فصل اوّل

دایــره

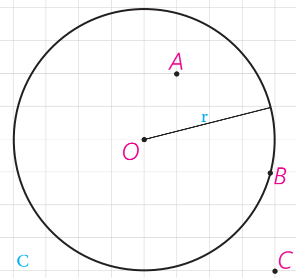
هندسه در ساخت استحکامات دفاعی، قلعه‌ها و برج و باروها از دیرباز کاربردهای بسیاری داشته است. یک قضیهٔ بنیادی در هندسه موسوم به «قضیهٔ هم‌پیرامونی» می‌گوید در بین همهٔ شکل‌های هندسی بسته با محیط ثابت دایره دارای بیشترین مساحت است. این موضوع در طراحی دایره‌ای شکل قلعه‌ها اهمیت بسیاری دارد. قلعهٔ فلک‌الافلاک (شاپور خواست) که از دورهٔ ساسانیان در شهرستان خرم‌آباد به‌جای مانده است نمونهٔ گویایی از همین کاربردهاست.

درس اوّل

مفاهیم اولیه و زاویه‌ها در دایره

دایره یکی از شکل‌های مهم در هندسه است که در پایه‌های قبل با تعریف و برخی از ویژگی‌های آن آشنا شده‌اید. در ادامه با استفاده از شکل دایره، برخی موارد یادآوری شده‌است که از قبل با آنها آشنایی دارید.

همان‌طور که می‌دانید تمام نقاطی که روی دایره واقع‌اند از مرکز دایره به یک فاصلهٔ ثابت (اندازهٔ شعاع دایره) هستند. معمولاً دایرهٔ C به مرکز O و شعاع r را به‌صورت C(O,r) نمایش می‌دهیم. با توجه به شکل دایره به سادگی می‌توان نشان داد که :

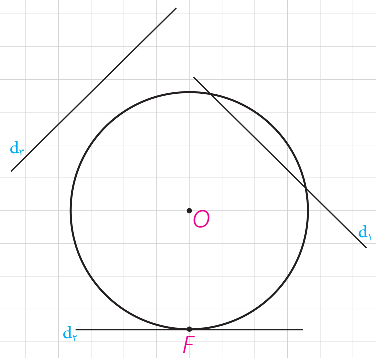


الف) اگر نقطه‌ای مانند B روی دایره C(O,r) باشد، فاصله آن تا مرکز دایره .... شعاع دایره است.

ب) اگر نقطه‌ای مانند C بیرون دایره C(O,r) باشد، فاصله آن تا مرکز دایره .... شعاع دایره است.

پ) اگر نقطه‌ای مانند A درون دایره C(O,r) باشد، فاصله آن تا مرکز دایره .... شعاع دایره است.

اوضاع نسبی خط و دایره

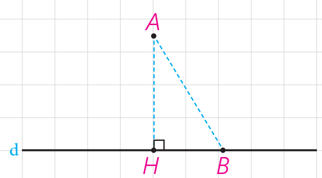


در پایه‌های قبل با اوضاع نسبی خط و دایره تا حدودی آشنا شدید و دیدید که یک خط و یک دایره می‌توانند یک یا دو نقطهٔ اشتراک داشته، و یا هیچ نقطهٔ اشتراکی نداشته باشند.

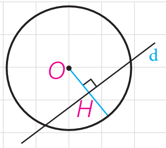
در حالتی که خط و دایره تنها در یک نقطه مشترک باشند، اصطلاحاً گفته می‌شود خط بر **دایره مماس** است و در حالتی که خط و دایره دو نقطهٔ اشتراک داشته باشند، خط و دایره را **متقاطع** می‌نامند. در این حالت خط را نسبت به دایره **قاطع** می‌نامیم.

یادآوری

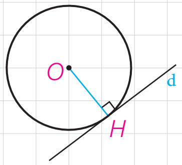
اگر خط d و نقطهٔ A غیرواقع بر d داده شده، و نقطهٔ H پای عمودی باشد که از A به d رسم می‌شود، اندازهٔ پاره‌خط AH همان فاصله نقطه A از خط d است و فاصلهٔ نقطهٔ A از دیگر نقاط خط d از این مقدار بزرگ‌تر است (AB > AH).



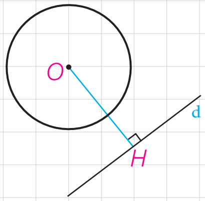
اگر d یک خط و C(O,r) یک دایره و نقطهٔ H پای عمودی باشد که از نقطهٔ O به خط d رسم می‌شود، موارد زیر را کامل کنید.



الف) اگر فاصلهٔ خط d از مرکز دایره از شعاع کمتر باشد $(OH < r)$، خط و دایره .... نقطهٔ اشتراک دارند؛ یعنی متقاطع‌اند



ب) اگر فاصلهٔ خط از مرکز دایره با شعاع برابر باشد $(OH = r)$، خط و دایره .... نقطهٔ اشتراک دارند؛ یعنی ....



پ) اگر فاصلهٔ خط از مرکز دایره از شعاع بزرگ‌تر باشد $(OH > r)$، خط و دایره ....

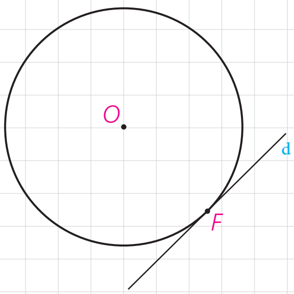
فعالیت

۱ــ فرض کنیم خط d بر دایرهٔ C در نقطهٔ F مماس است.

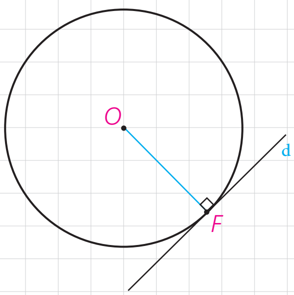
الف) نزدیک‌ترین نقطهٔ خط d به نقطهٔ O کدام است؟ چرا؟

ب) از O به d عمود کنید. این خط عمود، خط d را در کدام نقطه قطع می‌کند؟ چرا؟

پ) نتیجه : اگر F نقطه‌ای روی دایره باشد، شعاع OF و خط مماس بر دایره در نقطهٔ F ....



۲ــ خط d در نقطهٔ F به شعاع OF عمود است. با تعیین وضعیت همهٔ نقاط خط d نسبت به دایرهٔ C نشان دهید این خط با دایره فقط یک نقطهٔ تماس دارد و بنابراین بر دایره مماس است.

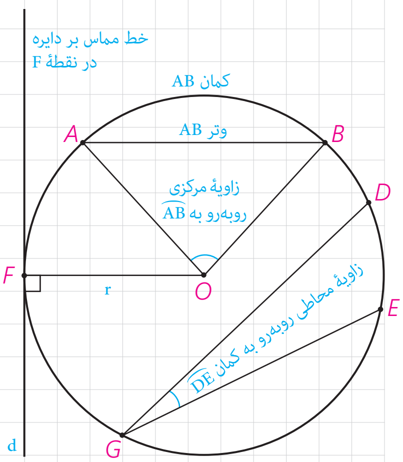


۳ــ با توجه به قسمت‌های ۱ و ۲ اگر نقطه‌ای مانند F روی دایره داده شده باشد، چگونه می‌توانید خطِ مماس بر دایره را در نقطهٔ F رسم کنید؟

بنابراین :

یک خط و یک دایره بر هم مماس‌اند اگر و تنها اگر این خط در نقطهٔ تماس با دایره بر شعاع آن نقطه عمود باشد.

زوایای مرکزی، محاطی و ظلی



با تعاریف زوایای مرکزی و محاطی و کمان یک دایره در پایه‌های قبل آشنا شده‌اید. در اینجا به یادآوری برخی مفاهیم می‌پردازیم.

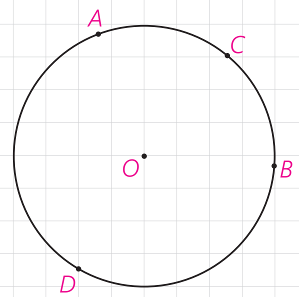
۱ــ **شعاع دایره** : پاره‌خطی که یک سر آن مرکز دایره و سر دیگر آن نقطه‌ای روی دایره باشد.

۲ــ **وتر دایره** : پاره‌خطی که دوسر آن روی دایره باشد.

۳ــ **قطر دایره** : وتری از دایره که از مرکز دایره می‌گذرد.

۴ــ **زاویهٔ مرکزی** : زاویه‌ای است که رأس آن بر مرکز دایره واقع باشد.

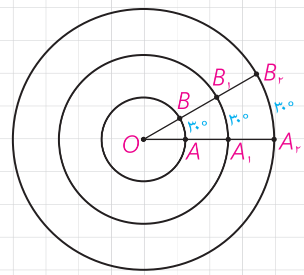
۵ــ **زاویهٔ محاطی** : زاویه‌ای است که رأس آن روی دایره و اضلاع آن شامل دو وتر از دایره باشند.



۶ــ **کمان** : کمان دایره شامل دو نقطه روی دایره و تمام نقاط بین آن دو نقطه است؛ به این ترتیب هر دو نقطه از دایره مانند A و B، دو کمان $\overset{\frown}{AB}$ را روی دایره مشخص می‌کنند. برای مشخص کردن آنها می‌توان از نقطه‌ای دیگر روی هر کمان استفاده کرد؛ مثلاً در شکل مقابل نقاط A و B دو کمان $\overset{\frown}{ACB}$ و $\overset{\frown}{ADB}$ را مشخص می‌کنند. معمولاً منظور از $\overset{\frown}{AB}$ کمان کوچک‌ترِ مشخص شده توسط A و B است.

۷ــ **اندازهٔ کمان**، همان اندازهٔ زاویهٔ مرکزی مقابل به آن کمان تعریف می‌شود و واحد آن درجه است.

۸ــ با توجه به شکل به سادگی دیده می‌شود که کمان‌های دایره‌های مختلف می‌توانند اندازه‌های برابر و طول‌های نابرابر داشته باشند.

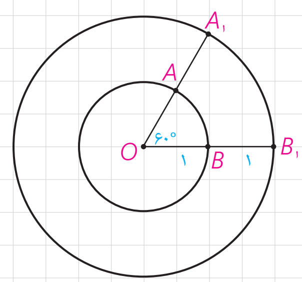


کاردرکلاس

۱ــ با توجه به اینکه محیط دایره یک کمان به اندازه °۳۶۰ است، خواهیم داشت :

$$\frac{\text{طول کمان } AB}{\text{محیط دایره}} = \frac{\text{اندازه کمان } AB}{360}$$

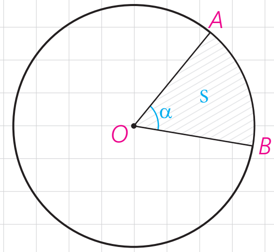
۲ــ با توجه به شکل، اندازه کمان‌های زیر را بنویسید.



طول $\overset{\frown}{AB}$ = ــــــ $\overset{\frown}{AB}$ = ــــــ°

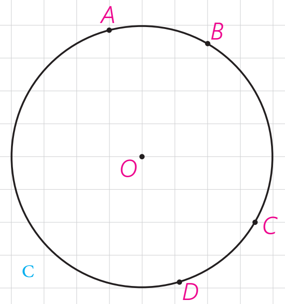
طول $\overset{\frown}{A_1B_1}$ = ــــــ $\overset{\frown}{A_1B_1}$ = ــــــ°

۳ــ ناحیه‌ای از درون و روی دایره را، که به دو شعاع دایره و آن دایره محدود است یک قطاع دایره می‌نامند. اگر زاویهٔ مرکزی قطاعی از دایرهٔ C(O,R) برحسب درجه مساوی α باشد، نشان دهید طول کمان AB برابر است با : $L = \frac{\pi R}{180}\alpha$ و مساحت قطاع برابر است با : $S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360}$



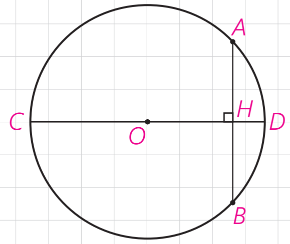
فعالیت

۱ــ فرض کنید اندازه‌های کمان‌های AB و CD از دایرۀ C(O,r) باهم برابرند. با تشکیل مثلث‌های AOB و COD نشان دهید وترهای AB و CD نیز باهم برابرند.



۲ــ فرض کنید دو وتر AB و CD از یک دایره باهم برابرند. ثابت کنید اندازه‌های کمان‌های AB و CD نیز باهم برابرند.

۳ــ وتر AB و قطری از دایره، که بر وتر AB عمود است، مانند شکل مقابل داده شده‌است. با تشکیل مثلث‌های AOH و BOH ثابت کنید قطر CD وتر AB و کمان AB را نصف می‌کند.



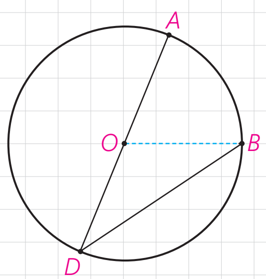
۴ــ این بار فرض کنید قطر CD وتر AB را نصف کرده است و نشان دهید بر AB عمود است و کمان AB را نصف می‌کند.

۵ــ حال فرض کنید قطر CD کمان AB را نصف کرده است. نشان دهید CD بر AB عمود است و آن را نصف می‌کند.

۶ــ اگر نقاط وسط وتر AB و کمان AB را داشته باشیم، چگونه می‌توانیم قطر عمود بر وتر AB را رسم کنیم؟

فعالیت

۱ــ در شکل مقابل $\widehat{ADB}$ یک زاویۀ محاطی است که یک ضلع آن از مرکز دایره عبور کرده است.



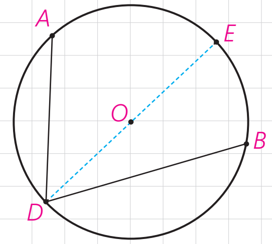
ــ اگر از B به O وصل کنیم، زاویۀ AOB یک زاویۀ خارجی برای مثلث OBD است.

بنابراین : $\widehat{AOB}=\widehat{ODB}+\ldots=۲\widehat{ODB}$ و از آن نتیجه می‌شود :

$$\widehat{ODB}=\frac{۱}{۲}\widehat{AOB}=\frac{۱}{۲}\widehat{\ldots\ldots}$$

۲ــ در این شکل $\widehat{ADB}$ یک زاویهٔ محاطی است که دو ضلع آن در دو طرف O واقع شده‌اند.

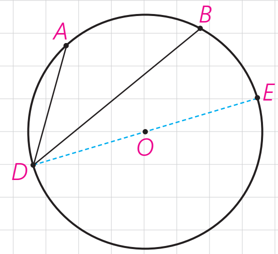
ــ اگر قطر DE را رسم کنیم، طبق قسمت ۱ داریم :



$$\left.\begin{array}{l} \widehat{ADE} = \frac{۱}{۲}\overset{\frown}{......} \\ \widehat{EDB} = \frac{۱}{۲}\overset{\frown}{......} \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{ADB} = \frac{۱}{۲}\overset{\frown}{......}$$

۳ــ در این شکل $\widehat{ADB}$ یک زاویهٔ محاطی است که دو ضلع آن در یک طرف O واقع شده‌اند.

ــ اگر قطر DE را رسم کنیم، طبق قسمت ۱ داریم :



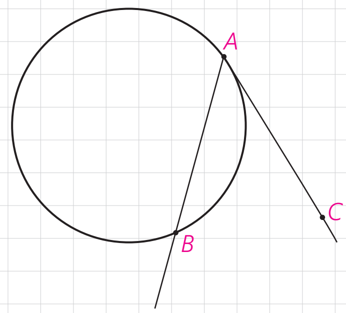
$$\left.\begin{array}{l} \widehat{ADE} = \frac{۱}{۲}\overset{\frown}{......} \\ \widehat{BDE} = \frac{۱}{۲}\overset{\frown}{......} \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{ADB} = \frac{۱}{۲}\overset{\frown}{......}$$

بنابراین :

قضیه: اندازهٔ هر زاویهٔ محاطی برابر است با نصف اندازهٔ کمان مقابل به آن زاویه.

زاویهٔ ظلی

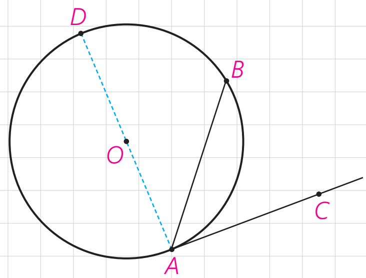
نوع دیگری از زاویه، که در دایره مطرح است، زاویهٔ ظلی است. زاویهٔ ظلی زاویه‌ای است که رأس آن روی دایره قرار دارد و یکی از اضلاع آن مماس بر دایره وضلع دیگر آن شامل وتری از دایره باشد. در شکل مقابل $B\hat{A}C$ یک زاویهٔ ظلی است.



فعالیت

۱ــ زاویهٔ ظلی $\widehat{CAB}$ را درنظر بگیرید و قطری از دایره را رسم کنید که شامل نقطهٔ A هست.

الف) $\overset{\frown}{DAC} = ...^\circ$ و بنابراین : $\widehat{DAC} = \frac{۱}{۲}\overset{\frown}{......}$



ب) زاویهٔ DAB یک زاویهٔ محاطی است.

بنابراین : $\widehat{DAB} = \frac{۱}{۲}\overset{\frown}{......}$

پ) از (الف) و (ب) داریم :

$$\widehat{DAC}-\widehat{DAB}=\frac{۱}{۲}(\overset{\frown}{\cdots\cdots}-\overset{\frown}{\cdots\cdots})$$

و بنابراین

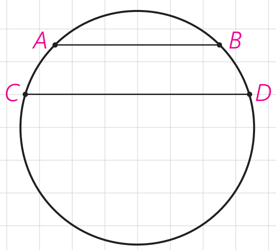
$$\widehat{BAC}=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{\cdots\cdots}$$

ت) نشان دهید نتیجه قسمت (پ) برای یک زاویه ظلی منفرجه نیز برقرار است.

بنابراین :

قضیه: اندازهٔ هر زاویهٔ ظلی برابر است با .... کمان روبه‌رو به آن زاویه.

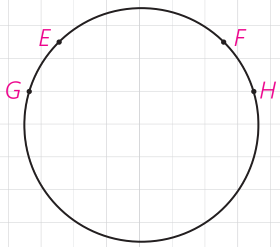
کاردرکلاس



۱ــ در شکل مقابل وترهای AB و CD موازی هستند.

الف) از A به D وصل کنید. زوایای BAD و ADC نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

ب) کمان‌های $\overset{\frown}{BD}$ و $\overset{\frown}{AC}$ نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟



۲ــ در شکل مقابل کمان‌های EG و FH هم‌اندازه‌اند.

الف) وترهای EF و GH و پاره‌خط EH را رسم کنید.

ب) زوایای FEH و EHG نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

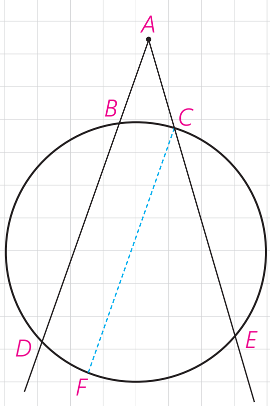
پ) وترهای EF و GH نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

نتیجه

دو وتر که یکدیگر را درون دایره قطع نمی‌کنند با هم موازی‌اند، اگر و تنها اگر کمان‌های محدود بین آنها مساوی باشد.

تاکنون زاویه‌هایی را بررسی کردیم که رأس آنها روی دایره باشد و رابطهٔ اندازه این زاویه‌ها را با اندازهٔ کمان‌های ایجاد شده توسط آنها مشخص کردیم. حال به بررسی این موضوع برای زاویه‌هایی می‌پردازیم که رأس آنها درون یا بیرون دایره است و اضلاعشان کمان‌هایی روی دایره جدا می‌کنند.

فعالیت



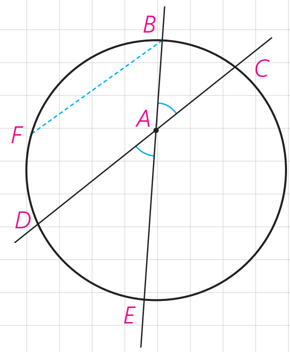
۱ــ فرض کنید رأس زاویهٔ DAE مانند شکل مقابل بیرون دایره واقع شده، و کمان‌های DE و BC توسط اضلاع زاویهٔ موردنظر مشخص شده باشد.

الف) از نقطهٔ C خطی موازی خط BD رسم کنید تا دایره را در نقطه‌ای مانند F قطع کند. علت هرکدام از تساوی‌های زیر را مشخص کنید.

$$\widehat{DAE}=\widehat{FCE}=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{FE}=\frac{۱}{۲}(\overset{\frown}{DE}-\overset{\frown}{DF})=\frac{۱}{۲}(\overset{\frown}{DE}-\overset{\frown}{BC})$$

ب) از C به D وصل کنید و به کمک زاویه خارجی در مثلث ACD رابطهٔ فوق را اثبات کنید.

۲ــ رأس زاویهٔ DAE مانند شکل در درون دایره است و اضلاع این زاویه کمان‌های BC و DE را مشخص کرده‌اند.



الف) از نقطهٔ B خطی موازی خط DC رسم کنید تا دایره را در نقطه‌ای مانند F قطع کند. علت هرکدام از تساوی‌های زیر را مشخص کنید.

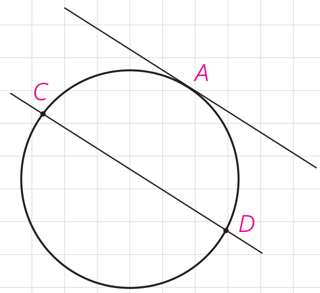
$$\overset{\frown}{DAE}=\overset{\frown}{FBE}=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{FE}=\frac{۱}{۲}(\overset{\frown}{FD}+\overset{\frown}{DE})=\frac{۱}{۲}(\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{DE})$$

ب) از B به D وصل کنید و به کمک زاویه خارجی مثلث ABD رابطهٔ فوق را اثبات کنید.

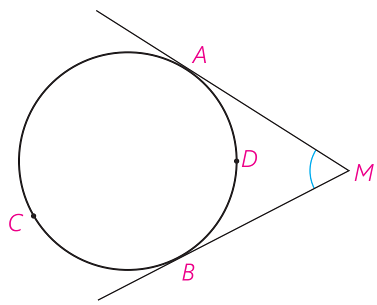
تمرین

۱ــ در شکل‌های زیر ثابت کنید :

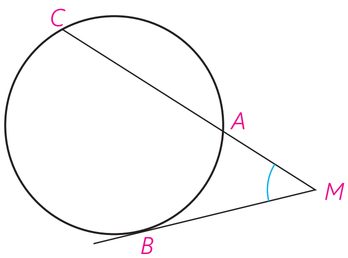
راهنمایی: از نقطهٔ B خطی موازی ضلع دیگر زاویه رسم کنید.



الف) $d_۱ \parallel d_۲$، ثابت کنید $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{AD}$

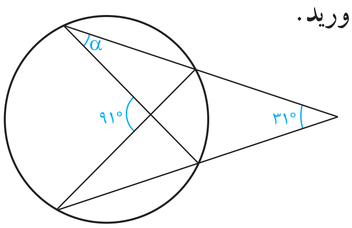


ب) $\hat{M}=\dfrac{\overset{\frown}{ACB}-\overset{\frown}{ADB}}{۲}$

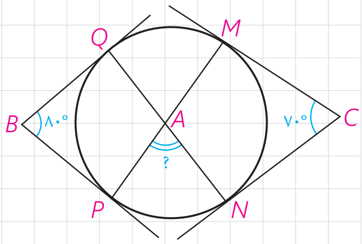


پ) $\hat{M}=\dfrac{\overset{\frown}{BC}-\overset{\frown}{AB}}{۲}$

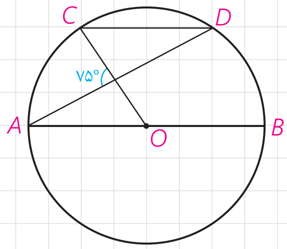
۲ــ در شکل مقابل اندازهٔ زاویهٔ α را به‌دست آورید.



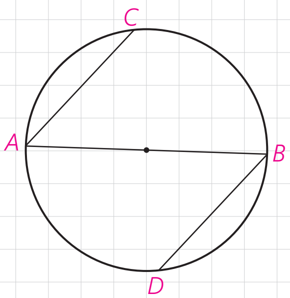
۳ــ در شکل اضلاع زاویه‌های B و C بر دایره مماس‌اند. اندازهٔ زاویهٔ $\hat{A}$ چند درجه است؟



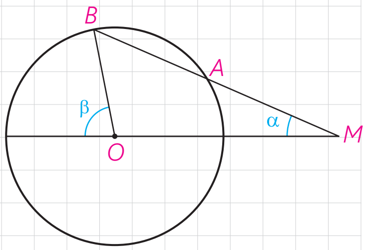
۴ــ در دایره رسم شده شکل مقابل CD||AB، اندازه کمان CD را به‌دست آورید.



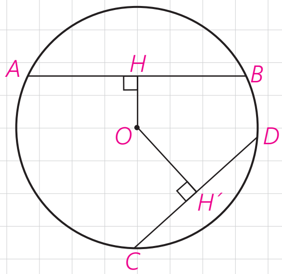
۵ــ در شکل مقابل، AB قطری از دایره است و وترهای AC و BD موازی‌اند. ثابت کنید : AC = BD



۶ــ دایرهٔ C(O,R) مفروض است. از نقطهٔ M در خارج دایره خطی چنان رسم کرده‌ایم که دایره را در دو نقطهٔ A و B قطع کرده است و MA = R؛ نشان دهید : $\beta = ۳\alpha$



۷ــ در دایرهٔ C(O,R)، $\overset{\frown}{AB} = ۶۰^\circ$ و AB = ۱۰ فاصلهٔ O از وتر AB را به دست آورید.



۸ــ در دایـرهٔ C(O,R) نشـان دهیـد AB > CD اگر و تـنـها اگــر OH < OH′ (OH و OH′ فاصلهٔ O از دو وتر AB و CD هستند.)

راهنمایی: از O به B و C وصل، و از قضیهٔ فیثاغورس استفاده کنید.

درس دوم

رابطه‌های طولی در دایره

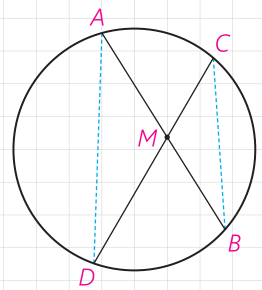
اگر خط‌های شامل دو وتر از یک دایره، یکدیگر را در درون یا بیرون دایره قطع کنند بین اندازهٔ پاره‌خط‌های حاصل روابطی داریم که به بررسی آنها می‌پردازیم.

فعالیت

۱ــ دو وتر AB و CD در نقطهٔ M در داخل دایره یکدیگر را قطع کرده‌اند.

الف) از A به D و از C به B وصل کنید و نشان دهید دو مثلث MAD و MBC متشابه‌اند.

ب) با توجه به تشابه این دو مثلث داریم : $\frac{DM}{.......} = \frac{AM}{CM}$

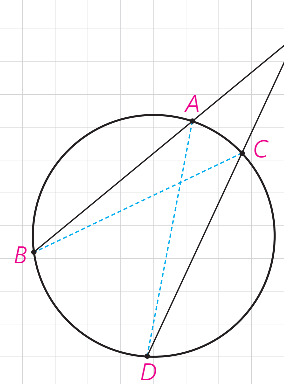


۱ و در نتیجه: $AM. ... = CM. ...$

۲ــ خط‌های شامل دو وتر AB و CD در نقطهٔ M در خارج دایره یکدیگر را قطع کرده‌اند.

الف) نقطهٔ A را به D و نقطهٔ C را به B وصل کنید و نشان دهید دو مثلث MAD و MCB باهم متشابه‌اند.

ب) با توجه به این تشابه داریم : $\frac{MD}{.......} = \frac{MA}{MC}$

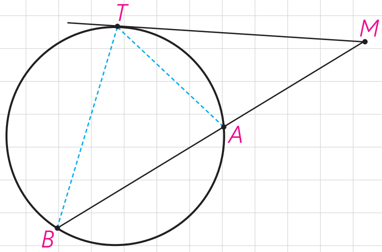


۲ و در نتیجه: $MA. ... = MC. ...$

قضیه: هرگاه خط‌های شامل دو وتر دلخواه AB و CD در نقطه‌ای مانند M (درون یا بیرون دایره) یکدیگر را قطع کنند. آن‌گاه: $MA.MB = MC.MD$

۳ــ فرض کنیم از نقطهٔ M (خارج دایره) مانند شکل یک مماس و یک قاطع بر دایره رسم کرده‌ایم.

الف) T را به A و B وصل، و مشخص کنید چرا؟ $\widehat{MTA} = \widehat{TBM}$



ب) علت تشابه دو مثلث MAT و MTB را مشخص، و با توجه به این تشابه رابطهٔ زیر را کامل کنید.

$$\frac{MA}{MT}=\frac{MT}{.......}$$

و در نتیجه : $MT^{2}=$ ....

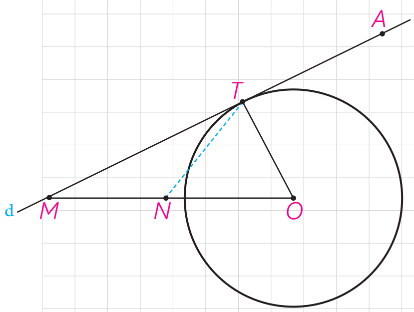
بنابراین قضیهٔ زیر را داریم :

قضیه: هرگاه M نقطه‌ای بیرون دایره باشد و از M مماس و قاطعی نسبت به دایره رسم کنیم، مربع اندازهٔ مماس برابر است با حاصل‌ضرب اندازه‌های دو قطعهٔ قاطع

یعنی طول مماس واسطهٔ هندسی بین دو قطعهٔ قاطع است.

رسم مماس بر دایره از نقطه‌ای خارج دایره

اگر خط d در نقطهٔ T بر دایره مماس باشد و A و M دو نقطه بر خط d در دوطرف نقطهٔ T باشد، هرکدام از پاره‌خط‌های MT و AT بر دایره مماس‌اند.



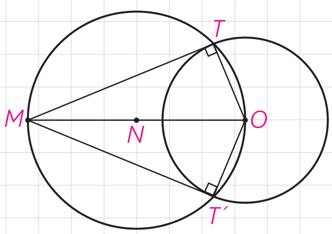
اگر O مرکز دایره باشد، ΔOMT دررأس T قائم‌الزاویه است؛ چرا؟

اگر N وسط پاره‌خط OM باشد، $NM = NO = NT$؛ چرا؟

بنابراین دایره به مرکز N و قطر OM از نقطه T می‌گذرد.

از این ویژگی می‌توانیم در رسم مماس بر دایره از نقطه M خارج دایره بر آن استفاده کنیم.

پس برای رسم مماس بر دایره از نقطه M خارج دایره، ابتدا دایره‌ای به قطر OM (O مرکز دایره) رسم می‌کنیم.



این دایره، دایره مفروض را در دو نقطه T و T′ قطع می‌کند. خط‌های MT و MT′ بر دایره مماس‌اند؛ چرا؟

کار در کلاس

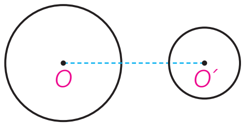
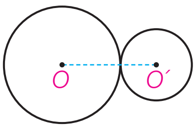
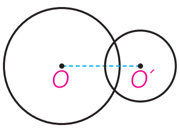
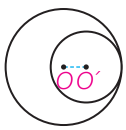
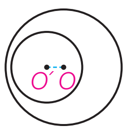
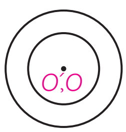
هرگاه از نقطه M خارج دایره $C(O,R)$ دو مماس بر دایره رسم کنیم و T و T' نقاط تماس باشند، ثابت کنید :

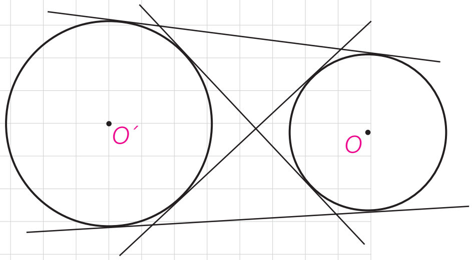
الف) اندازه‌های دو مماس برابرند.

ب) نیم‌خط MO نیمساز زاویه TMT' است.

حالت‌های دو دایره نسبت به هم و مماس مشترک‌ها

دو دایره $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ را با فرض $R > R'$ و $OO' = d$ درنظر می‌گیریم. حالت‌های مختلفی که این دو دایره می‌توانند نسبت به هم داشته باشند به‌صورت زیر است :

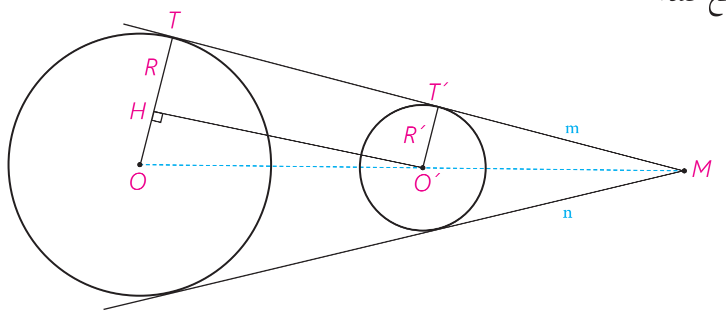
دو دایرهٔ برون هم (متخارج)	$d > R + R'$	
دو دایره مماس برون	$d = R + R'$	
دو دایره متقاطع	$R - R' < d < R + R'$	
دو دایره مماس درون	$d = R - R'$	
دو دایره متداخل	$d < R - R'$	
دایره‌های هم‌مرکز	$d = 0$	



هر خطی یا پاره‌خطی که بر هردو دایره مماس باشد، مماس مشترک دو دایره است. اگر دو دایره در یک طرفِ خط باشند، آن را مماس مشترک خارجی، و اگر دو دایره در دو طرف خط باشند آن را مماس مشترک داخلی می‌نامند.

فعالیت

۱ــ فرض کنیم مانند شکل خط m در نقاط T و T' بر دو دایره مماس است و شعاع‌های OT و $O'T'$ رسم شده‌است. فرض کنیم فاصله بین مرکزهای دو دایره برابر d باشد؛ از O' خطی موازی خط m رسم می‌کنیم تا شعاع OT را در نقطه‌ای مانند H قطع کند.



الف) $TT'O'H$ مستطیل است؛ چرا؟

ب) با توجه به قضیه فیثاغورس در مثلث $O'HO$، تساوی زیر را توجیه کنید.

$$TT' = \sqrt{d^۲ - (R - R')^۲}$$

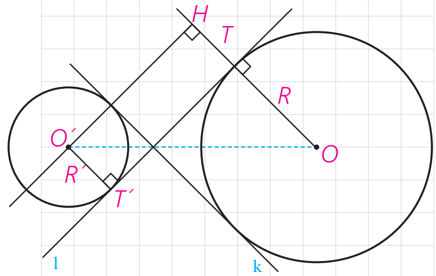
پ) با توجه به کار در کلاس قبل بگویید چرا اگر دو مماس مشترک m و n متقاطع باشند، نقطهٔ تقاطع آنها روی خط OO' خواهد بود؟

ت) به مرکز O و به شعاع $R-R'$ دایره‌ای رسم کنید. پاره‌خط $O'H$ برای دایرهٔ رسم شده چگونه خطی است؟

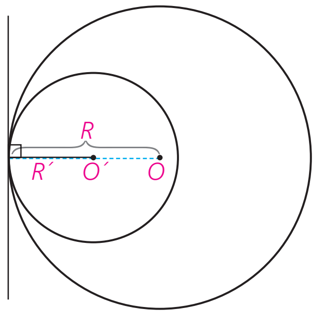
ث) فرض کنید دو دایره داده شده، و رسم مماس مشترک خواسته شده باشد. از آنجا که مرکزها و شعاع‌های دو دایره معلوم است، می‌توان دایرهٔ مطرح شده در قسمت (ت) را رسم کرد و سپس مماس $O'H$ را بر آن رسم کرد؛ در این‌صورت چگونه می‌توانید مماس TT' را رسم کنید؟

۲ــ دو مماس مشترک داخلی l و k بر دو دایره متخارج مطابق شکل رسم شده است. با به‌کار بردن قضیه فیثاغورس در $\Delta O'OH$ نشان دهید[1] :

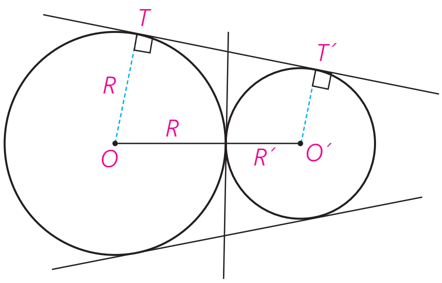
$$TT' = \sqrt{d^{۲} - (R + R')^{۲}}$$



۳ــ دو دایره مماس. دو دایره را که فقط یک نقطه مشترک داشته باشند، مماس می‌نامند. در این نقطه مشترک یک خط بر هر دو مماس است. اگر مرکزهای دو دایره در دوطرف این مماس باشند، آن دو دایره، مماس برونی است و اگر هر دو مرکز در یک طرف این مماس باشند، آنها را مماس درونی می‌نامند.



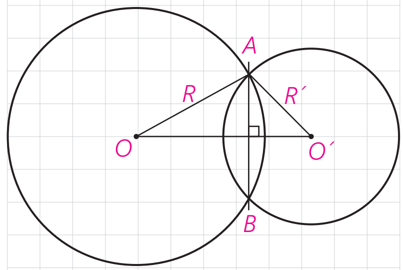
مماس داخل‌اند؛
فقط یک مماس مشترک دارند.
$OO' = |R - R'|$



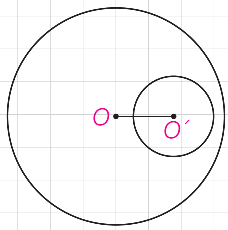
مماس خارج‌اند؛
سه مماس مشترک دارند.
$OO' = R + R'$

با استفاده از دستور محاسبهٔ طول مماس مشترک خارجی، نشان دهید در دو دایره مماس خارج، $TT' = ۲\sqrt{RR'}$

۴ــ دو دایره متقاطع. دو دایره را که دو نقطه مشترک داشته باشند، متقاطع می‌نامند.
در این حالت دو دایره، فقط دو مماس مشترک دارند.
و $|R - R'| < OO' < R + R'$ ؛ چرا؟
پاره‌خط AB، که دوسر آن روی هر دو دایره است، وتر مشترک دو دایره متقاطع است. چرا پاره‌خط OO' عمودمنصف وتر مشترک AB است؟



۵ ــ دو دایره متداخل. دو دایره را که تمام نقاط یکی درون دیگری باشد، متداخل می‌نامیم. دو دایره متداخل هیچ مماس مشترک ندارند و در آنها $OO' < |R - R'|$

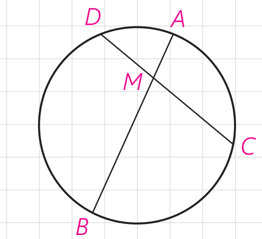


$OO' < |R - R'|$

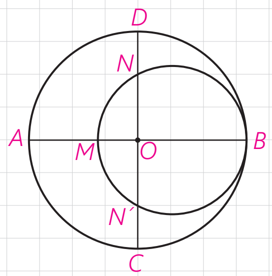
۱ــ رسم مماس مشترک داخلی دو دایره از اهداف این کتاب نیست.

تمرین

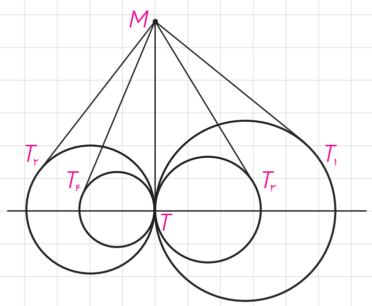
۱ــ در دایرهٔ $C(O,R)$ وتر AB ، وتر CD به طول ۹ سانتی‌متر را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم کرده است. اگر $AB = ۱۱cm$، آن‌گاه وتر CD وتر AB را به چه نسبتی قطع می کند؟



۲ــ از نقطهٔ P در خارج دایره‌ای، مماس PA به طول $۱۰\sqrt{۳}$ را بر آن رسم کرده‌ایم (A روی دایره است). همچنین خطی از P گذرانده‌ایم که دایره را در دو نقطهٔ B و C قطع کرده است و $BC = ۲۰$. طول‌های PB و PC را به‌دست آورید.



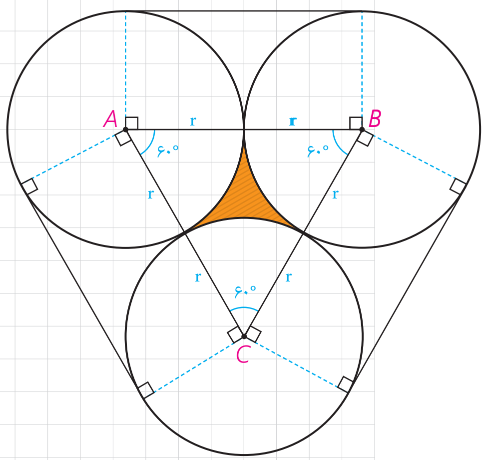
۳ــ در شکل مقابل، دو دایره برهم مماس و دو قطر AB و CD از دایره بزرگ‌تر برهم عمودند. اگر $AM = ۱۶$ و $ND = ۱۰$، شعاع‌های دو دایره را پیدا کنید.



۴ــ مطابق شکل مقابل، تمام دایره‌ها در نقطه T برهم مماس‌اند و از نقطه M روی مماس مشترک آنها بر دایره‌ها مماس رسم کرده‌ایم؛ ثابت کنید

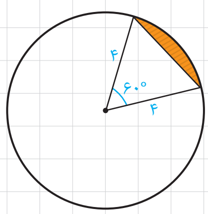
$MT_۱ = MT_۲ = MT_۳ = MT_۴ = \dots$

۵ــ طول شعاع‌های دو دایرهٔ متخارج را به‌دست آورید که طول مماس مشترک خارجی آنها مساوی $۳\sqrt{۷}$ و طول مماس مشترک داخلی آنها $\sqrt{۱۵}$ و طول خط‌المرکزین آنها مساوی ۸ واحد است.



۶ــ سه دایره به شعاع‌های برابر r دو به دو برهم مماس‌اند. مطابق شکل مقابل این سه دایره به وسیلهٔ نخی بسته شده‌اند. نشان دهید طول این نخ برابر $۶r + ۲\pi r$. همچنین نشان دهید مساحت ناحیه محدود به سه دایره برابر $r^۲(\sqrt{۳} - \frac{\pi}{۲})$ است.

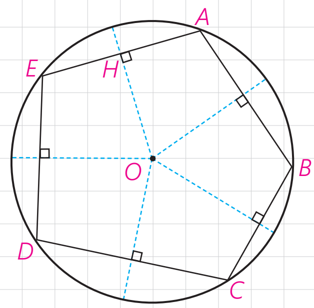
۷ــ طول خط‌المرکزین دو دایرهٔ مماس درونی ۲ سانتی‌متر و مساحت ناحیهٔ محدود بین آنها ۱۶π سانتی‌مترمربع است. طول شعاع‌های دو دایره را به‌دست آورید.



۸ــ مطابق شکل دایره به شعاع ۴، مساحت ناحیه سایه زده را محاسبه کنید. این ناحیه، یک قطعه دایره نام دارد.

درس سوم

چند ضلعی‌های محاطی و محیطی

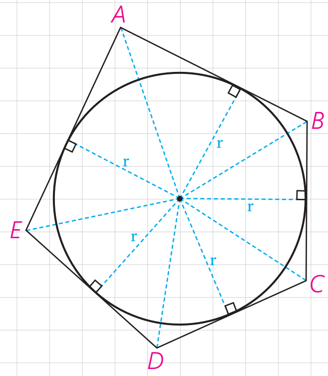


چند ضلعی را **محاطی** می‌گوییم اگر و فقط اگر دایره‌ای باشد که از همه رئوس آن بگذرد؛ در این صورت دایره را **دایرهٔ محیطی آن چند ضلعی** می‌نامیم.

به‌طور مثال ABCDE یک پنج ضلعی محاطی است.

می‌دانیم برای اینکه دایره‌ای از دو نقطه بگذرد، باید مرکز آن روی عمود منصف پاره‌خطی باشد که آن دو نقطه دو سر آن است؛ بنابراین :

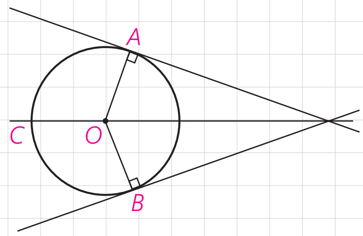
یک چند ضلعی، محاطی است اگر و فقط اگر عمود منصف‌های همه ضلع‌های آن در یک نقطه همرس باشند.



این نقطه مرکز دایره محیطی چند ضلعی است. چرا؟

چند ضلعی را **محیطی** می‌گوییم اگر و فقط اگر دایره‌ای باشد که بر همه ضلع‌های آن مماس باشد؛ در این صورت دایره را **دایرهٔ محاطی این چند ضلعی** می‌نامیم.

فعالیت



فرض کنید دایرهٔ C بر دو ضلع زاویه‌ای مانند شکل مماس باشد.

الف)

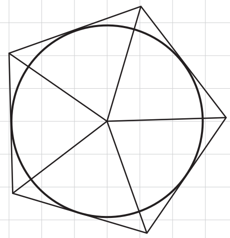
۱ــ پاره خط‌هایی که مرکز دایره را به نقاط تماس اضلاع با دایره وصل می‌کند، رسم کنید و آنها را OB و OA بنامید.

۲ــ پاره خط‌های OA و OB برای دایره چه نوع پاره خطی هستند؟

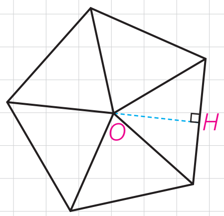
۳ــ فاصلهٔ نقطهٔ O (مرکز دایره) تا ضلع‌های زاویه مفروض با طول پاره خط‌های رسم شده (OA و OB) چه رابطه‌ای دارد؟

۴ــ با توجه به (۲) و (۳) فاصلهٔ مرکز دایره از دو ضلع زاویه .... و بنابراین نقطهٔ O روی ....

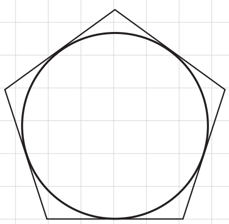
۵ــ فرض کنید مانند شکل مقابل، دایره در یک چند ضلعی محاط شده باشد. چرا مرکز دایره، محل برخورد نیمسازهای زاویه‌های داخلی چند ضلعی است؟



ب) فرض کنید یک چند ضلعی مانند شکل مقابل به گونه‌ای باشد که نیمسازهای زوایای داخلی آن در نقطهٔ O یکدیگر را قطع کرده باشند و OH پاره خط عمود به یک ضلع چند ضلعی باشد. دایره‌ای به مرکز O و شعاع OH برای چند ضلعی مفروض چه نوع دایره‌ای است؟ چرا؟



بنابراین؛ یک چند ضلعی، محیطی است اگر و فقط اگر همه نیمسازهای زاویه‌های آن در یک نقطه همرس باشند.این نقطه مرکز دایره محاطی چند ضلعی است.



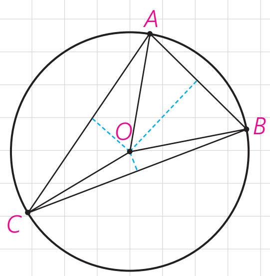
کاردرکلاس

اگر در یک n ضلعی محیطی با مساحت S و محیط ۲P شعاع دایره محاطی برابر r باشد، نشان دهید S=rp .

راهنمایی: کافی است مساحت n مثلث را محاسبه، و با هم جمع کنید.

دایره‌های محیطی و محاطی مثلث

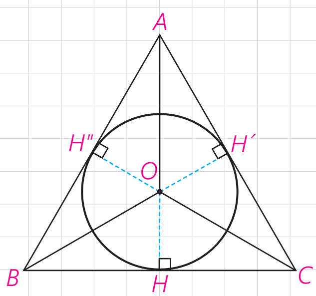
قبلاً همرسی سه عمود منصف یک مثلث را ثابت کرده‌ایم؛ بنابراین نقطه همرسی سه عمود منصف مثلث، تنها نقطه‌ای است که از سه رأس یک مثلث به یک فاصله است. پس اگر دایره‌ای به مرکز نقطه تلاقی سه عمود منصف و به شعاع فاصله این نقطه تا یک رأس رسم کنیم، این دایره از هر سه رأس مثلث می‌گذرد؛ یعنی دایره محیطی مثلث است. در نتیجه مثلث همواره محاطی است.



OA=OB=OC=R

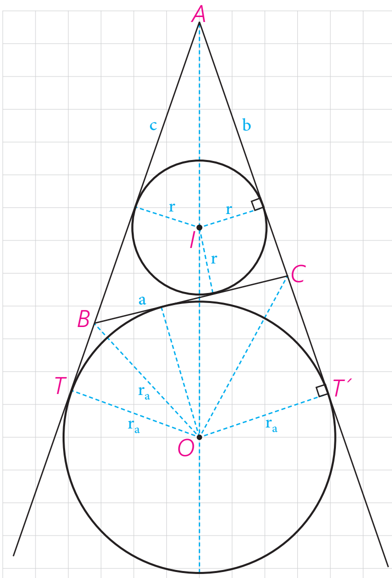
همچنین ثابت کرده‌ایم سه نیمساز زاویه‌های داخلی مثلث در نقطه‌ای درون مثلث همرس‌اند. در نتیجه مثلث، محیطی نیز هست. بنابر ویژگی نیمساز، این نقطه از هر سه ضلع مثلث به یک فاصله است.

پس مرکز دایره محاطی مثلث نقطه همرسی سه نیمساز است و شعاع این دایره، که آن را با r نشان می‌دهیم، فاصله این نقطه از هر یک از سه ضلع است. بنابر آنچه در مورد n ضلعی‌های محیطی نشان دادیم در مثلث نیز S=pr که S مساحت و P نصف محیط مثلث است.

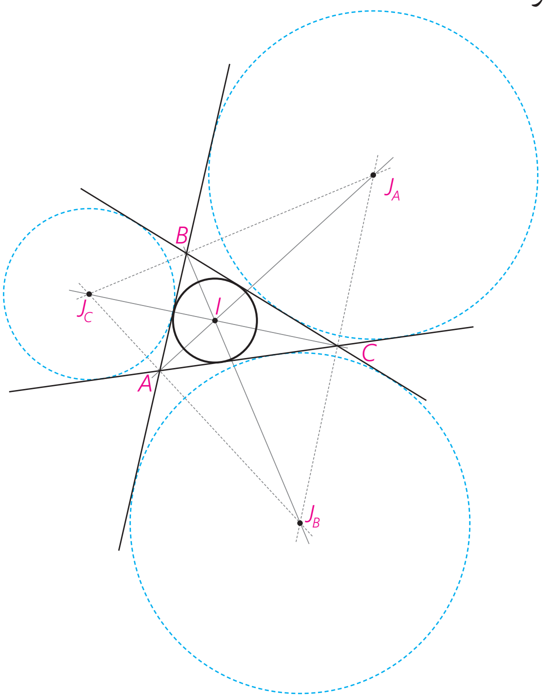


OH=OH′=OH″=r

اگر نیمساز زاویه A از ΔABC را رسم کنیم، نیمساز زاویه خارجی C را در نقطه‌ای مانند O قطع می‌کند. این نقطه از خط BC و خط‌های AC و AB به یک فاصله است؛ چرا؟ بنابراین O نیز مرکز دایره‌ای است که بر ضلع BC و خط‌های شامل دو ضلع دیگر مماس است. این دایره را دایره محاطی خارجی نظیر رأس A می‌نامند.



شعاع این دایره را با r_a نشان می‌دهند؛ به همین ترتیب دو دایره محاطی خارجی دیگر نظیر دو رأس B و C وجود دارد.



اکنون در فعالیت زیر محاسبهٔ شعاع دایرهٔ محاطی خارجی را بررسی می‌کنیم.

فعالیت

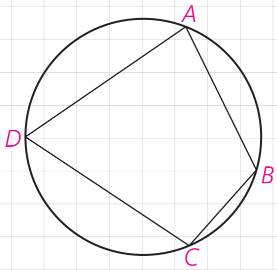
در شکل داریم: $S(ABC)=S(OAC)+S(OAB)-S(OBC)$ اگر مساحت ΔABC را به S نشان دهیم، $S=\frac{۱}{۲}r_a(\cdots+\cdots-\cdots)$. اگر محیط مثلث را با ۲p نشان دهیم، داریم، ۲p=a+b+c؛ پس ۲p−۲a =......؛ در نتیجه $S= r_a(P-a)$ و بنابراین $r_a=\frac{S}{p-a}$ به طور مشابه برای اضلاع دیگر داریم:

r_b=...... r_c=......

برخلاف مثلث، همهٔ چند ضلعی‌های دیگر، لزوماً محاطی یا محیطی نیستند. در بخش بعد به شرایط محاطی یا محیطی بودن یک چهار ضلعی می‌پردازیم.

چهار ضلعی‌های محاطی و محیطی

قضیه: یک چهار ضلعی محاطی است، اگر و فقط اگر دو زاویهٔ مقابل آن مکمل باشند.



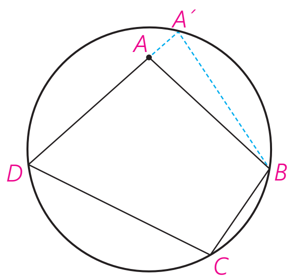
اثبات

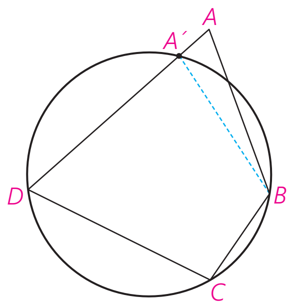
۱ــ فرض کنیم چهار ضلعی ABCD محاطی باشد؛ مجموع اندازه‌های $\hat{A}$, $\hat{C}$ نصف مجموع اندازه‌های کمان‌های DCB و DAB است؛ اما مجموع اندازه‌های این دو کمان ...... است و در نتیجه مجموع اندازه‌های $\hat{A}$, $\hat{C}$ برابر .... است.
به همین ترتیب $\hat{B}$, $\hat{D}$ مکمل‌اند.

۲ــ فرض کنیم $\hat{A}$, $\hat{C}$ مکمل باشند. با برهان خلف ثابت می‌کنیم چهارضلعی ABCD محاطی است. از سه نقطه C،B و D همواره یک دایره می‌گذرد؛ چرا؟

اگر این دایره از A نگذرد، خط AD را در نقطه‌ای دیگری مانند A' قطع می‌کند که A' بین A و D یا A بین A' و D است. اکنون چهارضلعی $A'BCD$ ...... است؛ پس $\hat{C}$ و $\widehat{BA'D}$ مکمل‌اند؛ در نتیجه باید $\hat{A}$ و $\widehat{BA'D}$ هم‌اندازه باشند و این ممکن نیست؛ چرا؟

در نتیجه A' همان A است.





قضیه: یک چهارضلعی محیطی است اگر و فقط اگر مجموع اندازه‌های دو ضلع مقابل، برابر مجموع اندازه‌های دو ضلع دیگر باشند.

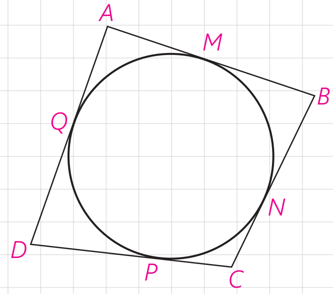
اساس اثبات بر این است که اگر از نقطه‌ای بیرون دایره دو مماس بر دایره رسم کنیم دو پاره خط مماس هم‌اندازه‌اند.

اثبات

۱ــ اگر چهارضلعی ABCD محیطی باشد،

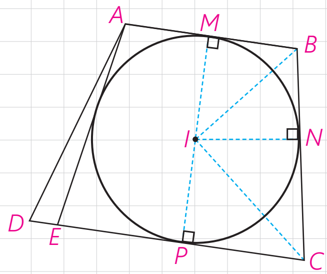
AB+CD=AM+...+PC+...=AQ+...+CN+...=AD+BC

عکس این قضیه نیز با برهان خلف ثابت می‌شود.



۲ــ فرض کنید : AB+CD=BC+AD.

نیمسازهای دو زاویهٔ B و C همدیگر را در نقطه‌ای مانند I قطع می‌کنند. با توجه به ویژگی نیمساز، چرا نقطهٔ I از سه ضلع CD و BC و AB به یک فاصله است؟(IM=IN=IP) چرا دایره‌ای به مرکز I و شعاع IM بر AB و BC و CD مماس است؟ حال اگر این دایره بر AD هم مماس باشد، حکم ثابت شده است.



اما اگر این دایره بر AD مماس نباشد از A بر آن مماسی رسم می‌کنیم تا خط CD را در نقطه‌ای مانند E قطع کند؛ در این صورت E بین P و D یا D بین E و P واقع می‌شود. پس، AB+EC=AE+BC ؛ (چرا؟) از این رابطه با استفاده از رابطه فرض چگونه نتیجه می‌گیرید : AD=DE+AE ؟

این رابطه امکان ندارد؛ (چرا؟) پس E همان D است و دایره بر ضلع AD نیز مماس است.

کاردرکلاس

جدول زیر را کامل کنید.

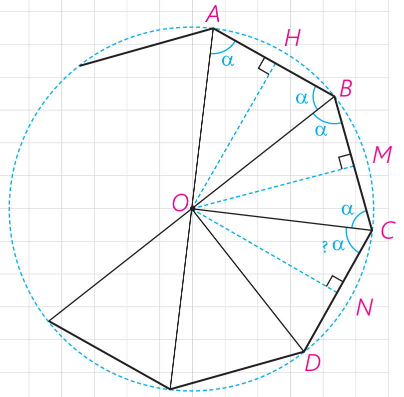
	مربع	مستطیل	لوزی	متوازی‌الاضلاع	ذوزنقه	ذوزنقه متساوی‌الساقین	کایت
محاطی	✓	...	...	...	...	...	...
محیطی	✓	...	...	...	...	...	...

از دیگر چندضلعی‌های محاطی و محیطی، چند ضلعی‌های منتظم است.

یک چند ضلعی محدب را منتظم می‌نامند، هرگاه تمام ضلع‌های آن هم‌اندازه و تمام زاویه‌های آن نیز هم‌اندازه باشند.

مثلث متساوی‌الاضلاع سه ضلعی منتظم و مربع چهارضلعی منتظم است.

در فعالیت زیر نشان می‌دهیم هر چندضلعی منتظم، هم محاطی و هم محیطی است :



فعالیت

فرض کنید اندازه هر زاویه n ضلعی منتظم $ABCD...$، ۲α باشد؛ عمود منصف‌های دو ضلع AB و BC را رسم می‌کنیم. فرض کنیم در O متقاطع‌اند. بنابراین $OA=......=OC$.

پس $\Delta OAB \cong \Delta OBC$ چرا؟ $\widehat{OAB}=\widehat{OBA}=\widehat{OBC}=\widehat{OCB}=\alpha$

اکنون از D به O وصل می‌کنیم. چرا اندازه $\widehat{OCD}$ برابر α است؟ چرا $\Delta OCD \cong \Delta OCB$؟ و $OA=OB=OC=OD$؟

با ادامه این روند داریم :

$OA=OB=OC=OD=......$ و $OH=ON=OM=......$ بنابراین، O از همه رأس‌ها به یک فاصله است؛ پس مرکز دایره‌ای است که از تمام رأس‌های n ضلعی منتظم می‌گذرد.

به همین ترتیب O از تمام ضلع‌ها به یک فاصله است؛ پس مرکز دایره‌ای است که بر تمام ضلع‌های n ضلعی منتظم مماس است.

تمرین

۱ــ ثابت کنید یک ذوزنقه، محاطی است، اگر و تنها اگر متساوی‌الساقین باشد.

۲ــ مساحت مثلث متساوی‌الاضلاعی را به‌دست آورید که در دایره‌ای به شعاع R محاط شده باشد.

۳ــ ثابت کنید عمود منصف یک ضلع هر مثلث و نیمساز زاویهٔ مقابل به آن ضلع، یکدیگر را روی دایرهٔ محیطی مثلث قطع می‌کنند.

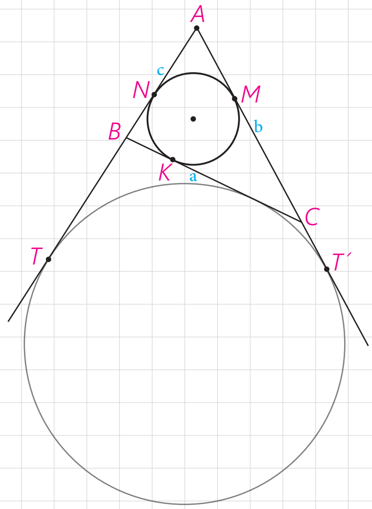
۴ــ یک ذوزنقه، هم محیطی است و هم محاطی. ثابت کنید مساحت این ذوزنقه برابر است با میانگین حسابی دو قاعده آن ضرب در میانگین هندسی آنها.

۵ــ اگر r_a , r_b و r_c شعاع‌های سه دایره محاطی خارجی مثلث و r شعاع دایره محاطی داخلی باشد، نشان دهید

$$\frac{۱}{r_a}+\frac{۱}{r_b}+\frac{۱}{r_c}=\frac{۱}{r}$$

به همین ترتیب اگر h_a، h_b و h_c اندازه‌های سه ارتفاع باشند، نشان دهید :

$$\frac{۱}{h_a}+\frac{۱}{h_b}+\frac{۱}{h_c}=\frac{۱}{r}$$

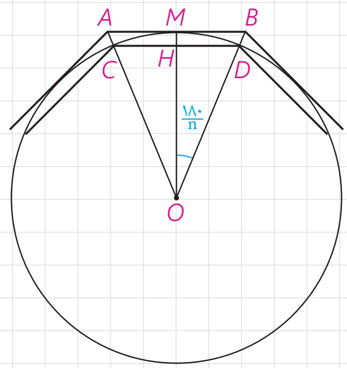


۶ــ اگر نقاط تماس دایره محاطی داخلی مثلث ABC با اضلاع آن M، N و K باشند و T و T′ نقطه‌های تماس یک دایره محاطی خارجی با خط‌های شامل دو ضلع باشند، نشان دهید :

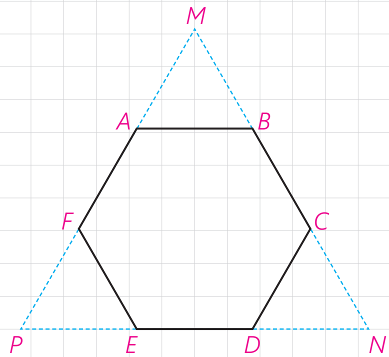
AM=AN=P−a

BN=BK=P−b, CM=CK=P−c

AT=AT′=P



۷ــ یک دایره به شعاع r و n ضلعی‌های منتظم محاطی و محیطی در آن در نظر بگیرید. نشان دهید اگر AB و CD اندازه‌های ضلعی‌های n ضلعی منتظم محیطی و محاطی باشند، آن‌گاه $AB=۲r\tan\frac{۱۸۰^\circ}{n}$ و $CD=۲r\sin\frac{۱۸۰^\circ}{n}$.



۸ــ شش ضلعی منتظم ABCDEF مفروض است با امتداد دادن اضلاع شش‌ضلعی. مطابق شکل، مثلث MNP را ساخته‌ایم.

الف) نشان دهید MNP متساوی‌الاضلاع است.

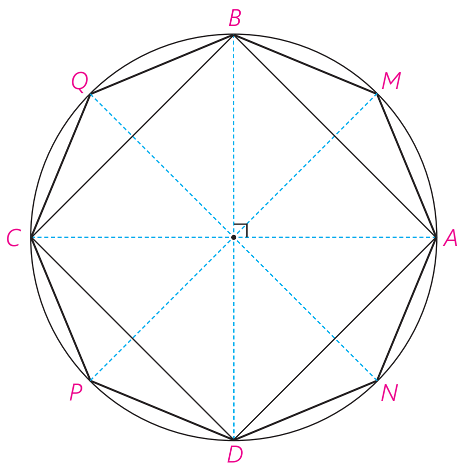
ب) نشان دهید مساحت شش ضلعی، دو سوم مساحت مثلث MNP است.

پ) از نقطهٔ دلخواه T درون شش ضلعی عمودهای TH، TH′ و TH″ را به ترتیب بر BC، ED و AF رسم کنید. با توجه به آنچه از هندسهٔ پایهٔ ۱ می‌دانید، مجموع طول‌های این سه عمود با کدام جزء از مثلث MNP برابر است؟

ت) مجموع مساحت‌های مثلث‌های TBC، TDE و TAF چه کسری از مساحت مثلث MNP است؟ نشان دهید :

$$S_{TBC}+S_{TDE}+S_{TAF}=S_{TAB}+S_{TEF}+S_{TCD}$$

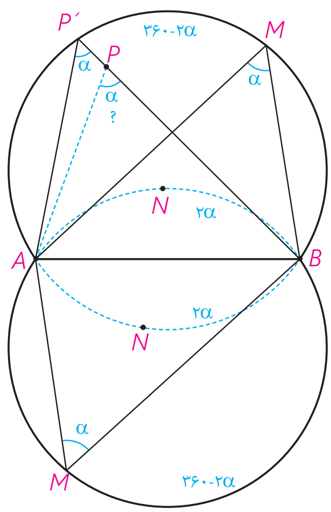
۹ــ دو قطر عمود بر هم AC و BD از یک دایره را رسم می‌کنیم؛ چهارضلعی ABCD یک مربع است؛ چرا؟ عمود منصف‌های ضلع‌های این مربع را رسم کنید تا دایره را قطع کنند. نشان دهید هشت ضلعی AMBQCPDN منتظم است.



مجله ریاضی (خــوانـدنـی)

زاویه‌های دید و کمان شامل (حاوی)

پاره خط AB و نقطه M غیر واقع برخط AB در یک صفحه مفروض‌اند. فرض کنیم اندازه $\widehat{AMB}$ برابر α باشد، دایره محیطی مثلث AMB را رسم می‌کنیم. اگر از هر نقطه روی کمان AMB به جز A و B به A و B وصل کنیم، اندازه زاویه پدید آمده برابر α است؛ چرا؟ به عکس اگر $\widehat{APB}$ هر زاویه‌ای به اندازه α باشد، آن‌گاه P روی کمان AMB واقع است؛ زیرا اگر P روی کمان AMB واقع نباشد، خط PB دایره را در نقطه‌ای مانند P' قطع می‌کند؛ پس اندازه $\widehat{AP'B}$ برابر α است؛ اما این امکان ندارد (چرا؟). بنابراین :



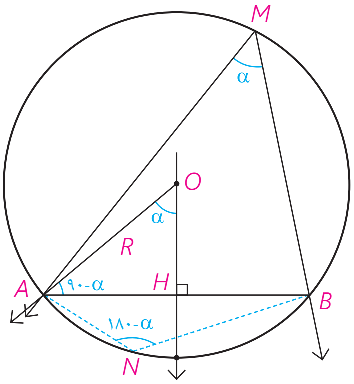
مجموعه نقاطی از صفحه، که از آن نقاط پاره خط AB به زاویه با اندازه α دیده می‌شود، دو کمان هم‌اندازه از دو دایره قابل انطباق است، به جز نقاط انتهایی کمان‌ها؛ این کمان‌ها را کمان‌های حاوی زاویه α وابسته به پاره خط AB می‌نامند.

نشان دهید کمان‌های $\widehat{ANB}$ به جز A و B در این دو دایره، کمان‌های حاوی زاویه به اندازه $180 - \alpha$ است؛ یعنی مجموعه نقاطی که از آنها پاره خط AB به زاویه $180 - \alpha$ دیده می‌شود.

اگر $\alpha = 90^\circ$، این کمان‌ها چگونه‌اند؟

اگر از مرکز دایره شامل کمان حاوی به A و B وصل کنیم و عمود منصف پاره خط AB را نیز رسم کنیم، اندازه زاویه AOH برابر α یا α ــ ۱۸۰ است؛ چرا؟ در نتیجه اندازه $\widehat{OAB}$ برابر α ــ ۹۰ یا ۹۰ــ α (α منفرجه باشد).

با استفاده از این مفهوم و عمود منصف یک پاره خط، روش رسم دایره‌های شامل کمان حاوی را بیان کنید.



اگر شعاع کمان حاوی α برابر R و اندازه پاره خط AB برابر α باشد، نشان دهید : $\sin\alpha = \frac{a}{2R}$ یا $a = 2R\sin\alpha$.