: معادله یک هذلولی را بنویسید که مرکزش مبدأ مختصات و محور کانونی آن منطبق بر محور xها و خروج از مرکزش $\frac{\sqrt{5}}{2}$ و وتر کانونی آن به طول 4 باشد.
 حل: فرض کنیم هذلولی مانند شکل قبل باشد. بنابراین داریم

$$MM' = \frac{2b^2}{a} = 4 \quad \text{و} \quad e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

از این دو رابطه خواهیم داشت:

$$b^2 = 2a \quad \text{و} \quad e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{5}{4}$$

لذا

$$\frac{a^2 + 2a}{a^2} = \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{a^2}{a^2} + \frac{2a}{a^2} = \frac{5}{4} \Rightarrow 1 + \frac{2}{a} = \frac{5}{4}$$

پس $a = 8$ اکنون با توجه به رابطه $b^2 = 2a$ داریم $b = 4$ در نتیجه معادله هذلولی به صورت زیر است:

$$\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{16} = 1$$

مثال: معادله یک هذلولی را بنویسید که خطوط $3x + 2y + 1 = 0$ و $3x - 2y - 7 = 0$ مجانب‌های آن بوده و از نقطه $M(1 + 2\sqrt{3}, 4)$ بگذرد.
 حل: مجانب‌ها را در یک دستگاه قطع می‌دهیم.

$$\begin{cases} 3x + 2y + 1 = 0 \\ 3x - 2y - 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow O'(1, -2)$$

O' مرکز این هذلولی است (چرا؟) با رسم خطوط مجانب و انتخاب نقطه M در صفحه مختصات معلوم می‌شود که محور کانونی این هذلولی موازی محور yها است. بنابراین معادله هذلولی

به صورت :

$$\frac{(y+2)^2}{a^2} - \frac{(x-1)^2}{b^2} = 1$$

می باشد. چون ضریب زاویه مجانب ها از دستور $m = \pm \frac{a}{b}$ به دست می آید، پس

$$m = \pm \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{3}{2} \Rightarrow 2a = 3b$$

از طرف دیگر مختصات M در معادله هذلولی صدق می کند، پس

$$\frac{36}{a^2} - \frac{12}{b^2} = 1 \Rightarrow a = 3, b = 2$$

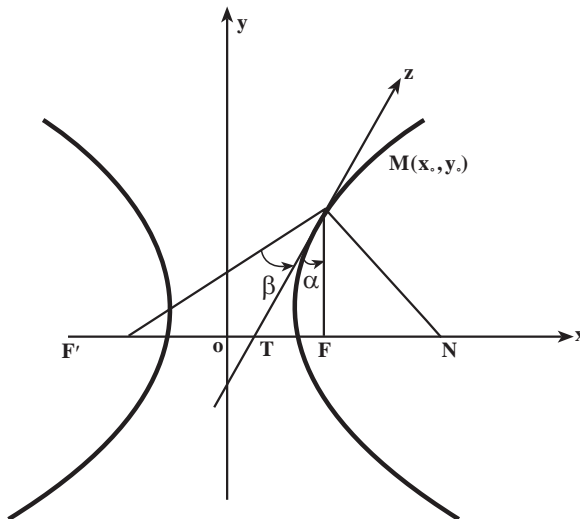
بنابراین معادله هذلولی می شود :

$$\frac{(y+2)^2}{9} - \frac{(x-1)^2}{4} = 1$$

معادلات مماس و قائم بر هذلولی

هذلولی به معادله $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ و نقطه $M(x_0, y_0)$ متعلق به آن را در نظر می گیریم :

$$b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2 \Rightarrow y' = \frac{b^2 x}{a^2 y}$$



$$m = \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0} \Rightarrow y - y_0 = \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0} (x - x_0) \Rightarrow \boxed{\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1}$$

معادله مماس بر هذلولی

$$m' = \frac{-a^2 y_0}{b^2 x_0} \Rightarrow y - y_0 = \frac{-a^2 y_0}{b^2 x_0} (x - x_0) \Rightarrow \boxed{\frac{a^2 x}{x_0} + \frac{b^2 y}{y_0} = c^2}$$

معادله قائم بر هذلولی

مثال: بدون استفاده از مشتق، ضریب زاویه خطوطی را به دست آورید که از نقطه $A(3, 4)$ بگذرند و بر هذلولی به معادله $x^2 - y^2 = 1$ مماس باشند.

حل: معادله خطی را می‌نویسیم که از نقطه $A(3, 4)$ بگذرد و شیب آن m باشد؛ می‌دانیم معادله این خط $y - 4 = m(x - 3)$ است. لذا $y = mx - 3m + 4$.

مختصات نقاط تلاقی این خط با هذلولی مفروض از حل دستگاه

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ y = mx - 3m + 4 \end{cases}$$

به دست می‌آید. با حذف y در این معادلات به دست می‌آوریم

$$(1 - m^2)x^2 - 2m(-3m + 4)x - 9m^2 + 24m - 17 = 0$$

این معادله در واقع طول‌های نقاط تقاطع خطوطی را به دست می‌دهد که از نقطه $A(3, 4)$ می‌گذرند و هذلولی $x^2 - y^2 = 1$ را قطع می‌کنند. برای آنکه یکی از این خطوط بر هذلولی مماس شود باید معادله درجه دوم اخیر فقط یک جواب (یک نقطه تقاطع) داشته باشد. از اینجا نتیجه می‌گیریم که

$$\frac{1}{4}\Delta = (3m^2 - 4m)^2 - (1 - m^2)(-9m^2 + 24m - 17) = 0$$

پس از ساده کردن به صورت زیر درمی‌آید

$$8m^2 - 24m + 17 = 0$$

و این معادله دارای دو جواب $m = \frac{6 + \sqrt{2}}{4}$ و $m = \frac{6 - \sqrt{2}}{4}$ است. یعنی از نقطه $A(3, 4)$ دو خط مستقیم می‌توان بر هذلولی $x^2 - y^2 = 1$ مماس رسم کرد. ضریب زاویه این دو خط به ترتیب برابر

$$\frac{6 - \sqrt{2}}{4} \text{ و } \frac{6 + \sqrt{2}}{4} \text{ است.}$$

۱- هذلولی‌های زیر را رسم کنید :

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1 \text{ (ب)}$$

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1 \text{ (الف)}$$

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = -1 \text{ (د)}$$

$$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1 \text{ (ج)}$$

در تمرین‌های ۲ تا ۸، مرکز، رئوس، کانون‌ها و ثابت‌های هذلولی به معادله مفروض را پیدا کنید.

سپس شکل منحنی را در کاغذ شطرنجی رسم کنید.

$$9(x-2)^2 - 4(y+3)^2 = 36 \quad \text{—۲}$$

$$4(x-2)^2 - 9(y+3)^2 = 36 \quad \text{—۳}$$

$$4(y+3)^2 - 9(x-2)^2 = 1 \quad \text{—۴}$$

$$5x^2 - 4y^2 + 20x + 8y = 2 \quad \text{—۵}$$

$$4x^2 = y^2 - 4y + 8 \quad \text{—۶}$$

$$4y^2 = x^2 - 4x \quad \text{—۷}$$

$$4x^2 - 5y^2 - 16x + 10y + 31 = 0 \quad \text{—۸}$$

۹- بر نقطه A واقع بر هذلولی به معادله $xy = a^2$ ($a \neq 0$ و ثابت است) مماسی رسم کرده‌ایم. این مماس

محورهای مختصات را در نقاط B و C قطع می‌کند. ثابت کنید نقطه A وسط پاره‌خط BC است.

۱۰- بر نقطه A واقع بر هذلولی به معادله $x^2 - y^2 = 1$ قائمی رسم کرده‌ایم. این قائم محورهای

مختصات را در نقاط B و C قطع می‌کند. ثابت کنید نقطه A وسط پاره‌خط BC است.

۱۱- خطوط موازی با شیب m وترهایی بر هذلولی به معادله $x^2 - y^2 = 1$ ایجاد می‌کنند، ثابت

کنید اوساط این وترها بر یک خط واقع‌اند.

مسائل دوره‌ای فصل

۱- سهمی به معادله $y = x^2$ مفروض است. فرض کنیم A نقطه‌ای واقع بر این سهمی غیر از

مبدأ مختصات باشد. مماس بر سهمی در نقطه A محورهای x و y را به ترتیب در نقاط B و C قطع

می‌کند. ثابت کنید نقطه B وسط پاره‌خط AC است.

۲- مماس بر هذلولی به معادله $xy = a^2$ ($a \neq 0$ عددی است ثابت) در یک نقطه واقع بر آن

محورهای مختصات را در نقاط B و C قطع می‌کند؛ ثابت کنید مساحت مثلث OBC عددی است ثابت

(O مبدأ مختصات است).

۳- در چه نقاطی از سهمی به معادله $y = x^2$ قائم بر سهمی از نقطه $A(0, a)$ می‌گذرد؟ $a > \frac{1}{4}$.

۴- ثابت کنید هذلولی $x^2 - y^2 = 2$ و دایره $x^2 + y^2 - 2y - \frac{3}{4} = 0$ در نقاط $A(\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$ و $B(-\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$ بر هم مماس هستند.

۵- بر سهمی به معادله $y = x^2 + 5x + 1$ نقطه‌ای به دست آورید که مماس بر منحنی در آن نقطه موازی خط $y = 6x + 7$ باشد.

۶- بر بیضی به معادله $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$

نقاطی را به دست آورید که مماس بر منحنی در آن نقاط موازی خط $y = 4x + 7$ باشد.

۷- نقطه $A(x, y)$ با مختصات پارامتری

$$x = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \quad \text{و} \quad y = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

مفروض است که در آن $t \in \mathbb{R}$. به ازای بعضی از مقادیر t چند نقطه را در یک کاغذ شطرنجی مشخص کنید. (الف) تعداد نقاط به دست آمده را آنقدر انتخاب کنید (با اختیار کردن مقادیر t) تا بتوانید حدس بزنید که این نقاط تشکیل چه نوع منحنی‌ای در صفحه می‌دهند.

(ب) ثابت کنید وقتی t در \mathbb{R} تغییر می‌کند نقطه A بر یک هذلولی حرکت می‌کند. معادله این هذلولی را به دست آورید.

۸- ثابت کنید به ازای هر عدد حقیقی a ، خط مستقیم به معادله $y = ax + \sqrt{4a^2 + 9}$ بر بیضی به معادله

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

مماس است.

۹- ثابت کنید دایره به معادله $x^2 + y^2 - 9y + 16 = 0$ و سهمی $y = x^2$ در دو نقطه $A(2, 4)$ و $B(-2, 4)$ بر هم مماس هستند.