

در این درس به بررسی قوانین و خواص مربوط به اعمال اجتماع و اشتراک می‌پردازیم، شما در اعداد حقیقی و برای دو عمل جمع (+) و ضرب (×) قوانینی چون جابه‌جایی، شرکت‌پذیری و توزیع‌پذیری ضرب نسبت به جمع را می‌شناسید؛ یعنی می‌دانیم:

$$I) \forall a, b \in \mathbb{R} : a + b = b + a \quad \text{خاصیت جابه‌جایی}$$

$$II) \forall a, b, c \in \mathbb{R} : \begin{cases} a + (b + c) = (a + b) + c \\ a \times (b \times c) = (a \times b) \times c \end{cases} \quad \text{خاصیت شرکت‌پذیری}$$

$$III) \forall a, b, c \in \mathbb{R} : a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c) \quad \text{«×» نسبت به «+» خاصیت توزیع‌پذیری}$$

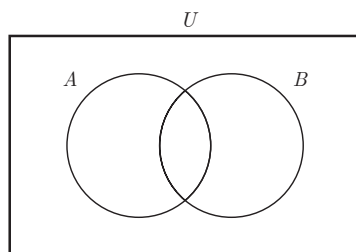
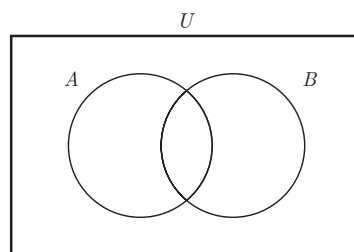
توجه دارید که عمل + نسبت به عمل × توزیع‌پذیر نیست، (با ذکر یک مثال نقض این مطلب را نشان دهید).

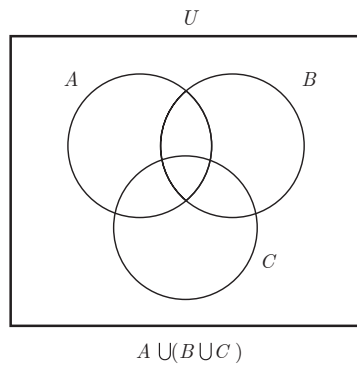
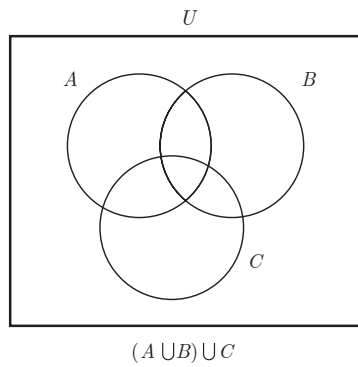
در مجموعه‌ها دو عمل \cup و \cap خواصی مشابه خواص فوق داشته و این خواص با توجه به خواصی که در گزاره‌ها برای دو ترکیب « \vee » و « \wedge » بیان شد قابل بررسی و اثبات می‌باشند. در فعالیت زیر، ابتدا توسط نمودار ون برقراری این خواص را مشاهده می‌کنید.

فعالیت

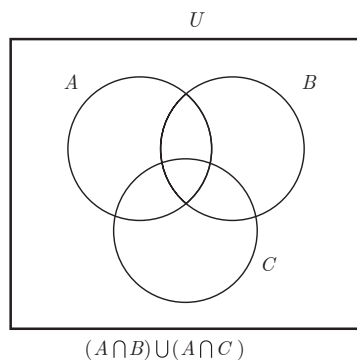
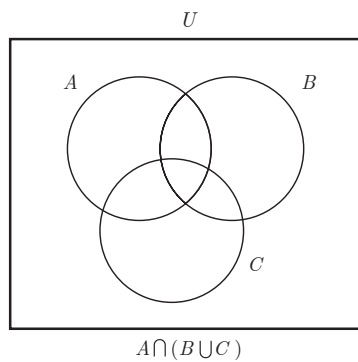
۱ در هر یک از حالت‌های زیر مجموعه‌های خواسته شده را هاشور بزنید. (برای هاشور زدن مانند حالت (ت) از دو رنگ استفاده کنید).

(الف)

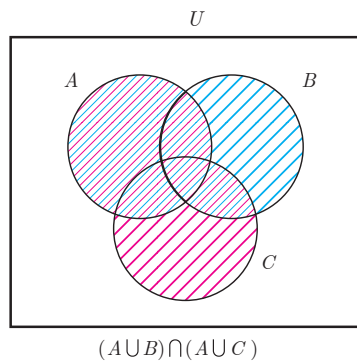
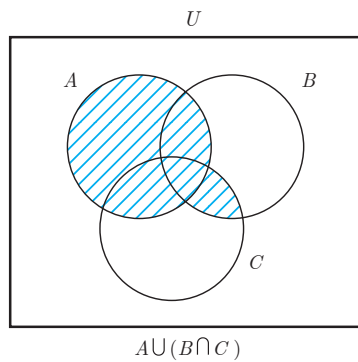
 $A \cup B$  $B \cup A$



(ب)



(پ)



(ت)

۲ با فرض اینکه $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ و $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{3, 4, 5\}$ و $C = \{1, 2, 5, 6\}$ در این صورت، درستی هر یک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $A \cap B = B \cap A$

ب) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

پ) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

یادآوری: برای اثبات تساوی بین دو مجموعه A و B می‌بایست ثابت کنیم: $B \subseteq A$ و $A \subseteq B$.

با توجه به تعریف اعمال اجتماع و اشتراک و خواص جابه‌جایی، شرکت‌پذیری و توزیع‌پذیری دو ترکیب فصلی و عطفی می‌خواهیم این خواص یا قوانین را برای « \cup » و « \cap » اثبات کنیم، شما این اثبات‌ها را کامل کنید:

۱ ثابت کنید، برای هر دو مجموعه دلخواه A و B از مجموعه مرجع U ، داریم: $A \cup B = B \cup A$

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{x \in U \mid x \in A \vee \dots\} && \text{تعریف اجتماع} \\ &= \{x \in U \mid x \in B \vee \dots\} && \text{جابه‌جایی « \vee »} \\ &= B \cup A && \text{تعریف اجتماع} \end{aligned}$$

۲ ثابت کنید، برای سه مجموعه دلخواه A, B, C از مجموعه مرجع U ، داریم:

$$\begin{aligned} A \cup (B \cup C) &= (A \cup B) \cup C \\ A \cup (B \cup C) &= \{x \in U \mid \dots \vee x \in (B \cup C)\} && \text{تعریف اجتماع} \\ &= \{x \in U \mid x \in A \vee (x \in B \vee \dots)\} && \text{تعریف اجتماع} \\ &= \{x \in U \mid (\dots \vee x \in B) \vee x \in C\} && \text{شرکت‌پذیری « \vee »} \\ &= \{x \in U \mid x \in (\dots) \vee x \in C\} && \text{تعریف اجتماع} \\ &= (A \cup B) \cup C && \text{تعریف اجتماع} \end{aligned}$$

۳ با استفاده از روش عضوگیری دلخواه، خاصیت توزیع‌پذیری « \cup » نسبت به « \cap » را ثابت کنید.

$$\begin{aligned} A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C) && \text{یعنی ثابت کنید:} \\ \forall x \in [A \cup (B \cap C)] &&& \\ \Rightarrow [x \in A \vee (x \in \dots)] &&& \text{تعریف اجتماع} \\ \Rightarrow [x \in A \vee (x \in B \wedge x \in \dots)] &&& \text{تعریف اشتراک} \\ \Rightarrow [(x \in A \vee \dots) \wedge (\dots \vee x \in C)] &&& \text{توزیع‌پذیری « \vee » نسبت به « \wedge »} \\ \Rightarrow [x \in \dots \wedge x \in \dots] &&& \text{تعریف « \cup »} \\ \Rightarrow x \in [(A \cup B) \cap \dots] &&& \text{تعریف اشتراک} \\ \Rightarrow A \cup (B \cap C) \subseteq \dots \end{aligned}$$

و به همین ترتیب ثابت می‌شود $(A \cup B) \cap (B \cup C) \subseteq \dots$ بنابراین، دو مجموعه با هم برابرند. (توجه داریم که از طرف دیگر، خاصیت توزیع‌پذیری اصطلاحاً همان فاکتورگیری است؛ یعنی رسیدن از سمت راست تساوی به سمت چپ تساوی به معنای فاکتورگیری از « $A \cup$ » است.)

تذکر: با توجه به تعریف متمم یک مجموعه و تعاریف اجتماع و اشتراک و مجموعه‌های مرجع و تهی تساوی‌های زیر برقرارند:

- ۱) $A \cup A' = U$
- ۲) $A \cap A' = \emptyset$
- ۳) $A \cup U = U$
- ۴) $A \cap U = A$

مثال ۱: با استفاده از خواص فوق ثابت کنید: (U مجموعه مرجع فرض شده است).

الف) $(A \cup B) \cap (B' \cup A) = A$ ب) $(C \cap A) \cup (A' \cap C) = C$

پ) $A \cup (B \cup A') = U$ ت) $A - B = A \cap B'$

الف) $(A \cup B) \cap (B' \cup A) = (A \cup B) \cap (A \cup B')$ جابه جایی
 $= A \cup (B \cap B')$ خاصیت توزیع پذیری (به اصطلاح فاکتورگیری)
 $= A \cup \emptyset$
 $= A$

ب) $(C \cap A) \cup (A' \cap C) = (C \cap A) \cup (C \cap A')$ جابه جایی
 $= C \cap (A \cup A') = C \cap U = C$ توزیع پذیری

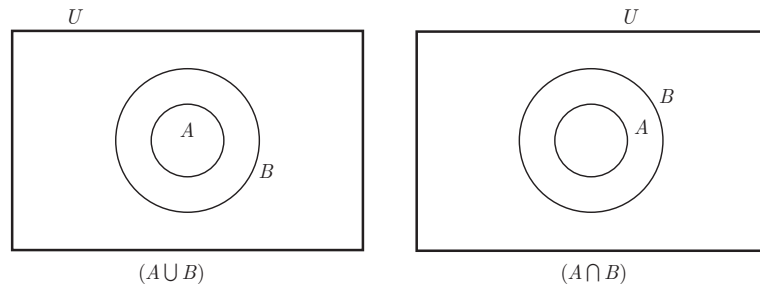
پ) $A \cup (B \cup A') = A \cup (A' \cup B)$ جابه جایی
 $= (A \cup A') \cup B = U \cup B = U$ شرکت پذیری

ت) $A - B = \{x \in U \mid x \in A \wedge x \notin B\} = \{x \in U \mid x \in A \wedge x \in B'\}$ تعریف متمم
 $= A \cap B'$ تعریف اشتراک

قضیه: برای هر دو مجموعه دلخواه از مجموعه مرجع U ، داریم:

الف) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$ ب) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$

برهان: قبل از اثبات دقیق، ابتدا در نمودارهای زیر $(A \cup B)$ و $(A \cap B)$ را هاشور بزنید. همان طور که ملاحظه می کنید هر یک از حالت های الف و ب، قضیه هایی دو شرطی بوده و برای اثبات هر یک از آنها باید



دو قضیه شرطی را ثابت کنیم.

الف) فرض کنیم: $A \subseteq B$ و ثابت می کنیم: $A \cup B = B$ برای این منظور باید ثابت کنیم: $B \subseteq (A \cup B)$ و $(A \cup B) \subseteq B$. رابطه $B \subseteq (A \cup B)$ (۱) با توجه به تعریف اجتماع بدیهی است؛ بنابراین، به اثبات رابطه $(A \cup B) \subseteq B$ می پردازیم:

$B \subseteq B$ می دانیم $\Rightarrow (A \cup B) \subseteq (B \cup B) \Rightarrow (A \cup B) \subseteq B$ (۲)
 طبق فرض $A \subseteq B$

(با توجه به (۱) و (۲) تساوی $A \cup B = B$ اثبات شده و حکم به دست می‌آید.)

$$(۱) \text{ و } (۲) \Rightarrow (A \cup B) = B$$

حال فرض کنیم $A \cup B = B$ ، ثابت می‌کنیم $A \subseteq B$ ؛

$$A \subseteq (A \cup B) \xrightarrow[\text{فرض}]{A \cup B = B} A \subseteq B$$

(ب) ابتدا فرض کنیم $A \subseteq B$ ، تساوی $A \cap B = A$ را اثبات می‌کنیم:

$$(A \cap B) \subseteq A \quad (۱)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{می‌دانیم: } A \subseteq A \\ \text{طبق فرض: } A \subseteq B \end{array} \right. \Rightarrow (A \cap A) \subseteq (A \cap B) \Rightarrow A \subseteq (A \cap B) \quad (۲)$$

(با توجه به (۱) و (۲) تساوی $A \cap B = A$ ، به دست می‌آید.)

$$(۱) \text{ و } (۲) \Rightarrow (A \cap B) = A$$

حال فرض می‌کنیم: $A \cap B = A$ ، ثابت می‌کنیم $A \subseteq B$ ؛

$$(A \cap B) \subseteq B \xrightarrow[\text{فرض}]{A \cap B = A} A \subseteq B$$

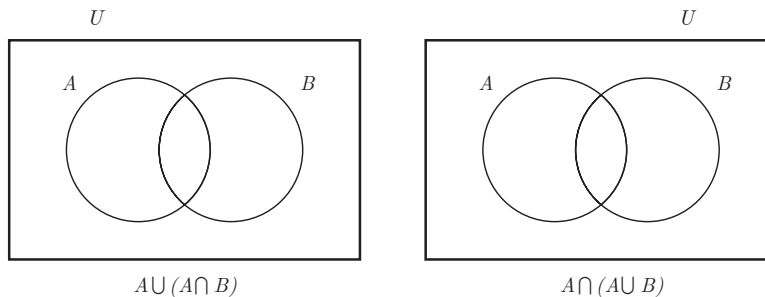
کار در کلاس

(قوانین جذب یا همپوشانی) اگر A و B دو مجموعه دلخواه از مجموعه مرجع U باشند، می‌خواهیم تساوی‌های زیر را که به قوانین جذب معروف‌اند، با استفاده از قضیه قبل و تعاریف اجتماع و اشتراک اثبات کنیم:

الف) $A \cup (A \cap B) = A$

ب) $A \cap (A \cup B) = A$

ابتدا با استفاده از نمودار ون و هاشور زدن، درستی قوانین جذب را نشان دهید:



در قضیه قبل ملاحظه کردید که اگر $C \subseteq D$ در این صورت $(C \cup D) = D$ و $(C \cap D) = C$ است.

$$(A \cap B) \subseteq A \xrightarrow{\text{قضیه}} A \cup (\dots) = \dots$$

$$A \subseteq (A \cup B) \xrightarrow{\text{قضیه}} A \cap (\dots) = \dots$$

روش دیگری برای اثبات قوانین جذب نیز وجود دارد که شما با پرکردن جاهای خالی اثبات را کامل کنید.

الف) $A \cup (A \cap B) = (A \cap U) \cup (A \cap B)$

$$= A \cap (\dots\dots)$$

توزیع پذیری

$$= A \cap \dots\dots = A$$

ب) $A \cap (A \cup B) = (A \cup \dots) \cap (A \cup B)$

$$= A \cup (\dots\dots)$$

توزیع پذیری

$$= A \cup \dots\dots = A$$

مثال : عبارت‌های زیر را ساده کنید :

الف) $(A \cap B) \cup ((B \cup C) \cap [(B \cup A) \cap B])$

$$(A \cap B) \cup ((B \cup C) \cap \underbrace{[(B \cup A) \cap B]}_{\text{جذب}}) = (A \cap B) \cup \underbrace{[(B \cup C) \cap \dots]}_{\text{جذب}}$$

$$= \underbrace{(A \cap B) \cup \dots}_{\text{جذب}} = \dots\dots$$

ب) $(A \cup B') \cap [(B \cap C) \cup (B' \cup A)]$

$$(A \cup B') \cap [(B \cap C) \cup (B' \cup A)] = \underbrace{(A \cup B')}_E \cap \underbrace{[(B \cap C) \cup (A \cup B')]}_{D \cup E}$$

جابه جایی

$$= \underbrace{(A \cup B')}_E$$

جذب

مثال : درستی هر یک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $A - B = B' - A'$

ب) $(X \subseteq A) \wedge (X \subseteq A') \Rightarrow X = \emptyset$

پ) $(A - B) \cap (B - A) = \emptyset$

ت) $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$

ث) $(A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A) = A \cup B$

حل :

الف) $A - B = A \cap B' = B' \cap A = B' - A'$

ب) $\begin{cases} X \subseteq A \\ X \subseteq A' \end{cases} \Rightarrow (X \cap X) \subseteq (A \cap A') \Rightarrow X \subseteq \dots\dots$ (۱)

از طرفی می‌دانیم $\emptyset \subseteq X$ و بنابراین : $X = \emptyset$

پ) $(A - B) \cap (B - A) = (A \cap B') \cap (B \cap A')$

$$= [(A \cap B') \cap B] \cap A'$$

شرکت پذیری

$$= [A \cap (B' \cap B)] \cap A'$$

شرکت پذیری

$$= (A \cap \emptyset) \cap A'$$

تعریف متمم

$$= \emptyset \cap A' = \emptyset$$

ت) $(A \cup B) - C = (A \cup B) \cap C'$

$$= (A \cap C') \cup (B \cap C')$$

توزیع پذیری « \cap » نسبت به « \cup »

$$= (A - C) \cup (B - C)$$

تبدیل اشتراک به تفاضل

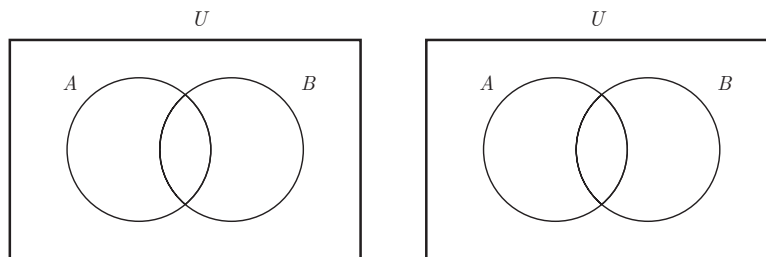
$$\begin{aligned}
& \text{ث) } (A-B) \cup (A \cap B) \cup (B-A) \\
& = [(A-B) \cup (A \cap B)] \cup (B-A) \\
& = [(A \cap B') \cup (A \cap B)] \cup (B \cap A') \\
& = [A \cap (\dots \cup \dots)] \cup (B \cap A') \\
& = (A \cap U) \cup (B \cap A') \\
& = A \cup (B \cap A') \\
& = (A \cup \dots) \dots (A \cup \dots) \\
& = (A \cup B) \cap U \\
& = A \cup B
\end{aligned}$$

شرکت پذیری اجتماع
تبدیل تفاضل به اشتراک
توزیع پذیری
تعریف متمم
تعریف مرجع
توزیع پذیری
تعریف متمم
تعریف مرجع

قوانین دمورگان

فعالیت

۱ فرض کنیم A و B دو مجموعه از مجموعه مرجع U باشند، روی شکل سمت چپ، $(A \cup B)'$ و روی نمودار سمت راست، $(A' \cap B')$ را هاشور بزنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟



۲ اگر فرض کنیم: $U = \{1, 2, \dots, 10\}$ و $A = \{2, 3, 5, 8\}$ و $B = \{3, 4, 6, 8\}$ هر یک از مجموعه‌های $(A \cap B)'$ و $(A' \cup B)'$ را تشکیل داده و با هم مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟
تساوی‌های زیر را که به قوانین دمورگان معروف‌اند برای هر دو مجموعه دلخواه از مجموعه مرجع U برقرارند:

$$\begin{cases} \text{الف) } (A \cup B)' = (A' \cap B') \\ \text{ب) } (A \cap B)' = (A' \cup B') \end{cases}$$

با استفاده از روش عضوگیری دلخواه و تعریف تساوی بین دو مجموعه، تساوی $(A \cup B)' = (A' \cap B')$ را اثبات کنید.
(باید ثابت کنید، $(A \cup B)' \subseteq (A' \cap B')$ و $(A' \cap B') \subseteq (A \cup B)'$)

$$\begin{aligned}
\forall x: [x \in (A \cup B)' \Rightarrow x \notin (A \cup B) \Rightarrow \dots \wedge x \notin B \\
\Rightarrow x \in A' \wedge \dots \Rightarrow x \in (A' \cap B')] \Rightarrow (A \cup B)' \subseteq (A' \cap B')
\end{aligned}$$

روابط صفحه قبل برگشت پذیرند، شما به طریق مشابه نشان دهید که $(A' \cap B') \subseteq (A \cup B)'$ که در این صورت، تساوی الف اثبات می‌شود.

کار در کلاس

با استفاده از قوانین و خواص (جبر مجموعه‌ها) درستی تساوی‌های زیر را بررسی کنید:

الف) $(A-B)' = (A' \cup B)$ ب) $(A-B) - C = (A-C) - B$

پ) $A - (B \cap C) = (A-B) \cup (A-C)$

مثال: با استفاده از جبر مجموعه‌ها درستی هر یک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $A - (B \cup C) = (A-B) \cap (A-C)$ ب) $A \cap (B-C) = (A \cap B) - (A \cap C)$

پ) $A - (B-C) = (A-B) - C$ ت) اگر $A \cup B = (A \cap B)$ آنگاه $A=B$

حل:

$(A-B) \cap (A-C) = (A \cap B') \cap (A \cap C')$	تبدیل تفاضل به اشتراک
$= [(A \cap B') \cap A] \cap C'$	شرکت پذیری
$= [A \cap (A \cap B')] \cap C'$	جابه‌جایی
$= [(A \cap A) \cap B'] \cap C'$
$= (A \cap B') \cap C'$	$A \cap A = A$
$= A \cap (B' \cap C')$	شرکت پذیری
$= A - (B' \cap C)'$	تبدیل اشتراک به تفاضل
$= A - (B \cup C)$	قانون

$(A \cap B) - (A \cap C) = (A \cap B) \cap (A \cap C)'$	تبدیل تفاضل به اشتراک
$= (A \cap B) \cap (A' \cup C')$	قانون دمورگان
$= [(A \cap B) \cap A'] \cup [(A \cap B) \cap C']$	توزیع پذیری
$= [(A \cap A') \cap B] \cup [A \cap (B \cap C)']$	قوانین جابه‌جایی و شرکت پذیری
$= (\emptyset \cap B) \cup [A \cap (B-C)']$	تبدیل اشتراک به تفاضل و تعریف متمم
$= \emptyset \cup [A \cap (B-C)']$	
$= A \cap (B-C)$	

پ) با کمی تأمل بی‌می‌بریم که برای رسیدن از یک طرف تساوی به طرف دیگر، دچار مشکل می‌شویم و این کار انجام نمی‌شود، ولی برای اینکه ادعا کنیم این تساوی همواره برقرار نیست، کافی است مثال نقض بزنیم:

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ و $B = \{3, 4, 5\}$ و $C = \{5, 6, 7\}$ و $U = \{1, 2, \dots, 10\}$

$A - (B - C) = \{1, 2, 3, 4, 5\} - \{3, 4\} = \{1, 2, 5\}$

$(A - B) - C = \{1, 2\} - \{5, 6, 7\} = \dots\dots\dots$

ت) وقتی می‌نویسیم: $C=D$ ، یعنی C و D یک مجموعه‌اند، با دو نام و لذا وقتی بین مجموعه‌ها تساوی به کار می‌بریم، می‌توان نوشت طرفین تساوی را با هر مجموعه‌ای اجتماع، یا اشتراک بگیریم، یعنی از اینکه $C=D$ نتیجه می‌شود: $A \cup C = A \cup D$ و $A \cap C = A \cap D$

$$A \cup B = A \cap B \Rightarrow A \cap (A \cup B) = A \cap (A \cap B)$$

$$\xrightarrow[\text{قانون جذب و تعریف اشتراک}]{\text{قضیه}} A = (A \cap B) \xrightarrow{\text{قضیه}} A \subseteq B \quad (1)$$

$$(A \cup B) = (A \cap B) \Rightarrow A \cup (A \cup B) = \dots \cup (A \cap B)$$

$$\xrightarrow[\text{قانون جذب و تعریف اجتماع}]{\text{قضیه}} (A \cup B) = A \xrightarrow{\text{قضیه}} \dots \subseteq \dots \quad (2)$$

$$(1) \text{ و } (2) \Rightarrow A = B$$

روش دوم: درباره روش زیر که به اختصار نوشته شده است، با هم کلاسی خود گفت‌وگو کنید و توضیح دهید:

$$A \subseteq (A \cup B) = (A \cap B) \subseteq B \Rightarrow A \subseteq B$$

و به طریق مشابه ثابت می‌شود: $B \subseteq A$ و نتیجه می‌شود: $A=B$.

کار در کلاس

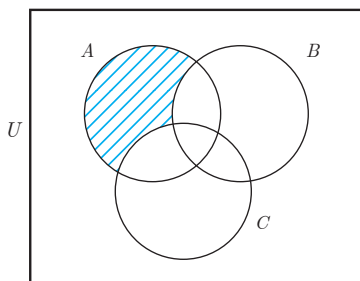
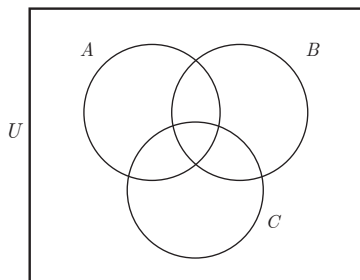
۱ اگر $A = \{۱^\circ \text{ و } ۲^\circ \text{ و } \dots \text{ و } ۱۵^\circ\}$ و $B = \{۵^\circ \text{ و } ۶^\circ \text{ و } \dots \text{ و } ۱۵^\circ\}$ و $U = \{۱^\circ \text{ و } ۲^\circ \text{ و } \dots \text{ و } ۱۵^\circ\}$ حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف) $(A \cap B') \cup (A \cap B)$

ب) $(A-B) \cup ((A \cap B') \cap [(B-A) \cup A'])$

(راهنمایی: ابتدا با استفاده از جبر مجموعه‌ها عبارت‌ها را ساده کنید.)

۲ با توجه به نمودارون که در روبه‌رو رسم شده است، مانند نمونه برای هر حالت و به صورت جداگانه بخشی را که به صورت توصیفی مشخص کرده‌ایم، هاشور بزنید.



الف) اعضای که فقط در A باشند.

- (ب) اعضای که فقط در یک مجموعه اند.
 (پ) اعضای که در A و B باشند، ولی در C نباشند.
 (ت) اعضای که در A یا B باشند، ولی در C نباشند.

ضرب دکارتی بین دو مجموعه

قبلاً با تعریف زوج مرتب آشنا شده‌اید و می‌دانید که «هر دو شیئی مانند x و y ، تشکیل یک زوج می‌دهند که اگر برای آنها ترتیب قائل باشیم، به آن یک زوج مرتب گفته می‌شود و با نماد (x, y) نشان می‌دهیم» و البته می‌دانیم که $(x, y) = (z, t)$ اگر و تنها اگر $x=z$ و $y=t$.

عمل ضرب دکارتی بین دو مجموعه A و B این امکان را برای ما فراهم می‌سازد تا مجموعه جدیدی بسازیم که اعضای آن هر کدام یک زوج مرتب باشند و هر یک از این زوج‌های مرتب از اعضای A و B ساخته می‌شوند. بنابراین، مجموعه حاصل دارای اعضای از جنس زوج مرتب بوده و به اعضای A یا B شبیه نبوده و فقط اعضای A و B در ساختن آنها نقش دارند.

تعریف عمل ضرب دکارتی بین دو مجموعه: اگر A و B دو مجموعه دلخواه باشند، $A \times B$ مجموعه‌ای است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A \wedge y \in B\}$$

در تعریف قبل توجه دارید که در هر (x, y) متعلق به $A \times B$ ، همواره مؤلفه یا مختص اول، یعنی x باید از مجموعه A و متناظراً مؤلفه دوم، یعنی y باید از مجموعه B باشد.

مثال: اگر $A = \{2, 4, 6\}$ و $B = \{4, 5\}$ ، در این صورت مجموعه‌های $A \times B$ و $B \times A$ را تشکیل دهید و با هم مقایسه کنید.

$$A \times B = \{(2, 4), (2, 5), \dots, \dots, (6, 4), \dots, \dots\}$$

$$B \times A = \{(4, 2), (4, 4), \dots, \dots, (5, 2), \dots, \dots\}$$

واضح است که $A \times B \neq B \times A$ (کافی است فقط در یک عضو با هم فرق داشته باشند؛ مثلاً $(2, 4) \neq (4, 2)$ و $(2, 4) \in A \times B$ و $(2, 4) \notin B \times A$).

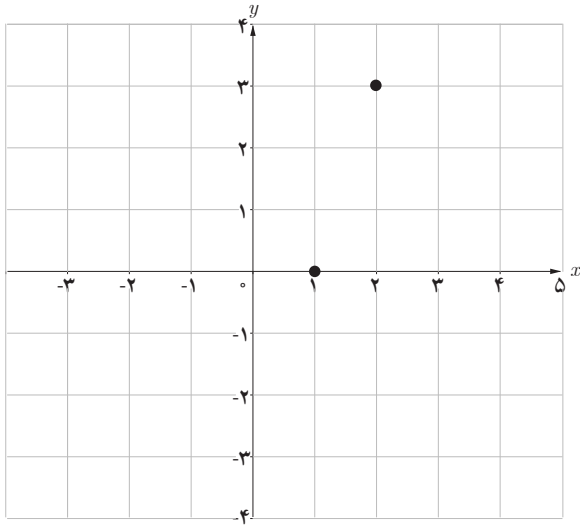
کاردرکلاس

در مثال قبل دیدید که در مجموعه $A \times B$ هر عضو A دو زوج مرتب تولید کرد و در کل شش زوج مرتب به وجود آمد، حال اگر $n(A) = m$ و $n(B) = k$ با استفاده از تعریف عمل ضرب دکارتی و حاصل ضرب، نشان دهید، $n(A \times B) = mk$

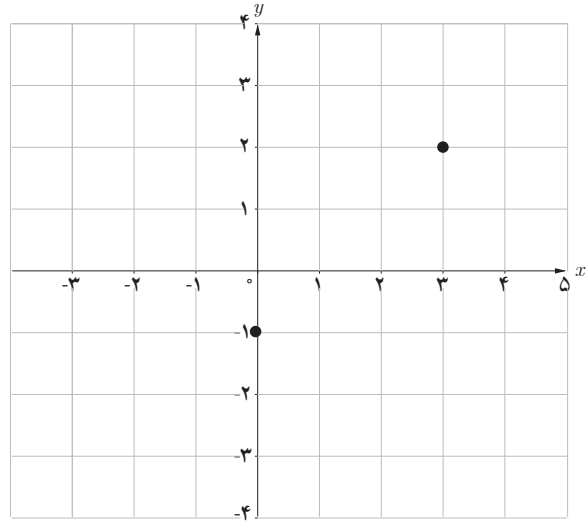
۱ اگر $A = \{-2, -1, 1\}$ و $B = \{0, 3, 4\}$ ، ابتدا مجموعه‌های $(A \times B)$ و $(B \times A)$ را تشکیل دهید و سپس نمودار مختصاتی هر یک از این مجموعه‌ها را رسم کنید. (نمودارها را کامل کنید.)

$$A \times B =$$

$$B \times A =$$



نمودار مختصاتی $A \times B$

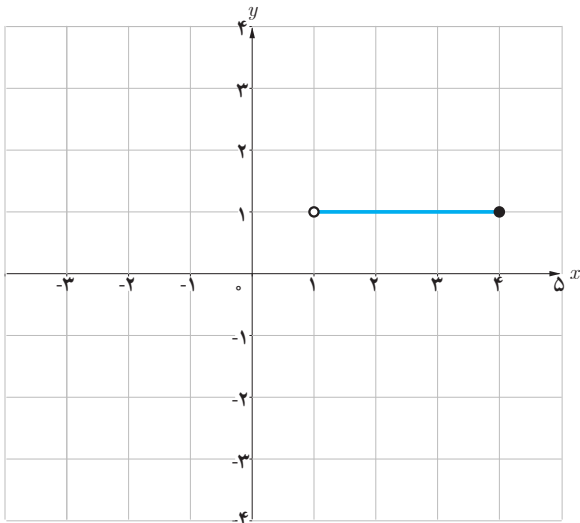


نمودار مختصاتی $B \times A$

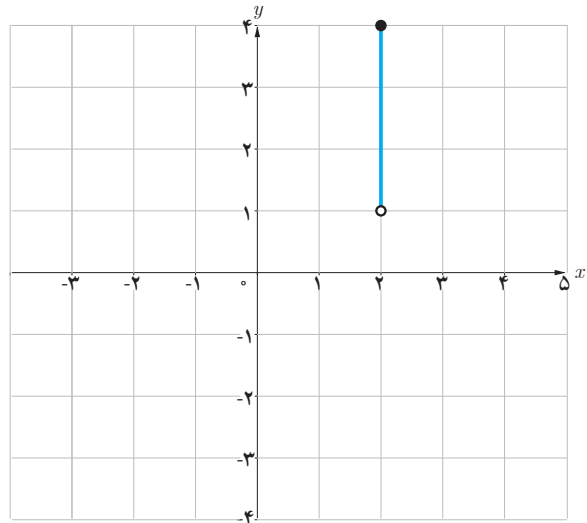
۲ اگر فرض کنیم: $A = (1, 4]$ و $B = \{1, 2\}$ در این صورت، نمودارهای مربوط به $A \times B$ و $B \times A$ که بخشی از آنها رسم شده است را تکمیل کنید.

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in (1, 4] \wedge y \in B\}$$

$$B \times A = \{(x, y) \mid (x = 1 \vee x = 2) \wedge 1 < y \leq 4\}$$



نمودار $A \times B$

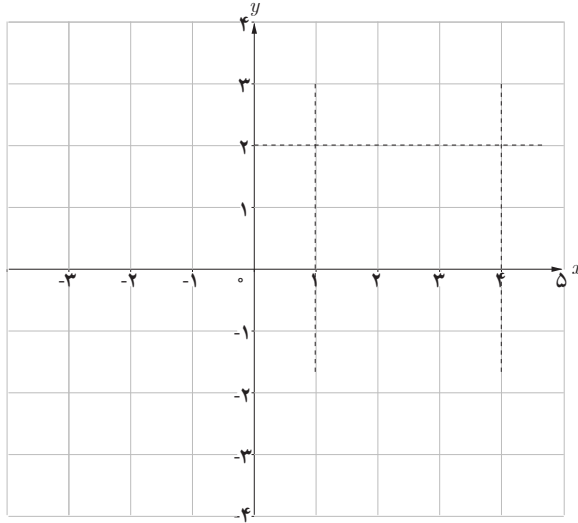


نمودار $B \times A$

۳ اگر فرض کنیم: $A = \mathbb{R}$ و $B = \{0, 1, 2\}$ نمودار $A \times B$ را رسم کنید.

۴ در صورتی که $A = [1, 4]$ و $B = [0, 2]$ در این صورت، نمودار $(A \times B)$ را که بخشی از صفحه مختصات دکارتی است، هاشور بزنید.

$$A \times B = \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq 4 \wedge 0 \leq y \leq 2\}$$



۵ در صورتی که فرض کنیم: $A = \mathbb{R}$ و $B = \mathbb{R}$ در این صورت، حاصل ضرب $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = A \times B$ را چگونه تعبیر می کنید؟

کار در کلاسی

اگر A و B دو مجموعه دلخواه باشند، در این صورت:

الف) $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$

ب) $A \times B = B \times A \Rightarrow A = \emptyset \vee B = \emptyset \vee A = B$

اثبات الف) از برهان خلف استفاده می کنیم:

فرض کنیم: $A \times \emptyset \neq \emptyset$ (فرض خلف) در این صورت، حداقل یک عضو مانند (x, y) در باید وجود داشته باشد که در این صورت:

$$(x, y) \in A \times \emptyset \xrightarrow{\text{تعریف ضرب دکارتی}} \dots \wedge \underbrace{y \in \emptyset}_{\text{تناقض}}$$

و چون $y \in \emptyset$ یک تناقض است (مجموعه \emptyset فاقد عضو است) پس فرض خلف، باطل شده است و حکم برقرار می باشد، به طریق مشابه ثابت کنید که $\emptyset \times A = \emptyset$.

اثبات ب) اگر $A = \emptyset$ یا $B = \emptyset$ که حکم اثبات می‌شود.
 حال فرض کنیم: $A \neq \emptyset$ و $B \neq \emptyset$ که در این صورت، به روش عضوگیری و با توجه به تعریف ضرب دکارتی و فرض $A = B$ ثابت می‌کنیم $A \times B = B \times A$.

$$A \neq \emptyset, B \neq \emptyset \Rightarrow \exists x; x \in A \wedge \exists \dots \xrightarrow{\text{تعریف ضرب دکارتی}} \exists (x, y); (x, y) \in A \times B$$

$$\xrightarrow{A \times B = B \times A} (x, y) \in \dots \xrightarrow{\text{تعریف ضرب دکارتی}} x \in B \wedge \dots \Rightarrow \dots \wedge B \subseteq A$$

$$\Rightarrow A = B$$

(x ای که از A فرض کردیم ثابت شد در B است و y ای که از B فرض کردیم ثابت شد در A است.)

تمرین

۱ با استفاده از تعریف اشتراک، اجتماع و خواص جابه‌جایی، شرکت‌پذیری و توزیع‌پذیری برای ترکیب عطفی و فصلی در گزاره‌ها، هر یک از تساوی‌های زیر را ثابت کنید.

الف) $A \cap B = B \cap A$ ب) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
 پ) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

۲ درستی هر یک از تساوی‌های زیر را ثابت کنید.

الف) $(A \cap B) \cup (B' \cap A) = A$ ب) $(A' \cap B') \cap A = \emptyset$
 پ) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap (A \cap C)$ ت) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup (A \cup C)$

۳ هر یک از عبارت‌های زیر را ساده کنید:

الف) $(A' \cap B) \cup [(B \cap A) - B'] \cap (B \cup A)$ ب) $(A \cup B) - B$
 پ) $[(A \cup B) - A] \cup (A \cap B)$

۴ درستی هر یک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $(A \subseteq X) \wedge (A' \subseteq X) \Rightarrow X = U$ ب) $(A - B) \cup (A \cap B) = A$
 پ) $(A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C)$ ت) $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$
 ث) $(A \cup B) \cap (A' \cap B') = \emptyset$ ج) $[(A \cup B) = (A \cup C) \wedge (A \cap B) = (A \cap C)] \Rightarrow B = C$

۵ اگر $A = \{y+2, 5, z\}$ و $B = \{x+1, 4, -2\}$ در این صورت، با فرض $A \times B = B \times A$ بیشترین مقدار برای $(x+y+z)$ را بیابید.

۶ با توجه به مجموعه‌های داده شده، نمودار هر یک از حاصل‌ضرب‌های $A \times B$ و $B \times A$ را رسم کنید.

الف) $A = \{2, 3\}, B = \{2, 3, 4\}$ ب) $A = \{3, 4\}, B = \{1, 5\}$
 پ) $A = [2, 6], B = [3, 8]$ ت) $A = \mathbb{N}, B = [1, 4]$
 ث) $A = \mathbb{R}, B = \{2, 3\}$