

تابع

ظهر گرم تابستان را به یاد آورید! وقتی که دوست دارید بعد از ظهر چرتی بزنید و صدای جیرجیرک‌ها مانع می‌شوند! شاید فکر کنید چرا جیرجیرک‌ها در روزهای گرم تابستان، از همیشه پُر سر و صداتر هستند و بیشتر جیرجیر می‌کنند؟ اگر به ویژگی ظهر گرم تابستان؛ که همان درجهٔ حرارت بالاست؛ توجه کنید، علت را یافته‌اید.

همین‌طور است! تعداد جیرجیرِ جیرجیرک‌ها، با درجهٔ حرارت متناسب است. یعنی هر چه هوا گرم‌تر باشد، تعداد جیرجیرِ جیرجیرک‌ها نیز، بیشتر می‌شود.



دانشمندان علوم تجربی، بین تعداد جیرجیر جیرجیرک‌ها در هر دقیقه و درجهٔ حرارت به سانتیگراد، رابطهٔ زیر را پیدا کرده‌اند.

$$n = 7/5C - 32$$

اگر تعداد جیرجیرها در هر دقیقه را با n و درجهٔ حرارت به سانتیگراد را با C نشان دهیم، آنگاه این رابطهٔ تجربی^۱ را می‌توانیم به صورت فرمول زیر بنویسیم:

$$n = 7/5C - 32 \quad (۱)$$

فعالیت ۱-۱

- ۱- در گرمای ۱۶ درجهٔ سانتیگراد، تعداد جیرجیرها در هر دقیقه چندتاست؟
- ۲- در گرمای ۱۰ درجهٔ سانتیگراد، تعداد جیرجیرها در هر دقیقه چندتاست؟

جدول ۱

۳۲	۲۷	۲۱	۱۸	۱۶	۱۵	۱۰	۴	درجهٔ حرارت به سانتیگراد
					۸۰/۵			تعداد جیرجیر جیرجیرک‌ها در هر دقیقه

۳- اعداد به دست آمده در بندهای ۱ و ۲ را در جدول فوق بنویسید و جدول را کامل کنید:

- ۴- در مورد تعداد جیرجیرها در چهار درجهٔ سانتیگراد چه می‌گویید؟
- ۵- در صفر درجهٔ سانتیگراد، آیا صدای جیرجیری از جیرجیرک‌ها شنیده می‌شود؟

درست حدس زدید! نطق جیرجیرک‌ها در سرما خاموش می‌شود!

- ۶- به فرمول (۱) و جدول (۱) توجه بیشتری کنید. آیا می‌توانید برای هر درجهٔ حرارت به سانتیگراد، تعداد جیرجیرهای متفاوتی پیدا کنید؟ دلیل خود را برای پاسخی که می‌دهید، بنویسید.

۱- توجه کنید که این فرمول، حاصل مشاهدات متعدد، منظم کردن آن مشاهدات و پیدا کردن الگویی در آنها بوده است که فرمول پیشنهادی نشان‌دهندهٔ آن الگوست.

پاسخ‌های خود را به خاطر بسپارید. این پاسخ یک نتیجه مهم را معرفی می‌کند. دوباره به آن باز می‌گردیم.

فعالیت ۱-۲

یک بنا و یک کارگر ساختمانی با هم در یک محل مشغول به کار هستند. کارگر ساختمانی روزی ۸ ساعت (با احتساب ساعت نماز و ناهار) و بنا، روزی ۶ ساعت کار می‌کند. دستمزد کارگر ساختمانی ساعتی ۵۰۰ تومان و دستمزد بنا (به دلیل کار تخصصی که می‌کند)، ساعتی ۱۲۵۰ تومان است. کارگر ساختمانی از ۸ صبح و بنا از ۱۰ صبح، مشغول به کار می‌شوند.



نمای داخلی کتابخانه تازه تأسیس هویزه

۱- جدول ۲ را کامل کنید :

جدول ۲

زمان	ساعت‌هایی که کارگر ساختمانی کار کرده	دستمزد کارگر ساختمانی به تومان	ساعت‌هایی که بنا کار کرده	دستمزد بنا به تومان
۸ صبح	—	—	—	—
۹ صبح	۱	۵۰۰	—	—
۱۰ صبح	۲	$2 \times 500 = 1000$	—	—
۱۱ صبح	۳	$3 \times 500 = 1500$	۱	۱۲۵۰
۱۲ ظهر				
۱ بعد از ظهر				
۲ بعد از ظهر				
۳ بعد از ظهر				
۴ بعد از ظهر				

۲- بعد از آن که کارگر ساختمانی، ۴ ساعت کار کرد، بنا چند ساعت کار کرده است؟

۳- چگونه دستمزد کارگر ساختمانی و بنا را، از روی ساعت‌هایی که کار کرده‌اند،

مشخص می‌کنیم؟

۴- فرمولی پیدا کنید که با آن، دستمزد بنا را از روی تعداد ساعت‌هایی که کارگر

ساختمانی کار کرده است، تعیین کنیم.

۵- بعد از ۴ ساعت کار کردن کارگر ساختمانی، دستمزد او بیشتر است یا دستمزد

بنا؟ (یعنی در ساعت ۱۲ ظهر)

۶- بعد از ۸ ساعت کار کردن کارگر ساختمانی (در ساعت ۴ بعد از ظهر)،

دستمزد او بیشتر است یا دستمزد بنا؟ چرا؟

۷- آیا بعد از تعداد ساعت کار انجام شده، کارگر ساختمانی می‌تواند دو دستمزد

متفاوت دریافت کند؟ چرا؟

۸- آیا بعد از تعداد ساعت کار انجام شده، بنا می‌تواند دو دستمزد متفاوت دریافت

کند؟ چرا؟

پاسخ سؤال ۶ فعالیت ۱-۱ و پاسخ سؤال‌های ۷ و ۸ فعالیت ۲-۱ را با هم

مقایسه کنید و نتیجه را با بیان خود، بنویسید.

همان‌طور که خود نتیجه گرفتید، در هر درجهٔ حرارت، تعداد جیرجیرها مشخص بود؛ در مقابل تعداد ساعت کار انجام‌شده توسط کارگر ساختمانی نیز، دستمزد او مشخص بود، هم‌چنان که در مقابل تعداد ساعت کار انجام‌شده توسط بنا نیز، دستمزد او مشخص بود.

هم‌چنین، تعداد جیرجیرها از درجهٔ حرارت تبعیت می‌کردند و دستمزد کارگر ساختمانی و بنا، از تعداد ساعت‌هایی که هریک کار کرده بودند، تبعیت می‌نمودند، در واقع، تعداد جیرجیرها تابعی از درجهٔ حرارت و دستمزد کارگر ساختمانی و بنا، تابعی از ساعت‌های کاری است.

بنابراین:

یک کمیت مانند n (تعداد جیرجیر جیرجیرک‌ها)، تابعی از یک کمیت دیگر مانند C (درجه حرارت برحسب سانتیگراد) است، اگر برای هر مقدار C ، یک مقدار منحصر به فرد برای n نتیجه شود، این را به صورت $n = f(C)$ (بخوانید اف C) نشان می‌دهیم.

در واقع:

اگر درجهٔ حرارت‌ها بر حسب سانتیگراد را مجموعهٔ A و تعداد جیرجیر جیرجیرک‌ها در هر دقیقه را مجموعهٔ B بنامیم، یک تابع f از A به B ، قانونی است که به هر عضو C در مجموعهٔ A ، دقیقاً یک عضو n از مجموعهٔ B را نسبت می‌دهد. مجموعهٔ A دامنهٔ^۲ تابع f و مجموعهٔ B ، بُرد^۳ تابع f نامیده می‌شود.

پس در حالت کلی، می‌توانیم تعریف زیر را برای تابع داشته باشیم:

تعریف

یک کمیت مانند y ، تابعی از یک کمیت دیگر مانند x است، اگر برای هر مقدار x ، یک و فقط یک مقدار برای y ، نتیجه شود. این تابع را به صورت $y = f(x)$ نشان می‌دهیم.

می‌توانیم تابع را به صورت دیگری نیز تعریف کنیم.

۱- اف (f) اول واژهٔ Function به معنی تابع است.

۲- Domain

۳- Range

تعریف

یک تابع f از مجموعه A به مجموعه B ، قانونی است که به هر عضو x در مجموعه A ، دقیقاً یک عنصر y از مجموعه B را نسبت دهد. مجموعه A دامنه تابع f و مجموعه B ، بُرد تابع f نامیده می‌شود.

تمرین ۱

با توجه به تعریف تابع، آیا جدول ۲ که دستمزد کارگر ساختمانی و بنا را برحسب تعداد ساعت‌هایی که هر یک کار کرده‌اند، نشان می‌دهد؛ یک تابع را نشان می‌دهند؟ چرا؟ توضیح دهید.

در فعالیت‌های ۱-۱ و ۱-۲ دیدید که با تغییر درجه حرارت و تعداد ساعت؛ تعداد جیرجیرها و مقدار دستمزدها، تغییر می‌کند. به کمیتی که تغییر می‌کند، متغیر گفته می‌شود.

تمرین ۲

در فعالیت‌های ۱-۱ و ۱-۲، متغیرها را نام ببرید.

تمرین ۳

فرق بین متغیرهای فعالیت ۱-۱ چیست؟

تمرین ۴

متغیرهای فعالیت ۱-۲، چه فرقی با هم دارند؟

۱-۱ متغیر مستقل و متغیر وابسته؛ دامنه و برد تابع
در فعالیت ۱-۱ تغییرات n یعنی تعداد جیرجیرها در هر دقیقه، وابسته به تغییرات درجه

حرارت به سانتیگراد یعنی C است. پس C متغیر مستقل و n، متغیر وابسته است. در فعالیت ۱-۲ نیز، تغییرات R یعنی دستمزد در هر ساعت، وابسته به تغییرات زمان، یعنی تعداد ساعت‌های کاری یا h است. پس h متغیر مستقل، و R متغیر وابسته است. با این اطلاعات، می‌توانیم دامنه و بُرد یک تابع را تعریف کنیم:

تعریف

دامنهٔ یک تابع، مجموعهٔ مقدارهایی است که یک متغیر مستقل می‌تواند داشته باشد.

بُرد یک تابع، مجموعهٔ مقدارهایی است که یک متغیر وابسته می‌تواند داشته باشد.

مثال

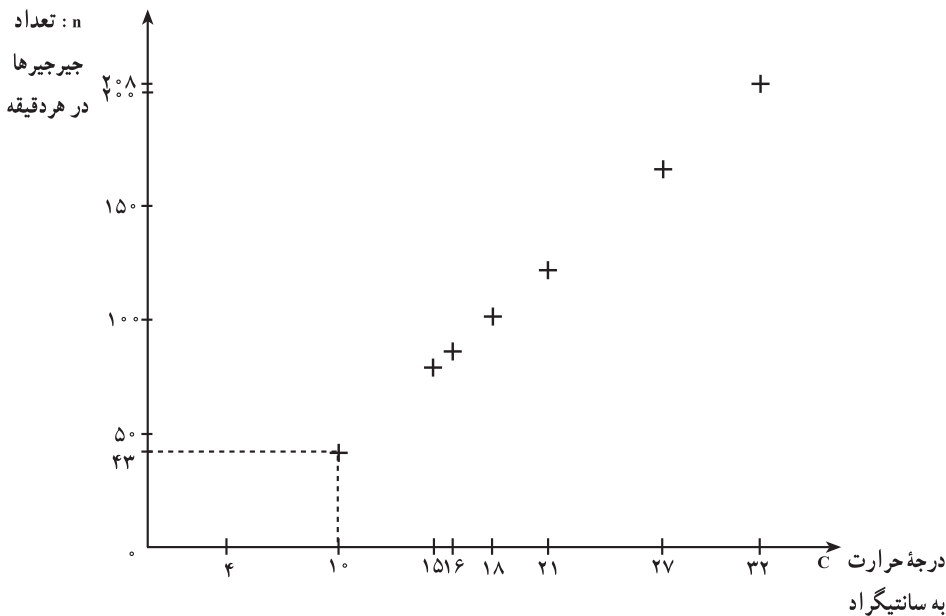
نمودار تابع $n = 7/5C - 32$ را رسم کنید و دامنه و برد آن را مشخص کنید.
 حل: جدول ۱ را که تکمیل کرده‌اید، دوباره می‌نویسیم:

جدول ۳

۳۲	۲۷	۲۱	۱۸	۱۶	۱۵	۱۰	۴	درجهٔ حرارت به سانتیگراد
۲۰۸	۱۷۱	۱۲۶	۱۰۳	۸۸	۸۱	۴۳	۰	تعداد جیرجیرک‌ها در هر دقیقه ^۱

هر جفت از اعداد ردیف اول و دوم، یکی از نقاط نمودار این تابع است که آنها را در صفحهٔ مختصات مشخص می‌کنیم و سپس، نمودار را رسم می‌کنیم.

۱- توجه داشته باشید که فرمول $n = 7/5C - 32$ یک یافتهٔ تجربی و تقریبی است و چون نیم جیرجیر معنای واقعی ندارد، در نتیجه، وقتی که تعداد جیرجیرها عدد اعشاری می‌شود، آن عدد را گرد می‌کنیم و از اعشار آن، صرف نظر می‌نماییم.



اگر $n = 7/5 C - 32$ را فقط یک رابطه ریاضی بین C و n در نظر بگیریم، هر مقدار حقیقی برای C ، ممکن است و همین طور، هر مقدار حقیقی برای n ، ممکن می شود. اما اگر به این معادله، به عنوان رابطه بین تعداد جیرجیر جیرجیرک ها در هر دقیقه و درجه حرارت برحسب سانتیگراد نگاه کنیم، در نتیجه، C نمی تواند کمتر از 4 درجه باشد، زیرا همان طور که در فعالیت 2-1 دیدید، n زیر محور قرار می گیرد و منفی می شود و منفی بودن تعداد جیرجیرها معنایی ندارد.

هم چنین، بالاترین درجه حرارت ثبت شده توسط اداره هواشناسی، تقریباً $58^{\circ}C$ است، پس این فرمول؛ برای درجه حرارت بیشتر از $58^{\circ}C$ ، جواب نمی دهد. در نتیجه، برای تابع $n = 7/5 C - 32$ ،

دامنه تابع: تمام مقدارهای C بین $4^{\circ}C$ و $58^{\circ}C$

بُرد تابع: تمام مقدارهای n بین $(7/5 \times 4) - 32$ و $(7/5 \times 58) - 32$ یعنی تمام مقدارهای n

بین 4.3 و 40.3

بنابراین، می توانیم بگوییم که

$$n = 7/5 C - 32$$

در دامنه $4 \leq C \leq 58$ ، نشان داده می شود.

مثال

دامنهٔ $y = x^2$ را تعیین کنید.

حل: در حالت کلی، دامنهٔ این تابع، مجموعهٔ اعداد حقیقی (\mathbb{R}) است، با این حال، اگر از

$y = x^2$ ، برای نشان دادن مساحت مربعی با طول ضلع x استفاده شود؛ آن گاه، فقط مقدارهای مثبت x را در نظر می‌گیریم (چرا؟) و دامنه را به اعداد مثبت محدود می‌کنیم.

مثال

دامنهٔ تابع‌های زیر را مشخص کنید:

الف) $y = x^3 + 1$

ب) $y = \frac{1}{x+2}$

پ) $y = \sqrt{4-x}$

حل:

الف) دامنهٔ $y = x^3 + 1$ تمام اعداد حقیقی است زیرا دلیلی برای محدود کردن x در این تابع، وجود ندارد.

ب) دامنهٔ $f(x) = \frac{1}{x+2}$ تمام اعداد حقیقی به جز $x = -2$ است. زیرا اگر $x = -2$ باشد، آن گاه مخرج مساوی صفر شده و تقسیم عدد بر صفر بی‌معنی است، پس مقدار تابع، عدد حقیقی نخواهد بود.

پ) چون مقدار زیر رادیکال نمی‌تواند منفی باشد، پس مقدار $4-x$ باید بزرگتر یا مساوی صفر شود. یعنی

$$4 - x \geq 0$$

با اضافه کردن x به طرفین نامعادله نتیجه می‌شود.

$$4 - x + x \geq x$$

$$4 \geq x \quad \text{یا}$$

پس برای آن که مقدار زیر رادیکال منفی نشود، x باید کوچکتر یا مساوی ۴ باشد. بنابراین دامنهٔ

تابع در این حالت مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی کوچکتر یا مساوی ۴ است.

دامنه تابع‌های زیر را پیدا کنید :

الف) $y = \frac{1}{x-3}$

ب) $y = 3x^3 - 4$

پ) $y = \sqrt{x-9}$

مجلهٔ ریاضی

تابع‌ها، نقش مهمی در علوم بازی می‌کنند. بارها دیده‌اید که یک کمیت، تابعی از یک کمیت دیگر است. دانشمندان علوم تجربی و ریاضیدان‌ها، سعی کرده‌اند تا برای این تابع‌ها، فرمولی پیدا کنند تا روابط بین کمیت‌ها را نشان دهد.

برای مثال، تا قبل از سال ۱۵۹۰، هیچ ایدهٔ کمی در مورد درجهٔ حرارت وجود نداشت. البته مردم، اندیشه‌های نسبی مانند گرم‌تر و سردتر را درک می‌کردند و با بعضی اندیشه‌های مطلق مانند داغ یعنی جوش آمدن و سرد یعنی منجمد شدن، آشنایی داشتند.



گالیله، فیزیکدان و منجم ایتالیایی (۱۶۴۲-۱۵۶۴)

با این حال، اندازهٔ عددی برای درجهٔ حرارت، وجود نداشت. بالاخره، گالیله با نبوغ خویش، تشخیص داد که منبسط‌شدن مایعات بر اثر گرم‌شدن، کلید اندازه‌گیری درجهٔ حرارت است.

گالیله؛ اولین کسی بود که به درجهٔ حرارت، به عنوان تابعی از حجم مایع، توجه کرد.

پیدا کردن تابعی که معرف یک موقعیت داده شده باشد، ساختن یک مدل ریاضی نامیده می‌شود. چنان مدلی، می‌تواند روابط بین متغیرها را روشن کند و در نتیجه، به ما کمک می‌کند تا بتوانیم پیش‌بینی کنیم.

همان‌طور که در فعالیت ۱-۱ و ۱-۲ دیدید، فرمول $n = f(C) = 7/5C - 32$ و $R = 125^\circ(h - 2)$ ، مدل‌های ریاضی بودند تا بتوانیم با آنها، تعداد جیرجیرها و دستمزد بنا را پیش‌بینی کنیم.

فعالیت ۱-۳

به نمودار زیر نگاه کنید :



این نمودار، مربوط به نوار قلبی دو انسان سالم و بیمار است که الگوی ضربان قلب آن دو را نشان می‌دهد. به این الگو در اصطلاح پزشکی، الکتروکاردیوگرام^۱ یا EKG گفته می‌شود. EKG، تابعی از زمان است.

اگرچه ساختن یک فرمول، برای تقریب زدن یک تابع EKG ممکن است، اما متداول نیست. الگوی تکرار ضربات چیزی است که یک پزشک، نیازمند دانستن آن است و این الگوها، از طریق نمودار، خیلی راحت‌تر دیده می‌شوند تا از طریق فرمول یا جدول.

۱- ضربان قلب، تابع چه کمیتی است؟

۲- اگر ضربان قلب را با EKG و زمان را با t نشان دهیم، کدام یک متغیر

مستقل و کدام یک متغیر وابسته هستند؟

^۱- Electro Kardio Gram (EKG)

۱-۲-۱- نمایش تابع

در فعالیت ۱-۱، تعداد جیرجیر جیرجیرک‌ها را که **تابعی** از درجه حرارت برحسب سانتیگراد بود، با یک **فرمول** نشان دادیم. البته این رابطه را با جدول و نمودار هم نشان دادیم. در فعالیت ۱-۲؛ دستمزد کارگر ساختمانی و بنا را که **تابعی** از تعداد ساعت‌های کاری بودند، با یک **جدول** نشان دادیم، با این حال، رابطه بین کمیت‌های آن جدول را می‌توانیم با فرمول یا نمودار هم نشان دهیم (و این کار را خواهیم کرد). در فعالیت ۱-۳، ضربان قلب را که **تابعی** از زمان است، با یک **نمودار** نشان دادیم. در صورتی که می‌توانیم این تابع را، به شکل جدول یا فرمول نیز نمایش دهیم.

نتیجه

تابع‌ها را می‌توان به سه شکل مختلف یعنی به وسیله **فرمول‌ها**، به وسیله **جدول‌ها** یا به وسیله **نمودارها** نشان داد.

در سه فعالیت قبلی، از هر کدام از شکل‌های مختلف نمایش تابع که مناسب‌تر بودند، استفاده شد. شما هم همین کار را بکنید و بدانید که این سه شکل، هر سه معتبر هستند و ابزار مناسبی برای نمایش تابع می‌باشند.

مثال

با توجه به پاسخ‌های سؤال‌های ۳ و ۴ فعالیت ۱-۲، نشان دهید در چه زمانی، کارگر ساختمانی و بنا، دستمزد یکسان دارند.

حل: همان‌طور که در پاسخ به سؤال ۳ فعالیت ۱-۲ نوشتید، اگر ساعت را با h نشان دهیم، دستمزد کارگر ساختمانی در هر ساعت برابر $h_1 \cdot 50^\circ$ و دستمزد بنا برابر $h_2 \cdot 125^\circ$ است.

در پاسخ سؤال ۴ فعالیت ۱-۲، چون دستمزد بنا را برحسب ساعت‌های کاری کارگر ساختمانی خواسته بود، در نتیجه شما به درستی، به جای h_2 ، مقدار $(h_1 - 2)$ را جایگزین کردید، زیرا بنا

۱- اول واژه Hour به معنای ساعت است.

دو ساعت دیرتر از کارگر ساختمانی شروع به کار می‌کرد. در نتیجه

$$۱۲۵۰(h_1 - ۲) = \text{دستمزد بنا}$$

پس پیدا کردن ساعتی که دستمزد بنا و دستمزد کارگر ساختمانی با هم برابر باشند، یعنی حل معادله

$$۱۲۵۰(h_1 - ۲) = ۵۰۰ \cdot h_1$$

با حل این معادله، h_1 یعنی ساعتی که دو دستمزد با هم برابر می‌شوند، پیدا می‌شود:

$$۱۲۵۰ \cdot h_1 - ۲۵۰۰ = ۵۰۰ \cdot h_1$$

$$۱۲۵۰ \cdot h_1 - ۵۰۰ \cdot h_1 - ۲۵۰۰ = ۵۰۰ \cdot h_1 - ۵۰۰ \cdot h_1 \quad \text{کم کردن } h_1 \text{ از طرفین}$$

$$۷۵۰ \cdot h_1 - ۲۵۰۰ = ۰$$

$$۷۵۰ \cdot h_1 - ۲۵۰۰ + ۲۵۰۰ = ۲۵۰۰ \quad \text{اضافه کردن } ۲۵۰۰ \text{ به طرفین}$$

$$۷۵۰ \cdot h_1 = ۲۵۰۰$$

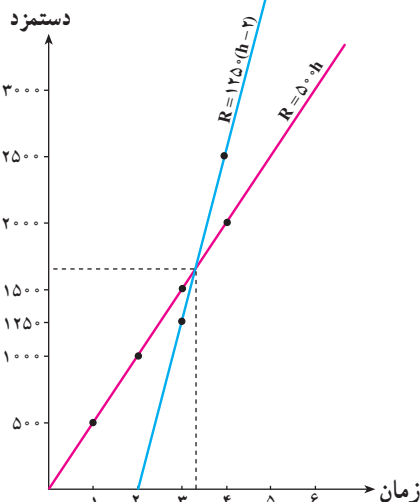
$$h_1 = \frac{۲۵۰۰}{۷۵۰} = ۳ / ۳۳ \quad \text{تقسیم طرفین بر ضریب } h_1$$

این همان ساعتی بود که از روی جدول (۲) پیش‌بینی کرده بودید.

مثال

نمودار دو تابع دستمزد بنا و کارگر را رسم کنید و نقطه تقاطع آن‌ها را روی شکل، مشخص

کنید.



حل: معادله $R = ۵۰۰ \cdot h$ معرف تابع دستمزد کارگر

ساختمانی و معادله $R = ۱۲۵۰ \cdot (h - ۲)$ معرف تابع دستمزد بنا است.

با استفاده از نقطه‌یابی و نشان دادن دستمزدها روی

محور y ها و ساعت‌های کاری (زمان) روی محور x ها،

نمودار این دو تابع را رسم می‌کنیم.

همان نتیجه‌ای را که از جدول و از فرمول گرفتید،

از نمودار هم به دست آوردید. یعنی با استفاده از هر سه

نمایش تابع، نشان دادید که در $h \cong ۳ / ۳۳$ ، دستمزد

کارگر ساختمانی و بنا، با هم برابر می‌شوند.

۳-۱- نماد تابع

وقتی یک تابع به وسیله یک عبارت جبری یا یک ضابطه که همان فرمول است، نمایش داده می‌شود، معمولاً از نماد تابع استفاده می‌شود تا هم به راحتی، بتوان به آن عبارت جبری ارجاع داد و هم مقدار آن عبارت جبری را به ازای مقدارهای مختلف متغیر مستقل، محاسبه کرد.

نماد $f(x)$ (افِ x) نشان می‌دهد که نام تابع f است و متغیر مستقل، x است. می‌توانیم از نمادهای دیگری نیز به جای $f(x)$ استفاده کنیم. برای مثال، $f(x) = x^2 + 1$ را می‌توانیم بنویسیم $y = x^2 + 1$. در هر صورت مقدار $f(x)$ یا y ، مقدار تابع است که متغیر وابسته به متغیر مستقل است.

همان‌طور که می‌توان از هر حرفی به غیر از x ، برای نشان دادن متغیر مستقل استفاده کرد، می‌توان از هر حرفی به غیر از f نیز برای نشان دادن تابع، استفاده کرد. تابع‌های زیر، مثال‌هایی هستند که با نماد تابع نوشته شده‌اند:

الف) $h(x) = 3 - 2(x + 1)$

ب) $g(t) = |3t - 2|$

پ) $k(w) = \frac{w + 2}{w - 1}$

ت) $r(g) = \sqrt{g + 2}$

توجه کنید که در هر فرمول، حرف داخل پرانتز، نشان دهنده متغیر مستقل است. پس هر متغیر مستقلی در آن فرمول، باید با نماد داخل پرانتز معرفی شود. با دقت در چهار مثال قبلی، این نکته بهتر دیده می‌شود.

هم‌چنین، در بیشتر فرمول‌هایی که تا به حال دیده‌اید، مقدارهایی وجود دارند که همیشه ثابت هستند، مانند $n = 7/5C - 32$ که در آن، $7/5$ و -32 همیشه ثابت هستند. به این مقدارها، مقدار ثابت گفته می‌شود.

تمرین

در هر یک از مثال‌های (الف)، (ب)، (پ) و (ت)، متغیر مستقل، متغیر وابسته را مشخص کرده و بنویسید.

۴-۱- مقدار تابع

وقتی که تعداد جیرجیر جیرجیرک‌ها را به عنوان تابعی از درجهٔ حرارت به سانتیگراد معرفی کردیم، نوشتیم $n = f(C)$ و رابطهٔ بین آنها را با $n = 7/5C - 32$ نشان دادیم.

برای مثال، برای پیدا کردن تعداد جیرجیرها در $28^\circ C$ ، یعنی برای پیدا کردن $n = f(28)$ ، ابتدا ۲۸ را در $7/5$ ضرب می‌کنیم و سپس، ۳۲ را از آن کم می‌کنیم:

$$\begin{aligned} n &= f(28) \\ &= (7/5 \times 28) - 32 \\ &= 178 \end{aligned}$$

به همین ترتیب، تمام اعداد ردیف دوم جدول (۱) را در هر درجهٔ حرارت داده شده در ردیف اول، به دست می‌آوریم. به فرمول $7/5C - 32$ ضابطهٔ تابع و به $f(C)$ ، مقدار تابع گفته می‌شود.

مثال

آیا جدول زیر، معرف یک تابع است؟ چرا؟ ضابطهٔ این تابع را بنویسید.

جدول ۴

x	۱	۲	۳	۴	۵	۶
y	۱۲	۶	۴	۳	۲/۴	۲

حل: نخست آن که این جدول، معرف یک تابع است زیرا برای هر x از ردیف اول جدول، یک و فقط یک y از ردیف دوم، وجود دارد. دوم آن که با دقت در اعداد دو سطر، می‌بینیم که ۱۲، برعددهای ردیف اول تقسیم شده است تا عددهای ردیف دوم، به دست آمده‌اند، پس ضابطهٔ تابع برابر

$$y = f(x) = \frac{12}{x} \text{ است یعنی } \frac{12}{x}$$

مثال

تابع $y = f(x) = x^2 + 1$ را در نظر بگیرید و مقادیر تابع را به‌ازای مقادیر داده شده در

۱- علامت ° نشان‌دهندهٔ درجه و C اول واژهٔ Celsius یا سانتیگراد است.

جدول زیر، یادداشت کنید :

جدول ۵

x	۰	۱	۲	۳	۴	۵
y						

حل: ضابطه تابع، $x^2 + 10$ است، یعنی این تابع، قانونی (ضابطه‌ای) دارد که طبق آن، هر جا x ای وجود داشت، آن را به توان دو رسانده و حاصل را با ۱۰ جمع می‌کند.
یعنی :

$$y = f(x) = x^2 + 10$$

پس برای پیدا کردن $f(0)$ ، $f(1)$ ، $f(2)$ ، $f(3)$ ، $f(4)$ ، $f(5)$ ، از این فرمول یا ضابطه، استفاده می‌کنیم :

$$y = f(0) = (0)^2 + 10 = 10$$

$$y = f(1) = (1)^2 + 10 = 11$$

$$y = f(2) = (2)^2 + 10 = 14$$

$$y = f(3) = (3)^2 + 10 = 19$$

$$y = f(4) = (4)^2 + 10 = 26$$

$$y = f(5) = (5)^2 + 10 = 35$$

مسائل

یکی از راه‌های نمایش تابع، جدول است. هریک از جدول‌های زیر را برای تابع‌هایی که فرمول (ضابطه) آن داده شده است، تکمیل کنید.

۱) $y = f(x) = 3 - x$

x	۰	۱	۲	۳	۴	۵
y	۳					

۲) $y = f(x) = 5x - 6$

x	۰	۱	۲	۳	۴	۵
y	-۶					

$$۳) y = f(x) = x^2$$

x	۰	۱	۲	۳	۴	۵
y						

$$۴) y = f(x) = x^3$$

x	۰	۱	۲	۳	۴	۵
y						

$$۵) y = f(x) = 2^x$$

x	۰	۱	۲	۳	۴	۵
y						

برای هریک از تابع‌های زیر که به صورت جدول نمایش داده شده‌اند، یک فرمول (ضابطه) بنویسید.

۶)

x	۳	۴	۵	۶	۷
y	۹	۱۶	۲۵	۳۶	۴۹

y =

۷)

x	۶	۷	۸	۹	۱۰
y	۲	۳	۴	۵	۶

y =

۸)

x	۲	۳	۴	۵	۶
y	۲۱	۳۱	۴۱	۵۱	۶۱

y =

۹)

x	۲	۳	۴	۵	۶
y	۲۲	۳۳	۴۴	۵۵	۶۶

y =

۱۰)

x	۱	۲	۳	۴	۵
y	۱	۸	۲۷	۶۴	۱۲۵

y =

۱۱)

x	۱	۲	۳	۴	۵
y	۴	۱۱	۳۰	۶۷	۱۲۸

y =

۱۲)

x	۱	۲	۳	۴	۵
y	۴۹	۴۸	۴۷	۴۶	۴۵

y =

۱۳)

x	۲	۳	۴	۵	۶
y	۹	۲۷	۸۱	۲۴۳	۷۲۹

y =

۱۴)

x	۱	۲	۳	۴	۵
y	۴۰	۲۰	$\frac{۴۰}{۳}$	۱۰	۸

y =

۵-۱- محاسبه مقدار تابع

همان‌طور که در بخش قبلی دیدید، محاسبه مقدار تابع یعنی پیدا کردن مقدار $y = f(x)$ به ازای مقدارهای مختلفی که به متغیر مستقل x داده می‌شود.

برای نمونه، اگر $f(x) = 3x^2 + 2x - 4$ باشد، آن‌گاه $f(2)$ نشان‌دهنده مقدار تابع است وقتی که به جای x ، ۲ را قرار می‌دهیم:

$$f(x) = 3x^2 + 2x - 4$$

$$f(2) = 3(2)^2 + 2(2) - 4$$

جابه جایی x با ۲

$$= 12 + 4 - 4$$

$$= 12$$

توجه کنید که چون $f(2) = 12$ ، پس نقطه‌ای به مختصات $(2, 12)$ ، یکی از نقاط نمودار این تابع است. مقدار $y = f(2)$ ، عرض نقطه‌ای است که طول آن، $x = 2$ است.

۱- باز هم توجه کنید که به جای f ، x و y ؛ از هر نماد دیگری می‌توانید استفاده کنید.

مثال

تابع $h(t) = -t^2 + 2t - 4$ را در نظر بگیرید و $h(-2)$ را محاسبه کنید.

$$h(t) = -t^2 + 2t - 4 \quad \text{حل:}$$

$$\begin{aligned} h(-2) &= -(-2)^2 + 2(-2) - 4 \\ &= -4 - 4 - 4 \\ &= -12 \end{aligned}$$

مثال

تابع $t(x) = \frac{1}{x}$ و $g(x) = |2 - 3x|$ را در نظر بگیرید و هریک از مقادیرهای زیر را محاسبه کنید:

الف) $g(4)$

ب) $t(2)$

پ) $g(0) - t(-2)$

حل:

$$g(x) = |2 - 3x| \quad \text{الف)}$$

$$g(4) = |2 - 3 \times 4|$$

$$= |2 - 12|$$

$$= |-10|$$

$$= 10$$

$$t(x) = \frac{1}{x} \quad \text{ب)}$$

$$t(2) = \frac{1}{2}$$

$$= 0.5$$

$$g(0) = |2 - 3 \times 0| = |2 - 0| = |2| = 2 \quad \text{پ)}$$

$$t(-2) = \frac{1}{-2} = -0.5$$

جابه‌جایی x با 4

جابه‌جایی x با 2

بنابراین،

$$g(0) - t(-2) = 2 - (-0.5) = 2.5$$

می‌توان مقدار تابع را به‌ازای یک عبارت جبری نیز پیدا کرد.

مثال

اگر $g(x) = \sqrt{x^3 + 2}$ باشد، $g(h)$ و $g(2h)$ را پیدا کنید.

$$g(x) = \sqrt{x^3 + 2}$$

$$g(h) = \sqrt{h^3 + 2}$$

$$g(2h) = \sqrt{(2h)^3 + 2} \\ = \sqrt{8h^3 + 2}$$

حل:

جابه‌جایی x با h

جابه‌جایی x با $2h$

مسائل

برای تابع‌های زیر، مقدارهای خواسته‌شده را پیدا کنید.

$$۱) t(x) = 21 - x^2 \quad t(0) = ? \quad t(1) = ?$$

$$۲) g(x) = 2x^3 - 4x + 5 \quad g(t) = ? \quad g(-1) = ?$$

$$۳) f(t) = \sqrt{3t + 5} \quad f(-1) = ? \quad f(0) = ?$$

$$۴) f(x) = 4x + 3 \quad f(a - 4) = ? \quad f(2t) = ?$$

$$۵) g(x) = x + 3 \quad g(-3) = ? \quad g(t) = ?$$

$$۶) k(h) = 3h^2 - h - 4 \quad k(0) = ? \quad k(-1) = ?$$

برای تابع‌های زیر، مقدارهای جدیدی با توجه به متغیر مستقل جدید، به‌دست آمده است. آن

متغیرها را پیدا کنید:

$$۷) f(x) = -2x^2 + 5x - 3 \quad f(\square) = -2b^2 + 5b - 3$$

$$۸) g(t) = at^3 - 4t^2 + t - 1 \quad g(\square) = ax^3 - 4x^2 + x - 1$$

$$۹) t(x) = |x - 3| \quad t(\square) = |c - 1|$$

$$۱۰) f(t) = |2t + 5| \quad f(\square) = |2b + 5|$$

$$۱۱) h(x) = \frac{2x - x^3}{4} \quad h(\square) = \frac{2a - a^3}{4}$$

۱۲- فرض کنید نمودار تابعی شامل نقطه $(-۳, ۵)$ است. اگر تابع را با $f(x)$ نشان دهیم، $f(-۳)$ چقدر است؟ جواب خود را توضیح دهید.

۱-۶- عملیات با تابع‌ها

مثال

تابع $f(x) = 4x - 5$ را در نظر بگیرید. سپس هریک از مقدارهای زیر را حساب کنید:

الف) $f(۳)$ ب) $f(۳+h)$ پ) $f(۳+h) - f(۳)$

ت) $\frac{f(۳+h) - f(۳)}{h}$ ، اگر $h \neq 0$

حل:

الف) $f(x) = 4x - 5$

$f(۳) = 4(۳) - 5 = ۱۲ - 5 = ۷$

پس

ب) $f(۳+h) = 4(۳+h) - 5 = ۱۲ + 4h - 5 = ۷ + 4h$

پ) مقدارهای $f(۳)$ و $f(۳+h)$ را از (الف) و (ب)، جایگزین می‌کنیم:

$f(۳+h) - f(۳) = (۷ + 4h) - ۷ = 4h$

ت) $\frac{f(۳+h) - f(۳)}{h} = \frac{4h}{h}$ نتیجه قسمت (پ) را در صورت می‌نویسیم:

$= 4$

مثال

اگر $f(t) = |2t - 5|$ و $h(t) = \frac{3t}{t+1}$ باشد، عبارتهای زیر را محاسبه کنید:

الف) $2f(1) + h(0)$ ب) $h(1) - f(-2)$ پ) $\frac{h(\frac{1}{2})}{f(\frac{1}{2})}$

ت) $h(\frac{1}{2}) \cdot f(\frac{1}{2})$

حل:

الف) اولاً $f(1)$ و $h(0)$ را محاسبه می‌کنیم. سپس آنها را با هم جمع می‌کنیم:

$$f(t) = |2t - 5|$$

$$2f(1) = 2|2(1) - 5| = 2|2 - 5| = 2|-3| = 2 \cdot 3 = 6 \quad \text{جابه‌جایی } t \text{ با } 1$$

$$h(t) = \frac{3t}{t^2 + 1}$$

$$h(0) = \frac{3(0)}{(0)^2 + 1} = \frac{0}{1} = 0 \quad \text{جابه‌جایی } t \text{ با } 0$$

$$2f(1) + h(0) = 6 + 0 = 6 \quad \text{پس}$$

ب) اولاً $h(1)$ و $f(-2)$ را محاسبه می‌کنیم. سپس آنها را از هم کم می‌کنیم:

$$h(1) = \frac{3(1)}{(1)^2 + 1} = \frac{3}{1+1} = \frac{3}{2}$$

$$f(-2) = |2(-2) - 5| = |-4 - 5| = |-9| = 9$$

$$h(1) - f(-2) = \frac{3}{2} - 9 = \frac{3}{2} - \frac{18}{2} = \frac{-15}{2} \quad \text{پس}$$

پ) باز هم اولاً $h\left(\frac{1}{2}\right)$ و $f\left(\frac{1}{2}\right)$ را محاسبه می‌کنیم و سپس، مقدارهای به‌دست‌آمده را بر هم

تقسیم می‌کنیم:

$$h\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{4} + 1} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{4} + \frac{4}{4}} = \left(\begin{array}{l} \frac{3}{2} \\ \frac{5}{4} \end{array} \right) = \frac{\cancel{2} \times 3}{\cancel{2} \times 5}$$

$$h\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{6}{5}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left| 2\left(\frac{1}{2}\right) - 5 \right| = \left| 1 - 5 \right| = |-4| = 4$$

$$\frac{h\left(\frac{1}{2}\right)}{f\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{6}{5}}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10} \quad \text{پس}$$

ت) مقدارهای به‌دست‌آمده برای $h\left(\frac{1}{2}\right)$ و $f\left(\frac{1}{2}\right)$ را در هم ضرب می‌کنیم:

$$h\left(\frac{1}{2}\right)f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{6}{5} \times 4 = \frac{24}{5}$$

وقتی می‌خواهیم عملی را روی دو یا چند تابع انجام دهیم، ابتدا مقدار هر تابع را به‌ازای متغیر مستقل داده شده محاسبه می‌کنیم. سپس عملیات خواسته شده روی مقدارهای تابع‌ها را مانند عملیات با اعداد، انجام می‌دهیم.

مسائل

۱- برای تابع‌های $P(x) = x^2 - 3x + 5$ و $Q(x) = x^2 + 4x - 8$ ، عبارت‌های زیر را محاسبه کنید:

الف) $P(-1) \cdot Q(2)$ ب) $Q(1)$ پ) $Q(2) + P(0)$

ت) $\frac{Q(0)}{P(0)}$

۲- تابع $f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$ و $g(x) = 6x + 2$ را در نظر بگیرید. سپس عبارت‌های زیر را

محاسبه کنید:

الف) $f(-2)$ ب) $g(3+z)$ پ) $g(-3b)$

ت) $f(-2) \cdot g(2)$ ث) $\frac{g(\frac{1}{2})}{f(2)}$

۳- اگر $f(x) = 4 - 3x$ باشد، $f(2+h)$ را تعیین کنید.

۴- اگر $f(x) = x^3 - 2x + 7$ و $g(x) = 2x^3 + 3x - 2$ باشد، مقدارهای زیر را محاسبه

کنید:

الف) $g(\frac{1}{2})$ ب) $f(-2/3)$ پ) $g(1) \cdot f(1)$

ت) $g(1) + f(1)$ ث) $g(1) - f(1)$ ج) $\frac{f(1)}{g(1)}$

۵- اگر $g(x) = -x^2 + 2x + 1$ ؛

الف) $g(2)$ را حساب کنید.

ب) $g(x+2)$ را پیدا کنید.

پ) نشان دهید $g(x+2) \neq g(x) + g(2)$.

اجازه دهید یک بار دیگر، مفهوم تابع را با یک مثال مرور کنیم :

تابع $f(x) = x^3 + 2x - 3$ را در نظر بگیرید. اگر به جای متغیر مستقل x ، هر مقدار دیگری را بگذاریم، تابع f کاری که می‌کند آن است که

- ۱- اول آن مقدار را به توان ۳ می‌رساند.
- ۲- دو برابر آن مقدار را به آن اضافه می‌کند.
- ۳- از مجموع آنها، ۳ را کم می‌کند.

$$f(2+a) = (2+a)^3 + 2(2+a) - 3 \quad \text{برای مثال،}$$

$$f(-2) = (-2)^3 + 2(-2) - 3 \quad \text{یا}$$

در واقع، تابع مانند ماشینی است که مجموعهٔ متغیرهای مستقل یعنی دامنهٔ تابع، ورودی‌های آن هستند. ضابطه یا قانون تابع، عملی است که آن ماشین انجام می‌دهد و بالاخره، مقدار تابع یعنی متغیر وابسته، خروجی‌های این ماشین هستند.

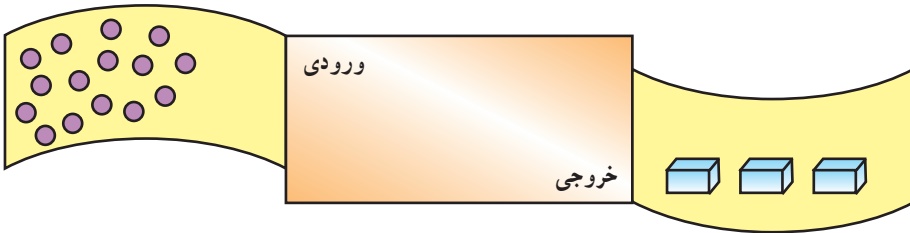
به اطراف خود با دقت نگاه کنید و چند پدیدهٔ واقعی را که مانند تابع عمل می‌کنند، نام ببرید. سپس بگویید که چرا هریک تابع هستند. می‌توانید با پدیدهٔ مشک‌زدن دوغ و کره درست کردن، به شرط آن که همهٔ دوغ کره شود؛ یا چرخ گوشت؛ شروع کنید! موفق باشید!



زن روستایی اسالم در حال تهیهٔ کره

تمرین

ماشین زیر را در نظر بگیرید. ۱۵ شیء به درون ماشین وارد شده و ۳ بسته از آن خارج می‌شود.



جدول زیر، اطلاعات بیشتری دربارهٔ این ماشین به شما دهد:

تعداد بسته‌هایی که خارج می‌شوند

۱۵	۳
۲۵	۵
۵	۱
۶۰	۱۲

تعداد اشیایی که وارد می‌شوند

با توجه به اطلاعات داده شده، جاهای خالی را در جدول‌های زیر، پر کنید:

جدول ۶

(ب)		(الف)	
تعداد اشیایی که وارد می‌شوند	تعداد بسته‌هایی که خارج می‌شوند	تعداد اشیایی که وارد می‌شوند	تعداد بسته‌هایی که خارج می‌شوند
—	۱۰	۹	۱
—	۴۰	۲۵	—
—	۲۰۰	۶۰	—
—	۱۷	۹۸	—
۳	۰	۸۱	—

فعالیت ۱-۴

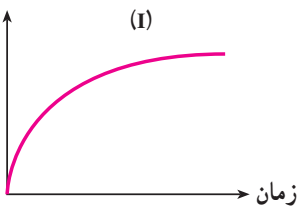
الف) سه داستان، برای سه نمودار زیر داده شده است. بگویید هر نمودار، مربوط به کدام داستان است. برای نمودار باقی مانده یک داستان بنویسید.

۱- تازه از خانه بیرون آمده بودم که متوجه شدم کتابهایم را فراموش کرده‌ام. در نتیجه به خانه برگشتم تا آنها را بردارم.

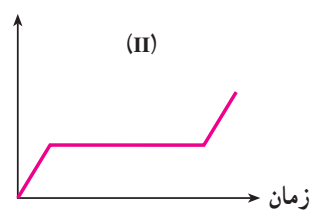
۲- در حال رانندگی بودیم و اوضاع به خوبی پیش می‌رفت تا آن که ماشین پنچر شد، پس از گرفتن پنچری به راه افتادیم.

۳- من با آرامی مشغول قدم زدن به سمت مدرسه بودم، اما وقتی متوجه شدم که دیر شده است، سرعتم را زیاد کردم.

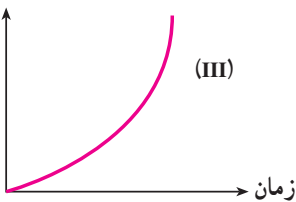
فاصله از خانه



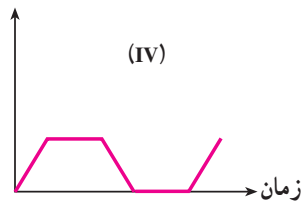
فاصله از خانه



فاصله از خانه



فاصله از خانه



- ب) چرا هر یک از نمودارها، معرّف یک تابع هستند؟ توضیح دهید.
- پ) چرا هر یک از داستان‌ها، معرّف یک تابع هستند؟ توضیح دهید.
- ت) موقعیت زیر را در نظر بگیرید. نخست بگویید که چرا این موقعیت، معرّف

یک تابع است. سپس نمودار آن را رسم کنید :

تمام صبح، هوا گرم بود. ناگهان حدود ظهر، طوفان شدیدی آمد و هوا خیلی خنک شد. بعد از طوفان، دوباره هوا گرم شد. سپس با غروب آفتاب، هوا مجدداً خنک شد.



۱-۷-۱- نمودار تابع خطی

همان‌طور که در ابتدای این فصل دیدید؛ نمودارها یکی از ابزارهای مفید برای نشان دادن تابع و رابطه بین دو کمیت هستند. در فعالیت ۱-۴ دیدید که چگونه با استفاده از نمودارها، می‌توانید پدیده‌های طبیعی و حوادث روزانه زندگی خویش را به سادگی به زبان ریاضی نشان دهید، به طوری که برای همه قابل فهم باشد.

برخی از پدیده‌هایی که روزانه با آنها سر و کار داریم، تابع‌های خطی هستند، یعنی تابع‌هایی که نمودار آنها، به شکل یک خط است. در حالت کلی، نمودار تابع‌های خطی به شکل

$$y = f(x) = mx + n$$

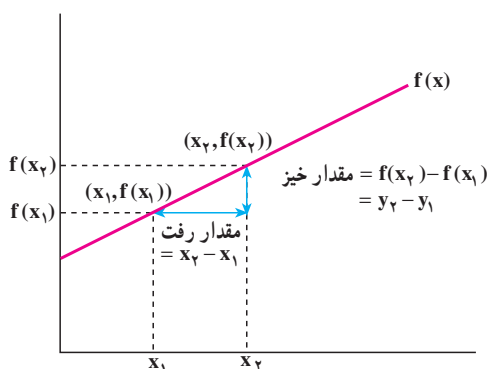
یک خط است^۱ که در آن :

m ضریب زاویه یا نسبت تغییرات y به تغییرات x است (یعنی نسبت تغییرات عرض نقاط روی خط به تغییرات طول نقاط که نشان‌دهنده شیب خط است.)

۱- در سال سوم راهنمایی و اول دبیرستان، با معادله خط آشنا شده‌اید.

n محلّ تقاطع خط با محور عمودی یا مقدار y است وقتی که $x = 0$. توجه کنید که وقتی $m = 0$ ، یعنی ضریب زاویه صفر است و معادله خط تبدیل به $y = f(x) = n$ می‌شود و آن وقت، یک خط افقی خواهیم داشت.

یادآوری: ضریب زاویه تابع خطی $f(x)$ ، از فرمول زیر به دست می‌آید:



$$m = \frac{\text{مقدار خیز}}{\text{مقدار رفت}} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \quad \text{چون } f(x_2) = y_2 \text{ و } f(x_1) = y_1 \text{ پس}$$

فعالیت ۱-۵

تعداد کلماتی که در گنجینه لغات کودک وجود دارد، تابعی از سن او است. فرمول تجربی زیر، اندازه این گنجینه لغات را در کودکان معمولی بین ۲۰ ماهگی و ۵۰ ماهگی نشان می‌دهد:

$$n = 60a - 900$$

که در آن، a معرف سن کودک به ماه (متغیر مستقل) و n نشان‌دهنده تعداد کلماتی که کودک به درستی استفاده می‌کند (متغیر وابسته) هستند.

۱- در کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی، جرج توماس ترجمه مهدی بهزاد و سیامک کاظمی، از واژه «خیز» برای Rise و از واژه «رفت» برای Run، استفاده شده است.



بچه‌ها در کوچه (۱۳۷۶) اثر مرتضی کاتوزیان

۱- جدول زیر را کامل کنید :

جدول ۷

a	۲۰	۲۵	۳۰	۳۵	۴۰	۴۵	۵۰
n							

۲- نمودار این تابع را بکشید. محور افقی را محور a (سن کودک) برحسب ماه) و محور عمودی را محور n (تعداد کلمات) در نظر بگیرید.

۳- یک کودک معمولی، در ۲۰ ماهگی چند کلمه در گنجینه لغاتش وجود دارد؟

۴- یک کودک معمولی، در ۵۰ ماهگی چند کلمه در گنجینه لغاتش وجود دارد؟

۵- از سن ۲۰ ماهگی تا سن ۵۰ ماهگی، یک کودک معمولی در هر ماه، چند کلمه جدید یاد می‌گیرد؟

۶- آیا این فرمول، می‌تواند برای یک کودک در سن ۱۰ ماهگی، درست باشد؟ توضیح دهید.

۲-۷-۱- قاعده رسم نمودار تابع خطی

مثال

نمودار تابع $f(x)$ ، خطی به معادله $3x + 4y = -12$ است. شیب این خط را پیدا کنید.
حل: برای پیدا کردن شیب خط، مختصات دو نقطه روی آن را لازم داریم. می‌توانیم محل تقاطع خط با محور x ها و y ها را انتخاب کنیم.
الف) محل تقاطع خط با محور x ها، یعنی جایی که $y = 0$ است. پس در معادله $3x + 4y = -12$ به جای y ، صفر قرار می‌دهیم:

$$3x + 4(0) = -12$$

$$3x = -12$$



منبر چوبی منبت‌کاری شده، زیارت‌گاه ایبانه

$$x = -\frac{12}{3} = -4$$

پس مختصات یکی از نقطه‌های انتخابی، $(-4, 0)$ است. به طول این نقطه طول از مبدأ گفته می‌شود. (ب) محل تقاطع خط با محور y ها، یعنی جایی که $x = 0$. پس در معادله

$$-12 = 3x + 4y = -12$$

$$3(0) + 4y = -12$$

$$4y = -12$$

$$y = -\frac{12}{4} = -3$$

پس مختصات یک نقطه انتخابی دیگر، $(0, -3)$ است که عرض آن عرض از مبدأ نامیده می‌شود.

$$\text{بنابراین،} \quad m = \frac{\text{مقدار خیز}}{\text{مقدار رفت}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \text{شیب خط}$$

با توجه به دو نقطه $(-4, 0)$ و $(0, -3)$ ،

$$x_1 = 0, \quad y_1 = -3$$

$$x_2 = -4, \quad y_2 = 0$$

عبارت است از

$$m = \frac{0 - (-3)}{-4 - 0} = \frac{3}{-4} = -\frac{3}{4}$$

از طرف دیگر، می‌توانیم معادله $-12 = 3x + 4y$ را برحسب y حل کنیم:

$$4y = -3x - 12$$

$$y = -\frac{3}{4}x - 3$$

مقداری که برای ضریب زاویه به دست آوردیم، با ضریب x برابر است.

نتیجه

اگر معادله خط را برحسب y و به صورت $y = mx + n$ بنویسیم، آن‌گاه به جای

۱- فرقی نمی‌کند که مختصات کدام نقطه را x_1 و y_1 و کدام را x_2 و y_2 انتخاب می‌کنید. فقط توجه داشته باشید که x_1 و y_1 متعلق به یک نقطه و x_2 و y_2 متعلق به نقطه دیگر باشند.

محاسبهٔ ضریب زاویه از فرمول $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ، ضریب x را که همان ضریب زاویه است،

می‌نویسیم.

حالت‌های خاص

مثال

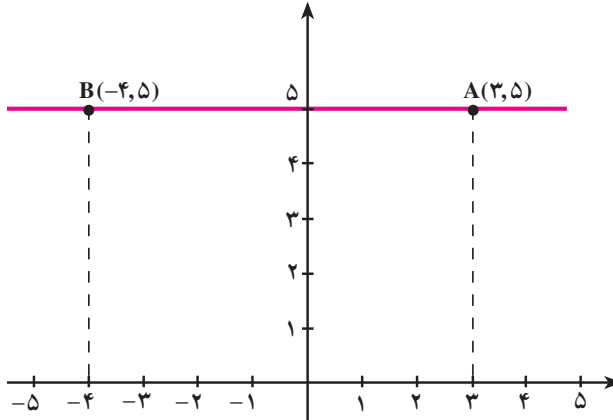
ضریب زاویهٔ خط‌های زیر را تعیین کنید:

الف) خط $y = 5$

ب) خطی که دارای دو نقطهٔ $(2, 3)$ و $(2, 6)$ باشد.

حل:

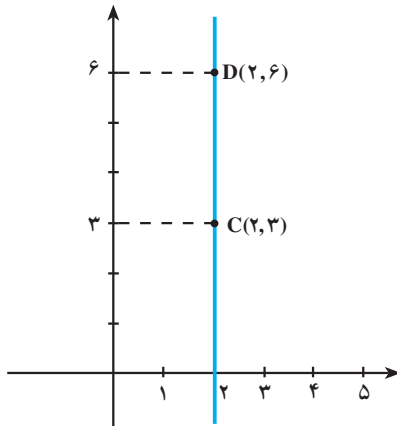
الف) دو نقطه از خط $y = 5$ در شکل زیر نشان داده شده است:



توجه کنید که عرض هر دو نقطهٔ A و B روی خط $y = 5$ ، برابر است. پس

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5 - 5}{-4 - 3} = \frac{0}{-7} = 0$$

ب) چون طول هر دو نقطه با هم برابرند، پس روی یک خط عمودی قرار می‌گیرند:



پس فرمول ضریب زاویه برای چنین حالتی، قابل استفاده نیست زیرا

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6 - 3}{2 - 2} = \frac{3}{0}$$

که تعریف نشده است. به طور کلی، ضریب زاویه خط عمودی، تعریف نشده است.

تذکر: برای این دو حالت خاص، به تفاوت بین ضریب زاویه صفر و ضریب زاویه تعریف نشده توجه کنید.

تعریف خط به صورت ضریب زاویه — عرض از مبدأ

خط $y = mx + n$ به صورت ضریب زاویه — عرض از مبدأ نوشته شده است. ضریب زاویه این خط m و عرض از مبدأ آن، n است (یعنی محل تقاطع خط با محور y ها، نقطه $(0, n)$ است).

روش رسم خط

برای رسم خط، با استفاده از ضریب زاویه و عرض از مبدأ؛ مراحل زیر را انجام دهید:

۱- معادله خط را به شکل $y = mx + n$ بنویسید.

۲- نقطه $(0, n)$ ، یعنی عرض از مبدأ را روی محور y ها مشخص کنید،

۳- ضریب زاویه را به صورت $m = \frac{\text{خیز}}{\text{رفت}}$ بنویسید. سپس از عرض از مبدأ شروع کنید

و به اندازه‌ای که خیز مشخص کرده است، به سمت بالا یا پایین حرکت کنید. آن‌گاه، به اندازه رفت،

به سمت راست یا چپ، حرکت کنید و نقطه‌ای که به آن رسیدید را به‌عنوان دومین نقطه خط، روی صفحه مختصات مشخص کنید.

توجه: در حالتی که m یک عدد صحیح باشد، خیز برابر m و رفت برابر ۱ است.
۴- خط را طوری رسم کنید که از این دو نقطه بگذرد.

مثال

خط $2x - 3y = 9$ را با استفاده از ضریب زاویه و عرض از مبدأ، رسم کنید.

حل:

۱- با استفاده از روش رسم خط، گام اول را برمی‌داریم و معادله را به شکل $y = mx + n$

می‌نویسیم:

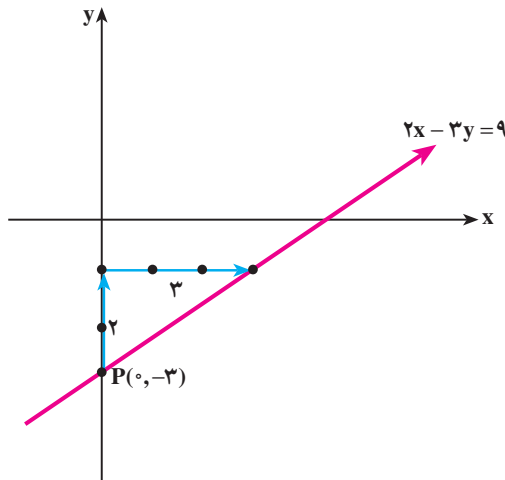
$$2x - 3y = 9$$

$$-3y = -2x + 9$$

$$y = \frac{-2x}{-3} + \frac{9}{-3}$$

$$y = \frac{2}{3}x - 3$$

۲- عرض از مبدأ (محل تقاطع خط با محور y ها) یعنی $P(0, -3)$ را روی محور y ها در صفحه مختصات، مشخص می‌کنیم.



۳- ضریب زاویه $m = \frac{2}{3}$ است. پس برای یافتن نقطه‌ای دیگر از این خط، از نقطه $P(0, -3)$ شروع می‌کنیم و به اندازه خیز یعنی ۲ واحد به سمت بالا رفته و سپس، به اندازه رفت یعنی ۳ واحد به سمت راست، حرکت می‌کنیم.

۴- خطی که از این دو نقطه می‌گذرد، نمودار معادله $y = \frac{2}{3}x - 3$ است.

مسائل

۱- معادله‌های زیر را به شکل $y = mx + n$ بنویسید و سپس، با استفاده از روش رسم نمودار خطی، آن را رسم کنید:

الف) $2x + 5y = 10$

ب) $x + 3y - 6 = 0$

پ) $y + 3x = 0$

ت) $x - 2 = 5$

ث) $y - 4 = -3$

۲- خطی رسم کنید که ضریب زاویه و یک نقطه آن داده شده است.

الف) $m = \frac{3}{4}$ و $(0, 3)$

ب) m تعریف نشده است. و $(-5, 0)$

پ) $m = 0$ و $(0, 2)$

ت) $m = \frac{2}{3}$ و $(-2, -3)$

۳- نمودار معادله‌های زیر را رسم کنید:

الف) $y = \frac{3}{4}x + 3$

ب) $y = x$

پ) $y = -\frac{3}{5}x$

ت) $y = 2x + 3$

ث) $y = -x$

ج) $x = -4$

با مشورت هم کلاسی‌های خود، به سؤالها پاسخ دهید و برای هر پاسخ، دلیل قانع‌کننده ارائه دهید.

۱- بدون محاسبه، بگویید که هر یک از نمودارهای زیر مربوط به کدام معادله است؟

الف) $y = x - 5$

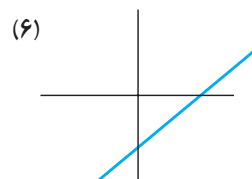
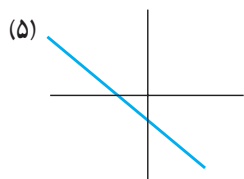
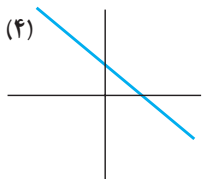
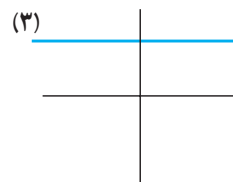
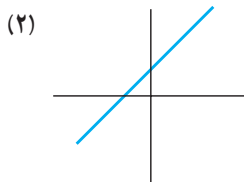
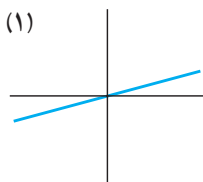
ب) $-3x + 4 = y$

پ) $5 = y$

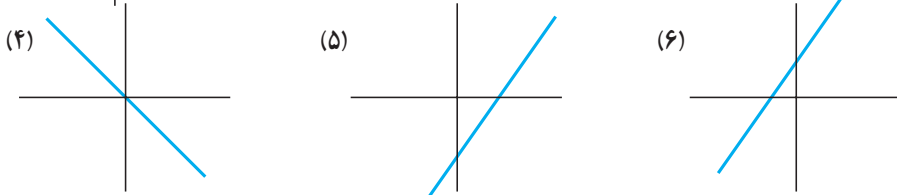
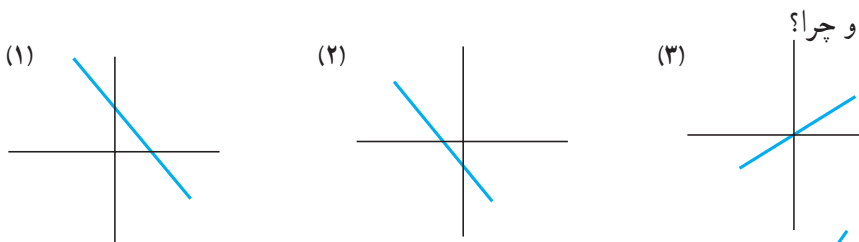
ت) $y = -4x - 5$

ث) $y = x + 6$

ج) $y = \frac{x}{2}$



۲- بدون محاسبه، بگویید که هر معادله، معرف کدام یک از نمودارهای زیر است



الف) $y = -2/72x$

ب) $y = 0/01 + 0/001x$

پ) $y = 27/9 - 0/01x$

ت) $y = 0/1x - 27/9$


ث) $y = -5/7 - 200x$

ج) $y = \frac{x}{3/14}$

۳- دلایل خود را منظم کنید و از آن‌ها، روشی برای رسم نمودار تابع خطی پیشنهاد کنید تا بدون محاسبه، بتوان وضعیت خط را در صفحه مشخص کرد.

برای مثال، می‌توانید بگویید :

«در یک تابع خطی به شکل $y = mx + n$ ، اگر ضریب زاویه منفی و عرض از

مبدأ مثبت باشد، شکل تقریبی نمودار تابع،  است.»

بقیه حالت‌ها را شما بنویسید.

۸-۱- خانواده‌ی تابع‌های خطی

فرمول‌هایی مانند

$$y = f(x) = mx + n$$

و $y = f(x) = mx$ که شامل

ثابت‌های m و n هستند، از یک

خانواده می‌باشند. معمولاً از خانواده‌ی

تابع‌های خطی، برای مدل‌سازی

پدیده‌های خطی استفاده می‌کنیم.

معنای مقدارهای مختلف m و n در

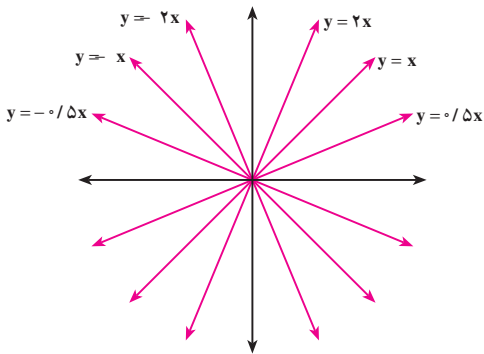
خانواده‌ی $f(x) = mx + n$ ، در

شکل‌های صفحه بعد نشان داده شده

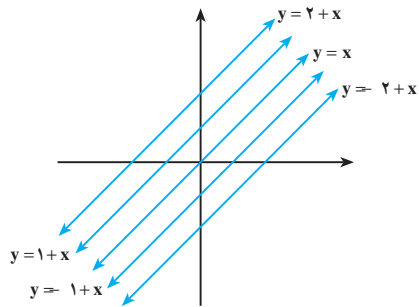
است.



شمس‌العماره، تهران



خانوادهٔ تابع‌های $y = mx$ (با $n = 0$)



خانوادهٔ تابع‌های $y = x + n$ (با $m = 1$)

فعالیت ۱-۷



فارنهایت سلسیوس

الف) خانوادهٔ تابع‌های به شکل $y = ax + 2$ را در نظر بگیرید (a ضریب زاویه است). نمودار تابع‌ها را در حالت‌های زیر بررسی کنید.

۱- a مثبت و بزرگتر از یک

۲- a منفی و بزرگتر از منفی یک

۳- a مثبت و کوچکتر از یک

۴- a منفی و کوچکتر از منفی یک

ب) به نقش a در نمودار تابع‌های این خانواده توجه کنید. چگونه a بر نمودار خط، تأثیر می‌گذارد؟

پ) اندازهٔ a (یعنی $|a|$) چه تأثیری بر نمودار خط می‌گذارد؟

ت) علامت a چه تأثیری بر نمودار خط دارد؟

ث) نتایج به دست آمده را به عنوان روشی برای رسم نمودارهای این خانواده از تابع‌ها، بنویسید.

مثال

درجه فارنهایت را در مقابل درجه سلسیوس در نظر بگیرید، 212°F (درجه فارنهایت) و 100°C (درجه سانتیگراد)، هر دو معرف درجه حرارتی است که آب در آن می جوشد. به طور مشابه، 32°F و 0°C ، نقطه انجماد آب را نشان می دهد.

الف) درجه سانتیگراد را روی محور xها و درجه فارنهایت را روی محور yها نشان دهید و با استفاده از این دو نقطه، نمودار خط را رسم کنید.

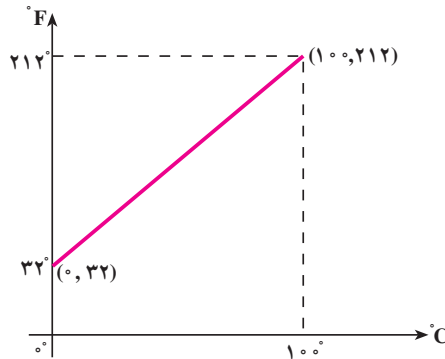
ب) معادله این خط چیست؟

پ) با استفاده از این معادله، بگویید 2°C ، برابر چند درجه فارنهایت است؟

ت) در چه درجه حرارتی، درجه سانتیگراد و فارنهایت با هم برابرند؟

حل:

الف)



ب) با استفاده از دو نقطه جوش و انجماد بر حسب درجه فارنهایت و سانتیگراد یعنی $(100, 212)$ و $(0, 32)$ ، ضریب زاویه خط را محاسبه می کنیم.

$$\text{ضریب زاویه} = \frac{212 - 32}{100 - 0} = \frac{180}{100} = 1/8$$

محل تقاطع خط با محور Fها یعنی عرض از مبدأ، 32 است. پس معادله خط را در حالت کلی

می نویسیم:

$$y = mx + n$$

با جایگزین کردن $y = F$ (درجه فارنهایت)، $x = C$ (درجه سانتیگراد)، $m = 1/8$ (ضریب

زاویه) و $n = 32$ (عرض از مبدأ)، معادله این خط را مشخص می کنیم:

$$F = 1/8C + 32$$

پ) حالا به جای C ، ۲۰° را می‌گذاریم تا F° را به دست آوریم:

$$F = 1/8(20) + 32 = 36 + 32 = 68^{\circ}F$$

ت) چون می‌خواهیم F° و C° با هم برابر باشند، پس در معادله

$$F = 1/8C + 32$$

به جای C ، F را قرار می‌دهیم:

$$F = 1/8F + 32$$

$$F - 1/8F = 32$$

$$7/8F = 32$$

$$F = -\frac{32}{7/8}$$

$$F = -4^{\circ}$$

پس در -4° ، درجهٔ حرارت سانتیگراد و فارنهایت، با هم برابر می‌شوند.

نتیجه: برای تبدیل درجه‌های سانتیگراد و فارنهایت به یکدیگر، از نمودار این مثال، استفاده

می‌کنیم و فرمول پیدا کردن ضریب زاویه را می‌نویسیم. چون در حالت کلی می‌خواهیم هر F را به C و هر C را به F تبدیل کنیم، پس در

$$m = \frac{212 - 32}{100 - 0}$$

که برای یک حالت خاص بود، به جای 212 ، F و به جای 100 ، C را قرار می‌دهیم:

$$m = \frac{F - 32}{C - 0}$$

اما چون نمودار، یک خط راست است؛ پس ضریب زاویهٔ آن در تمام نقاط روی آن، یکسان

است. بنابراین،

$$\frac{F - 32}{C - 0} = \frac{212 - 32}{100 - 0} = \frac{180}{100}$$

با استفاده از خاصیت کسرها، تساوی بالا را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{F - 32}{180} = \frac{C}{100}$$

کسر را ساده می‌کنیم:

$$\frac{F - 32}{9} = \frac{C}{5}$$

این معادله را یک بار برای C و یک بار برای F حل می‌کنیم:

$$F - 32 = \frac{9}{5}C \quad \text{یا} \quad \boxed{F = \frac{9}{5}C + 32} \quad (1)$$

$$9C = 5F - 160 \quad \text{یا} \quad \boxed{C = \frac{5}{9}F - \frac{160}{9}} \quad (2)$$

توجه کنید که برای تبدیل درجهٔ حرارت سانتیگراد به فارنهایت، از (۱) یا (۲) می‌توانید استفاده کنید.

تمرین

با استفاده از فرمول ۱، در فعالیت ۱-۱، تعداد جیرجیر جیرجیرک‌ها را برحسب درجهٔ فارنهایت محاسبه کنید. یعنی، فرمول تجربی

$$n = \sqrt{5C - 32}$$

را برحسب درجهٔ فارنهایت بنویسید.

۹-۱- خانوادهٔ تابع‌های توانی

تابع‌های توانی، خانوادهٔ مهمی از تابع‌ها هستند. برای مثال، مساحت یک مربع، تابعی از ضلع آن است و از فرمول $A = f(s) = s^2$ به دست می‌آید.

هم‌چنین، حجم کره که تابعی از شعاع آن است، از فرمول $V = f(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$ به دست می‌آید.

تعریف

یک تابع توانی به شکل

$$y = f(x) = kx^P$$

است که در آن k هر ثابت غیر صفری می‌تواند باشد و P عددی طبیعی است.

۱- S اول کلمهٔ Side به معنی ضلع است و A، اول کلمهٔ Area به معنی مساحت است.

۲- V اول کلمهٔ Volume به معنای حجم است و r اول کلمهٔ Radius به معنای شعاع است.



نمای جنوبی، خانه طباطبایی، کاشان

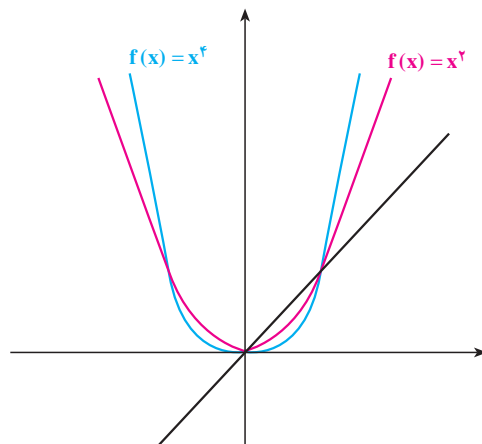
تابع خطی $y = f(x) = mx$ (با ثابت m) نیز یک تابع توانی است که در آن، توان x برابر یک است.
بنابراین، تابع‌های خطی نیز عضوی از خانواده تابع‌های توانی به‌شمار می‌آیند.

فعالیت ۸-۱

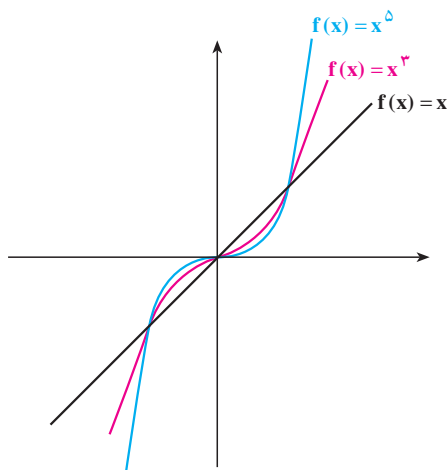
تابع‌های توانی به شکل $y = f(x) = x^n$ را در نظر بگیرید که در آن، n یک عدد صحیح مثبت باشد.

- ۱- فقط با نقطه‌یابی، نمودار تقریبی x^2 ، x^3 ، x^4 و x^5 را رسم کنید.
- ۲- موارد مشابه و متفاوت هریک را بنویسید.
- ۳- آیا می‌توانید نمودارها را دسته‌بندی کنید؟ اگر جواب مثبت است، نمودارها در چند دسته قرار می‌گیرند؟
- ۴- رابطه بین توان‌های x و دسته‌بندی شما چیست؟

به‌طور کلی نمودار تابع‌های توانی وقتی توان x زوج باشد، به شکل صفحه بعد است:



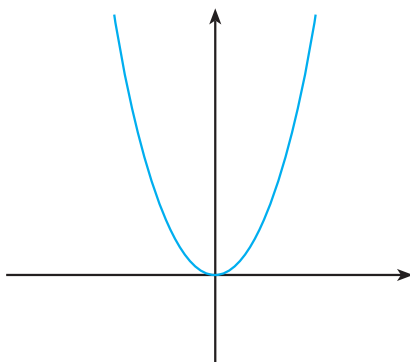
هم چنین، نمودار تابع‌های توانی وقتی توان x فرد باشد نیز، به شکل زیر است :



یکی از معروف‌ترین تابع‌های توانی، $y = f(x) = x^2$ است. این تابع‌ها، بسیاری از پدیده‌های طبیعی را مدل‌سازی می‌کنند. برای مثال، تابع سود، تابع درآمد، تابع پرتاب یک شیء و تابع افتادن یک توپ به زمین و حرکت آن تا زمان توقف بر روی زمین، همگی تابع توانی هستند که در آن‌ها، توان x برابر ۲ است. به دلیل اهمیت این خانواده از تابع‌ها، به آن‌ها نام خاصی داده شده و به سهمی معروف هستند. فصل دوم، اختصاص به این خانواده از تابع‌ها دارد.



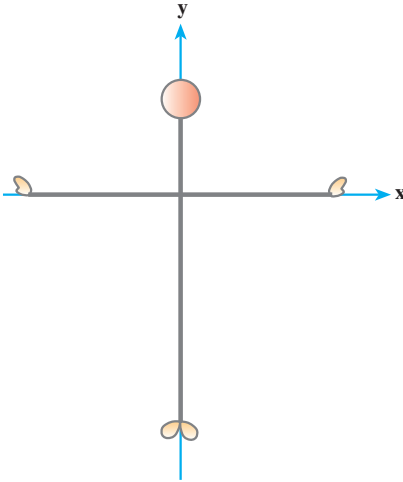
در هنگام مدل‌سازی، بیش از آن که به رسم دقیق نمودار تابع نیاز باشد، به شکل تقریبی آن احتیاج است. برای مثال، می‌توانید با ماشین حساب یا با نقطه‌یابی، نمودار سهمی $f(x) = x^2$ را بکشید :



و زمانی که می‌خواهید بر مبنای این سهمی، نمودار $f(x) = x^2 + 1$ را رسم کنید، کافی است بدانید که سهمی قبلی شما، به اندازه یک واحد بالا می‌پرد!

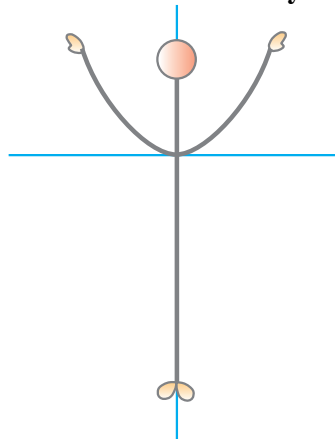
زنگ تفریح ریاضی!

برای رفع خستگی از زحمتی که برای فصل اول کشیده‌اید، ورزش بدن‌سازی زیر را انجام دهید تا سهمی‌ها را برای همیشه، در خاطر داشته باشید! این ورزش، فقط با حرکت دست‌هاست.

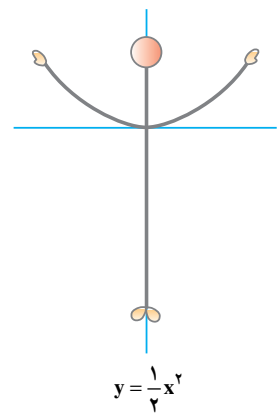
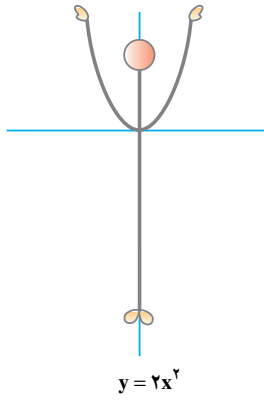
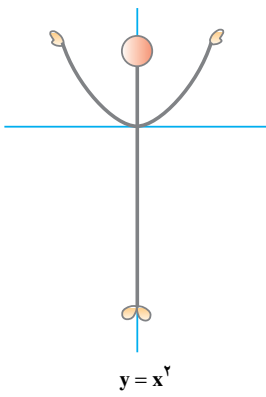


فرض کنید روی محور مختصات طوری ایستاده‌اید که مرکز مختصات، هم سطح با شانه‌ها و دقیقاً زیر نقطهٔ میانی گردن شما باشد.

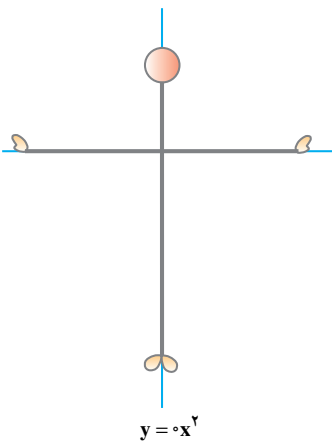
تمرین ۱: دست‌ها را به آهستگی و منحنی‌وار، به طرف بالا حرکت دهید. این حالت استاندارد را $y = x^2$ می‌نامیم. هر یک از تمرین‌های ورزشی را از $y = x^2$ شروع کرده و به آن، خاتمه دهید. یعنی نقطهٔ شروع و پایان، $y = x^2$ است.



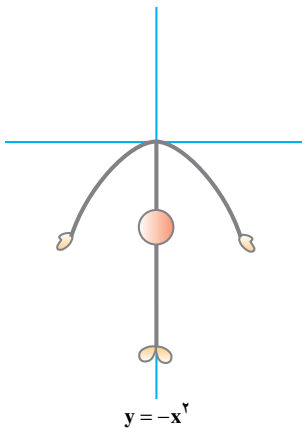
تمرین ۲: شکل‌های زیر، نشان می‌دهند که اگر ضریب x را (که در $y = x^2$ یک است) تغییر دهیم، سهمی تنگ‌تر یا گشادتر می‌شود.



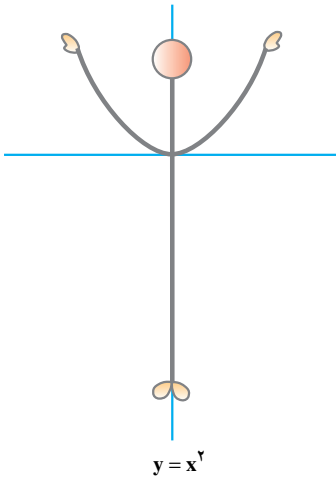
حالا اگر $y = 0x^2$ باشد چه می‌شود؟
درست است! باید دست‌ها در امتداد محور
 x ها باز شود.



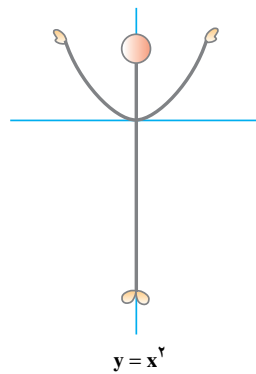
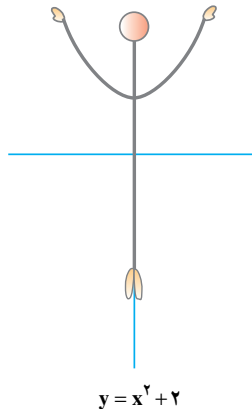
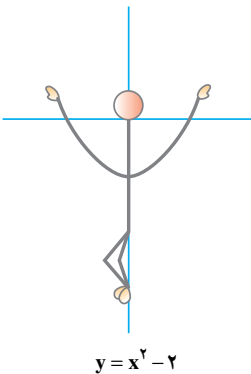
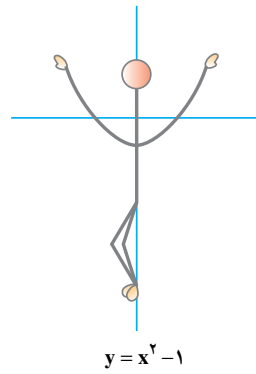
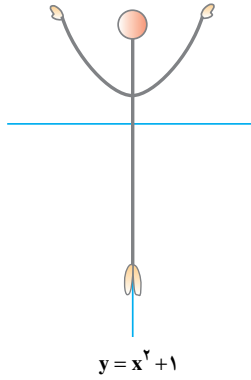
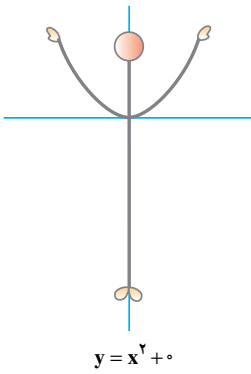
خوب! حالا پاها را جفت کنید و خم
شوید!



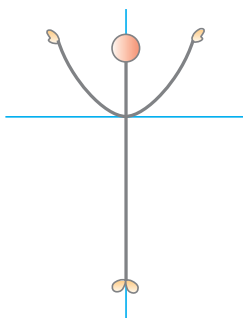
سپس دوباره به حالت اول باز گردید.



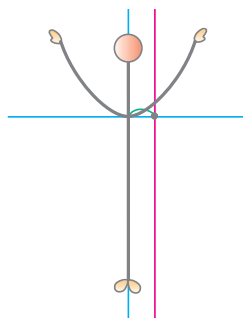
تمرین ۳: این تمرین‌ها نشان می‌دهند که چگونه اضافه کردن یک مقدار ثابت به سمت راست معادله $y = x^2$ ، حرکت‌های بالا و پایین سهمی را تغییر می‌دهد. شما طبق شکل، به ورزش بدن‌سازی خود، ادامه دهید!



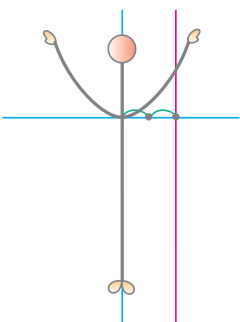
تمرین ۴: تمرین‌های این قسمت، نیازمند تحرک بیشتری است و حرکت سهمی به سمت راست یا چپ را نشان می‌دهد. شما هم با تحرک بیشتر، به ورزش خود ادامه دهید!



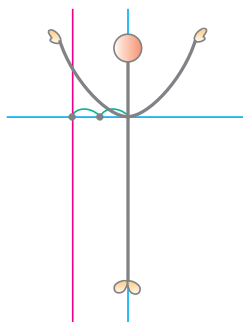
$$y = (x+0)^2$$



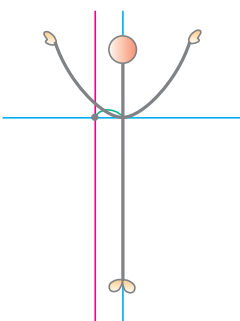
$$y = (x-1)^2$$



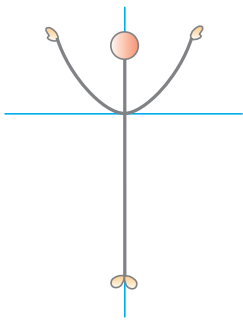
$$y = (x-2)^2$$



$$y = (x+2)^2$$

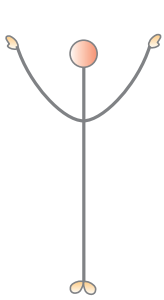


$$y = (x+1)^2$$

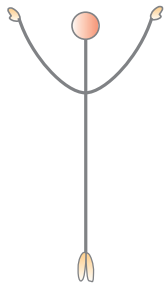


$$y = x^2$$

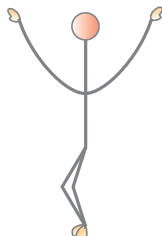
تمرین ۵: حالا که عضلات شما به کار افتاده‌اند و آمادگی بیشتری پیدا کرده‌اید، حرکات ورزشی خود را با تنوع و تحرک بیشتری، مانند شکل‌های زیر، انجام دهید!



$$y = x^2$$



$$y = x^2 + 1$$



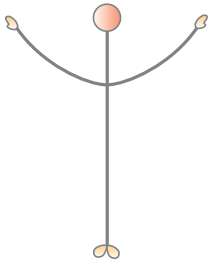
$$y = x^2 - 1$$



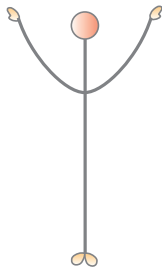
$$y = 2x^2 - 1$$



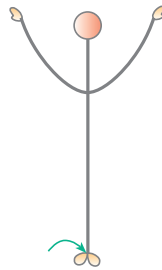
$$y = 2x^2 + 1$$



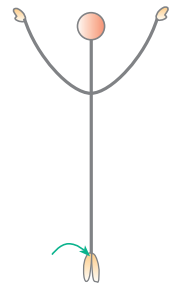
$$y = \frac{1}{4}x^2$$



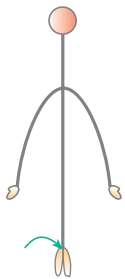
$$y = x^2$$



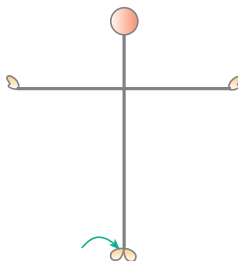
$$y = (x-1)^2$$



$$y = (x-1)^2 + 1$$



$$y = -2(x-1)^2 + 1$$



$$y = 0(x-1)^2 + 1$$



$$y = x^2$$