



بندر سیراف، شهر باستانی استان بوشهر یکی از مکان‌های تاریخی و از نقاط دیدنی ایران است که زمانی دارای رونق چشمگیری بوده و در آن زمان با سیصد هزار نفر جمعیت، روابط تجاری زیادی با روم و یونان (در اروپا) و ماداگاسکار (در آفریقا)، هند و چین (در آسیا) داشته است. با این همه زمین‌لرزه شدیدی در قرن چهارم هجری قمری ویران شدن کامل این بندر را در پی داشت.

آشنایی با برخی از انواع توابع

وارون یک تابع و تابع یک به یک

اعمال جبری روی توابع

درس اول

درس دوم

درس سوم

درس اول

آشنایی با برخی از انواع توابع

در سال گذشته با مفهوم تابع آشنا شدیم. به دستور یا قانون بیانگر تابع، ضابطه آن تابع گفته می‌شود. برای مشخص کردن یک تابع، باید دامنه تابع و ضابطه آن را داشته باشیم. بنا به قرارداد، اگر ضابطه تابعی داده شده باشد، اما دامنه آن صریحاً گفته نشده باشد، بزرگ‌ترین مجموعه‌ای که آن تابع در آن قابل تعریف است، به عنوان دامنه در نظر گرفته می‌شود.

توابع گویا

فعالیت

حسین در پایه یازدهم درس می‌خواند. او در روستای کوچکی زندگی می‌کند که در چند کیلومتری یکی از جاده‌های پرتردد ایران قرار دارد. مردم این روستا تا چند سال پیش به کشاورزی و باغداری مشغول بودند، اما چند سالی است که به دلیل کم‌آبی، کشاورزی رونقی ندارد و در نتیجه مردم این روستا درآمد کافی ندارند. حسین تصمیم گرفت این وضع را تغییر دهد. برای این منظور با خود اندیشید که باید فضای روستا را زیباتر کند و با تبلیغاتی مناسب، بخشی از افرادی که قصد گردشگری دارند و معمولاً از جاده اصلی کنار روستا می‌گذرند را به روستای خود جلب کند. او با خود فکر کرد این گردشگران بابت پذیرایی محلی و تجربه خوشایند یک زندگی روستایی، هزینه خواهند پرداخت و به این ترتیب چرخه اقتصادی مردم روستا پر رونق خواهد شد.

پس از چند هفته تحقیق و پرس و جو، حسین به این نتیجه رسید که برای شروع کار به حدوداً ده میلیون تومان نیاز دارد که البته او به تنهایی این پول را نداشت. برای همین، تصمیم گرفت ابتکار خود را با دیگران مطرح کند و از آنها هم برای این کار مفید یاری بخواهد. به این ترتیب افراد روستا می‌توانستند با سرمایه‌گذاری به نسبت مساوی در راه‌اندازی این کار اقتصادی سهیم شوند.

۱ الف) اگر حسین تنها شخص شرکت کننده در این طرح بود، او به تنهایی می‌بایست $\frac{1}{1}$ از ده میلیون تومان را بپردازد، اما اگر یک داوطلب دیگر هم پیدا می‌شد، هر کدام باید $\frac{1}{2}$ از ده میلیون تومان را بپردازند. جدول زیر را کامل کنید.

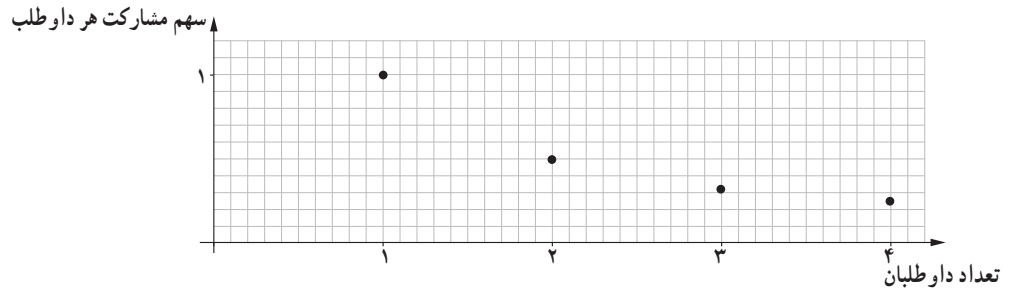
تعداد افراد داوطلب	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
سهم مشارکت هر داوطلب	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$						

ب) اگر تعداد داوطلبانی که می‌خواهند در این کار اقتصادی شرکت کنند، n نفر باشد، سهم مشارکت هر نفر چقدر خواهد شد؟

$$f(x) = \frac{\dots}{\dots}$$

پ) رابطه بین تعداد افراد داوطلب و سهم مشارکت آنها یک تابع است. ضابطه این تابع چیست؟

۲ در شکل زیر، بخشی از نمودار تابع سهم مشارکت رسم شده است. با انتخاب گزینه مناسب در عبارت زیر، تعیین کنید که این نمودار چه چیزی را نشان می‌دهد؟
 «با افزایش تعداد داوطلبان، سهم مشارکت هر داوطلب کاهش □ افزایش □ می‌یابد».

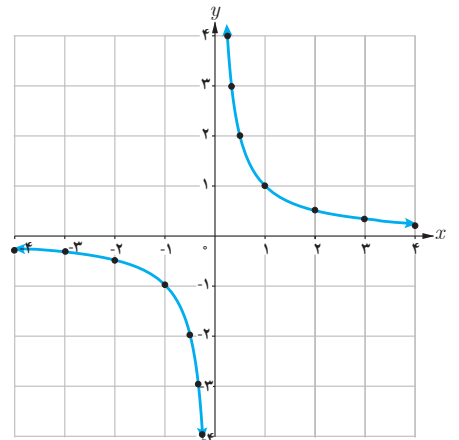
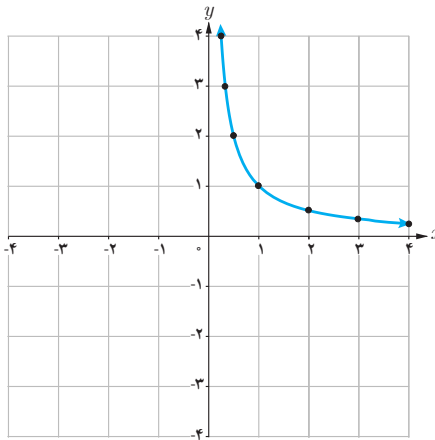


فعالیت

در نمودارهای زیر تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1}{x}$ با دو دامنه متفاوت رسم شده است. مشخص کنید که هر کدام از این نمودارها مربوط به کدام دامنه است؟

الف) $D_f = (0, +\infty)$

ب) $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$



خواندنی

هزینه پاک‌سازی x درصد از آلودگی‌های شهری و صنعتی رودخانه‌ای با تابع با ضابطه $p(x) = \frac{255x}{100-x}$ محاسبه می‌شود که در آن x درصد آلودگی و $p(x)$ هزینه پاک‌سازی بر حسب میلیون تومان است.

الف) جدول زیر را کامل کنید.
 ب) با یک میلیارد تومان چه درصدی از آلودگی‌های این رودخانه پاک‌سازی خواهد شد؟
 پ) چرا هیچ‌گاه ۱۰۰ درصد از آلودگی‌های این رودخانه پاک‌سازی نمی‌شود؟

x	۱۰	۳۰	۵۰	۷۰	۹۰
$p(x)$					

هر تابع به شکل $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ را یک تابع گویا می‌نامیم، که در آن $P(x)$ ، $Q(x)$ چند جمله‌ای هستند و چند جمله‌ای $Q(x)$ صفر نیست.

تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1}{x}$ همچنین توابع زیر نمونه‌هایی از توابع گویا هستند.

$f(x) = \frac{x}{x+5}$

$f(x) = \frac{x+3}{x-10}$

$f(x) = \sqrt{5}x$

$f(x) = 2$

کار در کلاس

یکی از معیارهای بررسی موفقیت یک بازیکن بسکتبال، بررسی «عملکرد پرتاب‌های آزاد» اوست. به این منظور، نسبت پرتاب‌های آزاد موفق هر بازیکن را به همه پرتاب‌های آزاد حساب می‌کنند. وحیده که عضو تیم بسکتبال مدرسه است، یک بازیکن موفق است، زیرا در مسابقات امسال، تا امروز، از 10° پرتاب آزاد، 7° پرتاب او موفق بوده است. بنابراین 7° درصد پرتاب‌های آزاد او موفق بوده است. او دوست دارد عملکردش بهتر از این باشد.

الف) اگر تا پایان مسابقات همه پرتاب‌های آزاد وحیده موفق باشد، ضابطه تابع عملکرد پرتاب‌های آزاد او به کدام صورت زیر است؟

$$f(x) = x + \circ / \nabla \quad f(x) = \frac{x}{\circ / \nabla + x} \quad f(x) = \frac{\nabla + x}{10 + x}$$

ب) آیا تابع عملکرد پرتاب‌های آزاد وحیده، یک تابع گویاست؟

پ) توضیح دهید که پس از چند پرتاب آزاد موفق پیاپی دیگر، درصد موفقیت عملکرد وحیده 8° درصد خواهد شد؟

$$f(x) = \frac{8^\circ}{10^\circ} \rightarrow \dots\dots\dots$$

دامنه توابع گویا

از سال‌های گذشته می‌دانیم مخرج هیچ کسری نمی‌تواند صفر باشد؛ بنابراین عدد صفر در دامنه تابع با ضابطه $y = \frac{1}{x}$ نیست. به طور کلی اعدادی که مخرج کسر مربوط به ضابطه یک تابع گویا را صفر کنند، عضو دامنه آن تابع نیستند. به عنوان مثال، دامنه تابع گویای با ضابطه $f(x) = \frac{5}{x-2}$ برابر $\mathbb{R} - \{2\}$ است.

کار در کلاس

دامنه هر یک از توابع گویای داده شده را به دست آورید.

$f(x) = \frac{x}{x+5}$	$D_f =$	$g(x) = \frac{3}{x-4}$	$D_g =$
------------------------	---------	------------------------	---------

تساوی دو تابع

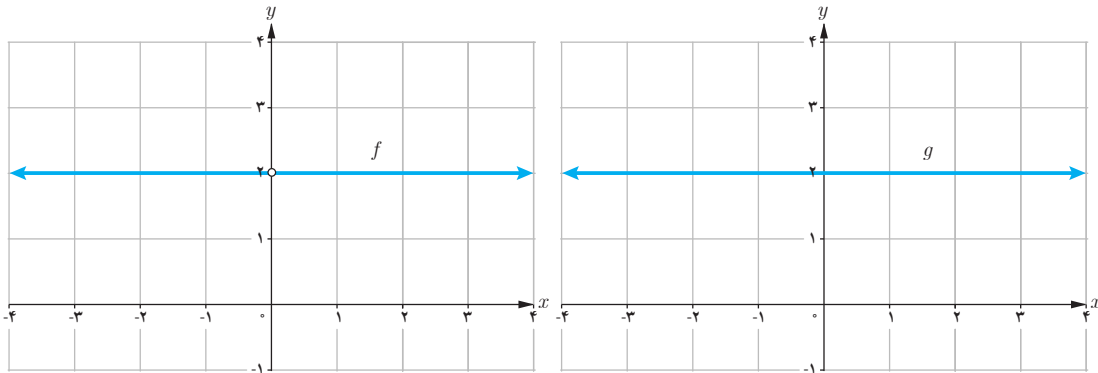
دو تابع f و g را برابر نامیم هرگاه:

الف) دامنه f و دامنه g با هم برابر باشند.

ب) برای هر x از این دامنه یکسان داشته باشیم: $f(x) = g(x)$

بنابراین در صورت رسم نمودارهای دو تابع مساوی در یک دستگاه مختصات، باید نمودارهای آنها دقیقاً بر هم منطبق شوند.

به نمودار دو تابع با ضابطه $f(x) = \frac{2x}{x}$ و $g(x) = 2$ دقت کنید.



می‌بینیم که نمودارهای این دو تابع کاملاً بر هم منطبق نیستند. در واقع با اینکه ضابطه دو تابع شبیه هم هستند و در صورت ساده شدن x ، ضابطه‌های دو تابع برابر می‌شوند ولی دامنه دو تابع با هم متفاوت‌اند، زیرا داریم:

$$D_f = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$D_g = \mathbb{R}$$

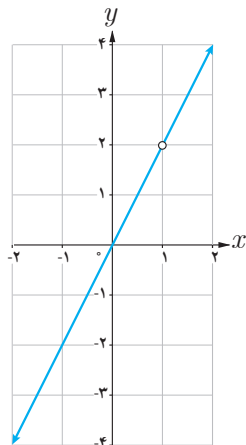
در نتیجه این دو تابع با هم برابر نیستند.

تذکر: همواره دامنه تابع را قبل از ساده کردن ضابطه آن محاسبه می‌کنیم.

کار در کلاس

۱ آیا دو تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x^2}{x}$ و $g(x) = x$ با هم برابرند؟ چرا؟

۲ نمودار مقابل مربوط به کدام یک از توابع زیر است؟ مسئله چند جواب دارد؟



الف) $g(x) = 2x$ $D_g = \mathbb{R}$

ب) $g(x) = 2x$ $D_g = \mathbb{R} - \{2\}$

پ) $g(x) = 2x$ $D_g = \mathbb{R} - \{1\}$

ت) $g(x) = \frac{2x^2 - 2x}{x - 1}$ $D_g = \mathbb{R} - \{1\}$

ث) $g(x) = \frac{2x^2 - 4x}{x - 2}$ $D_g = \mathbb{R} - \{2\}$

توابع رادیکالی

کار در کلاس

بر اساس مشاهدات دانشمندان، اگر S تندی جابه‌جایی یک سونامی بر حسب کیلومتر بر ساعت باشد، می‌توان آن را از رابطه $S = 356\sqrt{d}$ محاسبه کرد که در آن d میانگین عمق دریا بر حسب کیلومتر است.

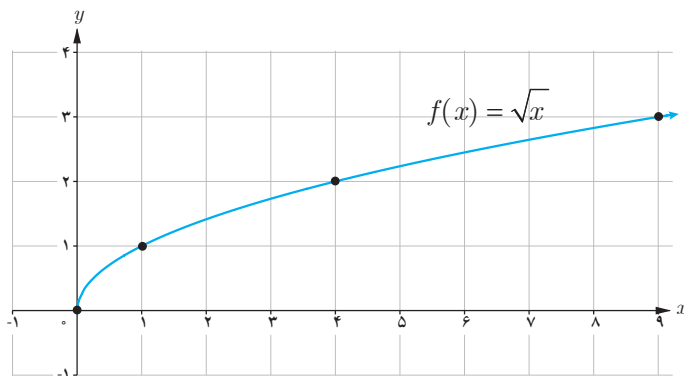
الف) جدول زیر را کامل کنید. ($\sqrt{3} \approx 1/7$, $\sqrt{2} \approx 1/4$)

d	۱	۲	۳	۴
$S = 356\sqrt{d}$		۴۹۸/۴		

ب) عبارت زیر را کامل کنید.

چون هر عدد، تنها ریشهٔ دوم مثبت دارد، پس رابطهٔ سونامی یک تابع
 پ) کدام یک از اعداد ۵- و ۵ عضو دامنهٔ تابع سونامی است؟

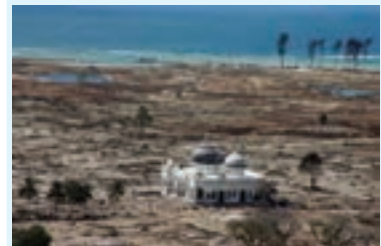
مطالعهٔ توابع رادیکالی مانند $S = 356\sqrt{d}$ به دلیل نقش کاربردی آنهاست. در این کتاب با برخی از توابع رادیکالی آشنا می‌شویم. همان‌طور که هنگام کار با تابع رادیکالی سونامی دیدید، دامنهٔ این نوع توابع ممکن است همهٔ اعداد حقیقی نباشد. ساده‌ترین تابع رادیکالی تابع با ضابطهٔ $f(x) = \sqrt{x}$ است. دامنهٔ این تابع مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی نامنفی و نمودار آن به صورت زیر است.



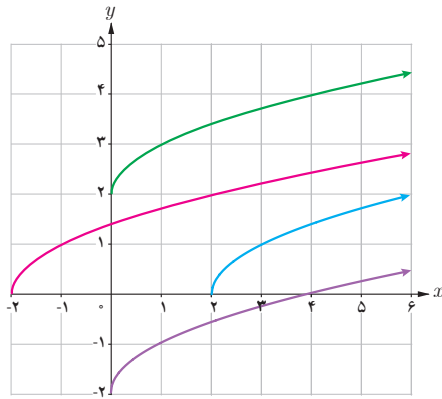
خواندنی

سونامی (آبلرزه) به لرزش شدید آب دریا گفته می‌شود. این اتفاق ممکن است در بی زمین‌لرزه‌های زیر دریا، لغزیدن صخره، انفجار آتشفشانی و یا هر حادثهٔ دیگری که انرژی زیادی در دریا آزاد می‌کند، رخ دهد. آبی که به لرزه درآمده است، به شکل موج‌های عظیم به کرانه‌ها می‌رسد و ویرانی به بار می‌آورد. سونامی زمانی شروع می‌شود که حجم عظیمی از آب، به سرعت مرتفع شود. تندی موج‌های سونامی بسته به محل رویداد، ممکن است به بیش از ۸۰۰ کیلومتر در ساعت برسد!

یکی از بزرگ‌ترین سونامی‌ها در سال ۱۳۸۳ در نزدیکی سوماترای اندونزی روی داد و باعث ویرانی عظیمی شد و حدود ۲۰۰ هزار نفر را به کام مرگ کشانید.



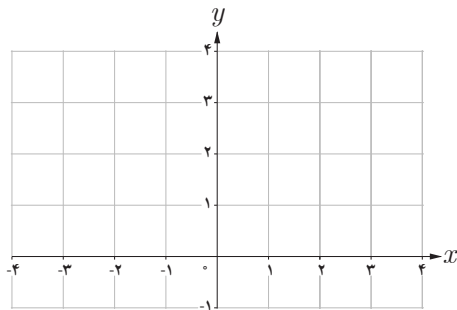
در کتاب‌های تاریخ ادعا شده است که قسمت بزرگی از بندر باستانی سیراف ناگهان بر اثر زمین‌لرزه‌ای به زیر آب رفته است. پاسخ دقیق این سؤال را که «آیا یک سونامی سیراف را ویران کرده و به زیر آب برده است؟» باید با کمک پژوهش‌های باستان‌شناسی و زمین‌شناسی یافت. با توجه به اینکه میانگین عمق خلیج فارس حدود ۵۰ متر است، نظر شما چیست؟



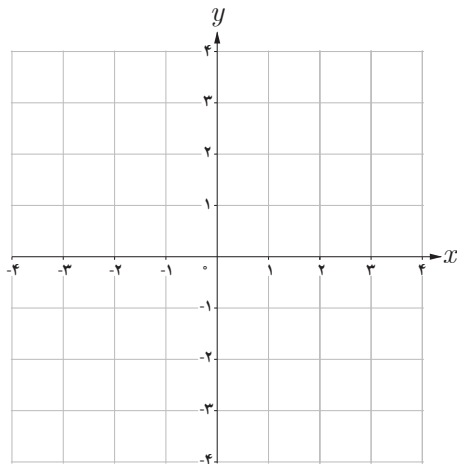
۱ در شکل مقابل با کمک انتقال نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{x}$ ، نمودار مربوط به هر یک از توابع زیر رسم شده است. مشخص کنید که هر نمودار، مربوط به کدام تابع است. سپس دامنه آنها را تعیین کنید.

- الف) $g(x) = \sqrt{x-2}$ $D_g = \dots\dots\dots$ ب) $h(x) = \sqrt{x+2}$ $D_h = \dots\dots\dots$
 پ) $k(x) = \sqrt{x+2}$ $D_k = \dots\dots\dots$ ت) $l(x) = \sqrt{x-2}$ $D_l = \dots\dots\dots$

۲ می‌خواهیم نمودار تابع با ضابطه $y = -2 + \sqrt{x+3}$ را رسم کنیم.
 الف) (مرحله اول) نمودار تابع با ضابطه $y = \sqrt{x}$ در صفحه قبل را در نظر بگیرید.
 ب) (مرحله دوم) حال، نمودار تابع با ضابطه $y = \sqrt{x+3}$ را رسم کنید.

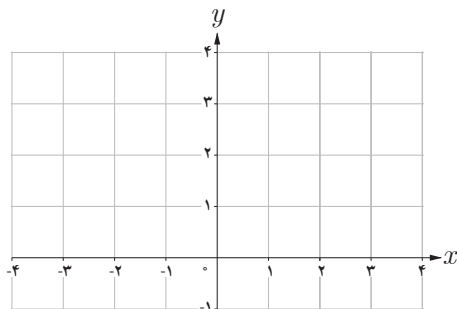


ب) (مرحله سوم) در پایان، نمودار تابع با ضابطه $y = -2 + \sqrt{x+3}$ را رسم کنید.



با توجه به شکل می‌بینید که دامنه این تابع $[-3, +\infty)$ است.

۳ نمودار تابع با ضابطه $f(x) = 1 + \sqrt{x+1}$ را رسم کنید؛ سپس دامنه آن را بیابید.



توابع پله‌ای و تابع جزء صحیح

فعالیت

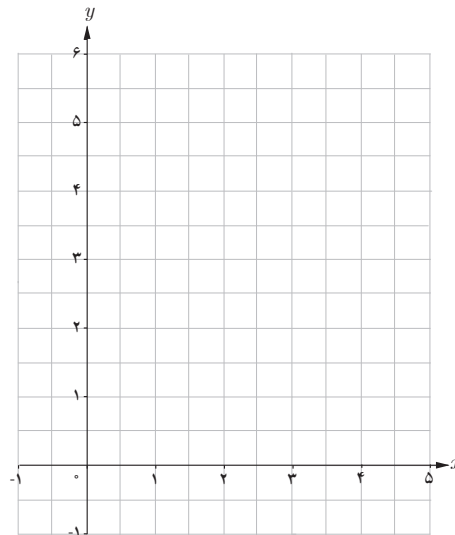
هزینه پارکینگ خودرو

در یک پارکینگ، هزینه پارک خودرو به این صورت محاسبه می‌شود:
الف) ضابطه تابع هزینه پارکینگ خودرو چیست؟

$$f(x) = \begin{cases} 3 & 0 \leq x < 2 \\ 4 & 2 \leq x \leq \dots \\ 5 & \dots \\ 6 & \dots \end{cases}$$

هزینه (هزار تومان)	زمان	
۳	تا کمتر از ۲ ساعت	از هنگام ورود
۴	تا ۲/۵ ساعت	از ۲ ساعت
۵	تا کمتر از ۳ ساعت	از بیشتر از ۲/۵ ساعت
۶	تا ۵ ساعت	از ۳ ساعت

ب) نمودار این تابع را رسم کنید.



به توابعی مانند تابع هزینه پارکینگ، توابع پله‌ای می‌گویند. توابع پله‌ای در تجارت یا خرید و فروش نقش تعیین کننده‌ای دارند. مشهورترین تابع پله‌ای، تابع جزء صحیح است.

تابع جزء صحیح به هر عدد صحیح، خود همان عدد صحیح را نسبت می‌دهد و به هر عدد غیر صحیح، بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر از آن عدد را نسبت می‌دهد. ضابطه این تابع به صورت $f(x) = [x]$ نشان داده می‌شود.

برای مثال داریم:

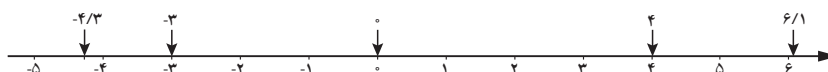
$$[4] = 4$$

$$[6/1] = 6$$

$$[0] = 0$$

$$[-4/3] = -5$$

$$[-3] = -3$$

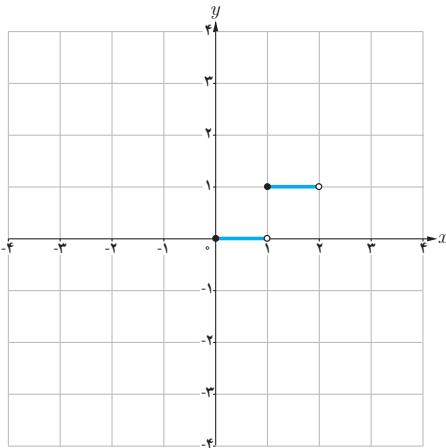


خواندنی

برای قیمت‌گذاری یک محصول تولیدی خاص، قیمت مواد اولیه تعیین‌کننده است؛ اما بالا و پایین رفتن‌های جزئی قیمت مواد اولیه، قیمت یک محصول را تغییر نمی‌دهد. بنابراین به اعداد بازه‌ای از قیمت‌های مواد اولیه، تنها یک قیمت نهایی محصول را نسبت می‌دهند. به این ترتیب، تابع مورد نظر یک تابع پله‌ای است.

خواندنی

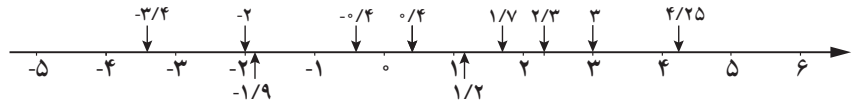
با مراجعه به وب‌گاه رسمی سامانه محاسبه نرخ مرسولات پستی شرکت ملی پست (<http://parcelprice.post.ir>) می‌توانید دو شهر را انتخاب کنید. سپس تابع پله‌ای هزینه ارسال یک بسته را برحسب وزن - قیمت مشاهده کنید.



همان‌طور که در مثال دیدیم، جزء صحیح هر عدد غیر صحیح، برابر است با اولین عدد صحیح سمت چپ آن روی محور اعداد.

کار در کلاس

۱ با کمک گرفتن از محور اعداد، جزء صحیح اعداد خواسته شده را به دست آورید.



$$\begin{aligned} [-3/4] &= & [-2] &= & [-1/9] &= & [0/4] &= & [-0/4] &= \\ [4/25] &= & [3] &= & [2/3] &= & [1/7] &= & [1/2] &= \end{aligned}$$

۲ حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$\left[\frac{41}{37} \right] = \quad \left[-\frac{13}{51} \right] =$$

فعالیت

۱ اگر $[x]=2$ ، آنگاه x برابر چه اعدادی می‌تواند باشد؟ مجموعه جواب را به صورت بازه بنویسید.

۲ برای رسم نمودار یک تابع صحیح باید توجه کنیم که اعداد هر بازه‌ای از دامنه، به چه عددی نسبت داده می‌شود. برای مثال اگر $0 \leq x < 1$ ، آنگاه $[x]=0$ ؛ پس مقدار تابع با ضابطه $f(x)=[x]$ برای همه اعداد عضو بازه $[0, 1)$ برابر صفر می‌شود. در شکل مقابل بخشی از نمودار تابع با ضابطه $f(x)=[x]$ رسم شده است. نمودار این تابع را در بازه $[-4, 4]$ تکمیل کنید.

۳ الف) به دلخواه نقطه‌ای مانند a را روی محور اعداد داده شده مشخص کنید.

ب) نقطه $a+3$ را روی این محور مشخص کنید.

پ) نقاط $[a]$ و $[a+3]$ را روی محور مشخص کنید.

ت) چه رابطه‌ای بین $[a]$ و $[a+3]$ برقرار است؟

$$[a+3] = [a] + \dots$$

ث) چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

«اگر a عددی حقیقی و n عددی صحیح باشد، آنگاه $[a+n] = [a] + \dots$ »

۱ نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1}{x}$ و با دامنه $D_f = [-5, 5] - \{0\}$ را رسم کنید.

۲ دامنه تابع گویای با ضابطه $f(x) = \frac{x+3}{x-3}$ را به دست آورید.

۳ در هر مورد آیا دو تابع داده شده با هم برابرند؟

الف) $f(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$, $g(x) = \frac{|x|}{x}$ ب) $f(x) = x-2$, $g(x) = \frac{x^2-4}{x+2}$

۴ تابعی گویا بنویسید که دامنه اش برابر $\mathbb{R} - \{-1\}$ شود. پاسخ خود را با جواب دوستانتان مقایسه کنید.

۵ نمودار تابع با ضابطه $g(x) = -3 + \sqrt{x-4}$ را رسم کنید.

۶ حاصل عبارتهای مقابل را حساب کنید. $[-2309/54]$ $[-103/003]$ $[300/4002]$

۷ تابع پله‌ای روبه‌رو را رسم کنید.

$$f(x) = \begin{cases} 3 & x \in [0, 1) \\ 0 & x \in [1, 5] \\ 2 & x \in (6, 7] \end{cases}$$

۸ تابع با ضابطه $f(x) = [x] + 2$ و دامنه $D_f = [-3, 3]$ را رسم کنید.

خواندنی

تابع $f(x) = \sqrt{x} + 50$ به‌طور تقریبی قد متوسط کودکان^۱ را برحسب سانی‌متر تا حدود ۶۰ ماهگی نشان می‌دهد. در این تابع x نشان‌دهنده ماه‌های پس از تولد است. قد متوسط یک کودک ۹ ماهه تقریباً چقدر است؟ در چه سنی قد متوسط یک کودک تقریباً یک متر می‌شود؟



۱- کودکان حاضر در تصویر، فرزندان شهدای مدافع حرم هستند.

وارون یک تابع

کار در کلاس

الف) هر مایل تقریباً $\frac{1}{6}$ کیلومتر است. تعیین کنید که هر یک از جملات سمت راست مربوط به کدام یک از رابطه‌های سمت چپ است.

$$f(x) = \frac{1}{5}x$$

این رابطه برای تبدیل تقریبی «مایل» به «کیلومتر» است.

$$g(x) = \frac{5}{8}x$$

این رابطه برای تبدیل تقریبی «کیلومتر» به «مایل» است.

ب) تندی 30 مایل بر ساعت تقریباً معادل تندی چند کیلومتر بر ساعت است؟



هر تابع با ضابطه $y=f(x)$ بیان می‌کند که متغیر y چه ارتباطی با متغیر x دارد و چگونه می‌توان با در دست داشتن مقدار x ، مقدار y را به دست آورد. اما گاهی مهم است که بدانیم چگونه می‌توان از مقدار y به مقدار x رسید. تبدیل یکای اندازه‌گیری نمونه‌ای ساده از این حالت است.

به خاطر دارید که یک تابع را می‌توان با مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب نشان داد.

با جابه‌جا کردن مؤلفه‌های زوج مرتب (a,b) می‌توان زوج مرتب (b,a) را به دست آورد. حال اگر مؤلفه‌های همه زوج‌های مرتب تابع f را جابه‌جا کنیم، رابطه جدیدی به دست می‌آید که آن را وارون تابع f می‌گوییم و با f^{-1} نشان می‌دهیم.

برای مثال وارون تابع $f = \{(6,4), (5,3), (2,1)\}$ برابر با $f^{-1} = \{(4,6), (3,5), (1,2)\}$ است.

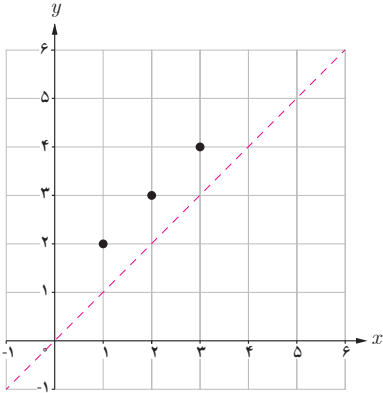
کار در کلاس

وارون تابع‌های داده شده را حساب کنید.

$s = \{(4,1), (1,4), (3,3), (2,5)\}$	$s^{-1} =$
$t = \{(5,1), (1,4), (4,3), (2,3)\}$	$t^{-1} =$
$u = \{(2,3), (5,2), (4,1), (3,4)\}$	$u^{-1} =$

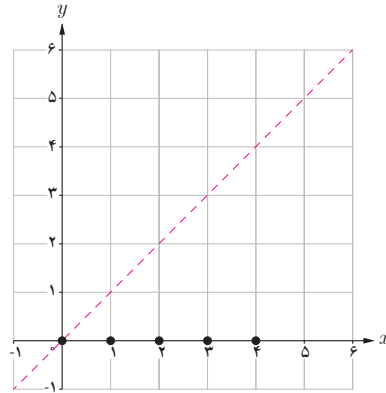
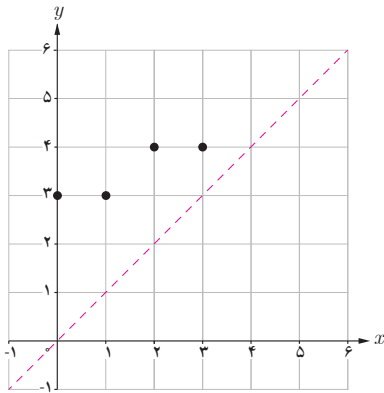
خواندنی

سال‌هاست که ریاضی‌دانان، با کمک داده‌های آماری جمعیت، تلاش می‌کنند به تابع تخمین جمعیت دست یابند و در این زمینه به نتایجی هم رسیده‌اند. این تابع نشان می‌دهد که مثلاً در سال 1420 جمعیت ایران چه تعداد خواهد بود. با این همه، در عمل معمولاً وارون این تابع نیز اهمیت دارد؛ به عنوان مثال مهم است که مشخص کنیم در چه سالی جمعیت ایران به 100 میلیون نفر خواهد رسید. در فصل پنجم با نمونه‌ای از توابع تخمین جمعیت آشنا خواهید شد.



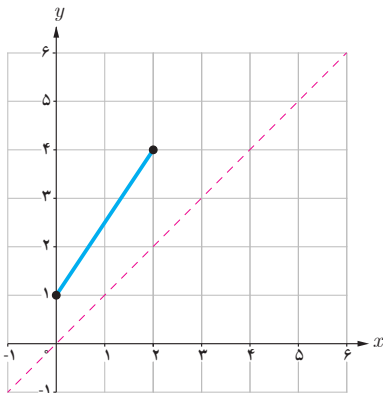
- ۱ در دستگاه مختصات داده شده نمودار تابع f رسم شده است. الف) تابع f را به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب نمایش دهید. ب) تابع f^{-1} را به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب نمایش دهید. پ) در همین دستگاه مختصات، نمودار f^{-1} را رسم کنید. ت) نمودار f و f^{-1} چه ارتباطی با هم دارند؟ «نمودار f و f^{-1} نسبت به قرینه یکدیگرند».

- ۲ الف) در هر مورد بیان کنید چرا نمودار داده شده معرف یک تابع است و سپس وارون آن را رسم کنید.

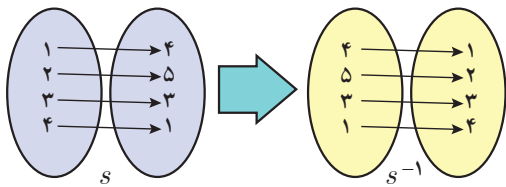


- ب) عبارت زیر را کامل کنید.

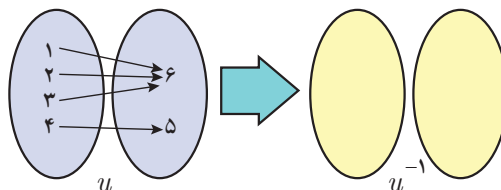
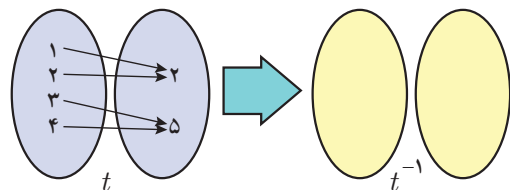
برای رسم نمودار وارون یک تابع کافی است قرینه نمودار آن تابع را نسبت به رسم کنیم.



- ۳ نمودار وارون تابع داده شده را رسم کنید.



۱ الف) به نمونه داده شده دقت کنید. با کمک نمودار پیکانی، وارون توابع داده شده را به دست آورید.



ب) در جدول مقابل گزینه‌های درست را انتخاب کنید.

<input type="checkbox"/> بله	<input type="checkbox"/> خیر	s^{-1} یک تابع است.
<input type="checkbox"/> بله	<input type="checkbox"/> خیر	t^{-1} یک تابع است.
<input type="checkbox"/> بله	<input type="checkbox"/> خیر	u^{-1} یک تابع است.

پ) عبارت زیر را کامل کنید.

وارون تابع f ، خود یک تابع است؛ هرگاه در زوج‌های مرتب متفاوت تابع f مؤلفه‌های تکراری وجود نداشته باشد.

به تابعی که در زوج‌های مرتب متفاوت خود، مؤلفه‌های دوم تکراری نداشته باشد، تابع یک به یک می‌گوییم.

تذکر: وارون هر تابع یک به یک، خود یک تابع است.

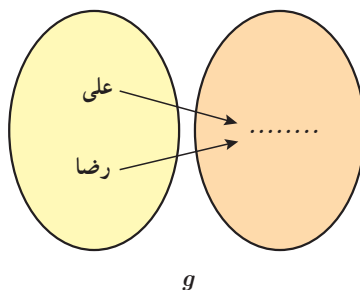
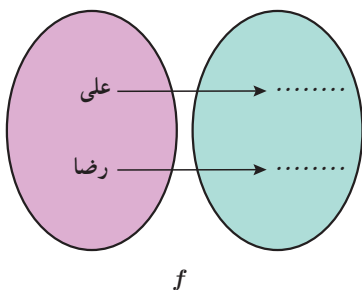
ت) تابع $f = \{(1, 2), (-2, 4), (2, -1), (-1, 2)\}$ را در نظر بگیرید. تعیین کنید که این تابع یک به یک است یا خیر؟

۲ نمودارهای پیکانی زیر بیانگر تابع اثر انگشت و تابع گروه خونی علی و رضا است.

الف) مشخص کنید که کدام نمودار پیکانی مربوط به اثر انگشت و کدام نمودار پیکانی مربوط به گروه خونی است.

ب) آیا f و g هر دو تابع اند؟

پ) در مورد تابع بودن f^{-1} و g^{-1} چه می‌توان گفت؟



ت) کدام یک از دو تابع f و g یک به یک هستند؟

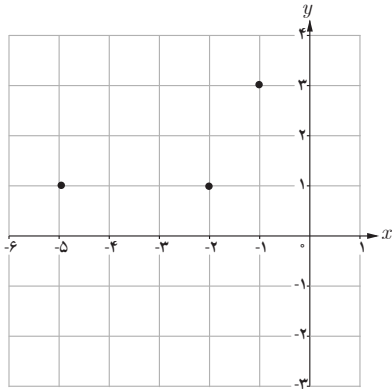
ث) عبارت‌های زیر را کامل کنید.

با دانستن گروه خونی یک انسان، هویت او به طور یکتا تعیین

با دانستن اثر انگشت یک انسان، هویت او به طور یکتا تعیین

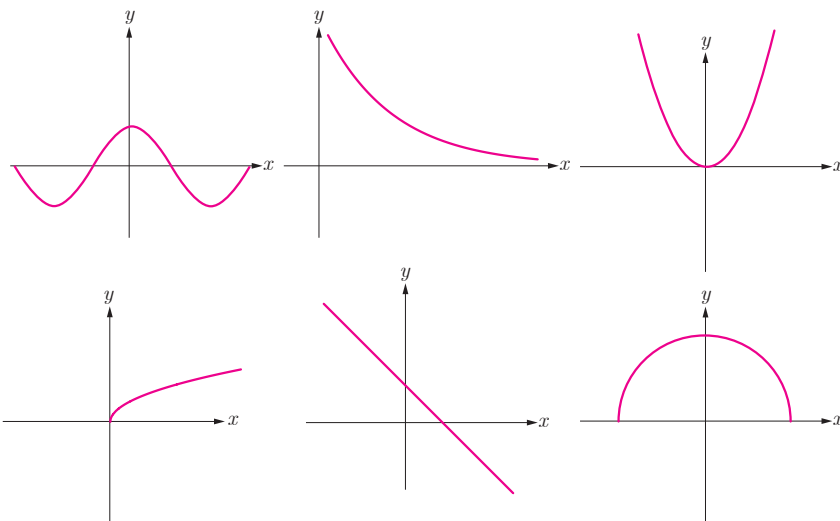
فعالیت

- ۱ در شکل داده شده، با وصل کردن نقاط مشخص شده به هم، نموداری رسم کنید که تابع باشد.
الف) آیا تابعی که رسم کرده اید یک به یک است؟
ب) با کامل کردن عبارت زیر مشخص کنید که چگونه با در دست داشتن نمودار یک تابع، می توان تشخیص داد که آیا آن تابع یک به یک است یا خیر؟



اگر هر خط موازی محور نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند، آن گاه آن تابع یک به یک است.

- ۲ کدام یک از توابع زیر یک به یک است؟



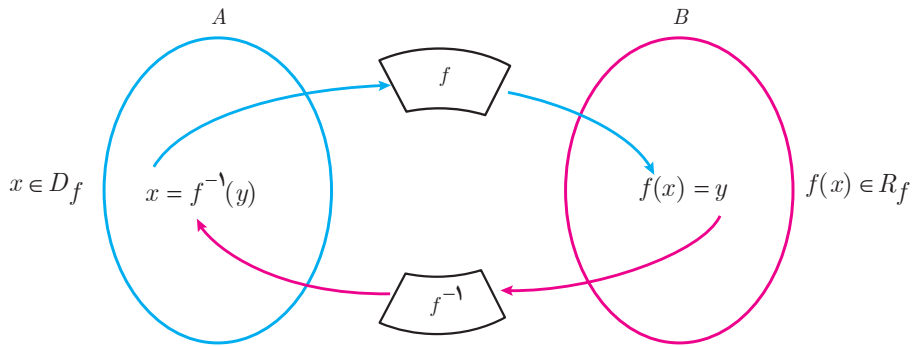
خواندنی

قرن‌ها پیش رشیدالدین فضل‌الله همدانی، طبیب و مورخ برجسته ایرانی در کتاب جامع التواریخ به رسم چینی‌ها در شناسایی افراد از طریق اثر انگشت اشاره کرده و توضیح داده بود که «شواهد و تجربیات نشان می‌دهد که اثر انگشت هیچ دو نفری کاملاً یکسان نیست». در آن زمان در ایران نیز از اثر انگشت شست برای مهر کردن اسناد استفاده می‌کردند. در اوایل قرن بیستم، غربی‌ها نیز با الهام گرفتن از شرقی‌ها برای شناسایی در تحقیقات جنایی از اثر انگشت بهره گرفتند. امروزه تشخیص اثر انگشت به عنوان یکی از دقیق‌ترین و سریع‌ترین روش بیومتریک در حفظ امنیت سیستم‌های کنترل دسترسی و همچنین در ساعت‌های حضور و غیاب، کاربرد بسیاری دارد.



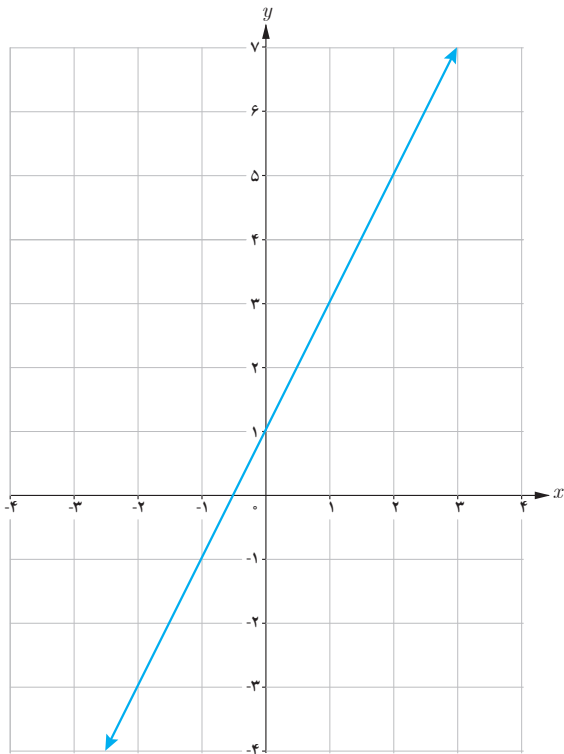
به دست آوردن ضابطه تابع وارون یک تابع خطی غیر ثابت

اگر f تابعی یک به یک باشد و f^{-1} تابع وارون آن باشد، نمودار زیر ارتباط f و f^{-1} را نشان می‌دهد. (R_f نماد برد تابع f است).



فعالیت

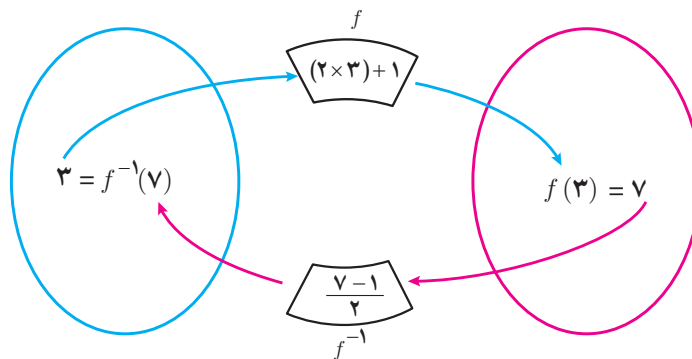
تابع با ضابطه $f(x) = 2x + 1$ را در نظر می‌گیریم.
الف) به کمک نمودار f توضیح دهید که چرا f یک به یک است.



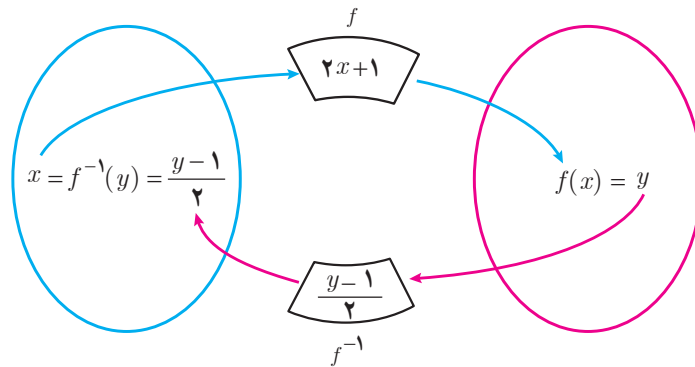
ب) نمودار زیر را توضیح دهید:

$$(3, 7) \in f \quad \text{و} \quad (7, 3) \in f^{-1}$$

به عبارت دیگر $f(3) = 7$ و $f^{-1}(7) = 3$



پ) در حالت کلی برای هر عضو دامنه تابع با ضابطه $f(x) = 2x + 1$ ، داریم:



ت) بنابراین می‌توان نوشت:

$$f(x) = 2x + 1 \quad (x \in D_f)$$

$$f^{-1}(y) = \frac{y-1}{2} \quad (y \in R_f)$$

آنچه که اهمیت دارد این است که دامنه f^{-1} همان برد f است. بنابراین یک نمایش مناسب برای f^{-1} به صورت زیر است:

$$f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$$

به‌طور کلی:

برای به‌دست آوردن ضابطه تابع وارون یک تابع خطی غیر ثابت مانند f ، در معادله $y = f(x)$ ، x را بر حسب y محاسبه می‌کنیم. سپس با جابه‌جا کردن y و x ، ضابطه تابع $f^{-1}(x)$ را به‌دست می‌آوریم.

وارون تابع با ضابطه $f(x) = 2x + 1$ ، چنین محاسبه می‌شود:

$$f(x) = 2x + 1 \Rightarrow y = 2x + 1$$

$$\Rightarrow 2x = y - 1$$

$$\Rightarrow x = \frac{y-1}{2}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(y) = \frac{y-1}{2}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$$

کار در کلاس

۱) هر تابع خطی غیر ثابت یک‌به‌یک است. (چرا؟) وارون هر یک از توابع خطی زیر را به‌دست آورید.

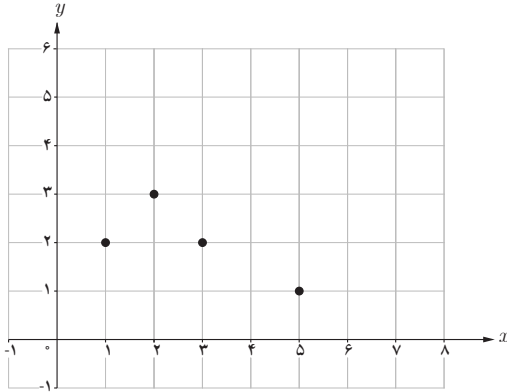
الف) $f(x) = x + 5$

ب) $g(x) = 4x$

پ) $u(x) = 2x + 3$

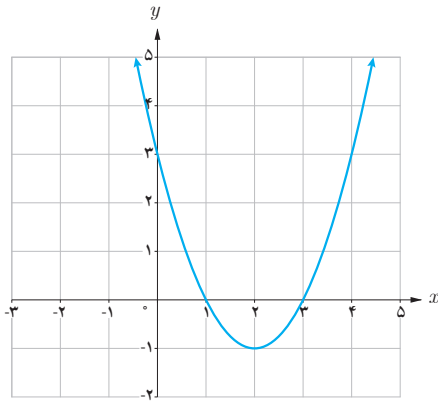
ت) $v(x) = \frac{2}{3}x - 4$

۲ الف) چرا نمودار داده شده، نمودار یک تابع یک به یک نیست؟



ب) با حذف تنها یک نقطه، نمودار مقابل را به یک تابع یک به یک تبدیل کنید. مسئله چند جواب دارد؟

کار در کلاس



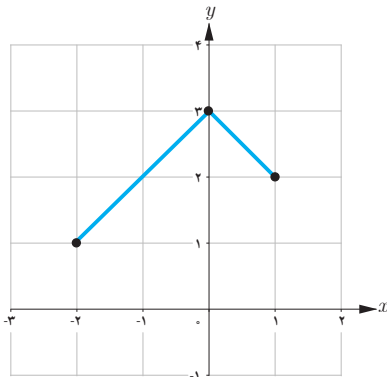
الف) به نمودار تابع با ضابطه $f(x) = x^2 - 4x + 3$ در شکل مقابل، دقت کنید. با محدود کردن دامنه این تابع روی کدام بازه‌های زیر می‌توان یک تابع یک به یک ساخت؟

$[1, 4)$

$[0, 2]$

ب) آیا هر تابع درجه ۲، تابعی یک به یک است؟ چرا؟

تمرین



۱ وارون تابع $f = \{(2, 3), (-2, 1), (-1, 2)\}$ را به دست آورید.

۲ نمودار وارون تابع داده شده در شکل مقابل را رسم کنید.

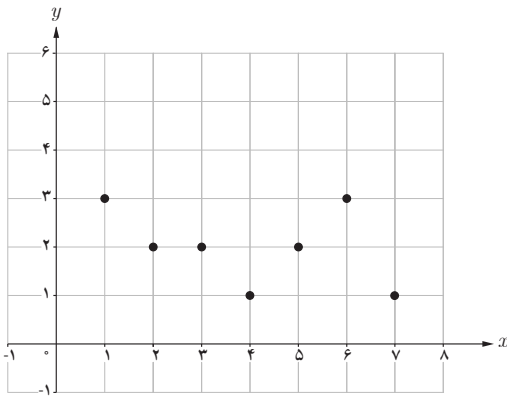
۳ ضابطه وارون هر یک از توابع با ضابطه‌های زیر را بیابید.

پ) $f(x) = \frac{-7x + 3}{5}$

ب) $f(x) = \frac{3}{5}x + 4$

الف) $f(x) = 5x - 2$

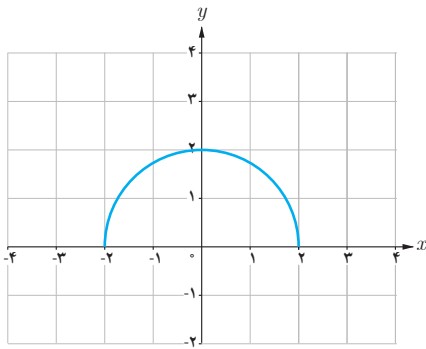
۴ می‌خواهیم با حذف تعدادی از نقاط نمودار مقابل، آن را به یک تابع یک‌به‌یک تبدیل کنیم. حداکثر چند نقطه می‌تواند باقی بماند؟



۵ نمودار تابعی با دامنه $[0, 2]$ و برد $[2, 5]$ را رسم کنید:

الف) به شرطی که این تابع یک‌به‌یک باشد.

ب) به شرطی که این تابع یک‌به‌یک نباشد.



۶ با حذف بخشی از نمودار نیم‌دایره داده شده، نمودار یک تابع یک‌به‌یک را مشخص کنید.



مسجد جامع ورامین، تهران

اگر f و g به ترتیب دو تابع با دامنه‌های D_f و D_g باشند، در این صورت جمع، تفریق، ضرب و تقسیم آنها را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

تعریف دامنه	تعریف ضابطه	نام عمل
$D_{f+g} = D_f \cap D_g$	$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$	جمع
$D_{f-g} = D_f \cap D_g$	$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$	تفریق
$D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g$	$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$	ضرب*
$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\}$	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$	تقسیم

فعالیت

اگر $f(x) = 2x - 1$ و $g(x) = x - 2$ ، آن‌گاه مجموع، تفاضل، حاصل ضرب و حاصل تقسیم آنها $\left(\frac{f}{g}\right)$ را به دست آورید و دامنهٔ هر یک را مشخص کنید.
حل:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = (2x - 1) + (x - 2) = 3x - 3$$

$$(f-g)(x) = \dots\dots\dots$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (2x - 1) \cdot (x - 2) = 2x^2 - 5x + 2$$

$$D_{f+g} = D_{f-g} = D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$$

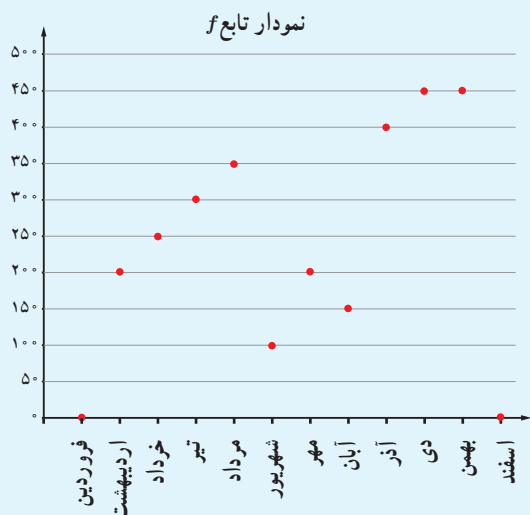
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$$

$$D_{\frac{f}{g}} = (D_f \cap D_g) - \{x \mid g(x) = 0\} = (\mathbb{R} \cap \mathbb{R}) - \{x \mid x - 2 = 0\} = \mathbb{R} - \{2\}$$

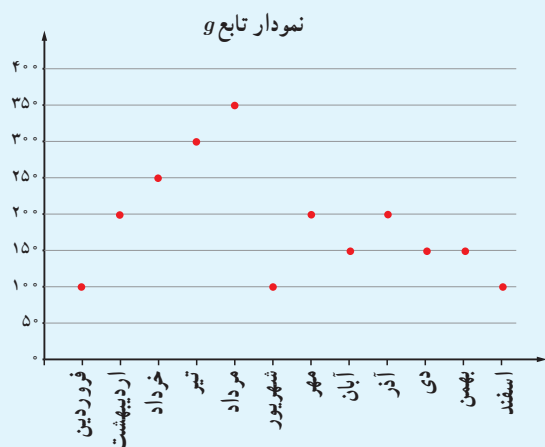
* ضرب دو تابع f و g را با نمادهای $f \times g$ و یا fg هم نشان می‌دهند.

خواندنی

علی در یک کارگاه خانگی، محصولات دست‌دوز چرمی تولید می‌کند. او بخشی از مواد و لوازم مورد نیاز خود را از فروشگاه چرم و بخشی را از فروشگاه ابزار و یراق خریداری می‌کند. وی پس از تولید محصولات هنری، آنها را در بازارچه‌های کارآفرینی به فروش می‌رساند. نمودارهای زیر مقدار خرید او را در یک سال نشان می‌دهد. نمودار تابع f نشان می‌دهد که در هر ماه سال گذشته، چند هزار تومان چرم خریداری شده است؛ برای مثال با توجه به شکل، $f(\text{تیر}) = 300$. پس این هنرمند در چهارمین ماه سال، ۳۰۰ هزار تومان چرم خریده است.



نمودار تابع g نشان می‌دهد که این هنرمند در هر ماه سال گذشته چند هزار تومان ابزار و یراق خریده است.



پس در واقع هزینه‌ای که علی در کارگاه خود دارد، شامل دو بخش است؛ هزینه چرم و هزینه ابزار و یراق.

به زبان ساده، «هزینه» او شامل قیمت همه مواد و لوازم خریداری شده است. در شکل روبه‌رو نمودار تابع هزینه خرید علی در سال گذشته رسم شده است. این تابع را با c نشان می‌دهیم.

الف) بر روی شکل، درستی مقادیر تابع c را برای ماه‌های فصل زمستان بررسی کنید.

ب) آیا برای هر x در دامنه تابع c ، $c(x) = f(x) + g(x)$ درست است؟

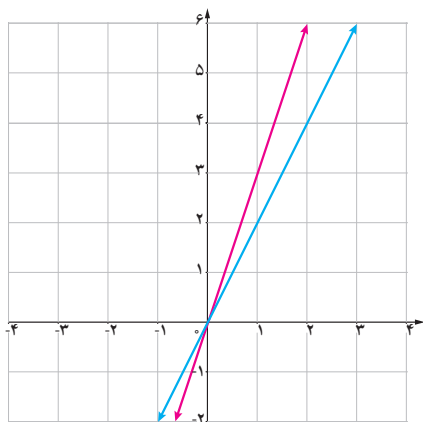
همچنان که می‌بینید برای به‌دست آوردن مقادیر تابع c ، مقادیر دو تابع f و g را با هم جمع می‌کنیم.

تابع	ضابطه	دامنه
$f+g$	$(f+g)(x)=$	
$f-g$	$(f-g)(x)=$	
$f \cdot g$	$(f \cdot g)(x)=$	
$\frac{f}{g}$	$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=$	

۱ برای دو تابع با ضابطه‌های $f(x) = x^2 + 3x + 1$ و $g(x) = x - 3$ جدول داده شده را کامل کنید.

تابع	ضابطه	دامنه
$u+v$	$(u+v)(x)=$	
$u-v$	$(u-v)(x)=$	
$u \cdot v$	$(u \cdot v)(x)=$	
$\frac{u}{v}$	$\left(\frac{u}{v}\right)(x)=$	

۲ برای دو تابع با ضابطه‌های $u(x) = \sqrt{x} + 1$ و $v(x) = x - 1$ جدول داده شده را کامل کنید.



مطابق شکل، دو تابع f و g به ترتیب با رنگ‌های قرمز و آبی نشان داده شده‌اند. الف) ضابطه دو تابع f و g را به دست آورید.

$$g(x) = \dots$$

$$f(x) = \dots$$

ب) ضابطه دو تابع $f+g$ و $f-g$ را به دست آورید.

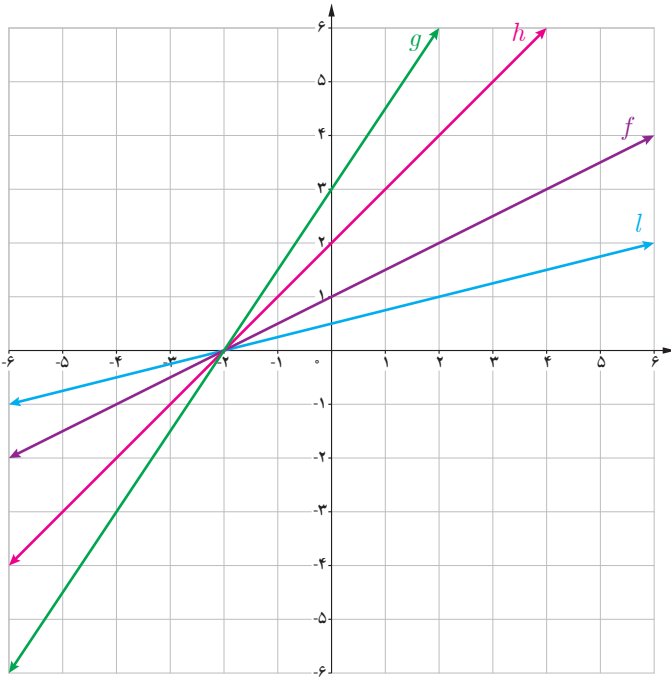
$$(f+g)(x) = \dots$$

$$(f-g)(x) = \dots$$

x	۰	۱
$f(x)$		
$g(x)$		
$(f+g)(x)$		
$(f-g)(x)$		

پ) با تکمیل جدول مقابل، نمودارهای توابع $f+g$ و $f-g$ را با رنگ‌های مختلف رسم کنید. ت) آیا جمع دو تابع خطی همیشه یک تابع خطی است؟ در مورد تفریق آنها چه می‌توان گفت؟

فعالیت



با توجه به شکل دیده می‌شود که $l(x) = \frac{1}{4}f(x)$. جاهای خالی را پر کنید.

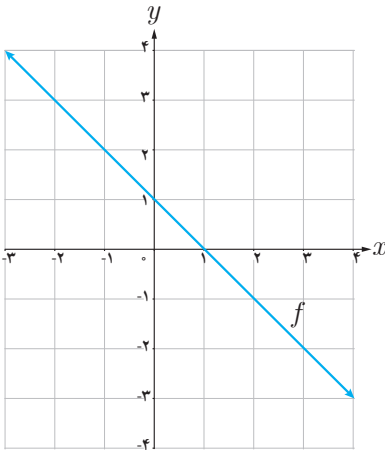
$g(x) = \dots\dots\dots f(x)$

$h(x) = \dots\dots\dots f(x)$

با توجه به نمودار فوق ملاحظه می‌شود که :

اگر k عددی مثبت باشد، برای رسم نمودار تابع با ضابطه $y = kf(x)$ کافی است عرض هر نقطه از نمودار تابع با ضابطه $y = f(x)$ را k برابر کنیم.

کار در کلاس

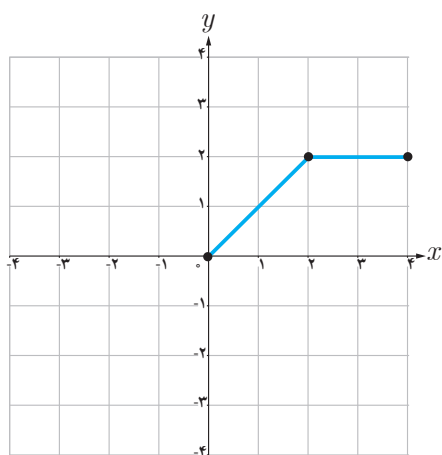


۱ با توجه به نمودار تابع با ضابطه $y = f(x)$ در شکل مقابل، نمودار تابع با ضابطه $y = -f(x)$ را رسم کنید.

۲ عبارت زیر را کامل کنید.

برای رسم نمودار تابع با ضابطه $y = -f(x)$ کافی است قرینه نمودار تابع ضابطه $y = f(x)$ را نسبت به محور $\dots\dots\dots$ رسم کنیم.

۳ در شکل رویه‌رو، نمودار تابع f داده شده است. نمودار تابع با ضابطه $y = -2f(x)$ را رسم کنید.



تمرین

۱ با استفاده از نمودار تابع با ضابطه $f(x) = |x|$ ، نمودار هر یک از توابع با ضابطه‌های زیر را رسم کنید.

الف) $g(x) = -|x|$

ب) $h(x) = -|x-3|$

پ) $l(x) = 2|x-2|$

۲ در هر مورد، دامنه و ضابطه حاصل جمع، ضرب، تقسیم و تفریق دو تابع داده شده را بیابید.

$f(x) = x^2 - 4$

ب) $g(x) = x + 2$

$f(x) = |x|$

الف) $g(x) = \frac{1}{x}$

$f(x) = \frac{x-2}{x+5}$

ت) $g(x) = x^2 + 3x - 1$

$f(x) = \sqrt{x}$

ب) $g(x) = -\sqrt{x}$

$f = \{(2,5), (3,4), (0,-2)\}$

$g = \{(-1,2), (0,3), (2,4), (3,0)\}$

۳ با استفاده از نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{x}$ ، هر یک از نمودارهای زیر را رسم کنید.

ب) $t(x) = -3\sqrt{x}$

ب) $s(x) = -\sqrt{x-2}$

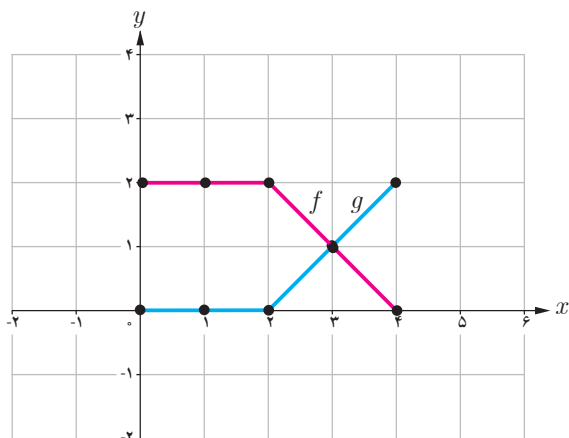
الف) $r(x) = 2\sqrt{x}$

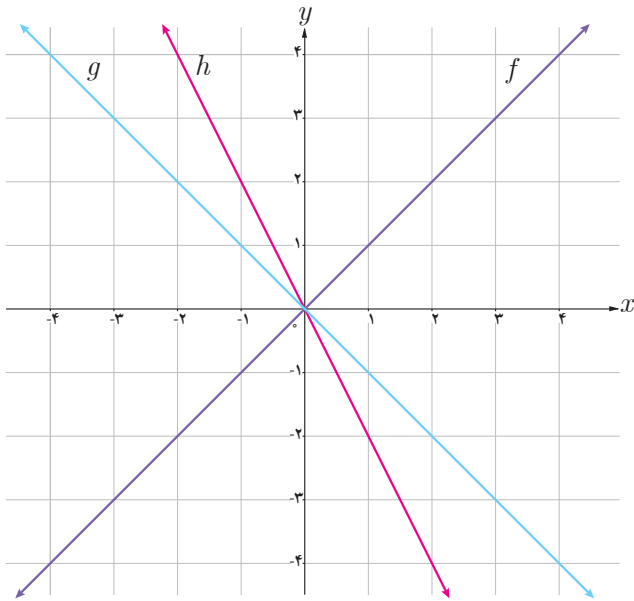
ث) $v(x) = 1 - \sqrt{x-3}$

ت) $u(x) = 1 - \sqrt{x}$

۴ در شکل مقابل، نمودار دو تابع f و g رسم شده است. نمودار

حاصل جمع این دو تابع را به دست آورید.



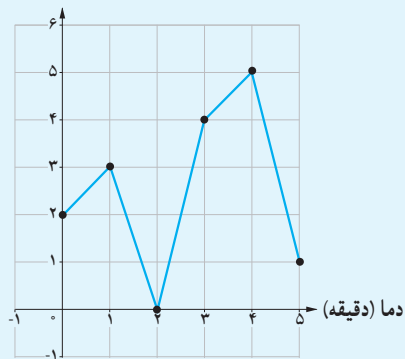


۵ با توجه به نمودار سه تابع داده شده، مشخص کنید کدام یک از آنها برابر مجموع دو تابع دیگر است؟

خواندنی

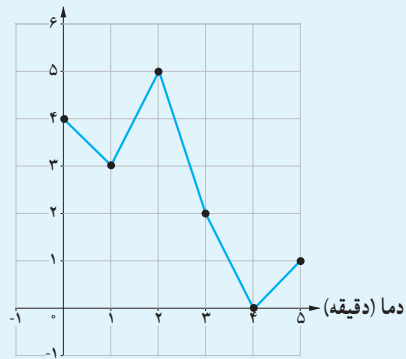
یک اجاق دارای دو منبع گرمایی قابل تنظیم است که می‌توانند هم‌زمان، به‌طور مستقل و جدا از هم گرما تولید کنند. نمودار دمایی که این دو منبع گرمایی تولید می‌کنند، به‌صورت زیر است. این نمودارها نشان می‌دهد که در عرض ۵ دقیقه، چگونه مقدار دما افزایش و یا کاهش می‌یابد. با توجه به نمودارهای زیر بیشترین و کمترین دمایی که در این اجاق تولید می‌شود چه مقدار است؟

درجه گرمایی



نمودار منبع اول

درجه گرمایی



نمودار منبع دوم