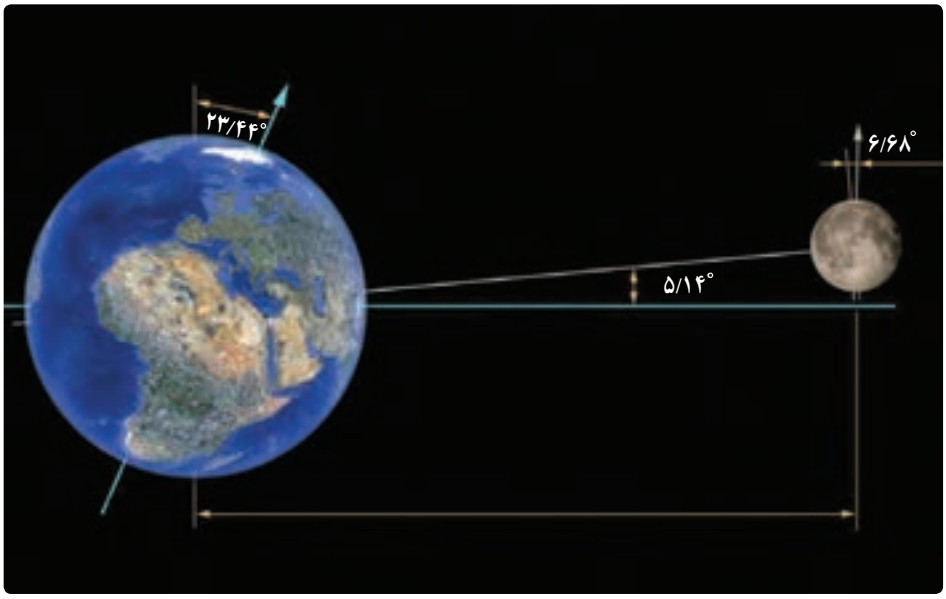
فصل ۲

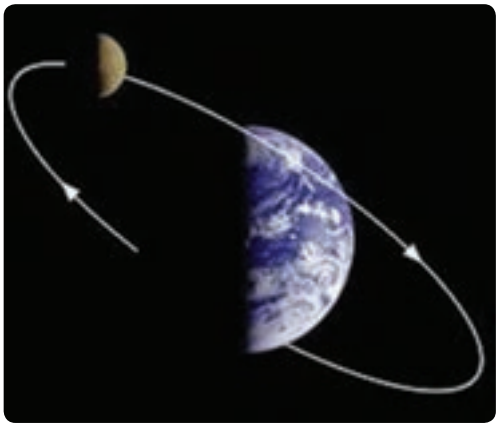
مثلثات

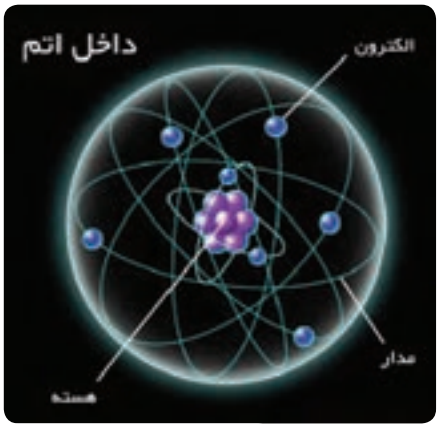
الشَّمْسُ وَالْقَمَرُ بِحُسْبَانٍ (الرحمٰن : ۵)

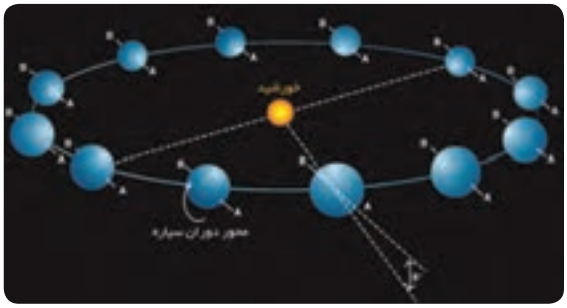
خورشید و ماه برابر حساب (منظمی در چرخش و گردش) هستند.



فصل یا موسم یکی از تقسیمات سال بر اساس تغییرات آب و هوایی کره زمین است. به علت مایل بودن محور گردش زمین به دور خورشید نسبت به صفحهٔ استوا و در نتیجه تغییر طول روز و شدت تابش و دما، فصل‌ها پدید می‌آیند.







درس اول نسبت‌های مثلثاتی

درس دوم دایرهٔ مثلثاتی

درس سوم روابط بین نسبت‌های مثلثاتی

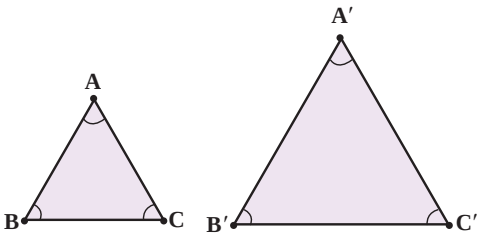
درس اول: نسبت‌های مثلثاتی

مثلثات شاخه‌ای از ریاضیات است که به بررسی روابط بین زوایا و اضلاع یک مثلث می‌پردازد. یکی از اهداف این علم، اندازه‌گیری فاصله‌ها به‌صورت غیرمستقیم است. مثلثات در علوم مهندسی، فیزیک، نقشه‌برداری، دریانوردی، نجوم و غیره کاربرد دارد.

به‌عنوان مثال، فرض کنید یک هواپیما در ارتفاع ۲ کیلومتری از سطح زمین در حال فرود آمدن است.

اگر زاویهٔ هواپیما با افق 13° باشد، می‌خواهیم محل دقیق فرود هواپیما را بدانیم. این مسئله و مسائلی نظیر این با استفاده از روابط مثلثاتی حل می‌شوند.

برای معرفی مفهوم مثلثات، به مفهوم تشابه نیاز داریم. در پایهٔ نهم با این مفهوم آشنا شدید و دیدید که دو مثلث با هم متشابه‌اند، هرگاه زوایای نظیر در آنها برابر و نسبت اضلاع متناظر نیز با هم برابر باشند. یعنی اگر $\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{A'B'C'}$، آنگاه



داریم: $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$ و

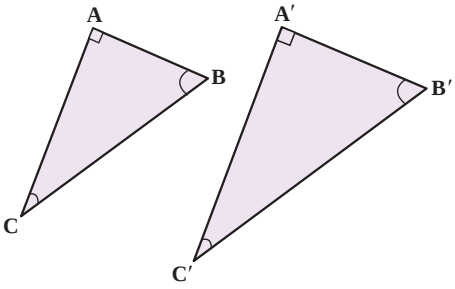
$\hat{A} = \hat{A'}, \hat{C} = \hat{C'}, \hat{B} = \hat{B'}$.

در هندسه ثابت می‌شود:

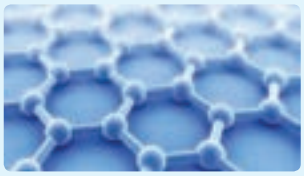
> هرگاه دو زاویه از مثلثی، با دو زاویه از مثلثی دیگر برابر باشند، آن دو مثلث، متشابه‌اند.

به‌عنوان یک نتیجه از مطلب بالا می‌توان دید:

> اگر $\overset{\Delta}{ABC}$ و $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ در شکل مقابل قائم‌الزاویه باشند و داشته باشیم $\hat{C} = \hat{C'}$، آنگاه
>
> $$\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{A'B'C'}$$

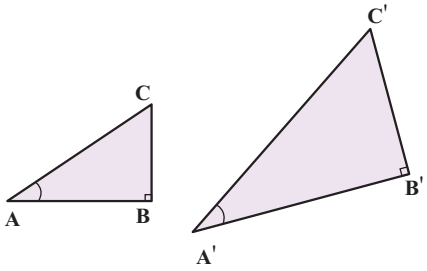


برای اینکه اتومبیل‌ها در پیچ جاده‌ها بتوانند بدون خطر انحراف، حرکت کنند، در جاده شیب عرضی ایجاد می‌کنند، یعنی آن را طوری می‌سازند که قسمت بیرونی جاده نسبت به قسمت درونی، مرتفع‌تر باشد.



در صفحات گرافن، هر اتم کربن با سه اتم کربن دیگر پیوند دارد که زوایای بین این پیوندها ۱۲۰ درجه است. در آینده‌ای نه‌چندان دور، بهترین میکروفن‌های جهان با استفاده از گرافن ساخته می‌شوند. این میکروفن‌ها، قابلیت ردیابی امواج صوتی فراتر از دامنهٔ شدت شنوایی انسان را دارند.

کار در کلاس



۱ در مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ ABC و $A'B'C'$، $\hat{A} = \hat{A'}$. جاهای خالی را کامل کنید.

$$\overset{\Delta}{ABC} \square \overset{\Delta}{A'B'C'} \Rightarrow \frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{\quad} = \frac{BC}{\quad}$$

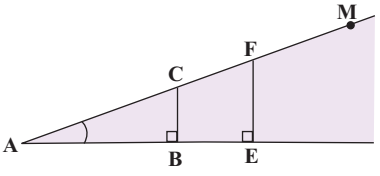
۲ از تساوی $\frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'}$، می‌توان نتیجه گرفت $\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$ (چرا؟). با توجه به این نکته، جاهای خالی را کامل کنید :

$$\frac{AB}{BC} = \frac{\quad}{\quad} \text{ و } \frac{BC}{AC} = \frac{\quad}{\quad}$$

نتیجه : اگر زاویهٔ A از مثلث قائم‌الزاویه ABC با زاویه A' از مثلث قائم‌الزاویه $A'B'C'$ (مطابق شکل بالا) برابر باشد، داریم :

$$\frac{BC}{AC} = \frac{B'C'}{A'C'} \text{ و } \frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'} \text{ و } \frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$$

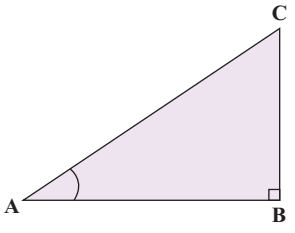
فعالیت



۱ در شکل سمت راست، درستی تساوی $\frac{BC}{AB} = \frac{EF}{AE}$ را بررسی کنید.

۲ نقطهٔ دیگری مثل M را در امتداد AC درنظر بگیرید و از آن نقطه، عمودی بر ضلع دیگرِ زاویه A رسم کنید و پای عمود را N بنامید. اکنون جاهای خالی را کامل کنید :

$$\frac{BC}{AB} = \frac{MN}{\quad} = \frac{\quad}{AE}$$



همان‌طور که در «کار در کلاس» بالا دیدیم، در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC برای زاویهٔ معین و حاده A، نسبت طول ضلع مقابل زاویهٔ A، به‌طول ضلع مجاور آن همواره مقداری ثابت است. این نسبت را تانژانت زاویهٔ A می‌نامیم و آن را با tanA نشان می‌دهیم. به‌عبارت دیگر، در مثلث قائم‌الزاویهٔ دلخواه ABC، داریم :

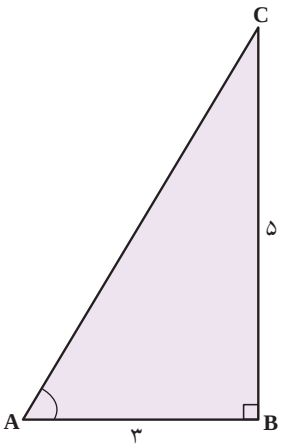
$$\tan A = \frac{\text{طول ضلع مقابل به زاویه A}}{\text{طول ضلع مجاور به زاویه A}} = \frac{BC}{AB}$$

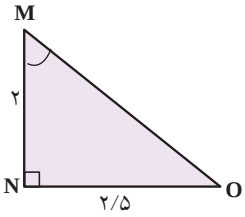
عکس تانژانت زاویه A را کتانژانت می‌نامیم و آن را با cotA نشان می‌دهیم. به‌عبارت دیگر، در مثلث قائم‌الزاویه ABC داریم :

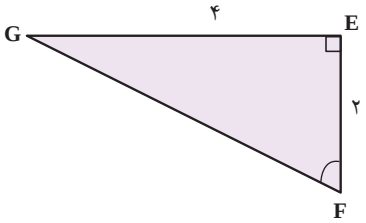
$$\cot A = \frac{\text{طول ضلع مجاور به زاویه A}}{\text{طول ضلع مقابل به زاویه A}} = \frac{AB}{BC}$$

فعالیت

۱ در هر یک از شکل‌های زیر، جاهای خالی را کامل کنید.

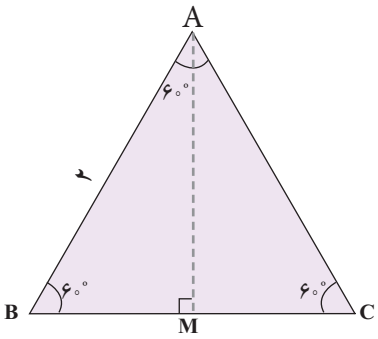






$\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{۵}{۳}$ $\quad \cot M = \frac{MN}{NO} = \frac{\quad}{۲/۵}$ $\quad \tan F = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$

$\cot A = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$ $\quad \tan M = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$ $\quad \cot F = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$



۲ مثلث متساوی‌الاضلاع ABC با اضلاعی به‌طول ۲ واحد را درنظر بگیرید.

الف) محل برخورد نیمساز زاویهٔ A با پاره‌خط BC را M بنامید. با توجه به خواص مثلث متساوی‌الساقین، AM ..... ضلع BC است. بنابراین

$BM = MC = \ldots\ldots$.

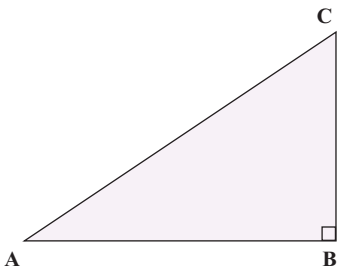
ب) با استفاده از رابطهٔ فیثاغورس، طول AM و حاصل کسرهای زیر را به‌دست آورید.

$\tan ۳۰^\circ = \frac{BM}{AM} = \frac{\quad}{\quad}$ ، $\tan ۶۰^\circ = \frac{AM}{BM} = \frac{\quad}{\quad}$.

پ) با استفاده از یک مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین، تانژانت و کتانژانت زاویهٔ ۴۵° را پیدا کنید.

در هر مثلث قائم‌الزاویه ABC، نسبت طول ضلع مقابل زاویهٔ حادهٔ A به‌طول وتر، همواره مقداری ثابت است که آن‌را سینوس زاویهٔ A می‌نامیم و با sinA نشان می‌دهیم. به‌عبارت دیگر

$$\sin A = \frac{BC}{AC} .$$



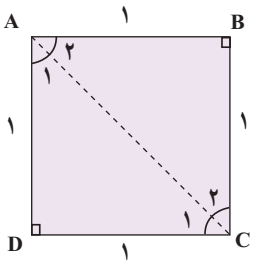
همچنین نسبت طول ضلع مجاور زاویهٔ حادهٔ A به‌طول وتر نیز مقداری ثابت است که آن را کسینوس زاویهٔ A می‌نامیم و آن‌را با cosA نشان می‌دهیم. به‌عبارت دیگر $\cos A = \frac{\quad}{\quad}$.

به سادگی می‌توان دید در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، $\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{\frac{BC}{AC}}{\frac{AB}{AC}} = \frac{\sin A}{\cos A}$ و از این‌رو $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$. به‌طور مشابه، می‌توان دید $\cot A = \frac{\cos A}{\sin A}$.

در یک مثلث قائم‌الزاویه، نسبت های سینوس، کسینوس، تانژانت و کتانژانت را نسبت‌های مثلثاتی می‌نامیم.

مثال

خانم جلالی از دانش‌آموزان خواست تا نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ ۴۵° را حساب کنند. او ابتدا یک مربع با اضلاعی به طول ۱ واحد رسم کرد و از دانش‌آموزان خواست تا قطر AC را رسم کرده و سپس طول آن‌را حساب کنند.



فریبا : با توجه به اینکه مثلث ADC قائم‌الزاویه است، داریم $(AC)^۲=(DC)^۲+(AD)^۲$. در نتیجه $(AC)^۲=۱^۲+۱^۲$ و از این‌رو $(AC)^۲=۲$. چون اندازه قطر همواره عددی مثبت است، پس $AC=\sqrt{۲}$.

معلم : با توجه به اینکه مثلث ADC متساوی‌الساقین است، از این‌رو ..... $=\hat{C}_۱=\hat{A}_۱$.

مبینا : طبق تعریف سینوس، $\sin A_۱=\sin ۴۵^\circ=\frac{DC}{\text{وتر}}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\frac{\quad}{۲}$.

سبا : من هم می‌توانم با توجه به روابط بالا کسینوس ۴۵° را پیدا کنم.

$$\cos A_۱=\cos ۴۵^\circ=\frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}=\frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}=\frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}.$$

مریم : اکنون در مثلث قائم‌الزاویهٔ ADC، طبق تعریف داریم

$$\tan A_۱=\tan ۴۵^\circ=\frac{۱}{۱}=۱ \quad \text{و} \quad \cot A_۱=\cot ۴۵^\circ=\frac{۱}{۱}=۱.$$

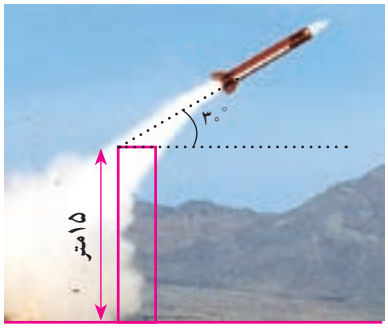
کار در کلاس

به کمک شکل فعالیت قبل، با پیدا کردن نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های ۳۰° و ۶۰°، جدول زیر را کامل کنید (در صورت لزوم، کسرها را گویا کنید).

مقدار	۳۰°	۴۵°	۶۰°
sinA		$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	
cosA		$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	
tanA	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$
cotA	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

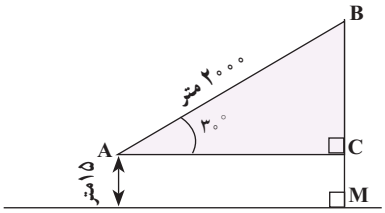
مثال

یک موشک در ارتفاع ۱۵متری از سطح زمین و با زاویهٔ ۳۰° پرتاب می‌شود. می‌خواهیم بدانیم پس از طی ۲۰۰۰ متر با همین زاویه، موشک به چه ارتفاعی از سطح زمین می‌رسد؟



حل: ابتدا یک مدل ریاضی برای حل این مسئله می‌سازیم. با توجه به شکل زیر، به‌سادگی می‌توان دید، ارتفاع موشک از سطح زمین برابر است با :

$BC+MC=BC+\ldots\ldots$



بنابراین کافی است طول BC را پیدا کنیم. می‌دانیم $\sin ۳۰^\circ = \frac{۱}{۲}$. پس در مثلث قائم‌الزاویه ABC داریم :

$$\sin ۳۰^\circ = \frac{۱}{۲} = \frac{BC}{\ldots\ldots} \Rightarrow BC = \ldots\ldots$$

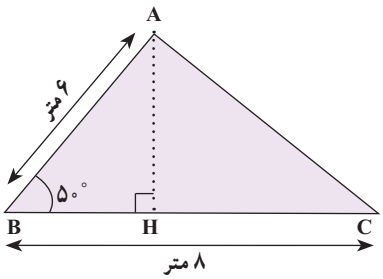
و از این‌رو

ارتفاع موشک = ... + ... = ...

فعالیت

۱ یک زاویهٔ ۵۰° رسم کنید. با تشکیل یک مثلث قائم‌الزاویه و اندازه‌گیری طول‌های موردنظر با یک خط‌کش مدرج، نسبت‌های مثلثاتی زاویه ۵۰° را به‌صورت تقریبی حساب کنید. سپس با ماشین حساب، مقادیر واقعی را به‌دست آورید و با مقادیر قبل مقایسه کنید.

۲ می‌خواهیم مساحت مثلث ABC در شکل زیر را پیدا کنیم. می‌دانیم :



مساحت مثلث ABC $= \frac{۱}{۲}$ قاعده × ارتفاع

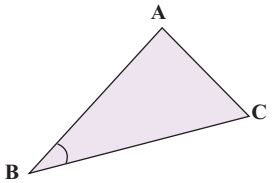
الف) با توجه به اینکه $\sin ۵۰^\circ \simeq ۰/۷۶$، داریم :

$$\sin ۵۰^\circ = \frac{AH}{\text{وتر}} = \frac{AH}{\ldots\ldots} \Rightarrow AH \simeq \ldots\ldots$$

ب) با توجه به قسمت (الف) داریم :

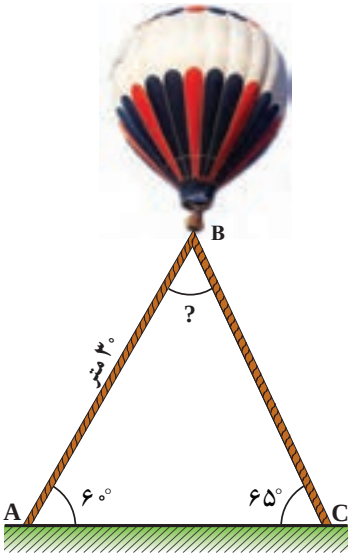
$$\text{مساحت مثلث ABC} = \frac{۱}{۲} AH \times BC \simeq \frac{۱}{۲} \times \ldots\ldots \times \ldots\ldots \simeq \ldots\ldots$$

۳ در هر مثلث، با معلوم بودن مقادیر طول دو ضلع مثلث و اندازهٔ زاویهٔ بین آنها نشان دهید :



$$\text{مساحت } \overset{\Delta}{ABC} = \frac{۱}{۲} \times AB \times BC \times \sin B.$$

کار کلاس

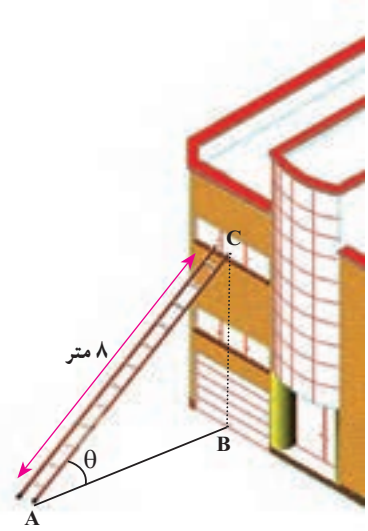


۱ در راه‌پیمایی ۲۲ بهمن، یک بالن اطلاع‌رسانی توسط دو طناب به زمین بسته شده است. طول یکی از طناب‌ها ۳۰ متر است. می‌خواهیم طول طناب دوم را پیدا کنیم.

الف) ابتدا اندازهٔ زاویهٔ B را به‌دست آورید. سپس ارتفاع وارد بر ضلع AC را رسم کنید و آن‌را BH بنامید.

ب) طول BH را با استفاده از سینوس زاویهٔ A به‌دست آورید.

پ) اکنون با استفاده از سینوس زاویهٔ 65°، طول طناب دوم را پیدا کنید. $(\sin 65^\circ \simeq ۰/۹)$



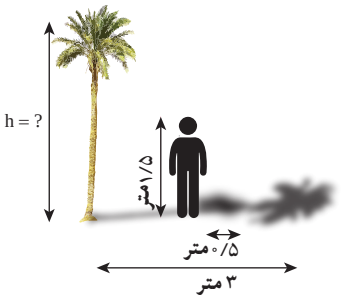
۲ مطابق شکل مقابل، نردبانی به طول ۸ متر در زیر پنجرهٔ ساختمانی قرار گرفته است. اگر زاویهٔ نردبان با سطح زمین $\theta=30^\circ$ باشد، ارتفاع پنجره تا زمین را محاسبه کنید. فاصلهٔ پای نردبان تا ساختمان چقدر است؟

$$\sin\theta = \frac{\cdots\cdots}{۸} \Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{BC}{۸} \Rightarrow ۲BC = \cdots\cdots \Rightarrow BC = \cdots\cdots$$

اکنون به‌کمک رابطهٔ فیثاغورس داریم :

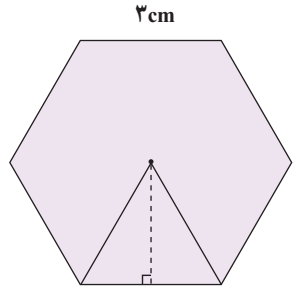
$$AB^۲ = AC^۲ - BC^۲ = \cdots\cdots - \cdots\cdots = \cdots\cdots \Rightarrow AB = \cdots\cdots$$

تمرین



۱ علی می‌خواهد ارتفاع یک درخت را که طول سایهٔ آن ۳ متر است، حساب کند. قد علی ۱/۵ متر و طول سایهٔ او در همان لحظه ۰/۵ متر است. ارتفاع درخت چقدر است؟

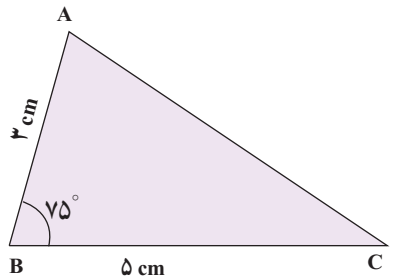
۲ مساحت شش ضلعی منتظم زیر را به‌دست آورید.



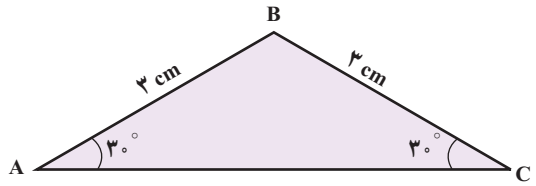
۳ یک هواپیما در ارتفاع ۲km از سطح زمین در حال فرودآمدن است. اگر زاویهٔ هواپیما با افق حدود 13° باشد، هواپیما در چه فاصله‌ای از نقطهٔ A فرود می‌آید.

$\tan 13^\circ \simeq 0/23$

۴ فرض کنید $\sin 75^\circ \simeq 0/96$. مساحت مثلث ABC در شکل زیر را به‌دست آورید.



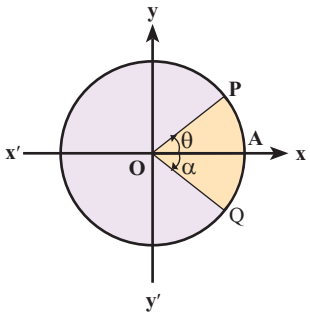
۵ مساحت مثلث ABC را پیدا کنید.



درس دوم: دایره مثلثاتی

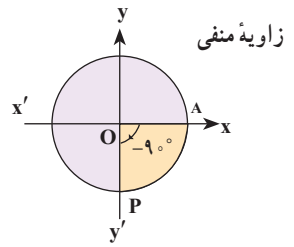
می‌توان از دایرهٔ مثلثاتی برای بیان مکان، زمان و توصیف بسیاری از حرکات همانند چرخش، حرکت دورانی، حرکات دوره‌ای، حرکات تناوبی و حرکات رفت و برگشتی در یک مسیر مشخص، استفاده کرد. یکی از این کاربردها، استفاده در سیستم رادارهاست.

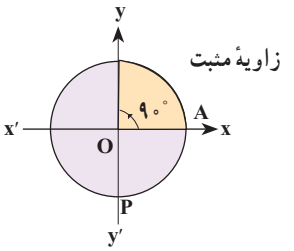
دایرهٔ روبه‌رو، به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۱ را درنظر بگیرید. اگر با حرکت در خلاف جهت عقربه‌های ساعت به نقطه‌ای مانند P برسیم، زاویهٔ $A\hat{O}P$ مثبت است و اگر با حرکت در جهت عقربه‌های ساعت به نقطه‌ای مانند Q برسیم، زاویهٔ $A\hat{O}Q$ منفی است. چنین دایره‌ای را یک دایرهٔ مثلثاتی می‌نامیم.

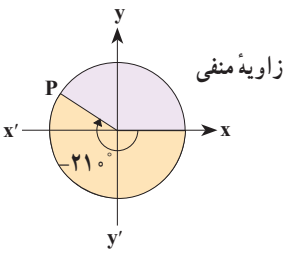


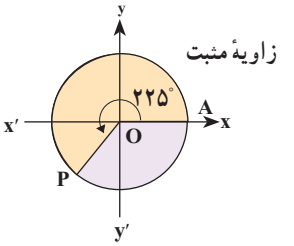
مثال

در هر یک از دایره‌های مثلثاتی سمت راست، مقدار زاویه‌های -۹۰°، ۹۰°، -۲۱۰° و ۲۲۵° داده شده‌اند.



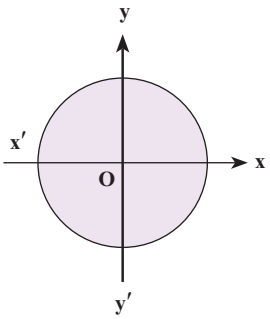




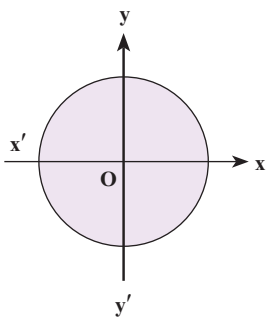


فعالیت

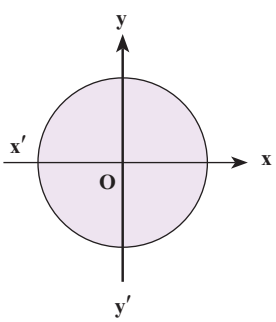
۱ هر یک از زاویه‌های زیر را روی دایره‌های مثلثاتی داده شده، نشان دهید.



-۳۰°

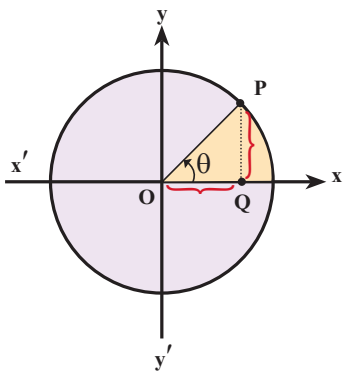


۱۳۵°



-۲۷۰°

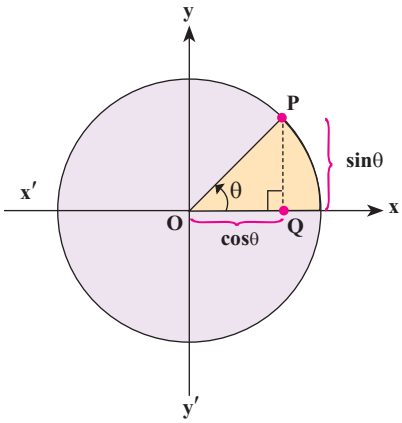
۲ فرض کنید P(x,y) نقطه‌ای دلخواه روی دایرهٔ مثلثاتی روبه‌رو باشد و θ زاویه‌ای است که نیم‌خط $\overrightarrow{OP}$ با محور $\overrightarrow{Ox}$ می‌سازد. از نقطهٔ P خطی بر محور $\overrightarrow{Ox}$ عمود می‌کنیم و محل برخورد را Q می‌نامیم.



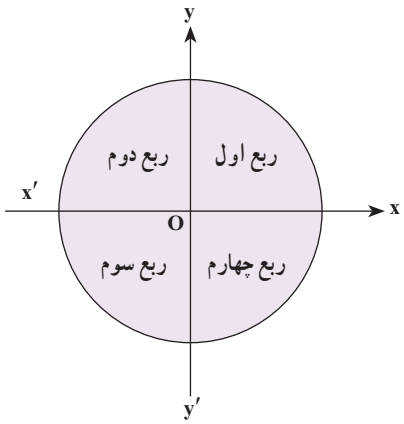
الف) در مثلث OPQ، نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ θ را به‌دست آورید.

$\tan\theta = ...$ و $\sin\theta = ...$ و $\cos\theta = ...$

ب) با توجه به قسمت (الف) می‌توان دید فاصلهٔ Q تا مبدأ با ..... برابر است و فاصلهٔ نقطهٔ P تا پای عمود، یعنی نقطهٔ Q با ..... برابر است.



با توجه به قسمت (ب) محور $x'ox$ یا محور xها را محور کسینوس‌ها و محور $y'oy$ یا محور yها را محور سینوس‌ها می‌نامیم. به‌عبارت دیگر، اگر P نقطهٔ دلخواهی روی دایرهٔ مثلثاتی باشد که نیم‌خط OP با قسمت مثبت محور xها زاویهٔ θ می‌سازد، آنگاه P نقطه‌ای با مختصات (x,y) است که در آن $x=\cos\theta$ و $y=\sin\theta$.



نکته : دو محور عمود بر هم $x'ox$ و $y'oy$ صفحه را به چهار قسمت تقسیم می‌کنند. هر یک از این قسمت‌ها را یک ناحیه یا یک ربع مثلثاتی می‌نامیم. با توجه به جهت دایرهٔ مثلثاتی، ناحیهٔ xoy را ربع اول، ناحیهٔ $x'oy$ را ربع دوم، ناحیهٔ $x'oy'$ را ربع سوم و ناحیهٔ xoy' را ربع چهارم مثلثاتی می‌نامیم.

نکته : زاویه‌های 0°، 90°، 180°، 270° و 360° زوایای مرزی هستند و آنها را در هیچ‌کدام از ناحیه‌های فوق در نظر نمی‌گیریم.

کار در کلاس

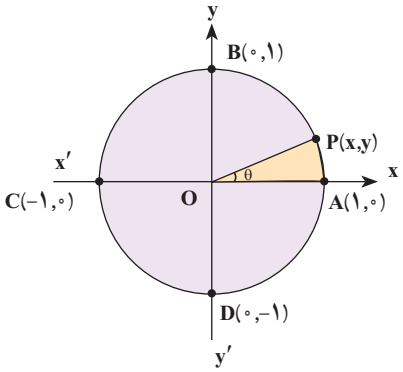
۱ مشخص کنید انتهای کمان مربوط به هر یک از زاویه‌های زیر در کدام یک از نواحی چهارگانه قرار می‌گیرد؟

الف) -30° ب) 65° پ) 182° ت) -95°

۲ با توجه به آنچه در فعالیت قبل، به‌دست آوردید، توضیح دهید که اگر انتهای کمان روبه‌رو به زاویه‌ای در ربع اول باشد (زاویه در ربع اول باشد)، آنگاه چرا نسبت‌های مثلثاتی آن زاویه، همگی مثبت‌اند؟

مثال

می‌خواهیم نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ 0° را به‌دست آوریم. می‌دانیم در دایرهٔ مثلثاتی روبه‌رو، $\sin\theta=y$ و $\cos\theta=x$. اگر $\theta=0^\circ$، آنگاه نقطه P روی نقطهٔ A قرار می‌گیرد و داریم $\sin 0^\circ=0$، همچنین $\cos 0^\circ=1$ و $\tan 0^\circ=\frac{y}{x}=\frac{0}{1}=0$، اما $\cot 0^\circ$ تعریف نمی‌شود (چرا؟).

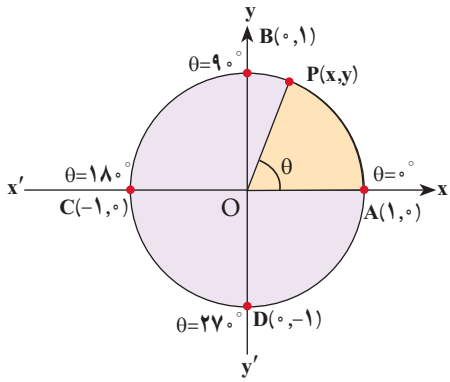


فعالیت

۱ در دایرهٔ مثلثاتی روبه‌رو اگر $\theta=۹۰^\circ$، نسبت‌های مثلثاتی θ را پیدا کنید.

۲ اگر $\theta=۱۸۰^\circ$، نسبت‌های مثلثاتی θ را پیدا کنید.

۳ اگر $\theta=۲۷۰^\circ$، نسبت‌های مثلثاتی θ را پیدا کنید.



کار در کلاس

با توجه به نتایج بالا جدول زیر را کامل کنید :

مقدار	۰°	۹۰°	؟	۲۷۰°	۳۶۰°
sinθ	۰		۰	−۱	۰
cosθ			−۱		
tanθ		تعریف نشده	۰		
cotθ			تعریف نشده		

α در ربع اول است $\Rightarrow ۰^\circ < \alpha < ۹۰^\circ$

α در ربع دوم است $\Rightarrow ۹۰^\circ < \alpha < ۱۸۰^\circ$

α در ربع سوم است $\Rightarrow ۱۸۰^\circ < \alpha < ۲۷۰^\circ$

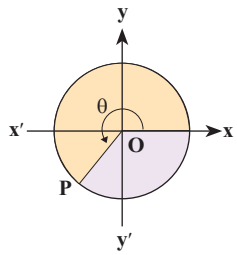
α در ربع چهارم است $\Rightarrow ۲۷۰^\circ < \alpha < ۳۶۰^\circ$

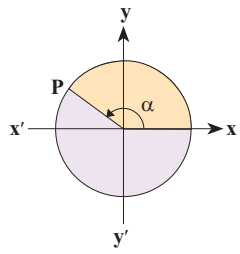
فعالیت

۱ فرض کنید θ زاویه‌ای در ربع سوم دایرهٔ مثلثاتی باشد. با توجه به اینکه $y=\sin\theta$ و $x=\cos\theta$ و در ربع سوم، $x,y<۰$، علامت هر یک از نسبت‌های مثلثاتی θ را در ربع سوم مشخص کنید.

۲ فرض کنید α زاویه‌ای در دایرهٔ مثلثاتی در ربع دوم باشد. فعالیت قبل را برای α نیز تکرار کنید.

۳ جدول زیر را کامل کنید :

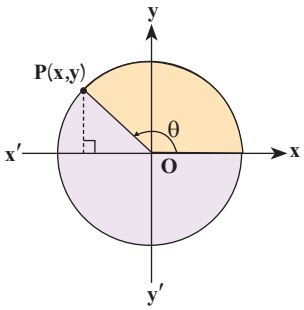




مقدار	ربع اول $x,y>۰$	ربع دوم	ربع سوم	ربع چهارم .....
sinθ	+			
cosθ		−		
tanθ			+	
cotθ				−

نکته : برای هر زاویهٔ دلخواه θ،
$-۱ \le \sin\theta \le ۱$ و $-۱ \le \cos\theta \le ۱$.

مثال



آقای جلالی، از دانش‌آموزان پرسید : اگر θ زاویه‌ای در ربع دوم مثلثاتی باشد و $\sin\theta=\frac{۵}{۷}$ ، آیا می‌توان سایر نسبت‌های مثلثاتی θ را پیدا کرد؟

امین : می‌دانیم $\sin\theta=y=\frac{۵}{۷}$ ، بنابراین P نقطه‌ای به عرض ..... است.

معلم : درست است و حالا طول نقطه P چگونه به‌دست می‌آید؟

امیرعلی : طبق رابطهٔ فیثاغورس، در مثلث قائم‌الزاویه داریم : $x^۲+y^۲=۱$. بنابراین ..... و در نتیجه $x^۲=\frac{۲۴}{۴۹}$. پس داریم ..... = x.

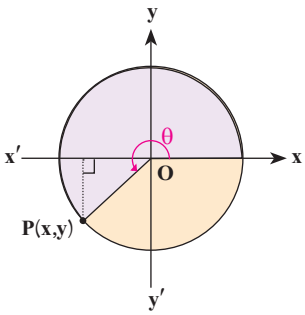
معلم : آفرین، این راه کاملاً درست است، ولی کدام مقدار قابل قبول است؟

محمد مهدی : چون θ زاویه‌ای در ربع ..... است، پس طول نقطهٔ P منفی است و از این‌رو ..... =x قابل قبول است.

معلم : استدلال محمدمهدی کاملاً منطقی است و P نقطه‌ای به مختصات (..... و .....) است. در نتیجه :

$$\cos\theta=x=\cdots\cdots \quad , \quad \tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots} \quad , \quad \cot\theta=\frac{\cdots}{\cdots}=\frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}$$

فعالیت



۱ فرض کنید نقطه P روی دایرهٔ مثلثاتی قرار دارد به‌طوری که $\cos\theta=\frac{-\sqrt{۲}}{۲}$. می‌دانیم θ در ربع سوم مثلثاتی قرار دارد، بنابراین $y=\sin\theta=\cdots\cdots$.

الف) مختصات نقطهٔ P را به‌دست آورید.

ب) سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویه θ را به‌دست آورید.

۲ اگر $\cos\alpha=\frac{-۲}{۵}$ ، آنگاه در مورد ناحیه‌ای که α در آن قرار می‌گیرد، بحث کنید.

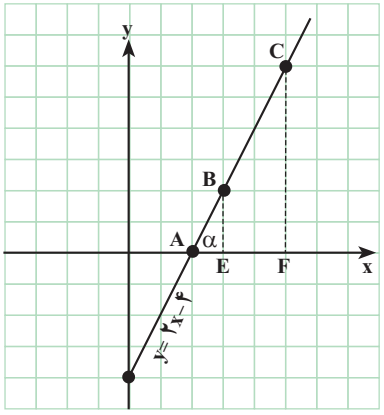
۳ زاویه‌ای مثال بزنید که سینوس آن منفی و کسینوس آن مثبت باشد.

رابطه شیب خط با تانژانت زاویه

فعالیت

نمودار خط $y=2x-4$ در شکل روبه‌رو رسم شده است. دو نقطهٔ B و C روی این خط را درنظر بگیرید و خطی از آنها به محور xها عمود کنید. پای عمودها را به ترتیب، E و F بنامید.

الف) تانژانت زاویهٔ α را به‌دست آورید.



ب) شیب این خط را پیدا کنید.

$$\text{شیب خط} = \frac{\text{تفاضل عرض‌ها}}{\text{تفاضل طول‌ها}} = \ldots\ldots\ldots$$

پ) از مقایسهٔ قسمت (الف) و (ب) چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ توضیح دهید.

شیب هر خط که محور افقی را قطع می‌کند، برابر است با تانژانت زاویهٔ بین آن خط و جهت مثبت محور افقی. به‌عبارت دیگر، اگر α زاویه‌ای باشد که خط با جهت مثبت محور افقی می‌سازد، آنگاه :

$$\text{شیب خط} = \tan\alpha$$

کار در کلاس

۱ مراحل فعالیت بالا را برای خط‌های زیر، تکرار کنید.

الف) $2y-3x=5$ ب) $x+y=2$

۲ معادلهٔ خطی را بنویسید که زاویهٔ آن با جهت مثبت محور xها 30° است و از نقطهٔ $(1,0)$ می‌گذرد.

تمرین

۱ هر یک از زاویه‌های زیر را روی دایرهٔ مثلثاتی رسم کنید، سپس مشخص کنید در کدام یک از نواحی چهارگانه قرار می‌گیرد.

الف) $+270^\circ$ ب) 225° پ) -135° ت) 185°

۲ در هر یک از موارد زیر، نسبت مثلثاتی زاویه‌ای داده شده است. سایر نسبت‌های مثلثاتی را به‌دست آورید.

الف) $\cos\alpha = \frac{۳}{۷}$ (α در ربع چهارم)

ب) $\sin\beta = \frac{-۱}{۲}$ (β در ربع سوم)

۳ اگر $\tan\theta$ و $\sin\theta$ هم علامت باشند، آنگاه θ در کدام ربع مثلثاتی قرار دارد؟

۴ حدود زاویهٔ θ را در هر یک از حالات زیر مشخص کنید.

الف) $\sin\theta>۰ , \cos\theta>۰$ ب) $\sin\theta<۰ , \cos\theta>۰$

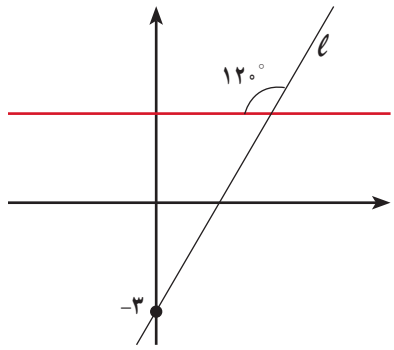
۵ اگر $\sin\alpha\times\cos\alpha<۰$، آنگاه α در کدام یک از نواحی چهارگانه می‌تواند قرار بگیرد؟ چرا؟

۶ زاویه‌ای مثل α پیدا کنید به‌طوری‌که $\tan\alpha > \cot\alpha$. اکنون زاویه‌ای مثل β پیدا کنید، به‌طوری‌که $\cot\beta > \tan\beta$. از این تمرین چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۷ در تمرین ۶ به‌جای تانژانت و کتانژانت به ترتیب سینوس و کسینوس قرار دهید و در مورد آن بحث کنید.

۸ معادلهٔ خطی را بنویسید که زاویهٔ آن با جهت مثبت محور xها ۴۵° است و نقطهٔ $(۰,۲)$ روی آن قرار دارد.

۹ با توجه به شکل زیر، معادلهٔ خط ℓ را به‌دست آورید.



در اخترشناسی، اغلب به مسئله‌هایی برمی‌خوریم که برای حل آنها به مثلثات نیازمندیم. ساده‌ترین این مسئله‌ها، پیدا کردن یک کمان دایره برحسب درجه است. پیدایش مثلثات براساس روابط بین کمان‌ها و وترها بوده است. کهن‌ترین جدولی که به ما رسیده است و در آن طول وترهای برخی کمان‌ها داده شده است متعلق به هیپارک، اخترشناس سدهٔ دوم میلادی است و شاید بتوان تنظیم این جدول را نخستین گام در راه پیدایش مثلثات دانست. همهٔ کارهای ریاضی‌دانان و اخترشناسان یونانی در درون هندسه انجام گرفت و هرگز به مفهوم‌های اصلی مثلثات نرسیدند. خوارزمی نخستین جدول‌های سینوسی را تنظیم کرد و پس از او همه ریاضی‌دانان ایرانی گام‌هایی در جهت تکمیل این جدول‌ها و گسترش مفهوم‌های مثلثاتی برداشتند. مروزی جدول سینوس‌ها را تقریباً ۳۰ درجه به ۳۰ درجه تنظیم کرد و برای نخستین بار به دلیل نیازهای اخترشناسی مفهوم تانژانت را تعریف کرد. جدی‌ترین تلاش‌ها به‌وسیله ابوریحان بیرونی و ابوالوفای بوزجانی انجام گرفت و سرانجام خواجه‌نصیرالدین‌طوسی با جمع‌بندی کارهای دانشمندان ایرانی پیش از خود، نخستین کتاب مستقل مثلثات را نوشت. بعد از طوسی، جمشید کاشانی ریاضی‌دان ایرانی با استفاده از روش زیبایی که برای حل معادلهٔ درجه سوم پیدا کرده بود، توانست راهی را برای محاسبهٔ سینوس کمان یک درجه، با هر دقت دلخواه پیدا کند. پیشرفت بعدی دانش مثلثات از سدهٔ پانزدهم میلادی و در اروپای غربی انجام گرفت.

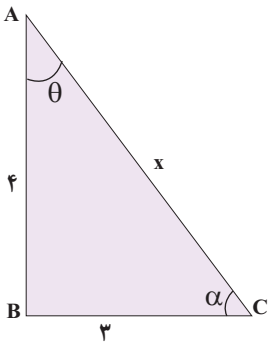
درس سوم: روابط بین نسبت‌های مثلثاتی

در درس‌های قبل با نسبت‌های مثلثاتی و دایرهٔ مثلثاتی آشنا شدید. در این درس روابطی بین این نسبت‌ها و کاربردهایی از آنها را بیان می‌کنیم.

فعالیت

مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC را درنظر بگیرید.

الف اندازهٔ وتر یعنی x را بیابید و سپس مقدار عددی هر یک از چهار نسبت مثلثاتی را برای زاویهٔ θ و α به‌دست آورید.



$\sin\theta = \frac{BC}{AC} = \frac{۳}{\quad}$ $\qquad \sin\alpha = \cdots\cdots$

$\cos\theta = \cdots\cdots$ $\qquad \cos\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{۳}{\cdots\cdots}$

$\tan\theta = \frac{BC}{AB} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \cdots$ $\qquad \tan\alpha = \frac{AB}{BC} = \cdots\cdots$

$\cot\theta = \frac{۱}{\cdots\cdots} = \frac{\cos\theta}{\cdots\cdots} = \cdots\cdots$ $\qquad \cot\alpha = \cdots\cdots$

ب با توجه به مقادیر عددی حاصل در قسمت (الف) مقدار $\sin^۲\theta+\cos^۲\theta$ و $\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha$ را به‌دست آورید.

$\sin\theta\times\sin\theta = (\sin\theta)^۲ = \sin^۲\theta$

پ درستی رابطهٔ $\sin^۲\theta+\cos^۲\theta = ۱$ را با استفاده از تعریف و اضلاع مثلث، بررسی کنید.

$$(\sin\theta)^۲ + (\cos\theta)^۲ = \sin^۲\theta + \cos^۲\theta = (\frac{BC}{AC})^۲ + (\frac{AB}{AC})^۲ = \frac{BC^۲ + AB^۲}{AC^۲} = \cdots\cdots$$

ت مشابه قسمت (پ) درستی رابطهٔ $\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha = ۱$ را بررسی کنید.

اگر α زاویهٔ دلخواهی باشد، همواره داریم :

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

کار در کلاس

با توجه به رابطهٔ بالا، یعنی $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ جاهای خالی را پر کنید :

الف) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \Rightarrow \sin^2\alpha=\ldots\ldots\ldots \Rightarrow \sin\alpha=\pm\sqrt{\ldots\ldots\ldots}$

ب) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \Rightarrow \cos^2\alpha=\ldots\ldots\ldots \Rightarrow \cos\alpha=\pm\sqrt{\ldots\ldots\ldots}$

تذکر : در رابطه‌هایی که به‌دست آوردید، علامت نسبت مثلثاتی زاویهٔ α، با توجه به ناحیه‌ای که زاویهٔ α در آن قرار دارد، تعیین می‌شود.

مثال

اگر α زاویه‌ای در ناحیهٔ سوم مثلثاتی باشد و $\sin\alpha=\frac{-۴}{۵}$، آنگاه مقدار $\tan\alpha$، $\cos\alpha$ و $\cot\alpha$ را به‌دست آورید.

$$\cos\alpha=\pm\sqrt{۱-\sin^2\alpha} \xrightarrow{\alpha \text{ در ناحیه سوم}} \cos\alpha=-\sqrt{۱-\frac{۱۶}{۲۵}}=-\frac{۳}{۵}$$

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{-\frac{۴}{۵}}{-\frac{۳}{۵}}=\frac{۴}{۳} \qquad \cot\alpha=\frac{۱}{\tan\alpha}=\frac{۱}{\frac{۴}{۳}}=\frac{۳}{۴}$$

کار در کلاس

رابطه‌های تانژانت برحسب کسینوس و کتانژانت برحسب سینوس

در این قسمت رابطه‌ای برای تانژانت بر حسب کسینوس یک زاویه و همچنین رابطه‌ای برای کتانژانت برحسب سینوس، به‌دست می‌آوریم :

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \Rightarrow \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+\frac{\cos^2\alpha}{\ldots\ldots\ldots}=\frac{۱}{\ldots\ldots\ldots}$$

$$\Rightarrow \tan^2\alpha+۱=\frac{۱}{\cos^2\alpha} \qquad (\cos\alpha\neq ۰) \quad (۱)$$

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \Rightarrow \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}+\ldots\ldots\ldots=\ldots\ldots\ldots$$

$$\Rightarrow ۱+\cot^2\alpha=\frac{۱}{\sin^2\alpha} \qquad (\sin\alpha\neq ۰) \quad (۲)$$

۳ اگر $۹۰^\circ < \alpha < ۱۸۰^\circ$ و $\tan\alpha = \frac{-۳}{۴}$ ، آنگاه سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ α را به‌دست آورید.

ساعت آفتابی وسیله‌ای است که زمان را با استفاده از مکان خورشید در آسمان می‌سنجد و از میله‌ای ساخته شده است که روی صفحه‌ای قرار دارد و ساعت‌های شبانه‌روز، روی صفحه نشانه‌گذاری شده‌اند. وقتی مکان خورشید در آسمان عوض می‌شود، مکان سایهٔ میله هم روی صفحه جابه‌جا می‌شود و ساعت را نشان می‌دهد.

اتحاد مثلثاتی

هر یک از تساوی‌های $\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha = ۱$ ، $۱ + \tan^۲\alpha = \frac{۱}{\cos^۲\alpha}\ (\cos\alpha \neq ۰)$ و $۱ + \cot^۲\alpha = \frac{۱}{\sin^۲\alpha}\ (\sin\alpha \neq ۰)$ را که به ازای هر α همواره برقرار است، یک **اتحاد مثلثاتی** می‌نامیم.

هرگاه بخواهیم ثابت کنیم بین دو عبارت مثلثاتی یک تساوی (اتحاد) برقرار است، می‌توانیم یک طرف تساوی را بنویسیم و با توجه به روابط بین نسبت‌های مثلثاتی به‌طرف دیگر برسیم.

به مثال زیر توجه کنید :

مثال

درستیِ اتحاد مثلثاتی زیر را بررسی کنید.

$$(\frac{۱}{\cos\theta} + \tan\theta)(۱ - \sin\theta) = \cos\theta$$

$$(۱+\sin\theta)(۱-\sin\theta) \overset{\text{اتحاد مزدوج}}{=\!=} ۱-\sin^۲\theta = \cos^۲\theta$$

حل :

$$\text{طرف چپ} = (\frac{۱}{\cos\theta} + \tan\theta)(۱ - \sin\theta) = (\frac{۱}{\cos\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta})(۱ - \sin\theta)$$

$$= (\frac{۱+\sin\theta}{\cos\theta})(۱ - \sin\theta) = \frac{۱-\sin^۲\theta}{\cos\theta} = \frac{\cos^۲\theta}{\cos\theta} = \cos\theta = \text{طرف راست}$$

کار در کلاس

۱ با فرض بامعنی بودن هر کسر، درستی هر یک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید :

الف) $\sin^۴\theta - \cos^۴\theta = \sin^۲\theta - \cos^۲\theta$

$$\text{طرف چپ} = \sin^۴\theta - \cos^۴\theta \overset{\text{اتحاد مزدوج}}{=\!=} (\sin^۲\theta - \cos^۲\theta) \times (\sin^۲\theta + \cos^۲\theta) = \ldots\ldots$$

ب) $\frac{۱}{\cos\alpha}+\cot\alpha=\frac{\tan\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha}$

طرف راست $=\frac{\tan\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\tan\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\sin\alpha}+\cdots\cdots=\cdots\cdots+\cdots\cdots$

۲ کدام‌یک از تساوی‌های زیر یک اتحاد است؟ چرا؟

الف) $\sin^۴\alpha+\cos^۴\alpha=۱-۲\sin\alpha\cos\alpha$ ب) $\sin^۴\alpha+\cos^۴\alpha=۱-۲\sin^۲\alpha\cos^۲\alpha$

۳ با ضرب کردن طرفینِ اتحاد مثلثاتی $۱+\tan^۲\alpha=\frac{۱}{\cos^۲\alpha}$ در $\cot\alpha$ یک اتحاد مثلثاتی بسازید؛ سپس درستی آن را اثبات کنید.

تمرین

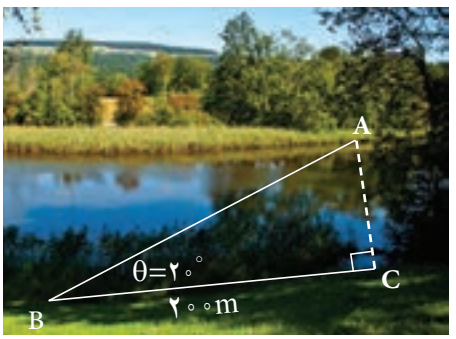
۱ فرض کنید α زاویه‌ای در ناحیهٔ دوم مثلثاتی باشد و $\cos\alpha=-\frac{۳}{۵}$. نسبت‌های دیگر مثلثاتیِ زاویهٔ α را به‌دست آورید.

۲ اگر $\tan\alpha=\frac{-۴}{۳}$ و α زاویه‌ای در ناحیهٔ چهارم مثلثاتی باشد، نسبت‌های دیگر مثلثاتی زاویهٔ α را به‌دست آورید.

۳ اگر $\sin۱۳۵^\circ=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$، آنگاه نسبت‌های دیگر مثلثاتیِ زاویه ۱۳۵° را به‌دست آورید.

۴ اگر $\tan۲۴۰^\circ=\sqrt{۳}$، آنگاه نسبت‌های دیگر مثلثاتیِ زاویهٔ ۲۴۰° را به‌دست آورید.

۵ شخصی می‌خواهد عرض یک رودخانه را اندازه‌گیری کند. او ابتدا مطابق شکل، نقطه‌ای چون C و سپس نقطه‌ای مانند A را در امتداد C و در طرف دیگر رودخانه مشخص می‌کند و به اندازهٔ ۲۰۰ متر از C به‌صورت افقی در امتداد رودخانه حرکت می‌کند تا به نقطهٔ B برسد. اگر زاویهٔ دید این شخص (از نقطهٔ B به نقطهٔ A)، ۲۰° باشد و $\sin۲۰^\circ\simeq۰/۳۴$، او چگونه می‌تواند عرض رودخانه را محاسبه کند؟ (پاسخ خود را تا دو رقم اعشار برحسب متر بنویسید.)



۶ با فرض بامعنی بودن هر کسر، درستی هر یک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $\frac{۱}{\sin\theta}\times\tan\theta=\frac{۱}{\cos\theta}$

ب) $\frac{\cos\theta}{۱+\sin\theta}=\frac{۱-\sin\theta}{\cos\theta}$

پ) $\frac{۱+\tan\alpha}{۱+\cot\alpha}=\tan\alpha$

ت) $۱-\frac{\cos^{۲}x}{۱+\sin x}=\sin x$

ث) $\frac{۱}{\cos x}-\tan x=\frac{\cos x}{۱+\sin x}$

اولین دانشمندی که جدول سینوس، کسینوس، شعاع دایره ای و نسبت مثلثاتی را کشف کرد، ابوالوفا محمد بن یحیی بن اسماعیل بن عباس بوزجانی خراسانی است. وی یکی از مفاخر علمی ایران، ریاضی‌دان و اخترشناس سدهٔ چهارم هجری قمری در اول رمضان ۳۲۸ (هـ.ق) در بوزجان (تربت جام امروزی)، در مرز خراسان و افغانستان زاده شد. او مقدمات ریاضیات زمان را، همان‌جا، نزد دایی و عمویش فرا گرفت. در سن ۲۰ سالگی به بغداد رفت و نزد اساتید مختلفی به تحصیل خود ادامه داد. وی پس از مدتی به یکی از دانشمندان مشهور زمان خود تبدیل شد و با دانشمندان هم عصر خود، مکاتبات علمی داشت. به عنوان مثال، وقتی ابوریحان در خوارزم بود، برای رصد همزمان گرفتگی ماه، با بوزجانی که در بغداد بود، قرار گذاشتند تا نتیجه دو رصد که در دو نقطه مختلف انجام می‌گرفت را با هم مقایسه کنند. ابوالوفا بر بسیاری از آثار پیشینیان (ایرانی و یونانی) مثل «مقدمات» اقلیدس، «جبر و مقابله» خوارزمی، «جبر» دیوفانت، «مجسطی» بطلمیوس و غیره تفسیر نوشت. خود نیز ابتکارات و نوآوری‌های بسیاری در هندسه و مثلثات دارد. سرانجام وی در سوم رجب ۳۸۸ (هـ.ق) در بغداد درگذشت.