استان مرکزی، شهرستان محلات، سرچشمه محلات

«قُل هٰاتو بُرهٰانَکُم اِنْ کُنتُم صٰادِقین»
آیه ۶۴ سوره نمل
«بگو اگر راست می‌گویید
دلیل خود را بیاورید»

۱ آشنایی با مبانی ریاضیات

۱ آشنایی با منطق ریاضی

۲ مجموعه ـ زیر مجموعه

۳ قوانین و اعمال بین مجموعه‌ها ـ جبر مجموعه‌ها

درس ۱ آشنایی با منطق ریاضی

منطق ریاضی که عده‌ای به آن منطق نمادین[1] نیز می‌گویند، دستور زبان ریاضی، یا مطالعهٔ ساختار جمله‌هایی است که در ریاضی به‌کار برده می‌شود. این شاخه از ریاضیات به بررسی دقیق **استدلال‌ها می‌پردازد** و اعتبار یک استدلال را مشخص می‌کند. امروزه منطق ریاضی در علوم مربوط به رایانه نیز به‌کار گرفته می‌شود. در این درس، کار ما بسیار شبیه بیان قواعد دستور زبان برای یک زبان معیّن است.

گزاره

استدلال سادهٔ زیر را در نظر بگیرید:

تیم ملی فوتبال ایران، یا تیم ملی فوتبال استرالیا به جام‌جهانی می‌رود.

تیم ملی فوتبال استرالیا به جام‌جهانی نمی‌رود.

نتیجه: تیم ملی فوتبال ایران به جام‌جهانی می‌رود.

این استدلال از چند جملهٔ خبری به‌دست می‌آید، اگر دو جملهٔ اوّل این استدلال را درست درنظر بگیریم، در این صورت، نتیجه‌گیری جملهٔ سوم منطقی به نظر می‌رسد. در منطق ریاضی به دو جملهٔ خبری نخست، **مفروضات استدلال** و به جملهٔ خبری سوم، **نتیجهٔ استدلال** گفته می‌شود. یک استدلال می‌تواند از چندین جملهٔ خبری تشکیل شود که یکی از آنها نتیجه استدلال و بقیه، مفروضات استدلال‌اند.

کار در کلاس

نتیجهٔ استدلال‌های زیر را مشخص کنید.

۱ هیچ عدد مرکّبی، عددی اوّل نیست.

۴ عددی مرکب است

نتیجه: ....

۱ـ Symbolic Logic

۲ اگر وضعیت آلودگی هوا به صورت ناسالم باشد، آن‌گاه مدارس تعطیل است.
فردا وضعیت آلودگی هوا به‌صورت ناسالم پیش‌بینی شده است.
نتیجه : ....

این استدلال‌ها، از جمله‌های خبری تشکیل شده است. به **جملهٔ خبری که در حال حاضر یا آینده، دارای ارزش درست یا نادرست (راست[1] یا دروغ[2]) باشد، گزاره[3] می‌گوییم**. معمولاً گزاره‌ها را با حروف p، q، r و ... نمایش می‌دهند.

درست یا نادرست بودن یک گزاره را **ارزش گزاره** می‌گوییم. ارزش گزارهٔ درست را با حرف «د» یا «T» و ارزش گزارهٔ نادرست را با حرف «ن» یا «F» نمایش می‌دهیم.

یک گزاره نمی‌تواند هم درست و هم نادرست باشد؛ یعنی گزاره فقط یک ارزش دارد. برای مثال، گزارهٔ زیر یک حدس در ریاضیات است.

«هر عدد زوج بزرگ‌تر از ۲ را می‌توان به‌صورت حاصل جمع دو عدد اوّل نوشت[4]»؛
مانند :

۴=۲+۲ ; ۶=۳+۳ ; ۸=۳+۵ ; ۱۰=۵+۵ ; ۱۲=۵+۷ ; ...

این حدس تاکنون اثبات نشده است؛ از طرفی هم برای آن مثال نقضی یافت نشده است. در هر صورت، این گزاره فقط یک ارزش دارد. اگر ارزش این گزاره درست نباشد، پس ارزش آن حدس، نادرست است.

خواندنی

حدس‌ها در ریاضیات به مسائل حل نشده‌ای می‌گویند که پروندهٔ آنها در جهان علم باز است. این‌گونه مسائل علاوه بر اینکه درستی آنها اثبات نشده است، تاکنون هم برای آنها مثال نقضی پیدا نشده است، حدس گلدباخ نمونه‌ای از این مسائل است.

جمله‌های پرسشی، امری و عاطفی (نشان‌دهندهٔ احساسات) گزاره محسوب نمی‌شوند؛ زیرا خبری را بیان نمی‌کنند. جمله‌های زیر هیچ خبری را بیان نمی‌کنند؛ بنابراین، گزاره محسوب نمی‌شوند.

- چه هوای خوبی! (ابراز احساسات)
- لطفاً در کلاس را ببندید. (امری)
- اینجا آشپز کیست؟ (پرسشی)

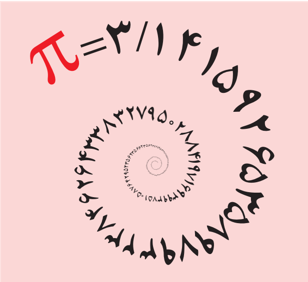
کار در کلاس

از بین جمله‌های زیر، گزاره‌ها را مشخص کنید و ارزش آنها را در صورت امکان تعیین کنید.

- ایران کشور آسیایی است.
- در پرتاب یک تاس، احتمال آنکه تاس مضرب ۳ بیاید، برابر با $\frac{۱}{۳}$ است.

۱ـ Truth ۲ـ False ۳ـ Proposition

۴ـ حدس گلد باخ



■ ای کاش می‌توانستم در یک هوای پاک زندگی کنم.

■ آیا ۲+۳ برابر با ۵ است؟

■ هر عدد فرد بزرگ‌تر از ۵ را می‌توان به‌صورت مجموع سه عدد اوّل نوشت.

■ هر معادله درجه دوم دو ریشهٔ حقیقی متمایز دارد.

■ صدمین رقم بعد از ممیز عدد π برابر با ۵ است.

جدول ارزش[1] گزاره‌ها

هر گزاره دارای ارزش درست یا نادرست است؛ بنابراین، هر گزارهٔ مانند p فقط یکی از دو حالت ارزش گزاره را طبق جدول روبه‌رو می‌گیرد.

p
د
ن

ارزش‌های دو گزارهٔ p و q ، طبق جدول روبه‌رو چهار حالت دارد.

p	q
د	د
د	ن
ن	د
ن	ن

کار در کلاس

ارزش‌های سه گزاره p، q و r ، طبق جدول روبه‌رو ۸=۲^{۳} حالت دارد. جاهای خالی را پر کنید.

p	q	r
د	د	د
د	…	ن
…	ن	…
د	ن	ن
ن	د	…
…	د	ن
ن	…	…
…	…	…

ــ به نظر شما جدول ارزش‌های چهار گزاره، چند حالت دارد؟

ــ با توجه به اینکه هر گزاره می‌تواند یکی از دو ارزش «د» یا «ن» را داشته باشد و با توجه به اصل ضرب، اگر n گزاره داشته باشیم، در این صورت، جدول ارزش‌های آن گزاره‌ها چند حالت دارد؟

۱ـ Truth Table

گزاره‌نما

فعالیت

عبارت‌های خبری زیر را در نظر بگیرید :

الف) a عددی فرد است.

ب) در پرتاب یک تاس، احتمال آنکه پیشامد A رخ دهد برابر با $\frac{۱}{۲}$ است.

پ) حاصل جمع سه برابر عددی با دو برابر عدد دیگر برابر با ۶ است. ($۳x+۲y=۶$)

۱ ارزش کدام‌یک از جملات بالا را می‌توانید تعیین کنید؟

۲ اگر به جای متغیر در جملهٔ «a عددی فرد است» قرار دهیم $a=۳$ در این صورت، ارزش آن را تعیین کنید.

اگر در آن $a=۴$ قرار دهیم، در این صورت ارزش آن چیست؟

هر جملهٔ خبری که شامل یک یا چند متغیر است و با جای‌گذاری مقادیری به جای متغیر به یک گزاره تبدیل شود، **گزاره‌نما** نامیده می‌شود. گزاره‌نماها را برحسب تعداد متغیر به‌کار رفته در آنها، یک متغیره، دو متغیره و ... می‌نامیم.

کار در کلاس

جاهای خالی را پر کنید :

اگر در جملهٔ «ب» قرار دهیم $A=\{\quad,\quad,\quad\}$ در این صورت، ارزش گزاره حاصل درست می‌شود. به نظر شما چه مجموعه‌هایی را به‌جای A قرار دهیم، تا اینکه ارزش گزاره حاصل درست شود.

اگر در جملهٔ «ب» قرار دهیم $A=\{\quad\}$ در این صورت ارزش گزاره حاصل، نادرست است.

اگر در جملهٔ «پ» قرار دهیم $x=\cdots\cdots$ و $y=\cdots\cdots$ در این صورت، ارزش گزاره حاصل درست و در حالتی که $x=\cdots\cdots$ و $y=\cdots\cdots$ در این صورت، ارزش گزاره حاصل نادرست است.

دامنهٔ متغیّر گزاره‌نما

در هر گزاره‌نما به مجموعهٔ مقادیری که می‌توان آنها را به جای متغیرهای آن قرار داد، تا اینکه گزاره‌نما به گزاره تبدیل شود، **دامنهٔ متغیر**[۱] گزاره‌نما می‌گویند و آن را با حرف D نمایش می‌دهند.

برای مثال، دامنهٔ متغیر گزاره‌نمای «p عددی اوّل است» مجموعهٔ اعداد طبیعی، دامنهٔ متغیر گزاره‌نمای «x عددی زوج است» مجموعهٔ اعداد صحیح و دامنهٔ متغیر گزاره‌نمای «$۴x^۲+x-۵=۰$» مجموعهٔ اعداد حقیقی می‌توان درنظر گرفت.

در هر گزاره‌نما، به مجموعهٔ عضوهایی از دامنهٔ متغیر که به‌ازای آنها، گزاره‌نما تبدیل به گزاره‌ای با ارزش درست شود، **مجموعهٔ جواب**[۲] گزاره‌نما می‌گویند و آن را با حرف S نمایش می‌دهند و همواره داریم : $S\subseteq D$.

۱ـ Domain of Variable

۲ـ Answer Set

کار در کلاس

دامنهٔ متغیر گزاره‌نماهای زیر داده شده است. مجموعه جواب هریک از آنها را مشخص کنید.

الف) x مضرب ۷ است. $(D=\mathbb{Z})$

ب) $15x^2-7x-8=0$ $(D=\mathbb{R})$

پ) تاس را پرتاب می‌کنیم و $P(\{x\})=\frac{1}{6}$. $(D=\{1,2,\ldots,6\})$

ترکیب گزاره‌ها

فعالیت

۱ هریک از این جمله‌های زیر، از چند گزاره تشکیل شده است؟

۲ آیا می‌توانید با توجه به ارزش گزاره‌های به‌کار رفته در هر جمله، ارزش آن جمله را تعیین کنید.

- عدد ۲ زوج است و عدد ۵ مضرب ۳ است.
- عدد ۲ زوج است، یا عدد ۵ مضرب ۳ است.
- اگر عدد ۲ زوج باشد، آن‌گاه عدد ۵ مضرب ۳ است.
- چنین نیست که عدد ۲ زوج باشد.
- اگر عدد ۲ زوج باشد، آن‌گاه عدد ۵ مضرب ۳ است و برعکس.

از ترکیب دو یا چند گزاره به وسیلهٔ رابط‌های گزاره‌ای (ادات ربط)، گزاره‌های مرکب به‌دست می‌آیند.
در ادامه ادات ربط را برای ترکیب گزاره‌ها معرفی می‌کنیم. با در دست داشتن ارزش گزاره‌های p، q، r و ... و معرفی ادات ربط، می‌توان گزاره‌های مرکب را تعریف کرد که ارزش گزاره‌های مرکب فقط به ارزش گزاره‌های p، q، r و ... و ادات ربط بین آنها بستگی دارد.

نقیض یک گزاره

نقیض گزارهٔ p به‌صورت $\sim p$ نوشته می‌شود و آن را «چنین نیست که p» می‌خوانیم. اگر ارزش گزارهٔ p درست باشد، در این‌صورت، ارزش گزارهٔ $\sim p$ نادرست است و وقتی که p نادرست باشد، ارزش نقیض آن درست است. به علامت «$\sim$» **ناقض** گفته می‌شود و «چنین نیست که» خوانده می‌شود.

مثال : نقیض گزارهٔ «۲ عددی گنگ است» را می‌توان به‌صورت‌های زیر نوشت.

«چنین نیست که ۲ عددی گنگ باشد»، یا «۲ عددی گنگ نیست.»

جدول ارزش برای نقیض یک گزاره که تمام حالت‌های ممکن را برای درستی یا نادرستی گزاره در نظر می‌گیرد، به‌صورت روبه‌روست :

p	$\sim p$
د	ن
ن	د

مثال : جدول ارزش گزاره $\sim(\sim p)$ را تشکیل دهید و ارزش آن را در هر حالت، با ارزش گزاره p مقایسه کنید.

حل :

p	$\sim p$	$\sim(\sim p)$
د	ن	د
ن	د	ن

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، در هر حالت از جدول، ارزش p با ارزش $\sim(\sim p)$ یکسان است. در این حالت می‌گوییم : دو گزاره p و $\sim(\sim p)$ **هم ارز منطقی** هستند و می‌نویسیم : $\sim(\sim p) \equiv p$.

در حالت کلّی اگر دو گزاره p و q هم‌ارزش باشند می‌نویسیم : $p \equiv q$ و می‌خوانیم : p هم ارز است با q.

ترکیب فصلی دو گزاره

گزاره‌های زیر را در نظر بگیرید.

p : $\sqrt{۳}$ عددی حقیقی است.

q : ۲ عددی اول نیست.

گزارۀ مرکب « $\sqrt{۳}$ عددی حقیقی است، یا ۲ عددی اوّل نیست» که از ترکیب دو گزارۀ ساده p و q با رابط منطقی «یا» تشکیل شده است، ترکیب فصلی دو گزاره می‌گوییم. هرگاه p و q دو گزاره باشند، گزارۀ مرکب «p یا q» را که به‌صورت «$p \vee q$» می‌نویسند، **ترکیب فصلی** دو گزاره می‌گوییم. در اینجا به رابط منطقی «$\vee$» **فاصل** گفته می‌شود. گزارۀ مرکب زیر را در نظر بگیرید :

«پدر علی امروز برای گرفتن کارنامه به مدرسه می‌آید، **یا** مادر علی امروز برای گرفتن کارنامه به مدرسه می‌آید».

اگر پدر علی برای گرفتن کارنامه به مدرسه بیاید، در این صورت ارزش گزارۀ مرکب بالا درست است. اگر مادر علی هم برای گرفتن کارنامه به مدرسه بیاید، آن‌گاه ارزش گزارۀ مرکب درست است. در حالتی که هم پدر علی و هم مادر علی برای گرفتن کارنامه به مدرسه بیایند، ارزش گزارۀ مرکب درست است.

گزارۀ مرکب بالا وقتی نادرست است که پدر و مادر علی به مدرسه برای گرفتن کارنامه مراجعه نکنند.

بنابراین، ارزش گزاره مرکب $p \vee q$ وقتی نادرست است که ارزش هر دو گزارۀ p و q نادرست باشد و در بقیۀ حالات، ارزش $p \vee q$ درست است. جدول ارزش گزارۀ $p \vee q$ به صورت روبه‌رو است.

p	q	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

مثال : هرگاه a و b دو عدد حقیقی باشند به‌طوری که $a \times b = ۰$ در این صورت $\alpha = ۰$ یا $b = ۰$ یعنی :

$$a, b \in \mathbb{R} \,,\, a \times b = ۰ \Rightarrow (a = ۰) \vee (b = ۰)$$

از ویژگی مثال قبل، برای حلّ معادله‌ها استفاده می‌کنیم :

$$x^۲ + ۷x = ۰ \Rightarrow x(x+۷) = ۰ \Rightarrow x = ۰ \text{ یا } x+۷ = ۰ \Rightarrow x = ۰ \text{ یا } x = -۷$$

ترکیب عطفی دو گزاره

هرگاه p و q دو گزاره باشند، گزارهٔ مرکب «$p\wedge q$» که خوانده می‌شود «p و q» را **ترکیب عطفی** دو گزاره می‌گوییم. در اینجا به رابط منطقی «$\wedge$» **عاطف** گفته می‌شود.

فعالیت

گزارهٔ مرکب زیر را در نظر بگیرید و به سؤالات پاسخ دهید.

«سوگند فارغ‌التحصیل شد و پارسا عضو تیم فوتبال مدرسه است».

- آیا ارزش این گزارهٔ مرکب درست است؟

فرض کنید :

p : سوگند فارغ‌التحصیل شد.

q : پارسا عضو تیم فوتبال مدرسه است.

- اگر ارزش p درست و ارزش q نادرست باشد، ارزش $p\wedge q$ چیست؟
- اگر ارزش p نادرست و ارزش q درست باشد، ارزش $p\wedge q$ چیست؟
- هرگاه ارزش دو گزارهٔ p و q نادرست باشد، ارزش $p\wedge q$ چیست؟
- هرگاه ارزش دو گزارهٔ p و q درست باشد، ارزش $p\wedge q$ چیست؟

بنابراین، ارزش ترکیب عطفی دو گزاره وقتی درست است که ارزش هر دو گزارهٔ p و q درست باشند و در بقیهٔ حالات ارزش $p\wedge q$ نادرست است. جدول ارزش $p\wedge q$ به‌صورت روبه‌رو است :

p	q	$p\wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

کار در کلاس

۱ جدول زیر را کامل کنید.

گزارهٔ p	گزارهٔ q	ارزش p	ارزش q	ارزش $p\vee q$	ارزش $p\wedge q$
هفته هفت روز دارد.	ماه شهریور ۳۱ روز دارد.				
....	عدد ۷ مضرب ۵ نیست	ن			
۲ عددی اوّل است	....		ن		
....	....	ن	ن		
(۷−) اوّل است	....			د	

۲ با کامل کردن جدول ارزش‌ها، نشان دهید که گزاره‌های $\sim(p\vee q)$ و $(\sim p\wedge\sim q)$ هم‌ارز منطقی هستند.

p	q	$p\vee q$	$\sim(p\vee q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p\wedge\sim q$
د	د	د	ن		ن	
د	ن	د	ن		د	
ن	د	د		د		ن
ن	ن	ن		د		د

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، همهٔ حالت‌های ارزش دو گزارهٔ $\sim(p\vee q)$ و $(\sim p\wedge\sim q)$ یکسان‌اند پس $\sim(p\vee q)\equiv\sim p\wedge\sim q$ در منطق ریاضی به این هم‌ارزی **قانون دمورگان** گفته می‌شود.

۳ با توجه به جدول ارزش گزاره‌ها نشان دهید که $\sim(p\wedge q)\equiv\sim p\vee\sim q$.

p	q	$p\wedge q$	$\sim(p\wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p\vee\sim q$

مثال : مقادیر x و y را چنان بیابید که داشته باشیم :

$$(۲x-y)^۲+(x-۱)^۲=۰$$

حل : چون $(x-۱)^۲\geq ۰$ و $(۲x-y)^۲\geq ۰$ بنابراین، تساوی بالا وقتی برقرار است که :

$$\left[(۲x-y)^۲=۰\right]\wedge\left[(x-۱)^۲\right]=۰ \quad\Rightarrow\begin{cases}۲x-y=۰\\ x-۱=۰\Rightarrow x=۱\end{cases}\quad\Rightarrow y=۲$$

ترکیب شرطی دو گزاره

هرگاه p و q دو گزاره باشند، گزارهٔ مرکب «$p\Rightarrow q$» که خوانده می‌شود «اگر p آن‌گاه q» را **ترکیب شرطی** دو گزاره می‌گوییم. در این ترکیب شرطی p را مقدم (فرض) و q را تالی (حکم) می‌نامیم.

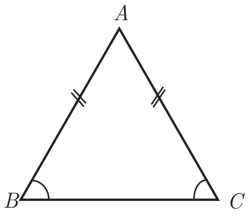
خواندنی

گزارهٔ مرکب «$p\Rightarrow q$» را به‌صورت‌های «p شرط کافی برای q است» و «q شرط لازم برای p است» نیز می‌خوانیم.

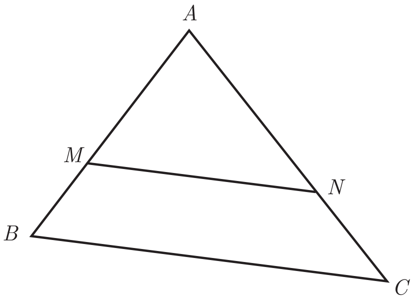
تا به‌حال در ریاضیات و هندسه با گزاره‌های شرطی بسیاری مواجه بوده‌اید، در زیر چند نمونه می‌آوریم.

۱ اگر مثلثی متساوی‌الساقین باشد. آن‌گاه دو زاویهٔ مجاور به قاعده برابرند.

$\overset{\Delta}{ABC}: AB=AC \Rightarrow \hat{B}=\hat{C}$



۲ اگر در مثلث ABC ، داشته باشیم : $MN \| BC$ آن‌گاه $\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}$.



۳ اگر A پیشامدی در فضای نمونه S باشد، آن‌گاه $A \subseteq S$.

جدول ارزش گزارهٔ شرطی $p \Rightarrow q$ به‌صورت زیر است.

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	ن	د
ن	د	د

با توجه به جدول ملاحظه می‌کنید که :

۱ هرگاه ارزش p (مقدم) نادرست باشد، آن‌گاه ارزش گزارهٔ مرکب «$p \Rightarrow q$» همواره درست است و ارزش آن به ارزش گزارهٔ q بستگی ندارد. در این حالت می‌گویند : ارزش «$p \Rightarrow q$» به انتفای مقدم درست است.

۲ ارزش گزارهٔ $p \Rightarrow q$ وقتی نادرست است که p درست و q نادرست باشد.

مثال : ارزش گزارهٔ «اگر ۲ فرد است، آن‌گاه ۲>۵» به انتفای مقدّم درست است.

کار در کلاس

۱ با پر کردن جاهای خالی در جدول زیر؛ نشان دهید که گزاره‌های $p \Rightarrow q$ و $\sim p \vee q$ هم ارز منطقی‌اند.

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim p$	$\sim p \vee q$
د	د	د		
د	ن	ن		
ن	ن	د		
ن	د	د		

۲ گزارهٔ «$q \Rightarrow p$» **عکس ترکیب شرطی** «$p\Rightarrow q$» و گزارهٔ $\sim q\Rightarrow\sim p$ **عکس نقیض ترکیب شرطی** $p\Rightarrow q$ است.
با توجه به جدول ارزش گزاره‌های زیر نشان دهید که $(p\Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$ یعنی، هر گزارهٔ شرطی با عکس نقیض خود هم‌ارز است.

p	q	$p\Rightarrow q$	$\sim q$	$\sim p$	$\sim q\Rightarrow\sim p$

۳ با استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها و با پرکردن جاهای خالی نشان دهید :

الف) $(p\Rightarrow p\vee q)\equiv T$

ب) $(p\wedge q\Rightarrow p)\equiv T$

p	q	$p\vee q$	$p\Rightarrow p\vee q$
د	د		
د	ن		
ن	د		
ن	ن		

(الف)

p	q	$p\wedge q$	$p\wedge q\Rightarrow p$
د	د		
د	ن		
ن	د		
ن	ن		

(ب)

گزاره‌هایی نظیر $(p \Rightarrow p)$ یا $(p\vee\sim p)$ را گزاره‌های همیشه درست و گزاره‌هایی نظیر $(p\wedge\sim p)$ را همیشه نادرست می‌نامیم.

مثال : ثابت کنید اگر $a\in\mathbb{Z}$ و a^2 عددی فرد باشد، آن‌گاه a عددی فرد است.

حل : به‌جای اثبات این حکم، عکس نقیض آن را ثابت می‌کنیم (اثبات عکس نقیض آن ساده‌تر است).

(a^2 عددی زوج است $\Leftarrow a$ عددی زوج است) $\equiv$ (a عددی فرد است $\Leftarrow a^2$ عددی فرد است)

اگر a عددی زوج باشد، یعنی $a=2k$، خواهیم داشت :

$$a^2=(2k)^2=4k^2=2\underbrace{(2k^2)}_{k'\in\mathbb{Z}'}=2k'$$

در نتیجه a^2 عددی زوج است.

ترکیب دو شرطیِ دو گزاره

هرگاه p و q دو گزاره باشند، گزارهٔ مرکب $(p\Rightarrow q) \wedge (q\Rightarrow p)$ را به‌صورت «$p\Leftrightarrow q$» می‌نویسیم و آن را ترکیب دو شرطی p و q می‌نامیم. گزارهٔ «$p\Leftrightarrow q$» را به‌صورت زیر می‌خوانیم :

«اگر p، آن‌گاه q و برعکس»، «p شرط لازم و کافی برای q است» و «p اگر و تنها اگر q»

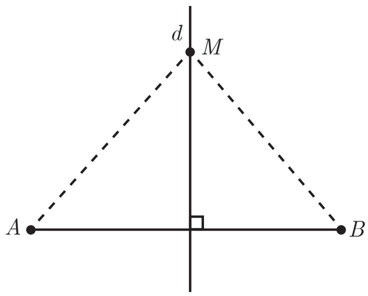
مثال : گزاره های زیر، نمونه ای از ترکیب دو شرطی گزاره‌هاست.

الف) ۶ عدد اوّل است $\Leftrightarrow$ ۵ < ۲

ب) ۹۹ عدد اوّل نیست $\Leftrightarrow$ $\sqrt{۲}$ عددی گویاست.

پ) در پرتاب یک تاس، شرط لازم و کافی برای آنکه احتمال پیشامدی برابر با صفر باشد، آن است که پیشامد تهی باشد.

ت) شرط لازم و کافی برای آنکه نقطه‌ای واقع بر عمود منصف یک پاره‌خط باشد، آن است که فاصلهٔ آن نقطه تا دو سر پاره‌خط برابر باشد.



[$M\in d$ (عمود منصف پاره‌خط AB)] $\Leftrightarrow MA=MB$

کار در کلاس

۱ با پر کردن جاهای خالی، جدول ارزش گزارهٔ مرکب «$p\Leftrightarrow q$» را از جدول ارزش گزارهٔ مرکب $(p\Rightarrow q) \wedge (q\Rightarrow p)$ نتیجه بگیرید.

p	q	$p\Rightarrow q$	$q\Rightarrow p$	$(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow p)$
د	د			
د	ن			
ن	د			
ن	ن			

با توجه به اینکه $(p\Leftrightarrow q) \equiv (p\Rightarrow q) \wedge (q\Rightarrow p)$، جدول ارزش گزارهٔ $p\Leftrightarrow q$ به‌صورت زیر است :

p	q	$p\Leftrightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	د

۲ با استفاده از جدول ارزش درستی گزاره‌ها، هم‌ارزی‌های منطقی زیر را مانند نمونه اثبات کنید.

الف) قوانین جابه‌جایی $p \vee q \equiv q \vee p$

$p \wedge q \equiv q \wedge p$

ب) قوانین شرکت‌پذیری $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$

$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$

پ) قوانین توزیع‌پذیری $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

در زیر یکی از قانون‌های توزیع‌پذیری اثبات شده است.

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$p \wedge (q \vee r)$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
د	د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	د	د	ن	د	د
د	ن	د	د	ن	د	د	د
د	ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن
ن	د	د	د	ن	ن	ن	ن
ن	د	ن	د	ن	ن	ن	ن
ن	ن	د	د	ن	ن	ن	ن
ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن

چون دو ستون آخر جدول یکسان شده است، پس $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

سورها

به جملات زیر دقت کنید :

«همهٔ دانش‌آموزان کلاس در سال گذشته قبول شده‌اند». «هر گردویی گرد است». «هر مستطیلی یک مربع است». «هر مثلث متساوی‌الاضلاعی یک مثلث متساوی‌الساقین است». «بعضی از تیم‌های دستهٔ یک به دستهٔ برتر صعود می‌کنند». «بعضی از اعداد اوّل، زوج‌اند». «بعضی از ذوزنقه‌ها، مستطیل‌اند».

عبارت‌های «به ازای هر» و «به ازای بعضی مقادیر» به **سور** معروف‌اند. این عبارت‌ها می‌توانند قبل از گزاره نماها قرار گیرند و به این وسیله گزاره‌هایی با ارزش درست یا نادرست ایجاد کنند.

خواندنی

سور کلمه‌ای عربی است و به معنای «بارو» حصار یا دیوار گرداگرد شهر است. نام‌گذاری عبارت‌های «به‌ازای هر» و «به ازای بعضی مقادیر» با سور به این جهت است که آنها قلمرو اعضای موضوع مورد بحث را مشخص می‌کنند. از نظر منطق‌دانان وجه تشابه سور با دیوار شهر آن است که دیوار گرداگرد شهر، محدوده و قلمرو شهر را مشخص می‌کند و الفاظ به‌کار رفته در گزاره‌نماها، مرز و قلمرو اشیاء مورد استفاده در گزاره‌نماها را تعیین می‌کنند.

برای بیان عبارت‌ها با استفاده از نمادهای ریاضی به‌جای «به ازای هر»، یا «به ازای جمیع مقادیر» از نماد $\forall$[1] و به جای «وجود دارد»، یا «به ازای بعضی مقادیر» از نماد $\exists$[2] استفاده می‌کنیم. نماد $\forall$ سور عمومی و نماد $\exists$ سور وجودی نامیده می‌شود.

کار در کلاس

جدول زیر را کامل کنید.

عبارت با زبان طبیعی	عبارت با زبان ریاضی
برای هر عدد حقیقی x داریم: $x^2\geq 0$	$\forall x\in \mathrm{R}\ ;\ x^2\geq 0$
	$\forall a\in \mathrm{E}\ ;\ a=2k\ (k\in \mathbb{Z})$
	$\exists\ p\in \mathrm{P}\ ;\ p=2k\ (k\in \mathbb{Z})$
بعضی از اعداد فرد، عدد اول هستند.	

در جدول فوق، مجموعهٔ اعداد زوج را با E، مجموعهٔ اعداد فرد را با O و مجموعهٔ اعداد اوّل را با P نمایش داده‌ایم.

گزاره‌نمای شامل متغیر x که با سور عمومی همراه می‌شود، وقتی به یک گزاره درست تبدیل می‌شود که هر عضو از دامنه متغیر در گزاره‌نما صدق کند؛ به عبارت دیگر هیچ مثال نقضی نداشته باشد.

مثال : ارزش گزارهٔ $\forall x\in \mathbb{R}\ ;\ x^2\geq x$

نادرست است؛ زیرا $x=\frac{1}{2}$ برای آن مثال نقض محسوب می‌شود.

مثال : کدام یک از عبارت‌های زیر، گزاره‌هایی درست‌اند؟

الف) $\forall x\in \mathbb{Z}\ ;\ x(x+1)=2k\ (k\in \mathbb{Z})$ ب) $\forall x\in \mathbb{R}\ ;\ tanx\times cotx=1$

حل الف) چون حاصل‌ضرب هر دو عدد متوالی صحیح، عددی زوج است. بنابراین، برای هر عضو از دامنهٔ متغیر $(\mathbb{Z})$ گزاره‌نما به گزاره‌ای درست تبدیل می‌شود، پس این عبارت درست است.

۱ــ نماد $\forall$ از حرف اول کلمه All گرفته شده است.

۲ــ نماد $\exists$ از حرف اول کلمه Exist گرفته شده است.

ب) نادرست است؛ زیرا $x=\frac{\pi}{2}$ ، گزاره‌نما را به گزاره‌ای نادرست تبدیل می‌کند.

گزاره‌نمای شامل متغیر x که با سور وجودی همراه می‌شود، وقتی درست است که مجموعهٔ جواب آن تهی نباشد.

مثال : گزارهٔ $\exists x\in \mathbb{Z}\,;\,|x|-1<0$

درست است؛ زیرا حداقل یک عضو $x=0$ وجود دارد که به ازای آن، گزاره‌نما به گزاره‌ای با ارزش درست تبدیل می‌شود.

مثال : کدام یک از عبارت‌های زیر درست‌اند :

الف) $\exists x\in P; x=2k$ ب) $\exists x\in \mathbb{R}; x^2+1=0$

حل. الف) درست است؛ زیرا ۲ عددی اوّل و زوج است، پس مجموعهٔ جواب گزاره‌نما $\{2\}$ و ناتهی است.

ب) نادرست است؛ زیرا مجموعهٔ جواب گزاره‌نما مجموعهٔ تهی است.

کار در کلاس

درستی یا نادرستی گزاره‌های سوری زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید.

الف) هر عدد اوّل، فرد است.

ب) $\exists x\in \mathbb{N}; 2x^2+3x+1=0$

پ) $\exists x\in \mathbb{Z}; 2x^2+3x+1=0$

ت) هر عدد زوج، غیر اوّل است.

ث) در آمار، هر متغیّر ترتیبی یک متغیّر کیفی است.

ج) در احتمال، هر مجموعه پیشامد زیر مجموعه فضای نمونه است.

چ) در فضای نمونهٔ S، پیشامدی مانند A وجود دارد به طوری که $P(A)>1$.

ح) طول هر پاره خط، عدد حقیقی است.

نقیض گزاره‌های سوری

گزارهٔ «**علی به مدرسه رفت**» را در نظر بگیرید و نقیض آن را در زیر بنویسید.

....

معمولاً برای نقیض کردن یک گزاره، فعل آن را منفی می‌کنند. اکنون گزاره زیر را در نظر بگیرید و نقیض آن را بنویسید.

هر آسیایی، ایرانی است.

....

در زبان طبیعی معمولاً این اشتباه رخ می‌دهد که برای نوشتن نقیض این گزاره، فقط فعل آن را منفی می‌کنند و می‌نویسند :

هر آسیایی، ایرانی نیست.

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، ارزش دو گزارهٔ قبل(«هر آسیایی، ایرانی است» و «هر آسیایی، ایرانی نیست») نادرست است و این غیر ممکن است (چرا؟) بنابراین، جملهٔ دوم نمی‌تواند نقیض جملهٔ اوّل باشد.

برای رفع این مشکل؛ فرض کنیم A مجموعه مردمان آسیا و ایرانی بودن x را با $P(x)$ نمایش دهیم؛ بنابراین، گزارهٔ «هر آسیایی، ایرانی است» به صورت $\forall x \in A; P(x)$ بیان می‌شود.

چون ارزش این گزاره: « $\forall x \in A; P(x)$ » نادرست است، پس ارزش گزارهٔ نقیض آن، یعنی: $\sim(\forall x \in A; P(x))$ باید درست باشد. از آنجا که ارزش گزارهٔ $(\forall x \in A; P(x))$ نادرست است، پس وجود دارد $x \in A$ به‌طوری که $P(x)$ نادرست است؛ بنابراین ارزش $\sim P(x)$ درست می‌باشد، در نتیجه ارزش گزارهٔ $\exists x \in A; \sim P(x)$ درست است و ارزش این گزاره با ارزش گزارهٔ $\sim(\forall x \in A; P(x))$ یکسان است، بنابراین داریم:

$$\sim(\forall x; P(x)) \equiv \exists x; \sim P(x)$$

در این صورت، نقیض گزارهٔ «هر آسیایی، ایرانی است» به‌صورت زیر است:

«بعضی از آسیایی‌ها، ایرانی نیستند»

به همین ترتیب می‌توان نقیض گزاره‌ای را که سور وجودی دارد، به صورت زیر نوشت:

$$\sim(\exists x; P(x)) \equiv \forall x; \sim P(x)$$

مثال: ارزش گزاره‌های سوری زیر را تعیین کنید و سپس نقیض هریک را بنویسید.

الف) $\forall x \in \mathbb{R}; x^{۲} > ۰$ ب) $\exists y \in \mathbb{R}; y < ۰ \wedge y^{۲} \leq ۱$

حل) الف) ارزش این گزاره نادرست است؛ چون $x=۰$، مثالی نقض برای آن است.

$$\sim(\forall x \in \mathbb{R}; x^{۲} > ۰) \equiv \exists x \in \mathbb{R}; x^{۲} \not> ۰ \equiv \exists x \in \mathbb{R}; x^{۲} \leq ۰$$

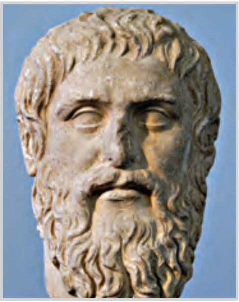
ب) درست است؛ زیرا $y=-۱$ در آن صدق می‌کند، پس مجموعهٔ جواب آن ناتهی است.

$$\begin{aligned}\sim(\exists y \in \mathbb{R}; y < ۰ \wedge y^{۲} \leq ۱) &\equiv \forall y \in \mathbb{R}; \sim(y < ۰ \wedge y^{۲} \leq ۱)\\ &\equiv \forall y \in \mathbb{R}; y \geq ۰ \vee y^{۲} > ۱\end{aligned}$$

خواندنی

گفتیم که سور به معنای بارو یا حصار یا دیوار گرداگرد شهر است و سورها قلمرو اعضای مورد بحث را مشخص می‌کنند. کلمهٔ سوره در قرآن کریم هم به همین معنا استفاده شده است. «سوره» از سور گرفته شده است و به مجموعه آیاتی گفته می‌شود که ابتدا و انتهای آن مشخص باشد.

تمرین



۱ از جملات زیر کدام یک گزاره است، ارزش گزاره‌ها را مشخص کنید.

الف) خیام پزشک ایرانی است.

ب) افلاطون فیلسوف یونانی است.

پ) $۳+۵>۶$

ت) تخته سیاه را پاک کنید.

ث) $\{۱\}\in\{۱,۲,۳,۴\}$

ج) چه باران شدیدی می‌آید.

چ) عدد ۱۹۱۷ عددی اوّل است.

ح) $\varnothing\not\subset\mathbb{R}$

خ) $\sqrt{۲}\in\mathbb{Z}$

د) عدد $۸+۵^{۹}$ عددی اوّل است.

ذ) به امید کامیابی شما.

ر) آمار، مجموعه‌ای از اعداد، ارقام و اطلاعات است.

۲ در جاهای خالی عدد یا علامت مناسب قرار دهید، به‌طوری که گزاره‌های حاصل دارای ارزش درست باشند.

الف) $-۷\times\square=-۷$

ب) $۵+\square\notin\mathbb{Z}$

پ) $\frac{۸\times\square}{۴}\in\left\{۲,\frac{۱}{۳}\right\}$

ت) $۵\times۳\,\square\,\frac{۱۰\times۹}{۳}$

ث) $\square\times\sqrt{۲}=۰$

ج) $۱\,\square\,\{۱\}$

چ) $۵(\square-۳)=۲۰$

ح) $۷(\square-۳)=۳۵$

۳ دامنهٔ متغیر هر یک از گزاره‌نماهای زیر، مجموعهٔ اعداد صحیح است، مجموعه جواب هر یک را بنویسید.

الف) x مربع کامل است.

ب) a یک واحد از مضرب ۵ بیشتر است.

پ) $\frac{۲x+۱}{۳}\leq-۱$

ت) $\{n(n+۱)=۰\,|\,n\in W\}$

۴ نقیض گزاره‌های زیر را بنویسید.

الف) $۴\leq۳$

ب) ابوالوفای بوزجانی، ریاضی‌دان ایرانی است.

پ) $a\in\{b,c,d\}$

ت) ۲ عددی زوج است یا عدد π گویاست.

ث) خورشید به دور زمین می‌چرخد و سنندج مرکز استان کردستان است.

ج) اگر ۳ زوج باشد، آن‌گاه ۲ فرد است.

۵ ارزش گزاره‌های مرکب زیر را تعیین کنید.

الف) $(۲<۳)\wedge(۴+۳=۱۰)$

ب) $(۵>۳)\vee((-۱)^{۲}+۱=۰)$

پ) $(\frac{۱}{۲}\neq\frac{۳}{۶})\vee(۱\in\{۲,۳,۴\})$

ت) اگر عدد ۴ فرد باشد، آن‌گاه ۴ مربع کامل نیست.

ث) در لوزی مفروض دو قطر با هم برابرند.

ج) ۲ عدد اوّل نیست، اگر و تنها اگر ۲ مربع کامل است.

چ) $۲>۳\Leftrightarrow-۲<-۳$

ح) اگر $a\in\{b\}$ آن‌گاه $a=b$ و برعکس.

۶ جدول زیر را کامل کنید.

ارزش $(p\wedge q)$	ارزش $(p\Rightarrow q)$	ارزش q	ارزش p	گزارهٔ q	گزارهٔ p
د					عدد ۲ زوج است.
	ن			$۱ \nless ۲$	
ن					$۲\in\{۱,۲\}$
	د			عدد ۷ اوّل است.	

۷ جدول ارزش‌های هر یک از گزاره‌های زیر را رسم کنید.

الف) $p\wedge\sim q$
ب) $\sim p\wedge p$
پ) $\sim p\vee p$
ت) $(p\vee q)\wedge\sim p$
ث) $(p\vee q)\Leftrightarrow q$
ج) $\sim p\Leftrightarrow\sim q$

۸ با استفاده از جدول ارزش‌ها نشان دهید که :

الف) $p\Rightarrow p\equiv T$
ب) $p\vee F\equiv p$
پ) $p\wedge T\equiv p$
ت) $\sim(p\Rightarrow q)\equiv p\wedge\sim q$
ث) $p\wedge(q\vee p)\equiv p$
ج) $p\vee(q\wedge p)\equiv p$
چ) $p\Rightarrow(q\Rightarrow r)\equiv(p\wedge q)\Rightarrow r$
ح) $\sim(p\Leftrightarrow q)\equiv\sim p\Leftrightarrow q$

۹ ثابت کنید هرگاه n عددی صحیح و $n^۲$ مضرب ۳ باشد، آن‌گاه n نیز مضرب ۳ است.

۱۰ گزاره‌های زیر را با استفاده از نمادهای $\exists,\forall$ بنویسید و ارزش هر یک را با ذکر دلیل مشخص کنید.

الف) هر عدد طبیعی زوج یا فرد است.

ب) برای بعضی از مقادیر a در مجموعه اعداد حسابی داریم : $a^۲<۰$.

پ) همهٔ اعداد اوّل فردآند.

ت) عدد صحیح مثبتی وجود دارد مانند x به‌طوری که $۲x-۱>۵$

ث) حاصل جمع هر عدد حقیقی ناصفر با معکوسش، بزرگ تر یا مساوی ۲ است.

ج) به‌ازای بعضی از مقادیر حقیقی داریم $x^۳=x$.

۱۱ هرگاه $A=\{x\in\mathbb{Z}|۰<x\leq ۵\}$ دامنهٔ متغیر باشد، ارزش گزاره‌های سوری زیر را تعیین کنید.

الف) $\exists x\in A;x+۴=۱۰$
ب) $\forall x\in A;x+۲\leq ۹$
پ) $\exists x\in A;x+۳\leq ۴$
ت) $\forall x\in A;x+۱\geq ۶$

۱۲ ارزش گزاره‌های سوری زیر را تعیین کنید، سپس نقیض هر یک را بنویسید.

الف) $\forall x\in\mathbb{R};\dfrac{x^۲-۱}{x-۱}=x+۱$
ب) $\forall n\in\mathbb{N};(۲^n+۱)\in P$
پ) $\forall x\in(-\infty,۰);x-\dfrac{۱}{x}\leq -۲$
ت) $\exists y\in\mathbb{R};\dfrac{y-۳}{۵}=۰$