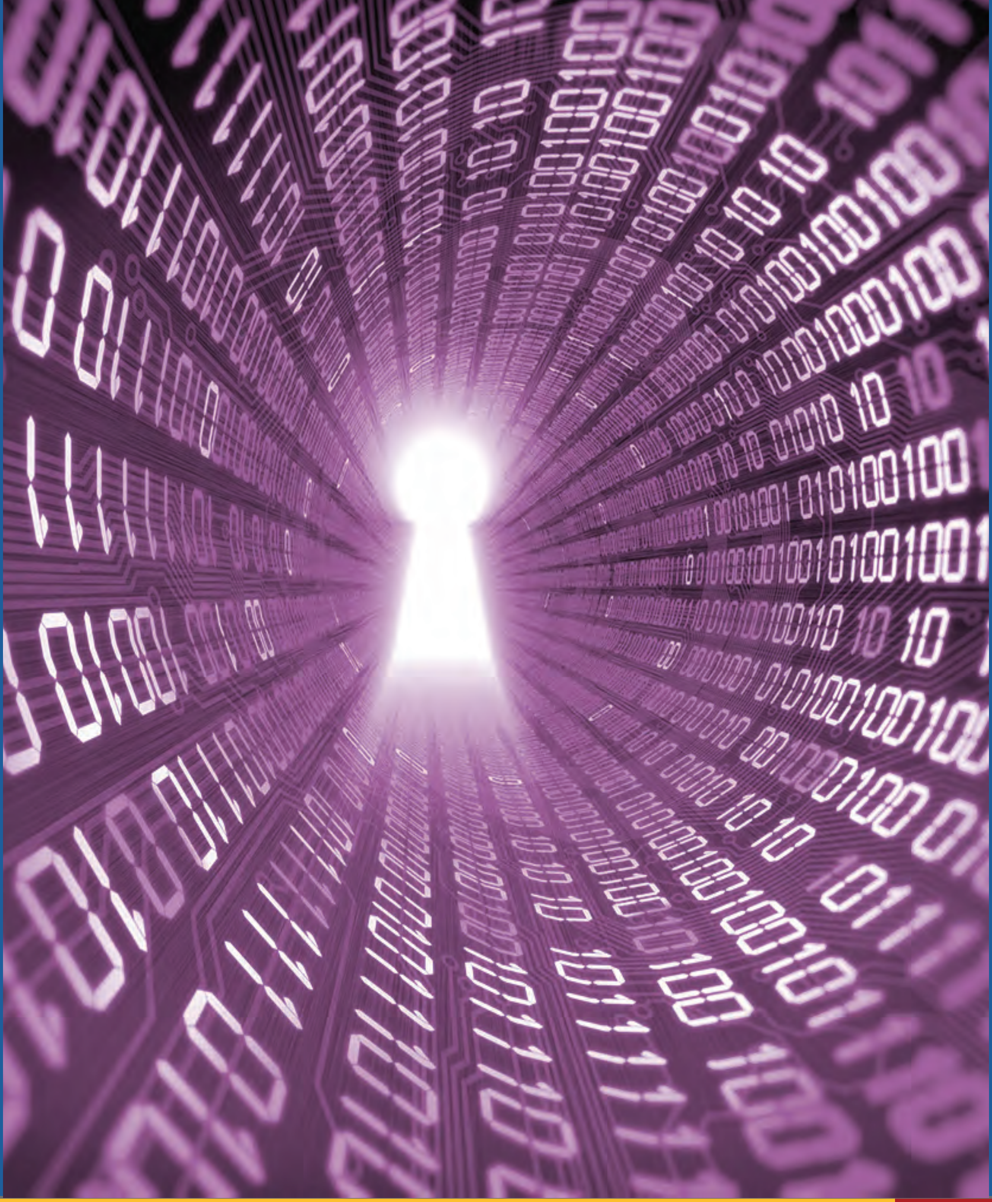

۱ آشنایی با نظریهٔ اعداد

نظریه اعداد و به‌خصوص مبحث هم‌نهشتی‌ها کاربردهای بسیاری در علوم مربوط به رایانه، رمزنگاری و رمزگشایی، حساب با اعداد صحیح بزرگ، طراحی الگوریتم‌های سودمند برای حساب کامپیوتری و ایجاد اعداد شبه تصادفی دارد.

درس ۱ استدلال ریاضی

نقش استدلال در زندگی انسان‌ها انکارناپذیر است. همهٔ ما در زندگی روزمره و یا در زندگی حرفه‌ای خود نیازمند کسب توانمندی در این زمینه هستیم. تسلیم عقل در برابر استدلال موهبتی الهی است که امکان تعامل بین انسان‌ها و توسعه علوم گوناگون و رشد و بالندگی را در زمینه‌های مختلف برای بشر فراهم ساخته است. استدلال و اثبات در ریاضیات نیز جایگاه ویژه‌ای دارد. درک و فهم ریاضی بدون توجه به استدلال امکان ندارد و آموزش ریاضیات را محدود به حفظ کردن رویّه‌ها و الگوریتم‌ها خواهد کرد. آشنایی با روش‌های استدلال و اثبات در ریاضیات، هم به فهم ریاضیات و هم به بسط و توسعه آن کمک شایانی می‌نماید. هدف ما در این درس آشنایی با برخی از روش های استدلال و اثبات در ریاضی است.

مثال : درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را بررسی کنید :

الف) مجموع سه عدد طبیعی متوالی بر ۳ بخش‌پذیر است.

ب) عدد $2^{2^n}+1$ به ازای همه عددهای طبیعی n، عددی اول است.

حل : گاهی ممکن است برای فهم یک گزاره، مثال‌هایی را برای صدق آن بررسی کنیم.

برای نمونه برای گزاره الف داریم :

$$10+11+12=33 \qquad 5+6+7=18$$

$$31+32+33=96 \qquad 25+26+27=78$$

در همه موارد حاصل جمع های به‌دست آمده، درستی گزاره الف را نشان می‌دهند همچنین برای $n=1$, $n=2$, $n=3$ و $n=4$ حاصل $2^{2^n}+1$ به ترتیب برابر ۵، ۱۷، ۲۵۷ و ۶۵۵۳۷ است که همگی اعداد اول هستند و ظاهراً بر درستی گزاره ب دلالت می‌کنند.

آیا ارائه این مثال‌ها برای برقراری گزاره‌های الف و ب کافی هستند، اگر کافی نیست آیا ارائه مثال‌های بیشتر کفایت می‌کند؟

در مورد الف هر چقدر مثال ارائه کنید، مشاهده خواهید کرد که گزاره برقرار است، اما در مورد گزاره ب، اگر $n=5$ آن‌گاه :

$$2^{2^n}+1=4294967297=641\times 6700417$$

که به وضوح نشان می‌دهد، حاصل یک عدد اول نیست. همین «مثال نقض» نشان می‌دهد که گزارهٔ ب در حالت کلی درست نیست. این روش استدلال به‌صورت معمول برای رد کردن یک حکم کلی به‌کار می‌رود و استدلال به کمک «مثال نقض» است.

در مورد گزاره الف با اینکه نمی‌توانید مثال نقضی ارائه کنید، امّا درستی گزاره با ارائه مثال به‌دست نمی‌آید. مثلاً یک احتمال این است که نتوانید مثال نقضی ارائه کنید و یا اینکه تاکنون مثال نقضی برای آن ارائه نشده باشد. به هر حال در اینجا اثبات دشوار نیست. کافی است سه عدد طبیعی را با n، $n+۱$ و $n+۲$ نمایش دهیم. در این صورت داریم :

$$n+n+۱+n+۲=۳n+۳=۳(n+۱)$$

که نشان می‌دهد گزاره الف در حالت کلی درست است.

این نوع اثبات کردن را «اثبات مستقیم» می‌نامند. البته اثبات مستقیم ممکن است کاملاً پیچیده باشد. هدف این کتاب طرح اثبات‌های دشوار نیست[۱]. محتوای آموزش این درس در چارچوب مطالبی است که تاکنون آموخته‌اید. در کار در کلاس نمونه‌هایی از استدلال به روش «اثبات مستقیم» و استدلال به کمک «مثال نقض» را مشاهده خواهید کرد.

کار در کلاس

هریک از گزاره‌های زیر را اثبات و یا با ارائه مثال نقض رد کنید.

الف) مجموع هر دو عدد فرد، عددی زوج است.

ب) برای هر دو عدد حقیقی x و y : $\sqrt{x+y}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$

پ) برای هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱، عدد $۲^n-۱$ اول است.

ت) مجموع هر دو عدد گویا، عددی گویاست.

ث) اگر برای سه مجموعه A، B و C داشته باشیم $A\cup B=A\cup C$ آنگاه $B=C$

ج) اگر k حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد، آنگاه $۴k+۱$ مربع کامل است.

خواندنی

یافتن مثال نقض ممکن است کار بسیار دشواری باشد. گاهی سال‌ها وقت برای یافتن مثال نقض لازم بوده است. به‌طور مثال عبارت $۹۹۱n^۲+۱$ را برای nهای طبیعی درنظر بگیرید. اگر حاصل این عبارت را برای $n=۱$، $n=۲$، … و $n=۱۰۰۰$ به‌دست آورید هیچ کدام مجذور کامل نمی‌باشند. آیا به نظر شما می‌توان حکم کرد که «برای nهای طبیعی عبارت $۹۹۱n^۲+۱$ هیچ‌گاه مجذور کامل نیست.» پاسخ منفی است! سرپینسکی ریاضی‌دان معاصر لهستانی، کوچک‌ترین عدد طبیعی که به ازای آن $۹۹۱n^۲+۱$ مجذور کامل باشد را ارائه کرد. این عدد ۲۹ رقم دارد! عدد $n=۱۲۰۵۵۷۳۵۷۹۰۳۳۱۳۵۹۴۴۷۴۴۲۵۳۸۷۳۷$ مثال نقض موردنظر است.

۱ــ طرح مسائل در ارزشیابی‌ها باید در سطح مطالب کتاب باشد. طرح مسائل پیچیده که نیاز به دانش محتوایی سطح بالا دارند مورد تأیید مؤلفین نیست.

اثبات با درنظر گرفتن همه حالت‌ها

گاهی برای اثبات یک گزاره لازم است همهٔ موارد ممکن درمورد مسئله را درنظر بگیریم. به مثال زیر توجه کنید.

مثال : ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n، n^2-5n+7 عددی فرد است.

حل : دو حالت در اینجا ممکن است رخ دهد :

الف) n زوج است، به‌عبارت دیگر $n=2k$ $(k\in\mathbb{N})$؛ در این حالت داریم :

$$n^2-5n+7=(2k)^2-5(2k)+7=4k^2-10k+6+1$$

که حاصل یک عدد فرد است.

ب) n فرد است، یعنی $n=2k-1$ $(k\in\mathbb{N})$؛ در این حالت هم داریم :

$$n^2-5n+7=(2k-1)^2-5(2k-1)+7=4k^2-4k+1-10k+5+7$$

$$=4k^2-14k+13=2(2k^2-7k+6)+1$$

که باز هم حاصل یک عدد فرد است.

به عبارت دیگر زوج یا فرد بودن n، فرد بودن n^2-5n+7 را نتیجه می‌دهد.

اگر زوج بودن n را با p و فرد بودن n را با q و فرد بودن n^2-5n+7 را با r نمایش دهیم، حکم را می‌توان به‌صورت گزاره $p\vee q\Rightarrow r$ نمایش داد. با توجه به هم ارزی $p\vee q\Rightarrow r\equiv(p\Rightarrow r)\wedge(q\Rightarrow r)$ شیوهٔ اثبات در مثال فوق توجیه می‌شود.

$$\begin{aligned}p\vee q\Rightarrow r&\equiv r\vee\sim(p\vee q)\\&\equiv r\vee(\sim p\wedge\sim q)\\&\equiv(r\vee\sim p)\wedge(r\vee\sim q)\\&\equiv(p\Rightarrow r)\wedge(q\Rightarrow r)\end{aligned}$$

به‌طریق مشابه، برای هر تعداد متناهی گزارهٔ دلخواه داریم :

$$P_1\vee P_2\vee\ldots P_n\Rightarrow r\equiv(P_1\Rightarrow r)\wedge(P_2\Rightarrow r)\wedge\ldots(P_n\Rightarrow r)$$

نوع دیگری از درنظر گرفتن حالت‌های ممکن، در مثال زیر ارائه شده است.

مثال : ثابت کنید اگر a و b دو عدد حقیقی باشند و $ab=0$ آنگاه $a=0$ یا $b=0$.

حل : برای a دو حالت ممکن است رخ دهد :

الف) اگر $a=0$، در این حالت حکم برقرار است (چرا؟)

ب) اگر $a\neq 0$، در این حالت a^{-1} (معکوس a) یک عدد حقیقی است و با ضرب طرفین رابطه $ab=0$ در a^{-1} داریم :

$$ab=0\Rightarrow a^{-1}(ab)=a^{-1}\times 0$$

$$\Rightarrow\quad b=0$$

بنابراین در هر دو حالت حکم برقرار است.

کار در کلاس

الف) اگر a و b دو عدد صحیح باشند و ab عددی فرد باشد، ثابت کنید $a^۲ + b^۲$ زوج است.

ب) $A = \{۳, ۴\}$ یک زیرمجموعه از مجموعه $S = \{۱, ۲, ..., ۶\}$ است و $n \in S$، اگر $\frac{n^۲(n+۱)^۲}{۴}$ یک عدد زوج باشد ثابت کنید $n \in A$.

اثبات غیر مستقیم

اثبات به روش برهان خلف

در هندسه (۱) با اثبات به روش برهان خلف که نوعی اثبات غیرمستقیم است آشنا شده‌اید. در روش برهان خلف فرض می‌کنیم که حکم نادرست باشد و سپس با استفاده از قوانین منطق گزاره‌ها و دنباله‌ای از استدلال‌های درست و مبتنی بر فرض به یک نتیجه غیرممکن یا نتیجه متضاد با فرض می‌رسیم و از آنجا (با توجه به منطقی بودن همه مراحل) معلوم می‌شود که فرضِ نادرست بودنِ حکم باطل است و درستی حکم ثابت می‌گردد.

در تعاملات و محاورات روزمره هم ممکن است از این روش استدلال استفاده کنیم. آنجا که با فردی نظری کاملاً متضاد داریم و به درستی نظر خود اطمینان داریم، برای رسیدن به نتیجه موردنظرمان، موقتاً نظر مخالف خود را می‌پذیریم و با استفاده از دنباله‌ای از استدلال‌ها و ادبیاتی که مورد توافق دو طرف است، نشان می‌دهیم که پذیرفتن نظر او به بن بست یا تناقض منجر می‌شود.

مثال : ثابت کنید حاصل‌جمع یک عددگویا و یک عدد گنگ، عددی گنگ است.

حل : فرض کنیم که r یک عدد گویا و x یک عدد گنگ باشد. نشان می‌دهیم که $r + x$ یک عدد گنگ است. اگر (فرض خلف) $r + x$ گنگ نباشد، بنابراین عددی گویا است. از طرفی می‌دانیم که تفاضل دو عدد گویا، عددی گویا است. پس تفاضل $r + x$ و r باید عددی گویا باشد یعنی $r + x - r \in Q$ و از آنجا $x \in Q$ که با فرض ما در تناقض است. در نتیجه فرض خلف باطل است و حکم اثبات می‌گردد.

مثال : حاصل‌ضرب هر عدد گویای ناصفر در یک عدد گنگ، عددی گنگ است.

حل : فرض کنیم r یک عدد گویای ناصفر باشد و x عددی گنگ باشد ولی rx عددی گویا (فرض خلف) باشد. می‌دانیم که حاصل‌ضرب هر دو عدد گویا، عددی گویاست. علاوه بر این معکوس هر عدد گویای ناصفر هم عددی گویاست. بنابراین $(\frac{۱}{r})(rx) \in Q$ و از آنجا $x \in Q$ که با فرض در تناقض است.

مثال : a_1، a_2 و a_3 عددهایی صحیح هستند و b_1، b_2 و b_3 هم همان اعداد ولی به ترتیب دیگری قرار گرفته‌اند. ثابت کنید $(a_1-b_1)(a_2-b_2)(a_3-b_3)$ عددی زوج است.

حل : برای درک بهتر مسئله، مثالی ارائه می‌کنیم. a_1، a_2 و a_3 را به‌ترتیب، ۵، ۸ و ۱ درنظر می‌گیریم و b_1، b_2 و b_3 را ۸، ۱ و ۵ درنظر می‌گیریم، داریم :

$$(a_1-b_1)(a_2-b_2)(a_3-b_3)=(۵-۸)(۸-۱)(۱-۵)=(-۳)(۷)(-۴)=۸۴$$

اگر $(a_1-b_1)(a_2-b_2)(a_3-b_3)$ زوج نباشد (فرض خلف) پس عددی فرد است. پس هر سه عامل a_1-b_1، a_2-b_2 و a_3-b_3 هم باید فرد باشند (چرا؟) و درنتیجه مجموع آنها هم باید عددی فرد باشد، یعنی $(a_1-b_1)+(a_2-b_2)+(a_3-b_3)$ باید عددی فرد باشد. امّا مجموع این سه عبارت صفر است!

کار در کلاس

درستی گزاره‌های زیر را با استفاده از روش برهان خلف ثابت کنید.

الف) اگر x یک عدد گنگ باشد، ثابت کنید $\frac{۱}{x}$ نیز گنگ است.

ب) اگر تابع f در $x=a$ پیوسته ولی g در $x=a$ ناپیوسته باشد، ثابت کنید $f+g$ در $x=a$ ناپیوسته است.

اثبات‌های بازگشتی / گزاره‌های هم‌ارز

اگر ارزش دو گزاره یکسان باشد آنها را گزاره‌های هم ارز (هم‌ارزش) می‌نامیم.

اگر P و Q دو گزاره هم ارز (یعنی همواره هر دو درست یا هر دو نادرست) باشند، آن‌گاه گزاره‌های $P\Rightarrow Q$ و $Q\Rightarrow P$ هر دو درست هستند و در نتیجه $P\Leftrightarrow Q$ یک گزاره درست است.

به عکس اگر ترکیب دو شرطی $P\Leftrightarrow Q$ درست باشد، آن‌گاه P و Q دو گزاره هم‌ارز خواهند بود و اگر ارزش یکی از آنها را بدانیم، ارزش دیگری نیز همان خواهد بود. به کمک این موضوع می‌توانیم درستی یا نادرستی یک گزاره را بررسی کنیم. در عمل به‌طور معمول درستی یا نادرستی گزاره‌ای که معمولاً ساده‌تر است را انتخاب می‌کنیم. البته این کار ممکن است که در یک مرحله انجام نشود، به‌طور مثال اگر P, Q و R سه گزاره باشند و $Q\Leftrightarrow R$ و $P\Leftrightarrow Q$ یعنی ارزش سه گزاره یکسان است و اثبات درستی یا نادرستی هر یک، تکلیف دو گزاره دیگر را معلوم خواهد کرد. به‌هر حال ممکن است این عمل ادامه یابد و در تعدادی متناهی مرحله کار انجام شود.

با توجه به آنچه گفته شد، در هنگام استفاده از این روش اثبات (که گاهی به آن «روش بازگشتی» هم می‌گویند) توانایی ارائه ترکیب دو شرطی درست و مناسب بسیار اساسی است.

مثال : ترکیب دو شرطی $(a,b\in\mathbb{R})$ ، $a=b\Leftrightarrow a^۳=b^۳$ درست است ولی ترکیب دو شرطی $a=b\Leftrightarrow a^۲=b^۲$ درست نیست (چرا؟)

کار در کلاس

اگر $a,b \in \mathbb{R}$ کدام‌یک از ترکیب‌های دو شرطی زیر درست است؟

الف) $a < b \Leftrightarrow a^{۲} < b^{۲}$ ب) $a < b \Leftrightarrow a^{۳} < b^{۳}$

مثال : اگر $a > ۰$ ثابت کنید $a + \frac{۱}{a} \geq ۲$

اگر $a > ۰$، داریم : $a + \frac{۱}{a} \geq ۲ \Leftrightarrow a^{۲} + ۱ \geq ۲a$

این ترکیب دو شرطی بیان نمی‌کند که کدام گزاره درست است، بلکه تنها بیانگر آن است که دو گزاره هم ارز هستند و اثبات هر کدام، دیگری را نتیجه می‌دهد. به نظر شما چرا این دو گزاره هم ارز هستند؟ اثبات کدام‌یک ساده‌تر است؟

همچنین $a^{۲} + ۱ \geq ۲a \Leftrightarrow a^{۲} + ۱ - ۲a \geq ۰$

و درنهایت : $a^{۲} + ۱ - ۲a \geq ۰ \Leftrightarrow (a-۱)^{۲} \geq ۰$

آخرین گزاره یعنی $(a-۱)^{۲} \geq ۰$ همواره برقرار است، به‌عبارت دیگر حکم هم ارز گزاره‌ای است که همواره برقرار است. پس حکم ثابت شده است. مراحل اثبات را (با شرط $a > ۰$) به صورت زیر می‌توان خلاصه کرد :

$$a + \frac{۱}{a} \geq ۲ \Leftrightarrow a^{۲} + ۱ \geq ۲a$$
$$\Leftrightarrow a^{۲} + ۱ - ۲a \geq ۰$$
$$\Leftrightarrow (a-۱)^{۲} \geq ۰ \text{ همواره برقرار است.}$$

به هر حال این نوع استدلال در گفت‌وگوها و مذاکرات معمول هم مورد استفاده قرار می‌گیرد، آنجا که برای بررسی یک حکم، معادل آن را به مخاطب یادآوری می‌کنیم و از عباراتی نظیر : آنچه که شما می‌گویید معادل این است که ...، یا گفته شما به مثابه آن است که ...، در آنجا باید از قوانین و ادبیات مورد پذیرش طرفین پیروی کنیم و در ریاضیات از منطق ریاضی. در هر حال در هنگام استفاده از این نوع استدلال در زندگی روزمره هم ممکن است پس از چند مرحله به نتیجه برسیم.

مثال : ثابت کنید میانگین حسابی دو عدد نامنفی، از میانگین هندسی آنها کمتر نیست.

حل : اگر a و b دو عدد نامنفی باشند، حکم ما چنین خواهد بود : $\frac{a+b}{۲} \geq \sqrt{ab}$

$$\frac{a+b}{۲} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow a + b \geq ۲\sqrt{ab}$$
$$\Leftrightarrow a + b - ۲\sqrt{ab} \geq ۰$$
$$\Leftrightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b})^{۲} \geq ۰ \text{ گزاره همیشه درست.}$$

مثال : اگر a و b دو عدد حقیقی باشند ثابت کنید : $a^{۲} + ab + b^{۲} \geq ۰$

حل : $a^{۲} + ab + b^{۲} \geq ۰ \Leftrightarrow (a + \frac{b}{۲})^{۲} + \frac{۳b^{۲}}{۴} \geq ۰$

اثبات کوتاه و زیبایی است. حکم با یک گزاره همیشه درست (سمت راست) هم‌ارز است.

راه دوم :

$$a^2+ab+b^2\geq 0 \Leftrightarrow 2a^2+2ab+2b^2\geq 0$$
$$\Leftrightarrow a^2+b^2+2ab+a^2+b^2\geq 0$$
$$\Leftrightarrow (a+b)^2+a^2+b^2\geq 0$$ گزاره همیشه درست.

البته ممکن است شما هم راه‌حل دیگری برای این مسئله ارائه کنید.

شیوه‌ای که در این قسمت از درس مورد استفاده قرار گرفت را برای نشان دادن نادرستی یک گزاره نیز می‌توان به‌کار برد.

کار در کلاس

الف) اگر n یک عدد طبیعی باشد، آیا زوج بودن n و زوج بودن n^2 هم‌ارزند؟

ب) آیا دو گزاره زیر هم‌ارزند؟

۱ نقطه C روی عمود منصف پاره‌خط AB قرار دارد.

۲ فاصله نقطه C از دو سر پاره‌خط AB یکسان است.

تمرین

۱ گزاره‌های زیر را به روش بازگشتی (گزاره‌های هم‌ارز) ثابت کنید :

الف) اگر x و y دو عدد حقیقی هم علامت باشند داریم :

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2$$

ب) برای هر سه عدد حقیقی x و y و z داریم :

$$x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx$$

پ) برای هر دو عدد حقیقی x و y داریم :

$$x^2+y^2+1\geq xy+x+y$$

۲ عددی حقیقی مانند x ارائه کنید به‌طوری‌که $x^3<x^2$.

۳ اگر α و β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha+\beta$ گویا باشد، ثابت کنید $\alpha-\beta$ و $\alpha+2\beta$ گنگ هستند.

۴ آیا اعدادی صحیح مانند x و y وجود دارند که $x^2+y^2=(x+y)^2$

۵ آیا مقادیر حقیقی و ناصفر a و b چنان وجود دارند که :

$$\frac{1}{a+b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \qquad (a+b\neq 0)$$

۶ گزاره‌های زیر را اثبات و یا با ارائه مثال نقض آنها را رد کنید.

الف) مربع و مکعب هر عدد فرد عددی فرد است.

ب) میانگین پنج عدد طبیعی متوالی همان عدد وسطی است.