بسم الله الرحمن الرحیم

ریاضی عمومی (۱) و (۲)

دورهٔ پیش‌دانشگاهی

رشتهٔ علوم تجربی

۱۳۹۰

وزارت آموزش و پرورش

سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

برنامه‌ریزی محتوا و نظارت بر تألیف : **دفتر برنامه ریزی و تألیف کتاب‌های درسی**

نام کتاب : **ریاضی عمومی (۱) و (۲) ـ ۲۹۲/۱**

شورای برنامه‌ریزی : **دکتر یحیی تابش، دکتر محمّدحسن بیژن‌زاده، دکتر امیر نادری، حمیده داریوش همدانی و جواد حاجی بابائی**

مؤلفان : **دکتر محمّدحسن بیژن زاده، دکتر عین اللّه پاشا و که کو یوحنایی**

آماده‌سازی و نظارت برچاپ و توزیع : **ادارهٔ کلّ چاپ و توزیع کتاب‌های درسی**

تهران : خیابان ایرانشهر شمالی ـ ساختمان شمارهٔ ۴ آموزش و پرورش (شهید موسوی)

تلفن : ۹ـ ۸۸۸۳۱۱۶۱، دورنگار : ۸۸۳۰۹۲۶۶، کد پستی : ۱۵۸۴۷۴۷۳۵۹،

وب‌سایت : www.chap.sch.ir

مدیر امور فنی و چاپ : **سیداحمد حسینی**

رسام : **فاطمه رئیسیان فیروزآباد**

طراح جلد : **محمّد حسن معماری**

صفحه آرا : **مریم نصرتی**

حروفچین : **فاطمه باقری‌مهر**

مصحح : **فاطمه گیتی‌جبین، زهرا رشیدی‌مقدم**

امور آماده‌سازی خبر : **زینت بهشتی‌شیرازی**

امور فنی رایانه‌ای : **حمید ثابت کلاچاهی، پیمان حبیب‌پور**

ناشر : **شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران : تهران ـ کیلومتر ۱۷ جادّهٔ مخصوص کرج ـ خیابان ۶۱ (داروپخش)**

تلفن : ۵ـ۴۴۹۸۵۱۶۱، دورنگار : ۴۴۹۸۵۱۶۰، صندوق پستی : ۱۳۴۴۵/۶۸۴

چاپخانه : **شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران « سهامی خاص»**

سال انتشار و نوبت چاپ : **چاپ هفدهم ۱۳۹۰**

ISBN 964-05-0101-8 ۹۶۴-۰۵-۰۱۰۱-۸ شابک

جوان‌ها قدر جوانی‌شان را بدانند که صرف کنند در علم و در تقوا و در سازندگی خودشان که اشخاص امین صالح بشوند. مملکت با اشخاص امین صالح می‌تواند مستقل باشد.

امام خمینی (ره)

این کتاب در سال ۱۳۹۰ در گروه ریاضی دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتاب‌های درسی اصلاح شد.

فهرست

فصل ۱ احتمال ۱

فصل ۲ توابع و معادلات ۲۰

فصل ۳ مشتق توابع ۶۵

فصل ۴ کاربردهای مشتق ۸۳

فصل ۵ هندسه مختصاتی و منحنی‌های درجه دوم ۱۰۸

فصل ۶ انتگرال ۱۴۹

منابع ۱۷۵

فصل ۱

احتمال

یادآوری

در مطالعهٔ رویدادها ممکن است شاهد اتفاق‌های گوناگون باشیم، ما مایلیم قبل از آن‌که روند رویدادی کامل شود نتیجهٔ آن را پیش‌بینی کنیم. یا به صورت روشن‌تر، می‌خواهیم **درجهٔ اطمینانی** را که به وقوع هریک از نتایج رویداد داریم مشخص کنیم. این درجهٔ اطمینان به وسیلهٔ احتمال سنجیده می‌شود که موضوع مورد بحث ماست.

مثال : در تولید ابریشم طبیعی، از کرم ابریشم استفاده می‌شود. این کرم‌ها مدتی از برگ توت تغذیه می‌کنند و بعد از آن پیلهٔ ابریشم را به دور خود می‌تنند و سرانجام با سوراخ کردن پیله به‌صورت پروانه از آن خارج می‌شوند. روند طبیعی و معمولی پرورش کرم ابریشم به همین صورت است که بیان شد. ولی در عمل دیده می‌شود که بعضی از کرم‌ها قبل از آن‌که پیله ببندند می‌میرند و برخی دیگر در حین پیله بستن از بین می‌روند. می‌خواهیم بدانیم که چه نسبتی از کرم‌ها به پروانه تبدیل می‌شوند؟ این نسبت نه‌تنها در مطالعهٔ مراحل زندگی کرم ابریشم مهم است بلکه از لحاظ اقتصادی نیز مسأله قابل‌توجهی است.

اولین قدم در مطالعهٔ اغلب آزمایش‌ها تعیین فهرستی از نتایج ممکن برای آزمایش است. چنین فهرستی را فضای نمونه‌ای می‌گوییم.

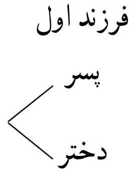
تعریف فضای نمونه‌ای : فضای نمونه‌ای یک آزمایش، مجموعه‌ای است مانند S به قسمی که نتایج آزمایش عضوی از این مجموعه باشند.

تذکر : فضای نمونه‌ای ممکن است دارای تعداد نامتناهی عضو باشد. ما در ادامهٔ بحث فقط آزمایش‌هایی را درنظر می‌گیریم که فضای نمونه‌ای آن‌ها متناهی است یعنی تعداد اعضای S، عددی طبیعی مانند n است.

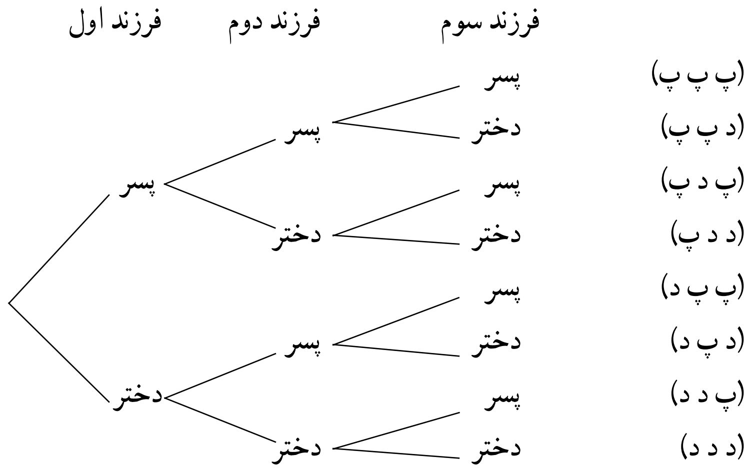
مثال ۱ : خانواده‌ای دارای سه فرزند است. فضای نمونه‌ای مناسب برای ترکیب جنسیت فرزندان این خانواده چیست؟

برای فرزند اول دو حالت وجود دارد، پسر یا دختر. این دو حالت را می‌توان به‌صورت صفحهٔ بعد

نشان داد.



برای هر حالتِ فرزند اول دو حالت برای فرزند دوم وجود دارد. همچنین برای هر حالت فرزند دوم، دوحالت برای فرزند سوم وجود دارد. تمام این حالت‌ها را می‌توان در نمودار زیر خلاصه کرد : (د برای دختر و پ برای پسر آمده است)



بنابراین فضای نمونه‌ای مربوط به فرزندان این خانواده عبارت است :

S = {پ پ پ ، د پ پ ، پ د پ ، د د پ ، پ پ د ، دپ د ، پ د د ، د د د}

تذکر : فضای نمونه‌ای را به گونه‌ای می‌نویسیم که شانس وقوع اعضای آن با هم برابر باشند. مثلاً اگر خانواده‌ای ۲ فرزند داشته باشد، فضای نمونه‌ای آن را به صورت {دد، پ د، د پ، پ پ} می‌نویسیم نه به صورت {دد، د پ، پ پ}، زیرا شانس یک پسر و یک دختر بیش از شانس دو پسر و هم‌چنین بیش از شانس دو دختر است.

پیشامد

هر زیرمجموعهٔ فضای نمونه‌ای را **پیشامد** می‌گوییم. پیشامدها را معمولاً با نماد A و B و C و... نشان می‌دهیم.

مثال ۲ : در مثال ۱

A = {پ پ پ}

B = {د د پ، د پ د، پ د د ، د د د}

دو زیرمجموعهٔ S هستند پس پیشامدهایی از این فضای نمونه‌ای‌اند. A و B را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد :

هر سه فرزند پسر = A

حداقل دو فرزند دختر = B

تعریف احتمال

اگر A پیشامدی از فضای نمونه‌ای S باشد، احتمال A را که با P(A) نشان می‌دهیم بنابر دستور زیر محاسبه می‌کنیم :

$$P(A)=\frac{\text{تعداد اعضای } A}{\text{تعداد اعضای } S}$$

اعضای A را معمولاً صورت‌های مساعد (برای پیشامد A) و اعضای S را صورت‌های ممکن می‌گویند. بنابراین احتمال A را می‌توان به صورت زیر نوشت :

$$P(A)=\frac{\text{تعداد صورت‌های مساعد}}{\text{تعداد صورت‌های ممکن}}$$

اگر تعداد اعضای مجموعهٔ A را با نماد n(A) نشان دهیم، دستور محاسبهٔ احتمال به صورت زیر بیان خواهد شد :

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$$

مثال ۳ : در مثال ۱ مطلوب است احتمال آن‌که

الف ــ هرسه فرزند پسر باشند.

ب ــ حداکثر یکی از آن‌ها پسر باشد.

حل : اگر پیشامد الف را با A و پیشامد ب را با B نشان دهیم، خواهیم داشت

{د د پ، د پ د، پ د د ، د د د} = B   A = {پ پ پ}

قبلاً دیدیم که فضای نمونه‌ای این آزمایش ۸ عضو دارد. بنابر این

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱}{۸}\ ,\ \ P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۴}{۸}=\frac{۱}{۲}$$

مسئله : خانواده‌ای دارای ۴ فرزند است، مطلوبست :

الف ــ فضای نمونه‌ای مربوط به جنسیت فرزندان این خانواده

ب ــ احتمال آن‌که این خانواده ۲ پسر و ۲ دختر داشته باشد.

ج ــ احتمال آن‌که تعداد پسرها بیش از تعداد دخترها باشد.

ترکیب پیشامدها

از آنجایی که پیشامدها زیرمجموعه‌هایی از فضای نمونه‌ای هستند، می‌توانیم با اعمال عمل بر مجموعه‌ها، پیشامدهای جدیدی به دست آوریم :

متمم یک پیشامد

اگر A یک پیشامد باشد، متمم آن پیشامدی است که وقتی رخ می‌دهد که A رخ ندهد. متمم پیشامد A را با نماد A' نشان می‌دهیم.

مثال ۴ : اگر A پیشامد پسر بودن هرسه فرزند در مثال ۱ باشد آن‌گاه A' عبارت است از پسر نبودن هرسه فرزند، پس

$A' =$ {د د د، د د پ، د پ د ، پ د د، پ پ د ، پ د پ ، د پ پ}

این پیشامد را می‌توان به صورت زیر نیز بیان کرد :

$A' =$ حداقل یک فرزند دختر باشد

مثال ۵ : فرض کنیم $S = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$، $A = \{۲,۳,۴\}$ و $B = \{۴,۵,۶\}$، در این صورت $A \cup B = \{۲,۳,۴,۵,۶\}$. می‌توانیم $P(A \cup B)$ را مستقیماً با استفاده از تعریف حساب کنیم :

$$P(A \cup B) = \frac{n(A \cup B)}{n(S)}$$

$$= \frac{۵}{۶}$$

اشتراک دو پیشامد

اگر A و B دو پیشامد باشند، $A \cap B$ پیشامدی است که وقتی رخ می‌دهد که هر دوپیشامدهای A و B رخ دهند.

مثال ۶ : فرض کنید S و A و B همان پیشامدهای مثال ۵ باشند. در این صورت

$$A \cap B = \{۴\}$$

بنابراین

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{۱}{۶}$$

با توجه به مطالب سال قبل و مثال‌های ۵ و ۶ دیده می‌شود که بین $P(A \cup B)$، $P(A)$، $P(B)$ و $P(A \cap B)$ رابطهٔ زیر برقرار است :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

این دستور در حالت کلی نیز برقرار است و به‌کمک آن می‌توانیم احتمال پیشامد $P(A \cup B)$ را در صورت معلوم بودن سایر احتمال‌ها حساب کنیم.

مثال ۷ : فرض کنید در جامعه‌ای درصد نوع خون به شرح زیر باشد :

نوع A ۴۱٪	نوع AB ۴٪
نوع B ۹٪	نوع O ۴۶٪

فرض کنید مجروحی را به بخش اورژانس بیمارستانی آورده‌اند. احتمال این‌که گروه خونی این بیمار از نوع A یا B باشد چقدر است؟

حل : اگر فرض کنیم

E = گروه خونی بیمار A است

F = گروه خونی بیمار B است

می‌خواهیم $P(E \cup F)$ را حساب کنیم. چون امکان ندارد که شخصی هم دارای گروه خونی A و هم گروه خونی B باشد، پس $E \cap F$ عضوی نمی‌تواند داشته باشد، پس احتمال آن صفر است، بنابراین

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F)$$

$$= ۰/۴۱ + ۰/۰۹ = ۰/۵۰$$

مسئله : در مسئله قبل مطلوب است احتمال آن‌که فرزندان یک در میان پسر باشند و یا خانواده ۲ فرزند پسر داشته باشد.

پیشامد غیر ممکن

اگر در آزمایشی، پیشامدی را تعریف کنیم که امکان وقوع آن نباشد، آن پیشامد را **پیشامد غیرممکن** می‌گوییم و با نماد $\varnothing$ (نماد مجموعهٔ تهی) نشان می‌دهیم. چون مجموعهٔ تهی هیچ عضوی ندارد پس

$$P(\varnothing)=\frac{n(\varnothing)}{n(S)}=\frac{0}{n(S)}=0$$

مثال ۸ : در مثال ۱ اگر A و B را به صورت زیر تعریف کنیم

A = هرسه فرزند پسر باشند

B = یکی از فرزندان دختر باشد

در این صورت پیشامد $A\cap B$ غیر ممکن است، زیرا این امکان ندارد که هر سه فرزند پسر باشند و در ضمن یکی از آن‌ها دختر باشد. پس $A\cap B=\varnothing$. البته اگر سعی می‌کردیم A و B را به‌صورت اعضا مشخص کنیم، معلوم می‌شد که B و A هیچ عضو مشترکی ندارند (انجام دهید). پس

$P(A\cap B)=0$

تعریف : اگر دو پیشامد A و B نتوانند با هم رخ دهند آن دو پیشامد را **ناسازگار** می‌گوییم. پس A و B دو پیشامد ناسازگارند اگر داشته باشیم :

$A\cap B=\varnothing$

از این تعریف معلوم می‌شود که اگر A و B ناسازگار باشند، آنگاه $P(A\cap B)=0$ و در نتیجه

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

تعمیم

اگر A_1، A_2، . . . ، A_n پیشامدهایی باشند که دو به‌دو با هم نتوانند رخ دهند، در این صورت می‌گوییم این پیشامدها **دو به دو ناسازگارند** و در این صورت داریم

$$P(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)$$

مثال ۹ : در مثال ۷ احتمال آن‌که شخص مجروح از یکی از سه گروه‌های خونی A، B یا AB باشد چقدر است؟

حل : اگر علاوه بر E و F که در مثال ۷ تعریف شدند G را به صورت زیر تعریف کنیم :

G : گروه خونی بیمار AB است

در این صورت می‌خواهیم $P(E\cup F\cup G)$ را حساب کنیم که بنابر ناسازگاری پیشامدهای E، F و G داریم :

$$P(E\cup F\cup G)=P(E)+P(F)+P(G)$$
$$=0/41+0/09+0/04=0/54$$

پیشامدهای مستقل

اگر دو پیشامد به قسمی باشند که وقوع یا عدم وقوع یکی در وقوع دیگری تأثیری نداشته باشد، آن‌دو پیشامد را مستقل می‌گوییم.

اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند برابری زیر برقرار است :

$$P(A\cap B) = P(A)\,P(B)$$

مثال ۱۰ : مادری صاحب سه فرزند است. احتمال آن‌که دو فرزند اول پسر باشند چقدر است؟

حل : چون جنسیت نوزادان دو پیشامد مستقل است پس

P (دو فرزند اول پسر) = P (فرزند دوم پسر و فرزند اول پسر)

= P (فرزند اول پسر) P (فرزند دوم پسر)

$$= \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۴}$$

مسئله : در مثال بالا مطلوب است احتمال آن‌که **فقط** دو فرزند اول پسر باشند.

مثال ۱۱ : مطالعات ژنتیکی نشان داده است که ۴۰٪ ژن‌های تعیین‌کننده عامل RH خون منفی‌اند. مطلوب است احتمال آن‌که فردی دارای RH منفی باشد.

حل : می‌دانیم برای آن‌که فردی دارای RH منفی باشد لازم است که دو ژن منفی داشته باشد. و چون این ژن‌ها را از هر یک از والدین خود به ارث می‌برد می‌توانیم منفی بودن هر یک از این ژن‌ها را مستقل فرض کنیم بنابراین

P (منفی RH) = P (هر دو ژن منفی) = P (یک ژن منفی) P (یک ژن منفی)

= (۰/۴) (۰/۴) = ۰/۱۶

مثال۱۲ : احتمال آن‌که در خانواده‌ای اولین فرزند با RH منفی فرزند سوم خانواده باشد چقدر است؟

حل : (۱ − ۰/۱۶) (۱ − ۰/۱۶) (۰/۱۶)

مسائل

۱ــ اگر ۴۰٪ ژن‌های تعیین‌کننده عامل RH خون منفی باشند، مطلوب است احتمال آن‌که RH خون فردی منفی نباشد.

۲ــ با مفروضات مسئله بالا مطلوب است احتمال آن‌که در خانواده‌ای دو فرزنداز لحاظ خونی دارای یک نوع RH باشند.

۳ــ اگر فرزند اول خانواده‌ای دارای RH مثبت باشد احتمال آن‌که فرزند دوم دارای RH منفی باشد چقدر است؟ (RHخون فرزندان را مستقل فرض کنید.)

۴ــ خانواده‌ای دارای سه فرزند است. مطلوب است احتمال آن‌که RH خون هر سه فرزند یکی نباشد.

۵ــ خانواده‌ای دارای چهار فرزند است، مطلوب است احتمال آن‌که فرزند اول و دوم پسر و فرزند سوم و چهارم دختر باشد.

احتمال شرطی

تا به حال برای پیشامدی مانند A، P(A) را با استفاده از دستور $\frac{n(A)}{n(S)}$ محاسبه می‌کردیم و منظور از این احتمال آن بود که ما هیچ اطلاعی دربارهٔ پیشامد A نداریم. امّا در بعضی مواقع ممکن است که به ما اطلاعاتی داده باشند که این اطلاعات در احتمال وقوع A مؤثر باشد.

مثال : فرض کنید از ظرفی که شامل ۵ مهره سفید و ۴ مهره سیاه است، مهره‌ای به تصادف خارج کرده‌ایم، احتمال آن که این مهره سفید باشد چقدر است؟

حل : در این مثال فضای نمونه‌ای ۹ عضو دارد که ۵ عضو آن برای پیشامد مورد نظر مساعد است پس احتمال آمدن سفید برابر $\frac{۵}{۹}$ است.

این احتمال به طور مطلق حساب شد و از هیچ اطلاع اضافی استفاده نشد. حال مثال زیر را در نظر بگیرید.

مثال : از جعبهٔ مثال بالا مهره‌ای خارج می‌کنیم ملاحظه می‌شود که رنگ آن سیاه است. این مهره را کنار گذاشته و مهرهٔ دوم را به تصادف خارج می‌کنیم. مطلوب است احتمال آن‌که این مهره سفید باشد.

حل : در این مثال پس از کشیدن مهرهٔ اول و با توجه به اطلاعات داده شده (سیاه بودن مهرهٔ خارج شده) شرایط به هنگام استخراج مهرهٔ دوم عبارت است از وجود ۵ مهرهٔ سفید و ۳ مهرهٔ سیاه در جعبه، پس احتمال آمدن یک مهرهٔ سفید از این جعبه $\frac{۵}{۸}$ است.

همان‌طوری‌که ملاحظه می‌شود اگر چه در دو مثال بالا احتمال آمدن مهرهٔ سفید را حساب کردیم ولی جواب‌ها یکسان نیستند. زیرا در مثال دوم اطلاعاتی داریم که احتمال آمدن مهرهٔ سفید را تغییر می‌دهد.

تعریف : فرض کنید A و B دو پیشامد باشند، به قسمی که $P(B) > ۰$، در این صورت اگر B رخ داده باشد احتمال وقوع A را که با نماد $P(A|B)$ نشان می‌دهیم و آن را احتمال شرطی A به شرط وقوع B می‌گوییم، بنابر دستور زیر محاسبه می‌شود :

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

تذکر : از آنجایی که در دستور بالا $P(B)$ در مخرج کسر قرار می‌گیرد شرط $P(B) > ۰$ ضروری است.

مثال : اگر $P(A\cap B) = ۰/۲$ و $P(B) = ۰/۶$، $P(A|B)$ را حساب کنید.

حل : بنابر تعریف احتمال شرطی داریم :

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

$$=\frac{۰/۲}{۰/۶}=\frac{۱}{۳}$$

مثال : در آزمایشگاهی ۳ موش سیاه و ۲ موش سفید داریم، قبلاً یک موش سفید را برای آزمایشی انتخاب کرده‌ایم. حال می‌خواهیم همان آزمایش را روی موش دیگری انجام دهیم. برای این منظور موشی را از بین موش‌هایی که روی آن‌ها آزمایش انجام نشده است انتخاب می‌کنیم. مطلوب است احتمال آن که این موش نیز سفید باشد.

حل : با توجه به شرایط مسأله، در واقع موشی از بین ۳ موش سیاه و یک موش سفید انتخاب می‌شود. پس احتمال سفید بودن این موش عبارت است از $\frac{۱}{۴}$.

مسئله : کارمندان اداره‌ای مطابق جدول زیر توزیع شده‌اند. احتمال آن‌که کارمند مردی تحصیلات دانشگاهی داشته باشد چقدر است؟

		جنسیت	
		مرد	زن
تحصیلات	دانشگاهی	۱۵	۱۰
	کمتر از دانشگاهی	۹۰	۸۰

احتمال شرطی و استقلال پیشامدها

به نظر می‌رسد که اگر دو پیشامد A و B مستقل باشند وقوع یکی از این پیشامدها در احتمال وقوع دیگری نباید تأثیر بگذارد. این واقعیت را می‌توانیم به صورت زیر ثابت کنیم :

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$ (بنابر تعریف احتمال شرطی)

$$=\frac{P(A)P(B)}{P(B)}$$ (بنابر فرض استقلال A و B)

$$=P(A)$$

پس اگر A و B مستقل باشند آنگاه :

$$P(A|B)=P(A)$$

مثال : خانواده‌ای دارای چهار فرزند است. می‌دانیم فرزند اول پسر است. مطلوب است احتمال آن‌که سه فرزند دیگر این خانواده دختر باشند.

حل : پیشامد پسر بودن فرزند اول را با B و پیشامد دختر بودن سه فرزند بعدی را با A نشان می‌دهیم. بنابراین می‌خواهیم $P(A|B)$ را حساب کنیم. می‌دانیم که

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

$A\cap B$، یعنی خانواده‌ای چهار فرزند دارد و می‌خواهیم فرزند اول پسر و سه فرزند بعدی دختر باشند، پس بنابر استقلال جنسیت فرزندان داریم : (پ برای پسر و د برای دختر)

$$P(A\cap B)=P\,(\text{د د د پ})$$

$$=P\,(\text{پ})\,P\,(\text{د})\,P\,(\text{د})\,P\,(\text{د})$$

$$=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۱۶}$$

امّا $P(B)=\frac{۱}{۲}$ ، بنابراین

$$\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{۱}{۱۶}}{\frac{۱}{۲}}=\frac{۱}{۸}$$

که این احتمال برابر احتمال آن است که سه فرزند بعدی دختر باشند. دیده می‌شود که وقوع B تغییری

در احتمال وقوع A نمی‌دهد.

دستور محاسبه احتمال شرطی معمولاً به صورتی که بیان شد مورد استفاده قرار نمی‌گیرد. بلکه از احتمال شرطی برای محاسبه $P(A\cap B)$ استفاده می‌شود. از تعریف احتمال شرطی برابری زیر نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} P(A\cap B) &= P(B)\, P(A|B) \\ &= P(A)\, P(B|A) \end{aligned}$$

از این دستورها می‌توانیم احتمال اشتراک دو پیشامد را حساب کنیم.

مثال: دو مهره، متوالیاً و بدون جایگذاری از جعبه‌ای که شامل ۴ مهرهٔ سفید و ۶ مهرهٔ سیاه است خارج می‌کنیم. مطلوب است احتمال آن که مهرهٔ اول سفید و مهرهٔ دوم سیاه باشد.

حل: اگر سفید بودن مهرهٔ اول را با A و سیاه بودن مهرهٔ دوم را با B نشان دهیم، می‌خواهیم $P(A\cap B)$ را حساب کنیم. با استفاده از احتمال شرطی داریم:

$$P(A\cap B) = P(A)\, P(B|A)$$

امّا $P(A)=\frac{۴}{۱۰}$ و برای محاسبهٔ $P(B|A)$ باید فرض کنیم A رخ داده است یعنی مهره‌ای سفید از جعبه خارج شده است. بنابراین، شرایط به هنگام استخراج مهرهٔ دوم عبارت است از وجود ۶ مهرهٔ سیاه و ۳ مهرهٔ سفید در جعبه، بنابراین

$$P(B|A)=\frac{۶}{۹}$$

لذا

$$P(A\cap B)=\frac{۴}{۱۰}\times\frac{۶}{۹}=\frac{۲۴}{۹۰}$$

با استفاده از احتمال شرطی می‌توانیم به دستورهای مفیدی که در محاسبهٔ احتمال پیشامدها بسیار مؤثرند برسیم.

قانون احتمال کل

فرض کنید $E_۱, \ldots, E_n$ پیشامدهایی باشند که حتماً یکی از آن‌ها رخ می‌دهد، یعنی $\bigcup E_i = S$ همچنین فرض کنید فقط یکی از E_iها بتواند رخ دهد، یعنی این پیشامدها دو به دو ناسازگار باشند، یعنی به‌ازای هر $i\neq j$، $E_i\cap E_j=\varnothing$. با این شرایط برای هر پیشامد دلخواه E دستور مفید زیر را داریم:

$$P(E)=\sum_i P(E_i)P(E|E_i)$$

مثال : فرض کنید انتقال نوعی بیماری ارثی از والدین به فرزند پسر ۰/۱۲ و به فرزند دختر ۰/۰۹ باشد. والدینی که حامل این نوع بیماری هستند انتظار فرزندی را دارند. مطلوب است احتمال آن‌که این فرزند سالم باشد.

حل : فرزندی که به دنیا خواهد آمد یا پسر است یا دختر. پس اگر پسر بودن فرزند را با $E_۱$ و دختر بودن آن را با $E_۲$ نشان دهیم، آن‌گاه $E_۱$ و $E_۲$ ناسازگارند و حتماً یکی از آن‌ها رخ خواهد داد. سالم بودن فرزند را با E نشان می‌دهیم. می‌خواهیم P(E) را حساب کنیم.

$$P(E) = P(E_۱)\, P(E|E_۱) + P(E_۲)\, P(E|E_۲)$$

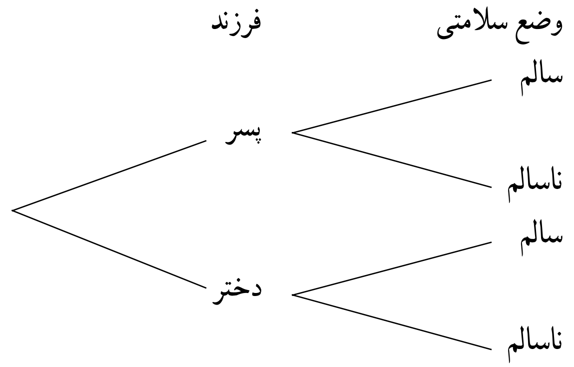
$$= \frac{۱}{۲} \times (۱ - ۰/۱۲) + \frac{۱}{۲}(۱ - ۰/۰۹)$$

$$= ۰/۴۴ + ۰/۴۵۵ = ۰/۸۹۵$$

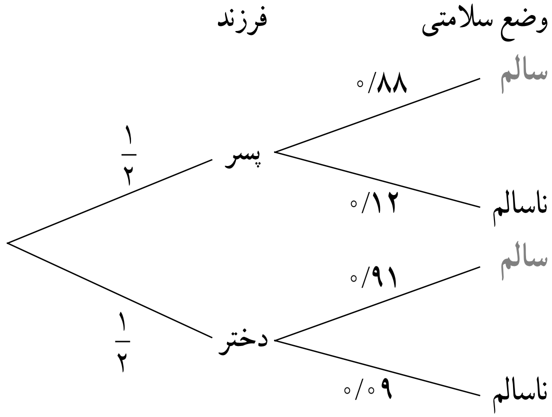
حدود ۰/۹ احتمال آن است که فرزندی که به دنیا می‌آید سالم باشد.

توجه : اگر می‌دانستیم که این فرزند پسر خواهد بود احتمال سالم بودن آن ۰/۸۸ و اگر می‌دانستیم دختر است این احتمال برابر ۰/۹۱ بود. امّا چون از جنسیت فرزندی که به دنیا خواهد آمد اطلاعی نداریم بنابر دستور بالا این احتمال برابر ۰/۸۹۵ محاسبه شد.

برای این مسأله اگر سعی می‌کردیم فهرستی از حالات ممکن تشکیل دهیم به نموداری به‌صورت زیر دست می‌یافتیم.



اگر روی هر یک از پاره‌خط‌های نمودار بالا احتمال پیشامد نظیر آن خط را بنویسیم خواهیم داشت :



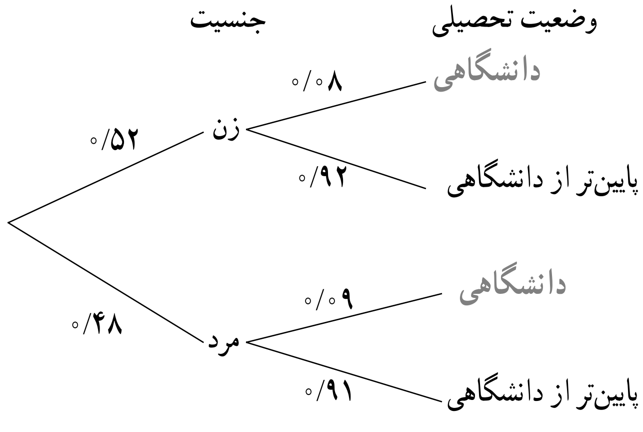
حال اگر شاخه‌هایی را که به وضعیت سالم ختم می‌شوند مشخص کنیم و احتمال‌های روی آن شاخه را در هم ضرب و با نتیجه حاصل از شاخه‌های دیگر جمع کنیم خواهیم داشت :

$$\underbrace{\frac{۱}{۲}\times ۰/۸۸}_{\text{شاخه اول}}+\underbrace{\frac{۱}{۲}\times ۰/۹۱}_{\text{شاخه دوم}}=۰/۸۹۵$$

که همان جوابی است که با استفاده از دستور جمع احتمال‌ها به دست آمد. این روش بسیار ساده و مفید است با مثال دیگری با نحوهٔ استفاده از آن بیشتر آشنا خواهید شد.

مثال : ۵۲٪ جمعیت کشوری را زنان و ۴۸٪ بقیه را مردان تشکیل می‌دهند. اگر ۸ درصد زنان و ۹ درصد مردان تحصیلات دانشگاهی داشته باشند، چند درصد جمعیت این کشور تحصیلات دانشگاهی دارند.

حل :



پس احتمال مطلوب عبارت است از

$$۰/۵۲\times ۰/۰۸+۰/۴۸\times ۰/۰۹=۰/۰۸۴۸$$

با این اطلاعات حدود ۸/۵ درصد جمعیت کشور تحصیلات دانشگاهی دارند.

مسئله : ۵۲٪ جمعیت کشوری را زنان و ۴۸٪ بقیه را مردان تشکیل می‌دهند اگر ۶۰٪ زنان و ۶۸٪ مردان باسواد باشند، چند درصد افراد این جامعه باسوادند؟

متغیرهای تصادفی

قبلاً به‌طور مختصر متغیر تصادفی را به عنوان جزئی از یک مسألهٔ آماری تعریف کردیم. اگر در آزمایشی، عددی به هر نتیجهٔ آزمایش نسبت دهیم این عدد را **متغیر تصادفی** می‌نامیم. متغیرهای تصادفی را معمولاً با حروف بزرگ X و Y، ... نشان می‌دهیم.

مثال : در آزمایشگاهی موشی را تحت رژیم غذایی خاصی قرار می‌دهیم. می‌خواهیم وزن این موش را پس از یک هفته مطالعه کنیم. این وزن متغیری است تصادفی.

مثال : تعداد نوزادان یک موش در یک وضع حمل، متغیری است تصادفی.

مثال : تعداد تخم‌هایی که یک کرم ابریشم می‌گذارد، متغیری است تصادفی.

توزیع احتمال

موضوع را با یک مثال ساده شروع می‌کنیم. فرض کنید در آزمایشگاهی ۵ موش سفید و ۴ موش سیاه داریم. می‌خواهیم ۳ موش از بین آن‌ها انتخاب کنیم. فرض کنید X تعداد موش‌های سفید انتخاب شده باشند، در این صورت X متغیری است تصادفی که مقادیر ۰، ۱، ۲ و ۳ را می‌تواند انتخاب کند. حال احتمال آن‌که X برابر ۰ شود چقدر است. این احتمال را با نماد $P(X=۰)$ نشان می‌دهیم. برای آن‌که $X=۰$ شود، لازم است تمام موش‌های انتخاب شده از بین موش‌های سیاه باشند، پس احتمال مورد نظر عبارت است از

$$P(X=۰)=\frac{\binom{۴}{۳}}{\binom{۹}{۳}}=\frac{۱}{۲۱}$$

به همین ترتیب می‌توانیم سایر احتمال‌ها را نیز به شرح زیر حساب کنیم :

$$P(X=۱)=\frac{\binom{۵}{۱}\binom{۴}{۲}}{\binom{۹}{۳}}=\frac{۵}{۱۴}$$

$$P(X=۲)=\frac{\binom{۵}{۲}\binom{۴}{۱}}{\binom{۹}{۳}}=\frac{۱۰}{۲۱}$$

$$P(X=۳)=\frac{\binom{۵}{۳}}{\binom{۹}{۳}}=\frac{۵}{۴۲}$$

این احتمال‌ها را می‌توانیم در جدولی به صورت زیر بنویسیم :

X	۰	۱	۲	۳
P(X)	$\frac{۱}{۲۱}$	$\frac{۵}{۱۴}$	$\frac{۱۰}{۲۱}$	$\frac{۵}{۴۲}$

منظور از توزیع احتمال آن است که تعیین کنیم احتمال چگونه روی مقادیری توزیع شده است. مثلاً در جدول بالا توزیع احتمال روی مقادیر ۰، ۱، ۲ و ۳ به ترتیب به صورت $\frac{۱}{۲۱}$، $\frac{۵}{۱۴}$، $\frac{۱۰}{۲۱}$، $\frac{۵}{۴۲}$ است. برخی از توزیع‌ها به علت کاربردهای فراوانی که دارند از اهمیت زیادی برخوردارند. یکی از مهم‌ترین توزیع‌ها، توزیع دو جمله‌ای است.

مسئله : جعبه‌ای ۳ مهره سفید و ۵ مهره سیاه دارد، از این جعبه چهار مهره با هم و به تصادف خارج می‌کنیم. اگر X تعداد مهره‌های سفید خارج شده باشد جدول توزیع احتمال X را بنویسید.

توزیع دوجمله‌ای

فرض کنید در خانواده‌ای سه فرزند به دنیا آمده باشد. می‌خواهیم توزیع احتمال تعداد پسران این خانواده را به دست آوریم. اگر X را برابر تعداد فرزندان پسر خانواده تعریف کنیم، آن‌گاه X، مقادیر ۰، ۱، ۲، ۳ را می‌تواند اختیار کند. برای تعیین احتمال نظیر هر یک از این مقادیر به فضای نمونه‌ای مربوط به این آزمایش که در مثال ۱ به دست آمد مراجعه می‌کنیم.

بنابراین فضای نمونه‌ای عبارت است از

{ددد، پدد، دپد، پپد، ددپ، پدپ، دپپ، پپپ}

همان‌طور که دیده می‌شود فضای نمونه‌ای ۸ عضو دارد. (آیا می‌توانید توضیح دهید که چرا این مجموعه باید ۸ عضو داشته باشد؟) حال برای محاسبه $P(X=۰)$ می‌بینیم که پیشامد $X=۰$ یعنی مجموعهٔ {د د د}، پس احتمال آن برابر $\frac{۱}{۸}$ است. پیشامد $X=۱$ یعنی مجموعهٔ {پدد و دپد و ددپ}. بنابراین احتمال آن برابر $\frac{۳}{۸}$ است. به همین ترتیب می‌توانیم جدول زیر را تشکیل دهیم :

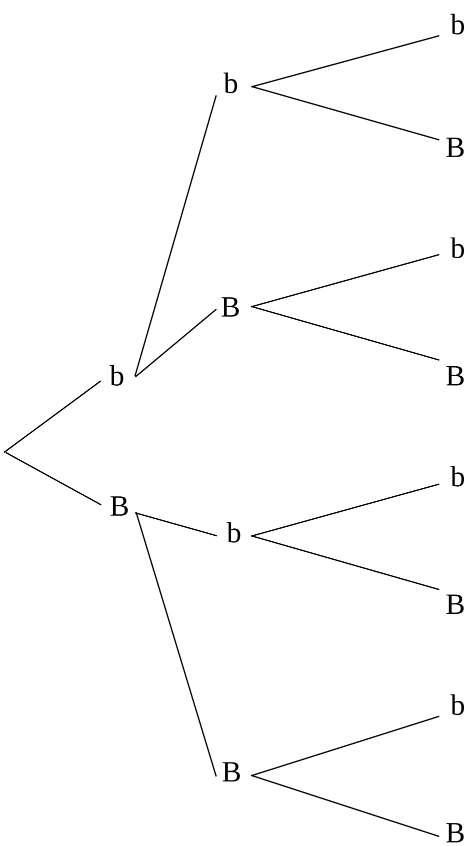
X	۰	۱	۲	۳
P(X)	$\frac{۱}{۸}$	$\frac{۳}{۸}$	$\frac{۳}{۸}$	$\frac{۱}{۸}$

تذکر : اگر احتمال پسر یا دختر بودن نوزاد برابر $\frac{۱}{۲}$ نباشد، اعضای این فضای نمونه‌ای هم‌شانس نخواهند بود و در نتیجه نمی‌توانستیم از دستور $\frac{n(A)}{n(S)}$ برای محاسبه احتمال استفاده کنیم. در مثال بعدی با چنین شرایطی مواجه هستیم.

مثال : فرض کنید پدر و مادری هر یک دارای یک ژن رنگ چشم مغلوب (b) و یک ژن رنگ چشم غالب (B) باشند. اگر این پدر و مادر صاحب سه فرزند باشند توزیع تعداد رنگ چشم‌های مغلوب را به دست آورید.

مجدداً می‌توانیم نمودار زیر را رسم کنیم :

احتمال　　فضای نمونه‌ای　　فرزند سوم　　فرزند دوم　فرزند اول



فضای نمونه‌ای	احتمال
bbb	$\left(\frac{۱}{۴}\right)^{۳}\left(\frac{۳}{۴}\right)^{۰}$
bbB	$\left(\frac{۱}{۴}\right)^{۲}\left(\frac{۳}{۴}\right)^{۱}$
bBb	$\left(\frac{۱}{۴}\right)^{۲}\left(\frac{۳}{۴}\right)^{۱}$
bBB	$\left(\frac{۱}{۴}\right)^{۱}\left(\frac{۳}{۴}\right)^{۲}$
Bbb	$\left(\frac{۱}{۴}\right)^{۲}\left(\frac{۳}{۴}\right)^{۱}$
BbB	$\left(\frac{۱}{۴}\right)\left(\frac{۳}{۴}\right)^{۲}$
BBb	$\left(\frac{۱}{۴}\right)\left(\frac{۳}{۴}\right)^{۲}$
BBB	$\left(\frac{۱}{۴}\right)^{۰}\left(\frac{۳}{۴}\right)^{۳}$

از اینجا می‌توانیم احتمال‌های تعداد فرزندان با رنگ چشم مغلوب را به دست آوریم، مثلاً

$$P(X = ۱) = P\{bBB, BbB, BBb\}$$

در این مثال چون اعضای فضای نمونه‌ای هم‌شانس نیستند نمی‌توانیم از دستور $\frac{n(A)}{n(S)}$ استفاده کنیم. برای محاسبهٔ احتمال از قوانین احتمال استفاده می‌کنیم. پیشامد $\{bBB, BbB, BBb\}$ در واقع اجتماع سه پیشامد ناسازگار $\{BBb\}$ و $\{BbB\}$ و $\{bBB\}$ است پس بنابر قانون جمع احتمال‌ها داریم :

$$P(X = ۱) = P\{bBB\} + P\{BbB\} + P\{BBb\}$$

$$= (\frac{۱}{۴})(\frac{۳}{۴})^{۲} + (\frac{۱}{۴})(\frac{۳}{۴})^{۲} + (\frac{۱}{۴})(\frac{۳}{۴})^{۲}$$

$$= ۳(\frac{۱}{۴})(\frac{۳}{۴})^{۲}$$

به همین ترتیب می‌توانیم سایر مقادیر را محاسبه و جدول زیر را تشکیل دهیم :

X	۰	۱	۲	۳
	$۱\left(\frac{۱}{۴}\right)^{۰}\left(\frac{۳}{۴}\right)^{۳}$	$۳\left(\frac{۱}{۴}\right)^{۱}\left(\frac{۳}{۴}\right)^{۲}$	$۳\left(\frac{۱}{۴}\right)^{۲}\left(\frac{۳}{۴}\right)^{۱}$	$۱\left(\frac{۱}{۴}\right)^{۳}\left(\frac{۳}{۴}\right)^{۰}$

در این جدول می‌بینیم که احتمال‌ها از دستور زیر پیروی می‌کنند :

$$P(X = k) = \binom{۳}{k}(\frac{۱}{۴})^{k}(\frac{۳}{۴})^{۳-k} \qquad k = ۰, ۱, ۲, ۳$$

اگر به جای k به ترتیب مقادیر ۰، ۱، ۲، ۳ را قرار دهیم همان احتمال‌های نوشته شده در جدول بالا به دست خواهند آمد. این دستور برای حالت‌های کلی نیز برقرار است.

مسئله : مثال بالا را برای خانواده‌ای که ۴ فرزند دارد و X برابر تعداد فرزندان با رنگ چشم مغلوب است تکرار کنید. تحقیق کنید که احتمال‌ها از دستور

$$P(X = k) = \binom{۴}{k}(\frac{۱}{۴})^{k}(\frac{۳}{۴})^{۴-k}$$

پیروی می‌کنند.

این مثال‌ها دارای نکات مشترک زیراند :

الف : آزمایشی که فقط دو نتیجه دارد. در مثال اول جنسیت فرزند و در مثال دوم رنگ چشم.

ب : این آزمایش به تعداد دفعات معلومی تکرار می‌شود. در مثال اول و دوم ۳ بار و در مسئله قبل ۴ بار تکرار شده است.

ج : نتیجهٔ هر آزمایش مستقل از نتیجهٔ سایر آزمایش‌ها است. پسر یا دختر بودن فرزندی به پسر یا دختر بودن فرزند در دفعات قبل یا بعد بستگی ندارد. همین‌طور رنگ چشم فرزندان. به همین دلیل احتمال پسر بودن فرزندی برابر $\frac{۱}{۲}$ و یا مغلوب بودن رنگ چشم فرزند برابر $\frac{۱}{۴}$ برای هر فرزند ثابت باقی ماند.

د : تعداد حالت‌های مورد نظر در این آزمایش‌ها، در مثال اول تعداد فرزندان پسر، و در مثال دوم تعداد فرزندان با رنگ چشمان مغلوب.

هر متغیر تصادفی که به صورت بالا معرفی می‌شود دارای توزیعی است که آن توزیع را **توزیع دوجمله‌ای** می‌نامیم. توزیع دوجمله‌ای را می‌توانیم در حالت کلی به صورت زیر معرفی کنیم.

الف : آزمایشی با دو نتیجه را در نظر بگیرید. نتیجه‌ای از این آزمایش که مورد نظر است «پیروزی» و دیگری را «شکست» بنامید در مثال اول دختر بودن فرزند و در مثال دوم مغلوب بودن رنگ چشم را پیروزی در نظر گرفته‌ایم.

ب : این آزمایش را n بار تکرار می‌کنیم در مثال اول و دوم $n = ۳$.

ج : آزمایش‌ها به صورت مستقل تکرار می‌شود. بنابراین اگر p احتمال آمدن پیروزی در انجام یک بار آزمایش باشد، آن گاه p در طول آزمایش ثابت است و از آزمایشی به آزمایش دیگر عوض نمی‌شود. در مثال اول $p = \frac{۱}{۲}$ و در مثال دوم $p = \frac{۱}{۴}$.

د : تعداد پیروزی‌ها در n بار تکرار آزمایش‌ها.

اگر این متغیر تصادفی را با X نشان دهیم آن‌گاه X مقادیر ۰، ۱، ۲، ...، n را با احتمال‌های زیر اختیار می‌کند :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (۱ - p)^{n-k}$$

مثال : اگر ۴۰ درصد ژن‌های تعیین‌کننده عامل RH خون منفی باشند، مطلوب است احتمال آن‌که در یک کلاس ۳۰ نفری ۸ نفر دارای خونی با RH منفی باشند.

$$P(X = ۸) = \binom{۳۰}{۸} (۰/۱۶)^۸ (۱ - ۰/۱۶)^{۲۲}$$

مثال : فرض کنید احتمال انتقال نوعی بیماری مسری از فرد بیمار به افراد مستعد برابر ۰/۱

باشد. اگر ۱۰ نفر مستعد با فردی که حامل بیماری است ملاقات کنند، توزیع تعداد افرادی را که به‌این بیماری مبتلا می‌شوند به دست آورید.

حل : در این مثال آزمایش عبارت است از ملاقات یک فرد مستعد با یک فرد بیمار که درنتیجه مبتلا شدن فرد سالم (پیروزی) و یا مبتلا نشدن (شکست) او را به همراه دارد. این آزمایش $n = ۱۰$ بار تکرار شده است و این تکرارها را می‌توان مستقل فرض کرد. احتمال پیروزی در هر تکرار برابر $p = ۰/۱$ است. تعداد پیروزی‌ها در این آزمایش برابر تعداد افرادی است که به بیماری مبتلا شده‌اند. اگر این تعداد را با X نشان دهیم ملاحظه می‌شود که تمام شرایط توزیع دوجمله‌ای برقرار است. پس

$$P(X = k) = \binom{۱۰}{k}(۰/۱)^k(۰/۹)^{۱۰-k}$$

مسائل

۱ــ نوعی بذر ذرت تهیه شده است که ادعا می‌شود ۹۰٪ بذرها جوانه خواهند زد. اگر ۲۰ دانه از این ذرت‌ها را در شرایط مناسب و یکسان بکاریم، مطلوب است تعیین توزیع تعداد بذرهایی که جوانه می‌زنند و محاسبه احتمال آن‌که فقط ۱۸ دانه جوانه بزند (جواب را ساده نکنید).

۲ــ به دانش‌آموزی ۱۰ سؤال تستی چهارگزینه‌ای داده‌ایم. اگر او به سؤال‌ها به تصادف جواب بدهد، احتمال آن‌که

الف ــ به ۷ سؤال پاسخ صحیح بدهد چقدر است؟

ب ــ حداقل به ۷ سؤال پاسخ صحیح بدهد چقدر است؟

۳ــ در خانواده‌ای با چهار فرزند، احتمال آن‌که RH خون فرزندان یک در میان مثبت باشد چقدر است؟

۴ــ احتمال آن‌که حسن دیر به مدرسه برسد ۰/۰۲ است، احتمال آن‌که در یک هفته دو روز دیر برسد چقدر است؟

فصل ۱

احتمال

یادآوری

در مطالعهٔ رویدادها ممکن است شاهد اتفاق‌های گوناگون باشیم، ما مایلیم قبل از آن‌که روند رویدادی کامل شود نتیجهٔ آن را پیش‌بینی کنیم. یا به صورت روشن‌تر، می‌خواهیم **درجهٔ اطمینانی** را که به وقوع هریک از نتایج رویداد داریم مشخص کنیم. این درجهٔ اطمینان به وسیلهٔ احتمال سنجیده می‌شود که موضوع مورد بحث ماست.

مثال : در تولید ابریشم طبیعی، از کرم ابریشم استفاده می‌شود. این کرم‌ها مدتی از برگ توت تغذیه می‌کنند و بعد از آن پیلهٔ ابریشم را به دور خود می‌تنند و سرانجام با سوراخ کردن پیله به‌صورت پروانه از آن خارج می‌شوند. روند طبیعی و معمولی پرورش کرم ابریشم به همین صورت است که بیان شد. ولی در عمل دیده می‌شود که بعضی از کرم‌ها قبل از آن‌که پیله ببندند می‌میرند و برخی دیگر در حین پیله بستن از بین می‌روند. می‌خواهیم بدانیم که چه نسبتی از کرم‌ها به پروانه تبدیل می‌شوند؟ این نسبت نه‌تنها در مطالعهٔ مراحل زندگی کرم ابریشم مهم است بلکه از لحاظ اقتصادی نیز مسأله قابل‌توجهی است.

اولین قدم در مطالعهٔ اغلب آزمایش‌ها تعیین فهرستی از نتایج ممکن برای آزمایش است. چنین فهرستی را فضای نمونه‌ای می‌گوییم.

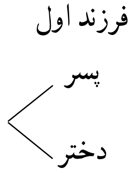
تعریف فضای نمونه‌ای : فضای نمونه‌ای یک آزمایش، مجموعه‌ای است مانند S به قسمی که نتایج آزمایش عضوی از این مجموعه باشند.

تذکر : فضای نمونه‌ای ممکن است دارای تعداد نامتناهی عضو باشد. ما در ادامهٔ بحث فقط آزمایش‌هایی را درنظر می‌گیریم که فضای نمونه‌ای آن‌ها متناهی است یعنی تعداد اعضای S، عددی طبیعی مانند n است.

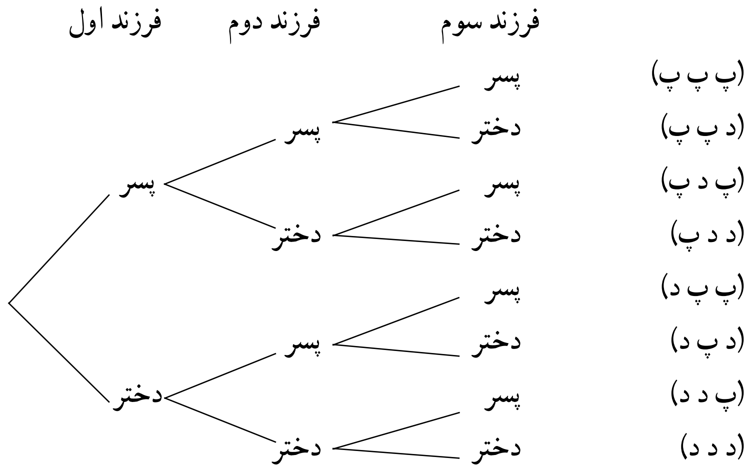
مثال ۱ : خانواده‌ای دارای سه فرزند است. فضای نمونه‌ای مناسب برای ترکیب جنسیت فرزندان این خانواده چیست؟

برای فرزند اول دو حالت وجود دارد، پسر یا دختر. این دو حالت را می‌توان به‌صورت صفحهٔ بعد

نشان داد.



برای هر حالتِ فرزند اول دو حالت برای فرزند دوم وجود دارد. همچنین برای هر حالت فرزند دوم، دوحالت برای فرزند سوم وجود دارد. تمام این حالت‌ها را می‌توان در نمودار زیر خلاصه کرد : (د برای دختر و پ برای پسر آمده است)



بنابراین فضای نمونه‌ای مربوط به فرزندان این خانواده عبارت است :

S = {پ پ پ ، د پ پ ، پ د پ ، د د پ، پ پ د ، دپ د ، پ د د ، د د د}

تذکر : فضای نمونه‌ای را به گونه‌ای می‌نویسیم که شانس وقوع اعضای آن با هم برابر باشند. مثلاً اگر خانواده‌ای ۲ فرزند داشته باشد، فضای نمونه‌ای آن را به صورت {دد، پ د، د پ، پ پ} می‌نویسیم نه به صورت {دد، د پ، پ پ}، زیرا شانس یک پسر و یک دختر بیش از شانس دو پسر و هم‌چنین بیش از شانس دو دختر است.

پیشامد

هر زیرمجموعهٔ فضای نمونه‌ای را **پیشامد** می‌گوییم. پیشامدها را معمولاً با نماد A و B و C و... نشان می‌دهیم.

مثال ۲ : در مثال ۱

$A = \{$پ پ پ$\}$

$B = \{$د د پ، د پ د، پ د د ، د د د$\}$

دو زیرمجموعهٔ S هستند پس پیشامدهایی از این فضای نمونه‌ای‌اند. A و B را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد :

هر سه فرزند پسر = A

حداقل دو فرزند دختر = B

تعریف احتمال

اگر A پیشامدی از فضای نمونه‌ای S باشد، احتمال A را که با P(A) نشان می‌دهیم بنابر دستور زیر محاسبه می‌کنیم :

$$P(A) = \frac{\text{تعداد اعضای } A}{\text{تعداد اعضای } S}$$

اعضای A را معمولاً صورت‌های مساعد (برای پیشامد A) و اعضای S را صورت‌های ممکن می‌گویند. بنابراین احتمال A را می‌توان به صورت زیر نوشت :

$$P(A) = \frac{\text{تعداد صورت‌های مساعد}}{\text{تعداد صورت‌های ممکن}}$$

اگر تعداد اعضای مجموعهٔ A را با نماد n(A) نشان دهیم، دستور محاسبهٔ احتمال به صورت زیر بیان خواهد شد :

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

مثال ۳ : در مثال ۱ مطلوب است احتمال آن‌که

الف ــ هرسه فرزند پسر باشند.

ب ــ حداکثر یکی از آن‌ها پسر باشد.

حل : اگر پیشامد الف را با A و پیشامد ب را با B نشان دهیم، خواهیم داشت

$A = \{$پ پ پ$\}$ $\qquad B = \{$د د پ، د پ د، پ د د ، د د د$\}$

قبلاً دیدیم که فضای نمونه‌ای این آزمایش ۸ عضو دارد. بنابر این

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۱}{۸} \quad , \quad P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{۴}{۸} = \frac{۱}{۲}$$

مسئله : خانواده‌ای دارای ۴ فرزند است، مطلوبست :

الف ــ فضای نمونه‌ای مربوط به جنسیت فرزندان این خانواده

ب ــ احتمال آن‌که این خانواده ۲ پسر و ۲ دختر داشته باشد.

ج ــ احتمال آن‌که تعداد پسرها بیش از تعداد دخترها باشد.

ترکیب پیشامدها

از آنجایی که پیشامدها زیرمجموعه‌هایی از فضای نمونه‌ای هستند، می‌توانیم با اعمال عمل بر مجموعه‌ها، پیشامدهای جدیدی به دست آوریم :

متمم یک پیشامد

اگر A یک پیشامد باشد، متمم آن پیشامدی است که وقتی رخ می‌دهد که A رخ ندهد. متمم پیشامد A را با نماد A' نشان می‌دهیم.

مثال ۴ : اگر A پیشامد پسر بودن هرسه فرزند در مثال ۱ باشد آن‌گاه A' عبارت است از پسر نبودن هرسه فرزند، پس

A' = {د د د، د د پ، د پ د ، پ د د، پ پ د ، پ د پ ، د پ پ}

این پیشامد را می‌توان به صورت زیر نیز بیان کرد :

A' = حداقل یک فرزند دختر باشد

مثال ۵ : فرض کنیم $S = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$، $A = \{۲,۳,۴\}$ و $B = \{۴,۵,۶\}$، در این صورت $A \cup B = \{۲,۳,۴,۵,۶\}$. می‌توانیم $P(A \cup B)$ را مستقیماً با استفاده از تعریف حساب کنیم :

$$P(A \cup B) = \frac{n(A \cup B)}{n(S)}$$

$$= \frac{۵}{۶}$$

اشتراک دو پیشامد

اگر A و B دو پیشامد باشند، $A \cap B$ پیشامدی است که وقتی رخ می‌دهد که هر دوپیشامدهای A و B رخ دهند.

مثال ۶ : فرض کنید S و A و B همان پیشامدهای مثال ۵ باشند. در این صورت

$A \cap B = \{۴\}$

بنابراین

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{۱}{۶}$$

با توجه به مطالب سال قبل و مثال‌های ۵ و ۶ دیده می‌شود که بین $P(A \cup B)$، $P(A)$، $P(B)$ و $P(A \cap B)$ رابطهٔ زیر برقرار است :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

این دستور در حالت کلی نیز برقرار است و به‌کمک آن می‌توانیم احتمال پیشامد $P(A \cup B)$ را در صورت معلوم بودن سایر احتمال‌ها حساب کنیم.

مثال ۷ : فرض کنید در جامعه‌ای درصد نوع خون به شرح زیر باشد :

نوع A ٪۴۱	نوع AB ٪۴
نوع B ٪۹	نوع O ٪۴۶

فرض کنید مجروحی را به بخش اورژانس بیمارستانی آورده‌اند. احتمال این‌که گروه خونی این بیمار از نوع A یا B باشد چقدر است؟

حل : اگر فرض کنیم

E = گروه خونی بیمار A است

F = گروه خونی بیمار B است

می‌خواهیم $P(E \cup F)$ را حساب کنیم. چون امکان ندارد که شخصی هم دارای گروه خونی A و هم گروه خونی B باشد، پس $E \cap F$ عضوی نمی‌تواند داشته باشد، پس احتمال آن صفر است، بنابراین

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F)$$
$$= ۰/۴۱ + ۰/۰۹ = ۰/۵۰$$

مسئله : در مسئله قبل مطلوب است احتمال آن‌که فرزندان یک در میان پسر باشند و یا خانواده ۲ فرزند پسر داشته باشد.

پیشامد غیر ممکن

اگر در آزمایشی، پیشامدی را تعریف کنیم که امکان وقوع آن نباشد، آن پیشامد را **پیشامد غیرممکن** می‌گوییم و با نماد $\varnothing$ (نماد مجموعهٔ تهی) نشان می‌دهیم. چون مجموعهٔ تهی هیچ عضوی ندارد پس

$$P(\varnothing)=\frac{n(\varnothing)}{n(S)}=\frac{۰}{n(S)}=۰$$

مثال ۸ : در مثال ۱ اگر A و B را به صورت زیر تعریف کنیم

A = هرسه فرزند پسر باشند

B = یکی از فرزندان دختر باشد

در این صورت پیشامد $A\cap B$ غیر ممکن است، زیرا این امکان ندارد که هر سه فرزند پسر باشند و در ضمن یکی از آن‌ها دختر باشد. پس $A\cap B=\varnothing$. البته اگر سعی می‌کردیم A و B را به‌صورت اعضا مشخص کنیم، معلوم می‌شد که B و A هیچ عضو مشترکی ندارند (انجام دهید). پس

$$P(A\cap B)=۰$$

تعریف : اگر دو پیشامد A و B نتوانند با هم رخ دهند آن دو پیشامد را **ناسازگار** می‌گوییم. پس A و B دو پیشامد ناسازگارند اگر داشته باشیم :

$$A\cap B=\varnothing$$

از این تعریف معلوم می‌شود که اگر A و B ناسازگار باشند، آنگاه $P(A\cap B)=۰$ و در نتیجه

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

تعمیم

اگر $A_۱$، $A_۲$، . . . ، A_n پیشامدهایی باشند که دو به‌دو با هم نتوانند رخ دهند، در این صورت می‌گوییم این پیشامدها **دو به دو ناسازگارند** و در این صورت داریم

$$P(A_۱\cup A_۲\cup\ldots\cup A_n)=P(A_۱)+P(A_۲)+\ldots+P(A_n)$$

مثال ۹ : در مثال ۷ احتمال آن‌که شخص مجروح از یکی از سه گروه‌های خونی A، B یا ABباشد چقدر است؟

حل : اگر علاوه بر E و F که در مثال ۷ تعریف شدند G را به صورت زیر تعریف کنیم :

G : گروه خونی بیمار AB است

در این صورت می‌خواهیم $P(E\cup F\cup G)$ را حساب کنیم کـه بنابر ناسازگاری پیشامدهای E، F و G داریم :

$$P(E\cup F\cup G)=P(E)+P(F)+P(G)$$
$$=۰/۴۱+۰/۰۹+۰/۰۴=۰/۵۴$$

پیشامدهای مستقل

اگر دو پیشامد به قسمی باشند که وقوع یا عدم وقوع یکی در وقوع دیگری تأثیری نداشته باشد، آن‌دو پیشامد را مستقل می‌گوییم.

اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند برابری زیر برقرار است :

$$P(A\cap B) = P(A)\,P(B)$$

مثال ۱۰ : مادری صاحب سه فرزند است. احتمال آن‌که دو فرزند اول پسر باشند چقدر است؟

حل : چون جنسیت نوزادان دو پیشامد مستقل است پس

P (دو فرزند اول پسر) = P (فرزند دوم پسر و فرزند اول پسر)

= P (فرزند اول پسر) P (فرزند دوم پسر)

$$=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۴}$$

مسئله : در مثال بالا مطلوب است احتمال آن‌که **فقط** دو فرزند اول پسر باشند.

مثال ۱۱ : مطالعات ژنتیکی نشان داده است که ۴۰٪ ژن‌های تعیین‌کننده عامل RH خون منفی‌اند. مطلوب است احتمال آن‌که فردی دارای RH منفی باشد.

حل : می‌دانیم برای آن‌که فردی دارای RH منفی باشد لازم است که دو ژن منفی داشته باشد. و چون این ژن‌ها را از هر یک از والدین خود به ارث می‌برد می‌توانیم منفی بودن هر یک از این ژن‌ها را مستقل فرض کنیم بنابراین

P (منفی RH) = P (هر دو ژن منفی) = P (یک ژن منفی) P (یک ژن منفی)

$$= (۰/۴)\,(۰/۴) = ۰/۱۶$$

مثال۱۲ : احتمال آن‌که در خانواده‌ای اولین فرزند با RH منفی فرزند سوم خانواده باشد چقدر است؟

حل : $(۱ - ۰/۱۶)\,(۱ - ۰/۱۶)\,(۰/۱۶)$

مسائل

۱ــ اگر ۴۰٪ ژن‌های تعیین‌کننده عامل RH خون منفی باشند، مطلوب است احتمال آن‌که RH خون فردی منفی نباشد.

۲ــ با مفروضات مسئله بالا مطلوب است احتمال آن‌که در خانواده‌ای دو فرزندان از لحاظ خونی دارای یک نوع RH باشند.

۳ــ اگر فرزند اول خانواده‌ای دارای RH مثبت باشد احتمال آن‌که فرزند دوم دارای RH منفی باشد چقدر است؟ (RHخون فرزندان را مستقل فرض کنید.)

۴ــ خانواده‌ای دارای سه فرزند است. مطلوب است احتمال آن‌که RH خون هر سه فرزند یکی نباشد.

۵ــ خانواده‌ای دارای چهار فرزند است، مطلوب است احتمال آن‌که فرزند اول و دوم پسر و فرزند سوم و چهارم دختر باشد.

احتمال شرطی

تا به حال برای پیشامدی مانند A، P(A) را با استفاده از دستور $\frac{n(A)}{n(S)}$ محاسبه می‌کردیم و منظور از این احتمال آن بود که ما هیچ اطلاعی دربارهٔ پیشامد A نداریم. امّا در بعضی مواقع ممکن است که به ما اطلاعاتی داده باشند که این اطلاعات در احتمال وقوع A مؤثر باشد.

مثال : فرض کنید از ظرفی که شامل ۵ مهره سفید و ۴ مهره سیاه است، مهره‌ای به تصادف خارج کرده‌ایم، احتمال آن که این مهره سفید باشد چقدر است؟

حل : در این مثال فضای نمونه‌ای ۹ عضو دارد که ۵ عضو آن برای پیشامد مورد نظر مساعد است پس احتمال آمدن سفید برابر $\frac{۵}{۹}$ است.

این احتمال به طور مطلق حساب شد و از هیچ اطلاع اضافی استفاده نشد. حال مثال زیر را در نظر بگیرید.

مثال : از جعبهٔ مثال بالا مهره‌ای خارج می‌کنیم ملاحظه می‌شود که رنگ آن سیاه است. این مهره را کنار گذاشته و مهرهٔ دوم را به تصادف خارج می‌کنیم. مطلوب است احتمال آن‌که این مهره سفید باشد.

حل : در این مثال پس از کشیدن مهرهٔ اول و با توجه به اطلاعات داده شده (سیاه بودن مهرهٔ خارج شده) شرایط به هنگام استخراج مهرهٔ دوم عبارت است از وجود ۵ مهرهٔ سفید و ۳ مهرهٔ سیاه در جعبه، پس احتمال آمدن یک مهرهٔ سفید از این جعبه $\frac{۵}{۸}$ است.

همان‌طوری‌که ملاحظه می‌شود اگر چه در دو مثال بالا احتمال آمدن مهرهٔ سفید را حساب کردیم ولی جواب‌ها یکسان نیستند. زیرا در مثال دوم اطلاعاتی داریم که احتمال آمدن مهرهٔ سفید را تغییر می‌دهد.

تعریف : فرض کنید A و B دو پیشامد باشند، به قسمی که $P(B) > ۰$، در این صورت اگر B رخ داده باشد احتمال وقوع A را که با نماد $P(A|B)$ نشان می‌دهیم و آن را احتمال شرطی A به شرط وقوع B می‌گوییم، بنابر دستور زیر محاسبه می‌شود :

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

تذکر : از آنجایی که در دستور بالا $P(B)$ در مخرج کسر قرار می‌گیرد شرط $P(B) > ۰$ ضروری است.

مثال : اگر $P(A\cap B) = ۰/۲$ و $P(B) = ۰/۶$، $P(A|B)$ را حساب کنید.

حل : بنابر تعریف احتمال شرطی داریم :

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

$$=\frac{۰/۲}{۰/۶}=\frac{۱}{۳}$$

مثال : در آزمایشگاهی ۳ موش سیاه و ۲ موش سفید داریم، قبلاً یک موش سفید را برای آزمایشی انتخاب کرده‌ایم. حال می‌خواهیم همان آزمایش را روی موش دیگری انجام دهیم. برای این منظور موشی را از بین موش‌هایی که روی آن‌ها آزمایش انجام نشده است انتخاب می‌کنیم. مطلوب است احتمال آن که این موش نیز سفید باشد.

حل : با توجه به شرایط مسأله، در واقع موشی از بین ۳ موش سیاه و یک موش سفید انتخاب می‌شود. پس احتمال سفید بودن این موش عبارت است از $\frac{۱}{۴}$.

مسئله : کارمندان اداره‌ای مطابق جدول زیر توزیع شده‌اند. احتمال آن‌که کارمند مردی تحصیلات دانشگاهی داشته باشد چقدر است؟

		جنسیت	
		مرد	زن
تحصیلات	دانشگاهی	۱۵	۱۰
	کمتر از دانشگاهی	۹۰	۸۰

احتمال شرطی و استقلال پیشامدها

به نظر می‌رسد که اگر دو پیشامد A و B مستقل باشند وقوع یکی از این پیشامدها در احتمال وقوع دیگری نباید تأثیر بگذارد. این واقعیت را می‌توانیم به صورت زیر ثابت کنیم :

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$ (بنابر تعریف احتمال شرطی)

$$=\frac{P(A)P(B)}{P(B)}$$ (بنابر فرض استقلال A و B)

$$=P(A)$$

پس اگر A و B مستقل باشند آنگاه :

$$P(A|B)=P(A)$$

مثال : خانواده‌ای دارای چهار فرزند است. می‌دانیم فرزند اول پسر است. مطلوب است احتمال آن‌که سه فرزند دیگر این خانواده دختر باشند.

حل : پیشامد پسر بودن فرزند اول را با B و پیشامد دختر بودن سه فرزند بعدی را با A نشان می‌دهیم. بنابراین می‌خواهیم $P(A|B)$ را حساب کنیم. می‌دانیم که

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

$A\cap B$، یعنی خانواده‌ای چهار فرزند دارد و می‌خواهیم فرزند اول پسر و سه فرزند بعدی دختر باشند، پس بنابر استقلال جنسیت فرزندان داریم : (پ برای پسر و د برای دختر)

$$P(A\cap B)=P\ (\text{د د د پ})$$

$$=P\ (\text{پ})\ P\ (\text{د})\ P\ (\text{د})\ P\ (\text{د})$$

$$=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۱۶}$$

امّا $P(B)=\frac{۱}{۲}$ ، بنابراین

$$\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{۱}{۱۶}}{\frac{۱}{۲}}=\frac{۱}{۸}$$

که این احتمال برابر احتمال آن است که سه فرزند بعدی دختر باشند. دیده می‌شود که وقوع B تغییری

در احتمال وقوع A نمی‌دهد.

دستور محاسبه احتمال شرطی معمولاً به صورتی که بیان شد مورد استفاده قرار نمی‌گیرد. بلکه از احتمال شرطی برای محاسبه $P(A\cap B)$ استفاده می‌شود. از تعریف احتمال شرطی برابری زیر نتیجه می‌شود:

$$P(A\cap B) = P(B)\,P(A|B)$$
$$= P(A)\,P(B|A)$$

از این دستورها می‌توانیم احتمال اشتراک دو پیشامد را حساب کنیم.

مثال: دو مهره، متوالیاً و بدون جایگذاری از جعبه‌ای که شامل ۴ مهرهٔ سفید و ۶ مهرهٔ سیاه است خارج می‌کنیم. مطلوب است احتمال آن که مهرهٔ اول سفید و مهرهٔ دوم سیاه باشد.

حل: اگر سفید بودن مهرهٔ اول را با A و سیاه بودن مهرهٔ دوم را با B نشان دهیم، می‌خواهیم $P(A\cap B)$ را حساب کنیم. با استفاده از احتمال شرطی داریم:

$$P(A\cap B) = P(A)\,P(B|A)$$

امّا $P(A)=\frac{۴}{۱۰}$ و برای محاسبهٔ $P(B|A)$ باید فرض کنیم A رخ داده است یعنی مهره‌ای سفید از جعبه خارج شده است. بنابراین، شرایط به هنگام استخراج مهرهٔ دوم عبارت است از وجود ۶ مهرهٔ سیاه و ۳ مهرهٔ سفید در جعبه، بنابراین

$$P(B|A)=\frac{۶}{۹}$$

لذا

$$P(A\cap B)=\frac{۴}{۱۰}\times\frac{۶}{۹}=\frac{۲۴}{۹۰}$$

با استفاده از احتمال شرطی می‌توانیم به دستورهای مفیدی که در محاسبهٔ احتمال پیشامدها بسیار مؤثرند برسیم.

قانون احتمال کل

فرض کنید $E_۱,\dots,E_n$ پیشامدهایی باشند که حتماً یکی از آن‌ها رخ می‌دهد، یعنی $\cup E_i = S$ همچنین فرض کنید فقط یکی از E_iها بتواند رخ دهد، یعنی این پیشامدها دو به دو ناسازگار باشند، یعنی به‌ازای هر $i\neq j$، $E_i\cap E_j=\varnothing$. با این شرایط برای هر پیشامد دلخواه E دستور مفید زیر را داریم:

$$P(E)=\sum_i P(E_i)P(E|E_i)$$

مثال : فرض کنید انتقال نوعی بیماری ارثی از والدین به فرزند پسر ۰/۱۲ و به فرزند دختر ۰/۰۹ باشد. والدینی که حامل این نوع بیماری هستند انتظار فرزندی را دارند. مطلوب است احتمال آن‌که این فرزند سالم باشد.

حل : فرزندی که به دنیا خواهد آمد یا پسر است یا دختر. پس اگر پسر بودن فرزند را با $E_۱$ و دختر بودن آن را با $E_۲$ نشان دهیم، آن‌گاه $E_۱$ و $E_۲$ ناسازگارند و حتماً یکی از آن‌ها رخ خواهد داد. سالم بودن فرزند را با E نشان می‌دهیم. می‌خواهیم $P(E)$ را حساب کنیم.

$$P(E) = P(E_۱)\, P(E|E_۱) + P(E_۲)\, P(E|E_۲)$$

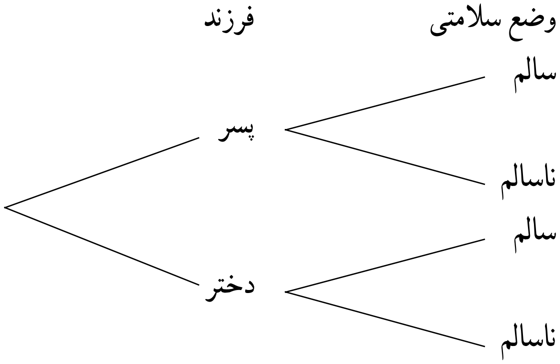
$$= \frac{۱}{۲} \times (۱ - ۰/۱۲) + \frac{۱}{۲}(۱ - ۰/۰۹)$$

$$= ۰/۴۴ + ۰/۴۵۵ = ۰/۸۹۵$$

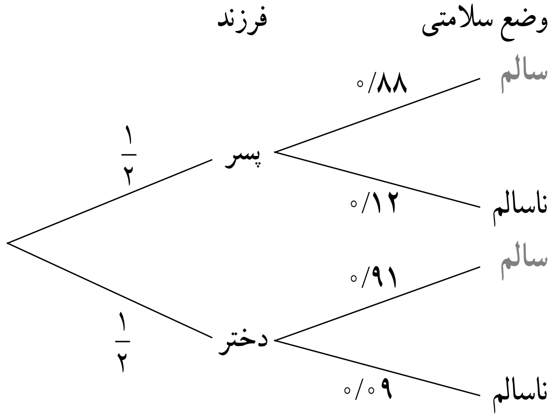
حدود ۰/۹ احتمال آن است که فرزندی که به دنیا می‌آید سالم باشد.

توجه : اگر می‌دانستیم که این فرزند پسر خواهد بود احتمال سالم بودن آن ۰/۸۸ و اگر می‌دانستیم دختر است این احتمال برابر ۰/۹۱ بود. امّا چون از جنسیت فرزندی که به دنیا خواهد آمد اطلاعی نداریم بنابر دستور بالا این احتمال برابر ۰/۸۹۵ محاسبه شد.

برای این مسأله اگر سعی می‌کردیم فهرستی از حالات ممکن تشکیل دهیم به نموداری به‌صورت زیر دست می‌یافتیم.



اگر روی هر یک از پاره‌خط‌های نمودار بالا احتمال پیشامد نظیر آن خط را بنویسیم خواهیم داشت :



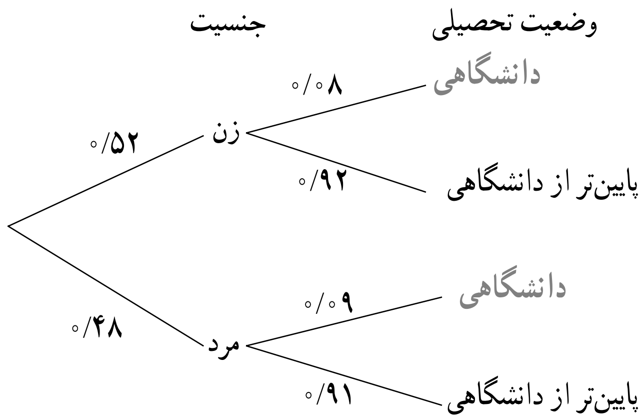
حال اگر شاخه‌هایی را که به وضعیت سالم ختم می‌شوند مشخص کنیم و احتمال‌های روی آن شاخه را در هم ضرب و با نتیجه حاصل از شاخه‌های دیگر جمع کنیم خواهیم داشت :

$$\underbrace{\frac{۱}{۲}\times ۰/۸۸}_{\text{شاخه اول}} + \underbrace{\frac{۱}{۲}\times ۰/۹۱}_{\text{شاخه دوم}} = ۰/۸۹۵$$

که همان جوابی است که با استفاده از دستور جمع احتمال‌ها به دست آمد. این روش بسیار ساده و مفید است با مثال دیگری با نحوهٔ استفاده از آن بیشتر آشنا خواهید شد.

مثال : ۵۲٪ جمعیت کشوری را زنان و ۴۸٪ بقیه را مردان تشکیل می‌دهند. اگر ۸درصد زنان و ۹درصد مردان تحصیلات دانشگاهی داشته باشند، چند درصد جمعیت این کشور تحصیلات دانشگاهی دارند.

حل :



پس احتمال مطلوب عبارت است از

$$۰/۵۲ \times ۰/۰۸ + ۰/۴۸ \times ۰/۰۹ = ۰/۰۸۴۸$$

با این اطلاعات حدود ۸/۵ درصد جمعیت کشور تحصیلات دانشگاهی دارند.

مسئله : ۵۲٪ جمعیت کشوری را زنان و ۴۸٪ بقیه را مردان تشکیل می‌دهند اگر ۶۰٪ زنان و ۶۸٪ مردان باسواد باشند، چند درصد افراد این جامعه باسوادند؟

متغیرهای تصادفی

قبلاً به‌طور مختصر متغیر تصادفی را به عنوان جزئی از یک مسألهٔ آماری تعریف کردیم. اگر در آزمایشی، عددی به هر نتیجهٔ آزمایش نسبت دهیم این عدد را **متغیر تصادفی** می‌نامیم. متغیرهای تصادفی را معمولاً با حروف بزرگ X و Y، ... نشان می‌دهیم.

مثال : در آزمایشگاهی موشی را تحت رژیم غذایی خاصی قرار می‌دهیم. می‌خواهیم وزن این موش را پس از یک هفته مطالعه کنیم. این وزن متغیری است تصادفی.

مثال : تعداد نوزادان یک موش در یک وضع حمل، متغیری است تصادفی.

مثال : تعداد تخم‌هایی که یک کرم ابریشم می‌گذارد، متغیری است تصادفی.

توزیع احتمال

موضوع را با یک مثال ساده شروع می‌کنیم. فرض کنید در آزمایشگاهی ۵ موش سفید و ۴ موش سیاه داریم. می‌خواهیم ۳ موش از بین آن‌ها انتخاب کنیم. فرض کنید X تعداد موش‌های سفید انتخاب شده باشند، در این صورت X متغیری است تصادفی که مقادیر ۰، ۱، ۲ و ۳ را می‌تواند انتخاب کند. حال احتمال آن‌که X برابر ۰ شود چقدر است. این احتمال را با نماد $P(X=0)$ نشان می‌دهیم. برای آن‌که $X=0$ شود، لازم است تمام موش‌های انتخاب شده از بین موش‌های سیاه باشند، پس احتمال مورد نظر عبارت است از

$$P(X=0)=\frac{\binom{4}{3}}{\binom{9}{3}}=\frac{1}{21}$$

به همین ترتیب می‌توانیم سایر احتمال‌ها را نیز به شرح زیر حساب کنیم :

$$P(X=1)=\frac{\binom{5}{1}\binom{4}{2}}{\binom{9}{3}}=\frac{5}{14}$$

$$P(X=2)=\frac{\binom{5}{2}\binom{4}{1}}{\binom{9}{3}}=\frac{10}{21}$$

$$P(X=۳)=\frac{\binom{۵}{۳}}{\binom{۹}{۳}}=\frac{۵}{۴۲}$$

این احتمال‌ها را می‌توانیم در جدولی به صورت زیر بنویسیم :

X	۰	۱	۲	۳
P(X)	$\frac{۱}{۲۱}$	$\frac{۵}{۱۴}$	$\frac{۱۰}{۲۱}$	$\frac{۵}{۴۲}$

منظور از توزیع احتمال آن است که تعیین کنیم احتمال چگونه روی مقادیری توزیع شده است. مثلاً در جدول بالا توزیع احتمال روی مقادیر ۰، ۱، ۲ و ۳ به ترتیب به صورت $\frac{۱}{۲۱}$، $\frac{۵}{۱۴}$، $\frac{۱۰}{۲۱}$، $\frac{۵}{۴۲}$ است. برخی از توزیع‌ها به علت کاربردهای فراوانی که دارند از اهمیت زیادی برخوردارند. یکی از مهم‌ترین توزیع‌ها، توزیع دو جمله‌ای است.

مسئله : جعبه‌ای ۳ مهره سفید و ۵ مهره سیاه دارد، از این جعبه چهار مهره با هم و به تصادف خارج می‌کنیم. اگر X تعداد مهره‌های سفید خارج شده باشد جدول توزیع احتمال X را بنویسید.

توزیع دوجمله‌ای

فرض کنید در خانواده‌ای سه فرزند به دنیا آمده باشد. می‌خواهیم توزیع احتمال تعداد پسران این خانواده را به دست آوریم. اگر X را برابر تعداد فرزندان پسر خانواده تعریف کنیم، آن‌گاه X، مقادیر ۰، ۱، ۲، ۳ را می‌تواند اختیار کند. برای تعیین احتمال نظیر هر یک از این مقادیر به فضای نمونه‌ای مربوط به این آزمایش که در مثال ۱ به دست آمد مراجعه می‌کنیم.

بنابراین فضای نمونه‌ای عبارت است از

{ددد، پدد، دپد، پپد، ددپ، پدپ، دپپ، پپپ}

همان‌طور که دیده می‌شود فضای نمونه‌ای ۸ عضو دارد. (آیا می‌توانید توضیح دهید که چرا این مجموعه باید ۸ عضو داشته باشد؟) حال برای محاسبه $P(X=۰)$ می‌بینیم که پیشامد $X=۰$ یعنی مجموعهٔ {د د د}، پس احتمال آن برابر $\frac{۱}{۸}$ است. پیشامد $X=۱$ یعنی مجموعهٔ {پدد و دپد و ددپ}. بنابراین احتمال آن برابر $\frac{۳}{۸}$ است. به همین ترتیب می‌توانیم جدول زیر را تشکیل دهیم :

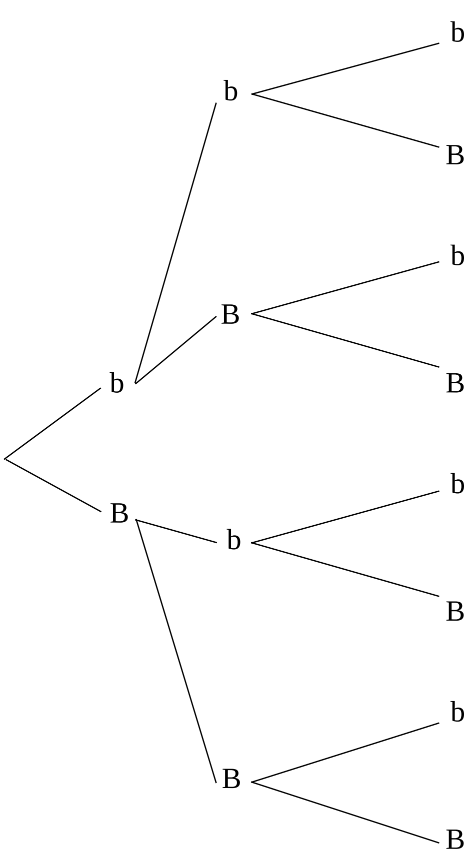
X	۰	۱	۲	۳
P(X)	$\frac{۱}{۸}$	$\frac{۳}{۸}$	$\frac{۳}{۸}$	$\frac{۱}{۸}$

تذکر : اگر احتمال پسر یا دختر بودن نوزاد برابر $\frac{۱}{۲}$ نباشد، اعضای این فضای نمونه‌ای هم‌شانس نخواهند بود و در نتیجه نمی‌توانستیم از دستور $\frac{n(A)}{n(S)}$ برای محاسبه احتمال استفاده کنیم. در مثال بعدی با چنین شرایطی مواجه هستیم.

مثال : فرض کنید پدر و مادری هر یک دارای یک ژن رنگ چشم مغلوب (b) و یک ژن رنگ چشم غالب (B) باشند. اگر این پدر و مادر صاحب سه فرزند باشند توزیع تعداد رنگ چشم‌های مغلوب را به دست آورید.

مجدداً می‌توانیم نمودار زیر را رسم کنیم :

فرزند اول   فرزند دوم   فرزند سوم   فضای نمونه‌ای   احتمال



فضای نمونه‌ای	احتمال
bbb	$\left(\frac{۱}{۴}\right)^{۳}\left(\frac{۳}{۴}\right)^{۰}$
bbB	$\left(\frac{۱}{۴}\right)^{۲}\left(\frac{۳}{۴}\right)^{۱}$
bBb	$\left(\frac{۱}{۴}\right)^{۲}\left(\frac{۳}{۴}\right)^{۱}$
bBB	$\left(\frac{۱}{۴}\right)^{۱}\left(\frac{۳}{۴}\right)^{۲}$
Bbb	$\left(\frac{۱}{۴}\right)^{۲}\left(\frac{۳}{۴}\right)^{۱}$
BbB	$\left(\frac{۱}{۴}\right)\left(\frac{۳}{۴}\right)^{۲}$
BBb	$\left(\frac{۱}{۴}\right)\left(\frac{۳}{۴}\right)^{۲}$
BBB	$\left(\frac{۱}{۴}\right)^{۰}\left(\frac{۳}{۴}\right)^{۳}$

از اینجا می‌توانیم احتمال‌های تعداد فرزندان با رنگ چشم مغلوب را به دست آوریم، مثلاً

$$P\,(X=۱)=P\,\{bBB, BbB, BBb\}$$

در این مثال چون اعضای فضای نمونه‌ای هم‌شانس نیستند نمی‌توانیم از دستور $\frac{n(A)}{n(S)}$ استفاده کنیم. برای محاسبهٔ احتمال از قوانین احتمال استفاده می‌کنیم. پیشامد $\{bBB, BbB, BBb\}$ در واقع اجتماع سه پیشامد ناسازگار $\{BBb\}$ و $\{BbB\}$ و $\{bBB\}$ است پس بنابر قانون جمع احتمال‌ها داریم :

$$P\,(X=۱)=P\{bBB\}+P\{BbB\}+P\{BBb\}$$

$$=(\frac{۱}{۴})(\frac{۳}{۴})^{۲}+(\frac{۱}{۴})(\frac{۳}{۴})^{۲}+(\frac{۱}{۴})(\frac{۳}{۴})^{۲}$$

$$=۳(\frac{۱}{۴})(\frac{۳}{۴})^{۲}$$

به همین ترتیب می‌توانیم سایر مقادیر را محاسبه و جدول زیر را تشکیل دهیم :

X	۰	۱	۲	۳
	$۱\left(\frac{۱}{۴}\right)^{۰}\left(\frac{۳}{۴}\right)^{۳}$	$۳\left(\frac{۱}{۴}\right)^{۱}\left(\frac{۳}{۴}\right)^{۲}$	$۳\left(\frac{۱}{۴}\right)^{۲}\left(\frac{۳}{۴}\right)^{۱}$	$۱\left(\frac{۱}{۴}\right)^{۳}\left(\frac{۳}{۴}\right)^{۰}$

در این جدول می‌بینیم که احتمال‌ها از دستور زیر پیروی می‌کنند :

$$P(X=k)=\binom{۳}{k}(\frac{۱}{۴})^{k}(\frac{۳}{۴})^{۳-k} \qquad k=۰\,,۱\,,۲\,,۳$$

اگر به جای k به ترتیب مقادیر ۰، ۱، ۲، ۳ را قرار دهیم همان احتمال‌های نوشته شده در جدول بالا به دست خواهند آمد. این دستور برای حالت‌های کلی نیز برقرار است.

مسئله : مثال بالا را برای خانواده‌ای که ۴ فرزند دارد و X برابر تعداد فرزندان با رنگ چشم مغلوب است تکرار کنید. تحقیق کنید که احتمال‌ها از دستور

$$P(X=k)=\binom{۴}{k}(\frac{۱}{۴})^{k}(\frac{۳}{۴})^{۴-k}$$

پیروی می‌کنند.

این مثال‌ها دارای نکات مشترک زیراند :

الف : آزمایشی که فقط دو نتیجه دارد. در مثال اول جنسیت فرزند و در مثال دوم رنگ چشم.

ب : این آزمایش به تعداد دفعات معلومی تکرار می‌شود. در مثال اول و دوم ۳ بار و در مسئله قبل ۴ بار تکرار شده است.

ج : نتیجهٔ هر آزمایش مستقل از نتیجهٔ سایر آزمایش‌ها است. پسر یا دختر بودن فرزندی به پسر یا دختر بودن فرزند در دفعات قبل یا بعد بستگی ندارد. همین‌طور رنگ چشم فرزندان. به همین دلیل احتمال پسر بودن فرزندی برابر $\frac{۱}{۲}$ و یا مغلوب بودن رنگ چشم فرزند برابر $\frac{۱}{۴}$ برای هر فرزند ثابت باقی ماند.

د : تعداد حالت‌های مورد نظر در این آزمایش‌ها، در مثال اول تعداد فرزندان پسر، و در مثال دوم تعداد فرزندان با رنگ چشمان مغلوب.

هر متغیر تصادفی که به صورت بالا معرفی می‌شود دارای توزیعی است که آن توزیع را **توزیع دوجمله‌ای** می‌نامیم. توزیع دوجمله‌ای را می‌توانیم در حالت کلی به صورت زیر معرفی کنیم.

الف : آزمایشی با دو نتیجه را در نظر بگیرید. نتیجه‌ای از این آزمایش که مورد نظر است «پیروزی» و دیگری را «شکست» بنامید در مثال اول دختر بودن فرزند و در مثال دوم مغلوب بودن رنگ چشم را پیروزی در نظر گرفته‌ایم.

ب : این آزمایش را n بار تکرار می‌کنیم در مثال اول و دوم $n = ۳$.

ج : آزمایش‌ها به صورت مستقل تکرار می‌شود. بنابراین اگر p احتمال آمدن پیروزی در انجام یک بار آزمایش باشد، آن گاه p در طول آزمایش ثابت است و از آزمایشی به آزمایش دیگر عوض نمی‌شود. در مثال اول $p = \frac{۱}{۲}$ و در مثال دوم $p = \frac{۱}{۴}$.

د : تعداد پیروزی‌ها در n بار تکرار آزمایش‌ها.

اگر این متغیر تصادفی را با X نشان دهیم آن‌گاه X مقادیر ۰، ۱، ۲، ...، n را با احتمال‌های زیر اختیار می‌کند :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (۱ - p)^{n-k}$$

مثال : اگر ۴۰ درصد ژن‌های تعیین‌کننده عامل RH خون منفی باشند، مطلوب است احتمال آن‌که در یک کلاس ۳۰ نفری ۸ نفر دارای خونی با RH منفی باشند.

$$P(X = ۸) = \binom{۳۰}{۸} (۰/۱۶)^{۸} (۱ - ۰/۱۶)^{۲۲}$$

مثال : فرض کنید احتمال انتقال نوعی بیماری مسری از فرد بیمار به افراد مستعد برابر ۰/۱

باشد. اگر ۱۰ نفر مستعد با فردی که حامل بیماری است ملاقات کنند، توزیع تعداد افرادی را که به‌این بیماری مبتلا می‌شوند به دست آورید.

حل : در این مثال آزمایش عبارت است از ملاقات یک فرد مستعد با یک فرد بیمار که درنتیجه مبتلا شدن فرد سالم (پیروزی) و یا مبتلا نشدن (شکست) او را به همراه دارد. این آزمایش $n=۱۰$ بار تکرار شده است و این تکرارها را می‌توان مستقل فرض کرد. احتمال پیروزی در هر تکرار برابر $p=۰/۱$ است. تعداد پیروزی‌ها در این آزمایش برابر تعداد افرادی است که به بیماری مبتلا شده‌اند. اگر این تعداد را با X نشان دهیم ملاحظه می‌شود که تمام شرایط توزیع دوجمله‌ای برقرار است. پس

$$P(X=k)=\binom{۱۰}{k}(۰/۱)^k(۰/۹)^{۱۰-k}$$

مسائل

۱ــ نوعی بذر ذرت تهیه شده است که ادعا می‌شود ۹۰٪ بذرها جوانه خواهند زد. اگر ۲۰ دانه از این ذرت‌ها را در شرایط مناسب و یکسان بکاریم، مطلوب است تعیین توزیع تعداد بذرهایی که جوانه می‌زنند و محاسبه احتمال آن‌که فقط ۱۸ دانه جوانه بزند (جواب را ساده نکنید).

۲ــ به دانش‌آموزی ۱۰ سؤال تستی چهارگزینه‌ای داده‌ایم. اگر او به سؤال‌ها به تصادف جواب بدهد، احتمال آن‌که

الف ــ به ۷ سؤال پاسخ صحیح بدهد چقدر است؟

ب ــ حداقل به ۷ سؤال پاسخ صحیح بدهد چقدر است؟

۳ــ در خانواده‌ای با چهار فرزند، احتمال آن‌که RH خون فرزندان یک در میان مثبت باشد چقدر است؟

۴ــ احتمال آن‌که حسن دیر به مدرسه برسد ۰/۰۲ است، احتمال آن‌که در یک هفته دو روز دیر برسد چقدر است؟

فصل ۲

توابع و معادلات

توابع درجه دوم

در ریاضی ۲ با رسم نمودار برخی از توابع درجهٔ دوم به کمکِ انتقالِ تابع $f(x)=x^۲$ آشنا شدیم. با انجام تمرین زیر، آمادهٔ یادگیری مطالبی دیگر می‌شویم :

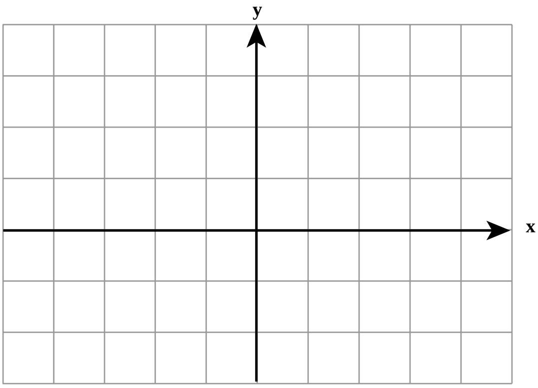
تمرین : به روش یاد شده نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $g(x) = -x^۲$

ب) $h(x) = (x+۲)^۲$

ج) $s(x) = (x-۱)^۲ + ۲$

د) $t(x) = -x^۲ - ۳$



به منحنی نمایش تابع درجهٔ دوم سهمی گفته می‌شود. در نمودارِ $y=x^۲$ نقطهٔ $O(۰,۰)$ رأس سهمی است. در نمودارهای درجهٔ دوم دیگر از جمله نمودارهایی که در تمرین بالا رسم نموده‌اید چنین نقطه‌ای را مشاهده می‌کنید. در انتقال نمودار $y=x^۲$ به نمودار $y=a(x-x_۰)^۲+y_۰$ رأس سهمی نیز به نقطهٔ $(x_۰, y_۰)$ انتقال می‌یابد. مثلاً رأس سهمی $y=۲(x-۱)^۲+۳$ نقطهٔ $(۱,۳)$ و رأس سهمی $y=-x^۲-۲$ نقطهٔ $(۰,-۲)$ می‌باشد.

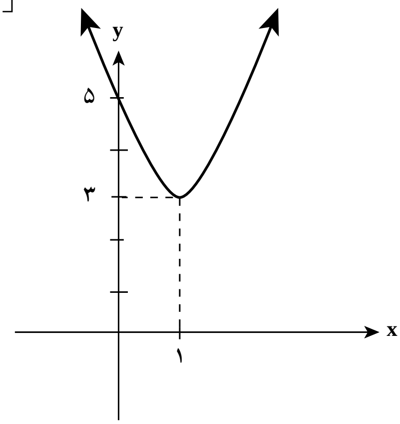
همچنین مشاهده کردید که در برخی نمودارها رأس سهمی پایین‌ترین نقطه (می‌نیمم) سهمی و در برخی بالاترین نقطه (ماکزیمم) سهمی می‌باشد. به‌عبارت دیگر در این نقطه، تابع درجه دوم کمترین مقدار یا بیشترین مقدار را داراست.

ضابطهٔ یک تابع درجه دوم در حالت کلی $y=ax^۲+bx+c$ است که در آن c, b, a اعداد ثابتی هستند و $a \neq ۰$ دامنهٔ این تابع IR و برد آن زیرمجموعه‌ای از IR می‌باشد. چنین ضابطه‌ای را می‌توان

به‌صورت $y=a(x-x_0)^2+y_0$ نیز نوشت :

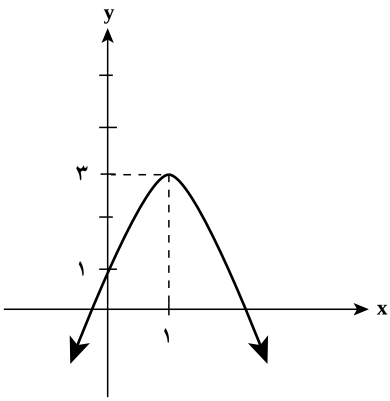
مثال : تابع درجه دوم با ضابطهٔ $f(x)=2x^2-4x+5$ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت :

$$f(x)=2(x^2-2x+\frac{5}{2})=2\left[(x-1)^2-1+\frac{5}{2}\right]$$
$$=2(x-1)^2+3$$



به‌ازای $x=1$ مقدار تابع $f(1)=3$ است امّا به‌ازای سایر مقادیر چون $2(x-1)^2$ مثبت است، $f(x)=2(x-1)^2+3$ بزرگتر از ۳ بوده و رأس سهمی یعنی نقطهٔ $\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$ نقطهٔ می‌نیمم است.

حال تابع $g(x)=-2(x-1)^2+3$ را درنظر بگیرید که ضریب x^2 عددی منفی است ($a<0$). به‌ازای $x=1$ مقدار تابع $f(1)=3$ است اما به‌ازای سایر مقادیر چون $-2(x-1)^2$ منفی است، $g(x)=-2(x-1)^2+3$ کوچکتر از ۳ بوده و رأس سهمی یعنی نقطهٔ $\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$ نقطهٔ ماکزیمم می‌باشد.



مثال : حاصل جمع دو عدد برابر ۱۱۰ است. این دو عدد را چنان بیابید که حاصل‌ضرب آن‌ها ماکزیمم شود.

حل : دو عدد را x و y می‌نامیم. داریم $x+y=110$ قرار می‌دهیم $P=xy$. پس

$$P=x(110-x)=-x^2+110x=-(x-55)^2+55^2$$

عبارت اخیر وقتی ماکزیمم است که جمله اول آن برابر صفر شود.

$x-۵۵=۰ \quad , \quad x=۵۵$

پس $x=y=۵۵$ جواب مسئله است.

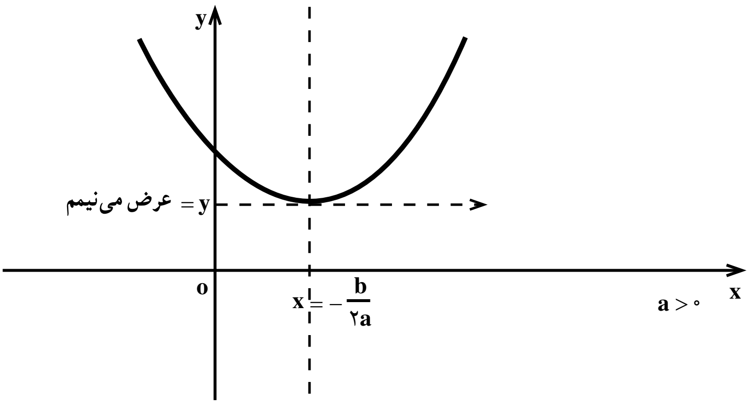
به‌طورکلی در مورد تابع $f(x)=ax^۲+bx+c$ می‌توان نوشت:

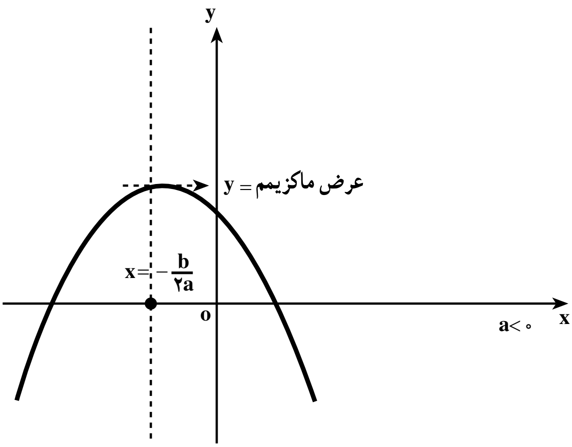
$$f(x)=a(x^۲+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a})=a\left[(x+\frac{b}{۲a})^۲+\frac{c}{a}-\frac{b^۲}{۴a^۲}\right]=a(x+\frac{b}{۲a})^۲+\frac{۴ac-b^۲}{۴a}$$

به‌ازای $x=-\frac{b}{۲a}$ ، مقدار تابع $\frac{۴ac-b^۲}{۴a}$ است. امّا به‌ازای سایر مقادیر:

الف) اگر $a>۰$ ، $a(x+\frac{b}{۲a})^۲$ مثبت و درنتیجه $f(x)>f(-\frac{b}{۲a})$ و نقطهٔ به طول $-\frac{b}{۲a}$ نقطهٔ می‌نیمم است.

ب) اگر $a<۰$ ، $a(x+\frac{b}{۲a})^۲$ منفی و درنتیجه $f(x)<f(-\frac{b}{۲a})$ و نقطهٔ به طول $-\frac{b}{۲a}$ نقطهٔ ماکزیمم است.



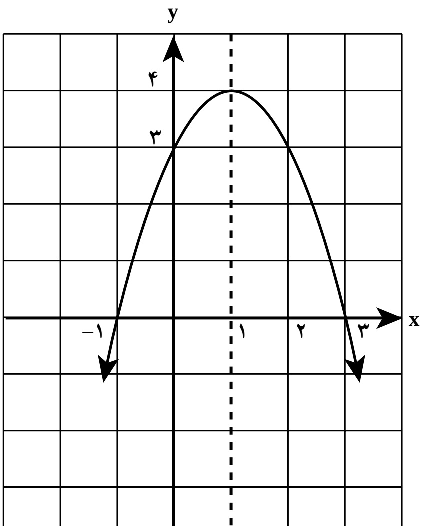


به‌طور خلاصه می‌توان گفت : تابع $f(x)=ax^2+bx+c$ به ازای $x=-\frac{b}{2a}$ ، اگر $a>0$ باشد کمترین مقدار و اگر $a<0$ باشد بیشترین مقدار را دارد.

مثال : کمترین مقدار تابع $f(x)=2x^2-3x+4$ را به‌صورت زیر تعیین می‌کنیم :

$$x=\frac{-b}{2a}=\frac{3}{4}\Rightarrow f(\frac{3}{4})=2(\frac{3}{4})^2-3(\frac{3}{4})+4=\frac{23}{8}$$

برای رسم نمودار تابع درجه دوم، معمولاً علاوه بر رأس سهمی، مختصات دو نقطهٔ دیگر در طرفین رأس و به فاصلهٔ مساوی از آن را تعیین می‌کنیم. برای رسم دقیق‌تر، مختصاتِ نقاط تلاقی نمودار با محورهای مختصات را نیز به‌دست می‌آوریم.



مثال : نمودار تابع $f(x)=-x^2+2x+3$ را رسم می‌کنیم.

رأس سهمی نقطهٔ $\left|\begin{array}{l}x=-\frac{b}{2a}=1\\ y=4\end{array}\right.$ و دو نقطه با فاصله مساوی در طرفین آن $\left|\begin{array}{l}x=2\\ y=3\end{array}\right.$ و $\left|\begin{array}{l}x=0\\ y=3\end{array}\right.$ می‌باشد. به‌علاوه :

نقطهٔ تلاقی منحنی با محور yها همان نقطه $\left|\begin{array}{l}x=0\\ y=3\end{array}\right.$ و نقطه تلاقی منحنی با محور xها با جایگذاری $y=0$ دو تابع و حل معادلهٔ نظیر به دست می‌آید :

$$y=0 \rightarrow -x^2+2x+3=0 \xrightarrow{\text{حل معادله درجه دوم}} \left|\begin{array}{l} x=-1 \\ y=0 \end{array}\right. \text{ و } \left|\begin{array}{l} x=3 \\ y=0 \end{array}\right.$$

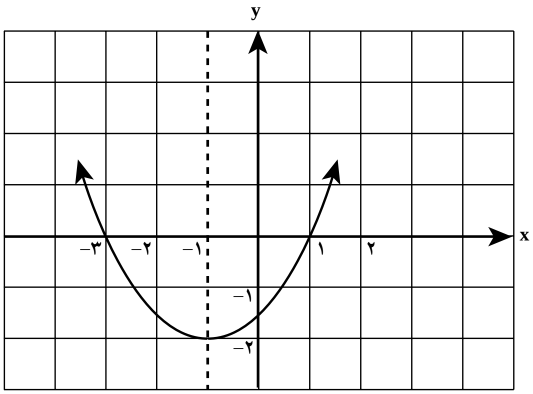
خط قائمی که از رأس سهمی می‌گذرد (در نمودار قبل خط $x=1$) محور تقارن سهمی است (چرا؟) به‌طورکلی خط به معادله $x=\frac{-b}{2a}$ محور تقارنِ سهمی است.

مثال : سهمی به معادلهٔ $y=\frac{1}{2}(x-1)(x+3)$ را رسم می‌کنیم.

نقاط $\left|\begin{array}{l} x=1 \\ y=0 \end{array}\right.$ و $\left|\begin{array}{l} x=-3 \\ y=0 \end{array}\right.$ نقاط برخورد سهمی با محور طول‌هاست.

به‌علاوه از دو نقطهٔ فوق نتیجه می‌شود، نقطهٔ $\left|\begin{array}{l} x=-1 \\ y=-2 \end{array}\right.$ رأس سهمی است (چطور؟)

نقطهٔ $\left|\begin{array}{l} x=0 \\ y=-\frac{3}{2} \end{array}\right.$ نیز نقطه برخورد سهمی با محور عرض‌هاست.



مسائل

۱ــ نمودارهای توابع زیر را رسم کنید.

ب) $y=-2x^2+2x-1$
الف) $y=3x^2+6x$

د) $y=(2-x)(4+x)$
ج) $y=9x^2+6x+1$

و) $y=2x^2-3x+4$
هـ) $y=2x^2+3$

۲ــ شخصی که در لبهٔ فوقانی ساختمانی به ارتفاع ۸۰ متر ایستاده است توپی را با سرعتِ اولیهٔ ۲۰ متر بر ثانیه به سوی بالا پرتاب می‌کند. بعد از t ثانیه ارتفاع توپ از سطح زمین برابر است

با $h=-۵t^{۲}+۲۰t+۸۰$. نمودار این تابع را رسم کنید. با استفاده از این نمودار به سؤالات زیر پاسخ دهید :

الف) توپ پس از چند ثانیه به زمین می‌خورد؟

ب) ماکزیمم ارتفاع توپ چقدر است؟ بعد از چند ثانیه به ماکزیمم ارتفاع می‌رسد؟

ج) بعد از چند ثانیه پس از پرتاب توپ به سطح بالای ساختمان برمی‌گردد؟

د) دامنهٔ این تابع را تعیین کنید.

۳ــ محیط مستطیلی ۱۰۰ متر است. طول و عرض آن را چنان تعیین کنید که مساحت مستطیل ماکزیمم شود.

۴ــ کمترین مقدار تابع $f(x)=x+\frac{۴}{x}$ را به‌ازای مقادیر مثبتِ x تعیین کنید.

روابط بین ضرایب و جواب‌های معادلهٔ درجهٔ دوم

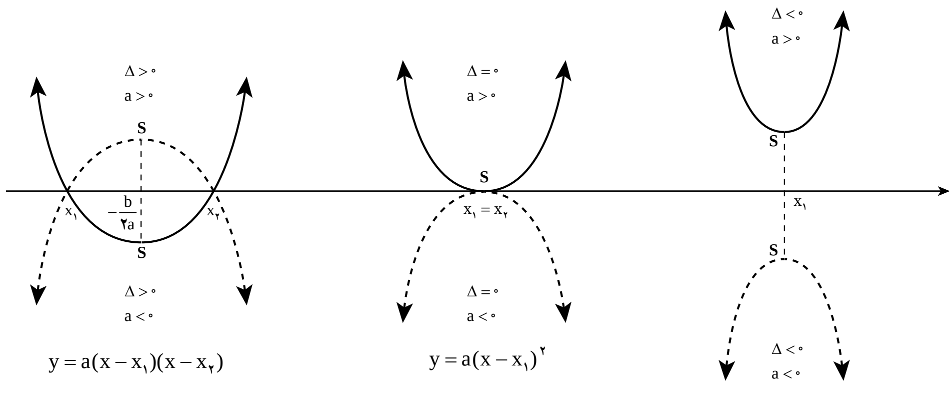
در ریاضی ۲ دیدیم که جواب‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^{۲}+bx+c=۰$، طول نقاطِ برخورد نمودارِ تابع $y=ax^{۲}+bx+c$ با محور xهاست. اگر $b^{۲}-۴ac<۰$ باشد معادلهٔ فوق جواب ندارد و سهمی فوق محور xها را قطع نمی‌کند. اگر $b^{۲}-۴ac=۰$، سهمی با محور xها در یک نقطه تماس دارد و اگر $b^{۲}-۴ac>۰$ معادله دو جواب دارد و سهمی محور xها را در دو نقطه قطع می‌کند.

هم‌چنین دیدیم که اگر $x_۱$ و $x_۲$ جواب‌های معادلهٔ فوق باشند آنگاه :

$$x_۱+x_۲=-\frac{b}{a} \qquad x_۱x_۲=\frac{c}{a}$$

و درنتیجه :

$$ax^{۲}+bx+c=a(x^{۲}+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a})=a(x-x_۱)(x-x_۲)$$



$y=a(x-x_۱)(x-x_۲)$ $\qquad$ $y=a(x-x_۱)^{۲}$ $\qquad$ $y=a(x-x_۱)^{۲}+y_۱$

مثال : معادله‌ای درجهٔ دوم با ضرایب صحیح بنویسید که جواب‌های آن $\frac{۱}{۲}$ و ۳− باشد.

$$x=-۳,\ x=\frac{۱}{۲} \Rightarrow (x+۳)(x-\frac{۱}{۲})=۰ \Rightarrow x^۲+\frac{۵}{۲}x-\frac{۳}{۲}=۰ \Rightarrow ۲x^۲+۵x-۳=۰$$

مثال : معادلهٔ سهمی را بنویسید که محور طول‌ها را در ۳+ و ۱+ و محور عرض‌ها را در ۶+ قطع کند.

$$y=a(x-۱)(x-۳) \Rightarrow y=a(x^۲-۴x+۳)$$

و چون از نقطهٔ $\begin{bmatrix} ۰ \\ ۶ \end{bmatrix}$ می‌گذرد : $\quad ۶=۳a \Rightarrow a=۲$

پس معادلهٔ سهمی $y=۲x^۲-۸x+۶$ می‌باشد.

مثال : مقدار m را چنان بیابید که مجموع جواب‌های معادلهٔ $۲x^۲-(m+۱)x-۳m=۰$ برابر ۳ باشد.

$$-\frac{b}{a}=۳ \Rightarrow ۳=\frac{m+۱}{۲} \Rightarrow m=۵$$

مثال : معادلهٔ درجه دومی بنویسید که جواب‌های آن معکوس جواب‌های $-۳x^۲+۲x+۱=۰$ باشد.

اگر جواب‌های معادلهٔ داده شده α و β باشد جواب‌های معادلهٔ خواسته شده $\frac{۱}{\alpha}$ و $\frac{۱}{\beta}$ است، پس :

$$(x-\frac{۱}{\alpha}).(x-\frac{۱}{\beta})=۰ \Rightarrow x^۲-(\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta})x+\frac{۱}{\alpha\beta}=۰ \Rightarrow x^۲-\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}x+\frac{۱}{\alpha\beta}=۰$$

$$x^۲-\frac{+\frac{۲}{۳}}{-\frac{۱}{۳}}x+\frac{۱}{-\frac{۱}{۳}}=۰ \Rightarrow x^۲+۲x-۳=۰$$

به‌طور کلی می‌توان نشان داد جواب‌های معادله‌های درجهٔ دوم $ax^۲+bx+c=۰$ و $cx^۲+bx+a=۰$ معکوس یکدیگرند.

مسائل

۱ــ معادله‌ای درجهٔ دوم بنویسید که جواب‌های آن دو عدد زیر باشند.

الف) ۳− و ۴ $\qquad$ ب) $\frac{۳}{۲}$ و $\frac{۲}{۳}$ $\qquad$ ج) $۲+\sqrt{۲}$ و $۲-\sqrt{۲}$

۲ــ مقدار m را چنان تعیین کنید که حاصل ضرب جواب‌های معادلهٔ $-mx^۲+۳x+m-۱=۰$ برابر ۲− شود.

۳ــ مقدار a را چنان تعیین کنید که جواب‌های معادلهٔ $۲x^۲-۵x+a=۰$ معکوس یکدیگر باشند.

سپس جواب‌های این معادله را بیابید.

۴ــ معادلهٔ سهمی را بنویسید که محور طول‌ها را در ۲+ و ۲− و محور عرض‌ها را در ۲+ قطع کند.

۵ــ معادلهٔ درجهٔ دومی بنویسید که جواب‌های آن معکوس جواب‌های $x^۲+۳x-۵=۰$ باشد.

تابع قدرمطلق

در ریاضی ۱ با مفهوم قدرمطلق یک عدد حقیقی و در ریاضی ۲ با تابع‌های قدرمطلقی آشنا شدید.

تمرین : ۱ــ عبارت‌های زیر را بدون نماد قدرمطلق بنویسید.

الف) $|۲-\sqrt{۲}|$ ب) $|۱-\sqrt{۳}|$ ج) $|a^۲+۱|$ د) $|-(x-۱)^۲-۳|$

۲ــ اگر $۱<x<۳$ حاصل عبارتِ $|x-۱|+|x-۳|$ را به‌دست آورید.

۳ــ در یک صفحهٔ مختصات نمودار تابع $f(x)=|x|$ را رسم کرده و با استفاده از آن نمودار توابع زیر را در همان صفحه رسم کنید.

الف) $g(x)=|x+۲|$ ب) $h(x)=-|x|$ ج) $k(x)=|x-۳|+۱$

د) $s(x)=۲-|x+۳|$ هـ) $t(x)=|۲x|$ و) $p(x)=|۲x-۳|$

با توجه به این‌که $|x|=\sqrt{x^۲}$ می‌توانیم نتیجه بگیریم $|xy|=|x||y|$ و $\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}$.

هم‌چنین $|x|=|-x|$ و $|x|^۲=x^۲$. برخی دیگر از ویژگی‌های قدرمطلق به قرار زیر است :

۱) اگر $|x|=a$, $a\geq ۰$ آنگاه $x=a$ یا $x=-a$.

۲) اگر $|x|\leq a$ آنگاه $-a<x<a$ و برعکس.

$$|x|\leq a \Rightarrow |x|^۲\leq a^۲ \Rightarrow x^۲\leq a^۲ \Rightarrow x^۲-a^۲\leq ۰ \Rightarrow (x+a)(x-a)\leq ۰$$

$$۰\leq x+a \text{ و } x-a\leq ۰ \Rightarrow -a\leq x \,,\, x\leq a \Rightarrow -a\leq x\leq a$$

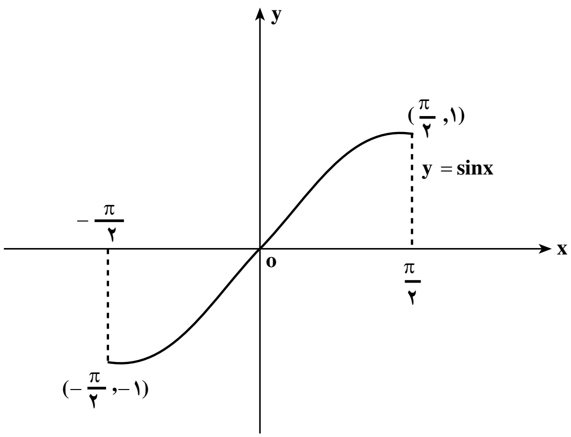
همین استدلال را برعکس نیز می‌توان ارائه کرد و از $-a<x<a$ نتیجه می‌شود $|x|<a$

مثال : جواب نامعادلهٔ $|۳-۵x|<۸$ را به‌دست می‌آوریم.

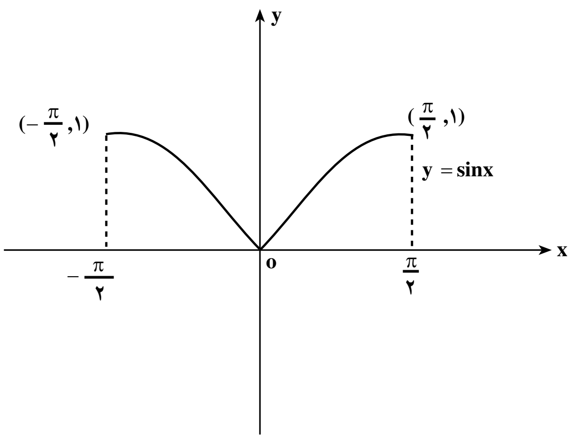
$$-۸<۳-۵x<۸ \Rightarrow -۱۱<-۵x<۵ \Rightarrow -۱<x<\frac{۱۱}{۵}$$

با استفاده از نمودار $y=f(x)$ می‌توان نمودار $y=|f(x)|$ را رسم کرد.

به‌عنوان مثال، منحنی نمایش تابع $y=\sin x$ $(-\frac{\pi}{۲}\le x\le\frac{\pi}{۲})$ به شکل مقابل است :



بنابراین، منحنی نمایش تابع $y=|\sin x|$ به شکل مقابل است.



به‌طورکلی در این روش ابتدا نمودار $y=f(x)$ را رسم می‌کنیم، قسمتی از نمودار که بالای محور xها است باقی می‌ماند ولی قسمتی که زیر محور xهاست را حذف و قرینهٔ آن نسبت به محور xها را رسم می‌کنیم به این ترتیب نمودار $y=|f(x)|$ به‌دست می‌آید. آیا می‌توانید علت درستی این روش را توضیح دهید؟

مسائل

۱ــ با استفاده از ویژگی ۲ نشان دهید برای هر عدد حقیقی x داریم : $-|x|\le x\le|x|$

۲ــ اگر $a>۰$ و $|x|>a$ نشان دهید $x>a$ یا $x<-a$ و برعکس.

۳ــ با استفاده از مسأله ۱ برای هر دو عدد حقیقی x و y نشان دهید

$$-|x|-|y|\le x+y\le |x|+|y|$$

و نتیجه بگیرید : $|x+y|\le |x|+|y|$ (رابطه نامساوی مثلثی)

۴ــ می‌توان نشان داد رابطهٔ نامساوی مثلثی برای هر تعداد عدد حقیقی برقرار است. برای سه عدد حقیقی $x_۱$ و $x_۲$ و $x_۳$ نشان دهید $|x_۱+x_۲+x_۳|\le |x_۱|+|x_۲|+|x_۳|$.

۵ــ معادله‌ها و نامعادله‌های زیر را حل کنید :

الف) $|۲x-۱|=۳$ 　　 ب) $\frac{۱}{|x+۵|}=۲$

ج) $\left|x+\frac{۲}{۳}\right|\le ۱$ 　　 د) $\frac{۳}{|x|}<۱$ 　　 هـ) $|۲x+۱|=|x-۲|$

۶ــ نمودار هریک از توابع زیر را رسم کنید :

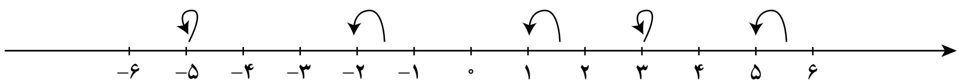
الف) $y=|۳-۲x|$ 　　 ب) $y=|۱-x^۲|$ 　　 ج) $y=|x^۳|$

د) $y=|\cos x|\ ,\ ۰\le x\le \pi$

۷ــ هریک از توابع زیر را به‌صورت یک تابع چند ضابطه‌ای (بدون نماد قدرمطلق) بنویسید. سپس نمودار هریک را رسم کنید :

الف) $y=۳-|x+۱|$ 　　 ب) $y=x|x|$ 　　 ج) $y=|x-۱|+|x+۱|$

تابع جزءِ صحیح : اگر x یک عدد حقیقی باشد، جزءِ صحیح x که با نماد $[x]$ نشان می‌دهیم بزرگترین عدد صحیحی است که کوچکتر یا مساوی x است. برای مثال :



$[-۵]=-۵$ 　　 $\left[-۱\frac{۳}{۵}\right]=-۲$ 　　 $[\sqrt{۲}]=۱$ 　　 $[۳]=۳$ 　　 $[۵/۷]=۵$

برای هر عدد حقیقی x، عدد صحیح n وجود دارد به‌طوری که $n\le x<n+۱$ درنتیجه $[x]=n$.

مثلاً چون $۳>\sqrt{۸}\ge ۲$ درنتیجه $\left[\sqrt{۸}\right]=۲$ و $-۵>-\frac{۱۷}{۳}\ge -۶$ درنتیجه $\left[-\frac{۱۷}{۳}\right]=-۶$

با توجّه به این تعریف می‌توان گفت $x=[x]+\alpha$ که در اینجا α جزء کسری x نامیده می‌شود و چون $[x]\le x<[x]+۱$ ، $۰\le \alpha<۱$.

در زیر به دو مورد از خواص تابع جزءِ صحیح اشاره می‌کنیم :

الف) $[x+k]=[x]+k \;;\; k\in \mathbb{Z}$

ب) $[x]+[-x]=\begin{cases} ۰ \;;\; x\in \mathbb{Z} \\ -۱ \;;\; x\notin \mathbb{Z} \end{cases}$

دلیل درستی احکام فوق را می‌نویسیم :

الف) گفتیم برای هر عدد حقیقی x، عدد صحیح n وجود دارد به‌طوری که $n\le x<n+۱$. درنتیجه $n+k\le x+k<n+k+۱$ و بنابراین $[x+k]=n+k$ و چون $n=[x]$ درنتیجه : $[x+k]=[x]+k$

ب) اگر $x\in \mathbb{Z}$ آنگاه $-x\in \mathbb{Z}$ و درنتیجه $[x]+[-x]=x+(-x)=۰$

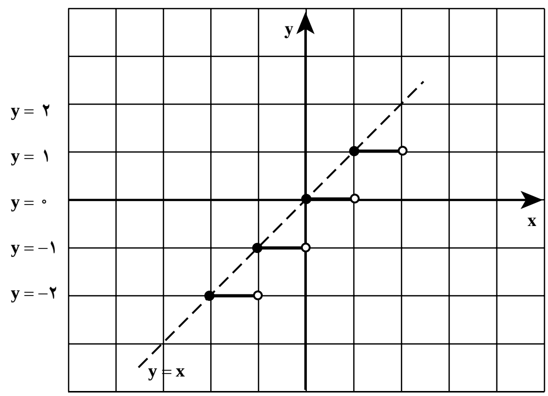
اگر $x\notin \mathbb{Z}$ آنگاه $n<x<n+۱$ و $-n-۱<-x<-n$. به ترتیب طبق تعریف نتیجه می‌شود $[x]=n$ و $[-x]=-n-۱$ درنتیجه $[x]+[-x]=n+(-n-۱)=-۱$

تابعی که به هر عدد حقیقی x، جزءِ صحیح x را نسبت دهد تابع جزءِ صحیح نامیده می‌شود : $f(x)=[x]$

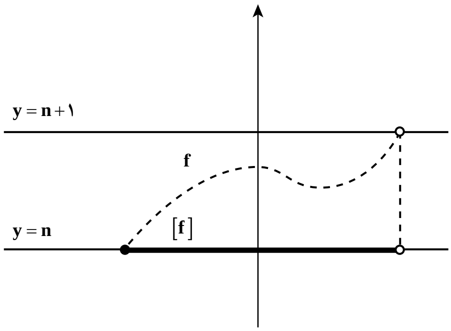
چون جزءِ صحیح برای هر عدد حقیقی تعریف شده است پس دامنه این تابع مجموعه اعداد حقیقی (IR) ولی برد آن مجموعه اعداد صحیح ($\mathbb{Z}$) می‌باشد.

در زیر نمودار این تابع در بازهٔ $[-۲,۲)$ رسم شده است :

x	$y=[x]$
$-۲\le x<-۱$	-۲
$-۱\le x<۰$	-۱
$۰\le x<۱$	۰
$۱\le x<۲$	۱



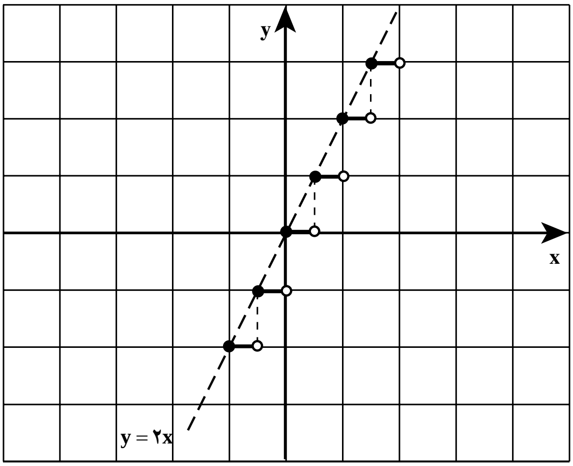
با استفاده از نمودار $y=x$ نیز می‌توان نمودار $y=[x]$ را رسم کرد. آیا می‌توانید در نمودار بالا، رابطهٔ بین نمودارهای این دو تابع را بیابید؟

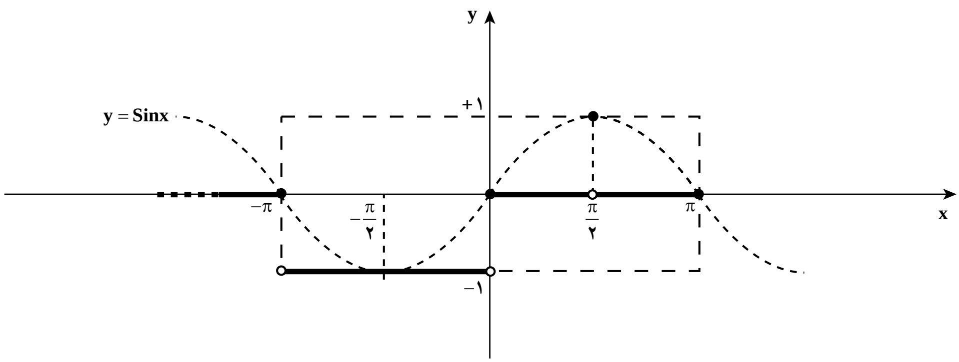


به‌طورکلی برای رسم نمودار $y=[f(x)]$ می‌توانیم از نمودار $y=f(x)$ استفاده نماییم. می‌دانیم که اگر $n \le f(x) < n+۱$ آنگاه $[f(x)]=n$. $(n \in NI)$

بنابراین برای رسم نمودار $y=[f(x)]$ هر قسمتی از نمودار $y=f(x)$ که بُرد آن در بازهٔ $[n,n+۱)$ قرارمی‌گیرد را حذف و به جای آن قطعه خط $y=n$ را رسم می‌کنیم.

مثال : در زیر نمودارهای دو تابع $y=[۲x]$ و $y=[\sin x]$ با استفاده از نمودارهای $y=۲x$ و $y=\sin x$ رسم شده است :





مسائل

۱ــ نمودارهای توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y=۲[x]+۱$

ب) $y=\left[\dfrac{x}{۲}\right]$

ج) $y=[\cos x]$ ؛ $-\pi \le x \le \pi$

د) $y=[x^{۲}]$ ؛ $-۲\le x\le ۲$

۲ــ نمودار تابع $y=x-[x]$ را رسم کنید (راهنمایی : ابتدا نشان دهید $۰\le x-[x]<۱$)

۳ــ اگر $f(x)=[x+۲]+[-x]$ و $x\notin \mathbb{Z}$ نشان دهید $f(x)=۱$

۴ــ با استفاده از نامساوی‌های $۴n^{۲}<۴n^{۲}+۲n+۱<۴n^{۲}+۴n+۱$ نشان دهید :

$$n\in \mathbb{N} ؛ \left[\sqrt{۴n^{۲}+۲n+۱}\right]=۲n$$

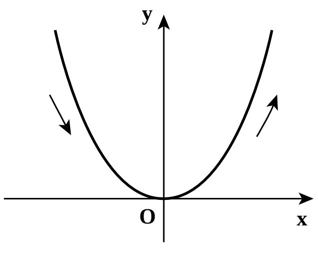
۵ــ معادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $[x-۳]=۴$ ب) $[۱-۲x]=-۵$

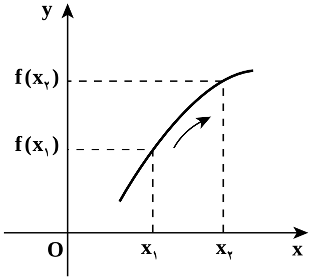
۶ــ فرض کنیم x و y دو عدد حقیقی باشند ثابت کنید :

$[x+y]=[x]+[y]$ یا $[x+y]=[x]+[y]+۱$

توابع صعودی و نزولی



اگر به نمودار تابع $f(x)=x^{۲}$ توجه کنید دیده می‌شود که روی بازه $[۰,+\infty)$ با افزایش مقادیر x مقادیر f(x) نیز افزایش می‌یابند. در این حالت گوییم تابع در حال صعود است. اما اگر این تابع را روی بازه $(-\infty,۰]$ نگاه کنیم، دیده می‌شود که با افزایش مقادیر x مقدار f(x) کاهش می‌یابد. در این حالت گوییم تابع در حال نزول است.

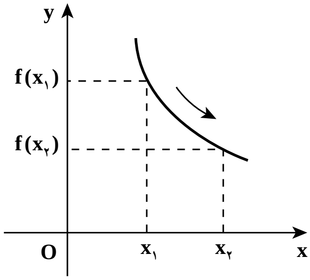


به‌طور کلی،اگر D بازه‌ای در دامنه تابع f باشد گوییم، f در بازه D صعودی است هرگاه برای هر $x_۱ , x_۲ \in D$

$$x_۱ < x_۲ \Rightarrow f(x_۱)\le f(x_۲)$$

و گوییم f در بازه D نزولی است هرگاه برای هر $x_1 , x_2 \in D$

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1)$



برای مثال، توابع ثابت هم صعودی محسوب می‌شوند هم نزولی. توابع یک به یک و صعودی را توابع اکیداً صعودی می‌نامند. یک تابع f روی بازه اکیداً صعودی است اگر و فقط اگر برای هر $x_1 , x_2 \in D$

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

توابع ثابت جزو توابع اکیداً صعودی نیستند. توابع یک به یک و نزولی را نیز توابع اکیداً نزولی می‌نامند. یک تابع f روی بازه D اکیداً نزولی است اگر و فقط اگر برای هر $x_1 , x_2 \in D$

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$

مثال : با رسم نمودار تابع $y = x^2$ دیده می‌شود که این تابع روی بازه $(-\infty , 0]$ اکیداً نزولی و روی بازه $[0 , \infty)$ اکیداً صعودی است.

مثال : نمودار تابع $y = \frac{1}{x}$ نشان می‌دهد که این تابع روی بازه‌های $(-\infty , 0)$ و $(0 , \infty)$ اکیداً نزولی است، اما روی $IR-\{0\}$ نه صعودی است و نه نزولی.

مثال : نمودار تابع y=sinx نشان می‌دهد که این تابع روی بازه $\left[-\frac{\pi}{2} , \frac{\pi}{2}\right]$ اکیداً صعودی و روی بازه $\left[\frac{\pi}{2} , \frac{3\pi}{2}\right]$ اکیداً نزولی است.

مسائل

۱ــ تعیین کنید تابع $y=|x|$ روی چه بازه‌هایی صعودی و روی چه بازه‌هایی نزولی است.

۲ــ تعیین کنید تابع $y=|\sin x|$ روی چه بازه‌هایی صعودی و روی چه بازه‌هایی نزولی است.

۳ــ روی بازه $[0 , 2]$ نمودار یک تابع را رسم کنید که روی بازه $[0 , 1]$ صعودی و روی بازه $[1 , 2]$ نزولی باشد.

۴ــ روی بازه $[-1 , 1]$ نمودار تابعی را رسم کنید که روی بازه $[-1 , 0)$ و $(0 , 1]$ صعودی باشد ولی روی بازه $[-1 , 1]$ صعودی نباشد.

ترکیب توابع

اگر بادکنکی کروی را به‌گونه‌ای باد کنیم که شعاع آن در هر ثانیه ۲ سانتی‌متر افزایش یابد، حجم آن در هر لحظه چقدر است؟

اگر r شعاع بادکنک باشد، r برحسب زمان t به‌صورت $r=2t$ است که t را بر حسب ثانیه و r را برحسب سانتی‌متر اندازه‌گیری کرده‌ایم. حجم کره به شعاع r برابر $V=\frac{4}{3}\pi r^3$ است. r تابعی از t است و $r(t)=2t$ و v تابعی از r است و $V(r)=\frac{4}{3}\pi r^3$. اما حجم بادکنک تابعی از زمان t است و در هر لحظه t حجم بادکنک برابر $\frac{4}{3}\pi(2t)^3$ خواهد بود. این مقدار به شکل زیر محاسبه می‌شود :

$$V(r(t))=\frac{4}{3}\pi(r(t))^3=\frac{4}{3}\pi(2t)^3=\frac{32}{3}\pi t^3$$

این تابع جدید را ترکیب دو تابع $V(r)$ و $r(t)$ می‌نامند.

به‌طور کلی، اگر f و g دو تابع به‌گونه‌ای باشند که برای هر x در دامنه f مقدار $f(x)$ در دامنه g قرار بگیرد، می‌توانیم مقدار $g(f(x))$ را محاسبه کنیم و تابع جدیدی بسازیم که آن را به gof نشان می‌دهند. دامنه gof همان دامنهٔ f است و برای هر x در دامنه f خواهیم داشت.

$$(gof)(x)=g(f(x))$$

مثال : برای دو تابع $f(x)=2x$ و $g(x)=x^3$ چون دامنه هر دو تابع تمام اعداد حقیقی است می‌توانیم هر دو ترکیب gof و fog را انجام دهیم و داریم

$$(gof)(x)=g(f(x))=g(2x)=(2x)^3=8x^3$$

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(x^3)=2x^3$$

در همین مثال دیده می‌شود، دو ترکیب fog و gof لزوماً با هم مساوی نیستند.

مثال : برای دو تابع $f(x)=x-1$ و $g(x)=\sqrt{x}$ ، دامنه f تمام اعداد حقیقی است و ترکیب fog قابل انجام است و داریم

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(\sqrt{x})=\sqrt{x}-1 \quad x\in[0,\infty)$$

اما ترکیب gof قابل انجام نیست زیرا برد f تمام IR است در حالی‌که دامنه g فقط بازه $[0,\infty)$ است. برای آن‌که ترکیب قابل انجام باشد، می‌توان دامنه f را به بازه $[1,\infty)$ محدود کرد تا بُرد آن در $[0,\infty)$ قرار گیرد، در این حالت داریم

$$(gof)(x)=g(f(x))=g(x-1)=\sqrt{x-1} \quad x\in[1,\infty)$$

مثال : برای تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ ، ترکیب fof قابل انجام است و

$$(fof)(x)=f(f(x))=f\left(\frac{۱}{x}\right)=\frac{۱}{\frac{۱}{x}}=x \qquad x\in IR-\{۰\}$$

مثال : برای دو تابع $f(x)=|x|$ و $g(x)=\sin x$، هر دو ترکیب fog و gof قابل انجام است و

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(\sin x)=|\sin x|$$

$$(gof)(x)=g(f(x))=g(|x|)=\sin|x|$$

تابع وارون

اگر طول ضلع یک مربع را به x و مساحت آن را با s نشان دهیم، s تابعی از x است و داریم $s(x)=x^۲$. اما x نیز تابعی از s است و از طریق معادله $s=x^۲$ می‌توانیم x را برحسب s حساب کنیم و داریم $x=\sqrt{s}$. اگر طول ضلع مربع را با l و مساحت مربع را با x نشان دهیم این تابع به صورت $l(x)=\sqrt{x}$ در می‌آید. در اینجا با دو تابع s(x) و l(x) روبه‌رو هستیم که هر کدام عکس عمل دیگری را انجام می‌دهد، یعنی

$$y=l(x)\Leftrightarrow s(y)=x$$

این گونه توابع را وارون یکدیگر می‌نامند.

این طور نیست که هر تابعی دارای تابع وارون باشد، شرط وجود تابع وارون برای یک تابع f آن است که برای هر y در بُرد f معادله $y=f(x)$ دارای جواب منحصر به‌فردی مانند x در دامنه f باشد. این به معنای یک به یک بودن f است.

مثال : تابع $y=x^۲$ وارون پذیر نیست زیرا یک به یک نیست. اما اگر دامنه این تـابع را بـه بـازه $(-\infty ,۰]$ محدود کنیم تابعی یک به یک می‌شود و وارون‌پذیر خواهد بود. برای محاسبه تابع وارون آن، در معادله $y=x^۲$، x را بر حسب y محاسبه می‌کنیم و در محاسبه توجه داریم که $x\in(-\infty ,۰]$.

$$y=x^۲\Rightarrow x=\pm\sqrt{y}\Rightarrow x=-\sqrt{y}$$

بـا تبدیل y به x و تبدیل x به y تابع $y=-\sqrt{x}$ به‌دست می‌آید که تابع وارون $y=x^۲$ بـا دامنه $(-\infty ,۰]$ است.

مثال : تابع $y=\frac{۱}{x^{۳}}$ با دامنه $IR-\{۰\}$ یک به یک است و وارون‌پذیر است. برای محاسبه تابع وارون، x را برحسب y محاسبه می‌کنیم.

$$y=\frac{۱}{x^{۳}} \Rightarrow x^{۳}=\frac{۱}{y} \Rightarrow x=\frac{۱}{\sqrt[۳]{y}}$$

با تبدیل y به x و تبدیل x به y تابع $y=\frac{۱}{\sqrt[۳]{x}}$ به دست می‌آید که تابع وارون $y=\frac{۱}{x^{۳}}$ است.

مثال : تابع $y=\frac{۲x+۱}{x-۱}$ با دامنه $IR-\{۱\}$ یک به یک است زیرا

$$\frac{۲x_{۱}+۱}{x_{۱}-۱}=\frac{۲x_{۲}+۱}{x_{۲}-۱} \Rightarrow (۲x_{۱}+۱)(x_{۲}-۱)=(۲x_{۲}+۱)(x_{۱}-۱)$$

$$\Rightarrow ۲x_{۱}x_{۲}-۲x_{۱}+x_{۲}-۱=۲x_{۱}x_{۲}-۲x_{۲}+x_{۱}-۱$$

$$\Rightarrow -۳x_{۱}+۳x_{۲}=۰ \Rightarrow x_{۱}=x_{۲}$$

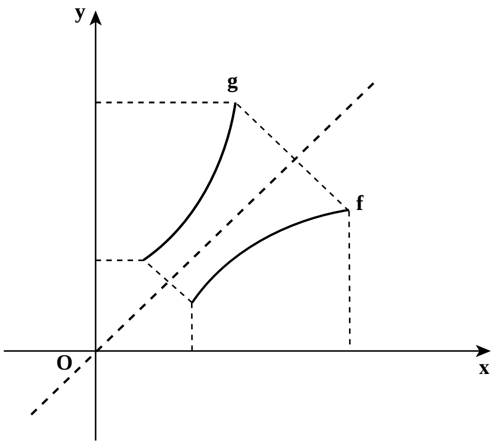
پس این تابع وارون‌پذیر است و برای محاسبه تابع وارون در معادله $y=\frac{۲x+۱}{x-۱}$، x را بر حسب y حساب می‌کنیم.

$$y=\frac{۲x+۱}{x-۱} \Rightarrow y(x-۱)=۲x+۱ \Rightarrow x(y-۲)=۱+y$$

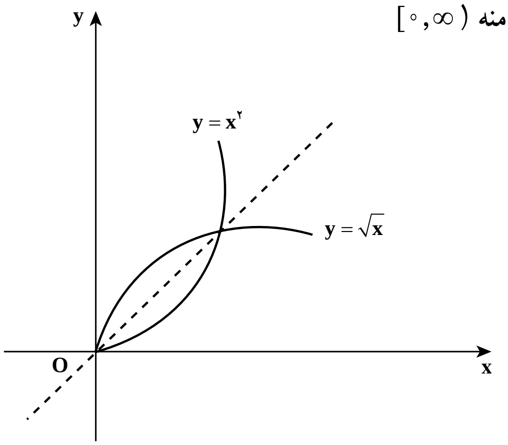
$$\Rightarrow x=\frac{۱+y}{y-۲}$$

با تبدیل y به x و تبدیل x به y تابع $y=\frac{x+۱}{x-۲}$ به دست می‌آید که تابع وارون تابع $y=\frac{۲x+۱}{x-۱}$ است.

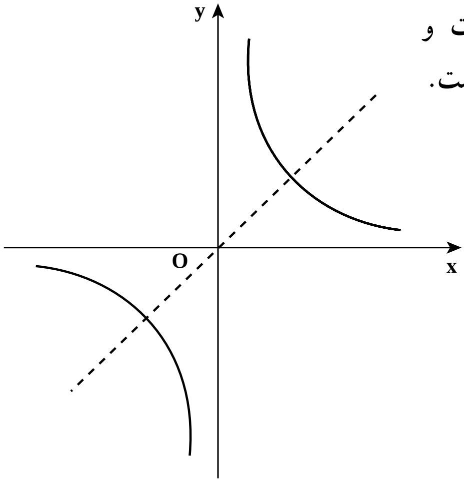
اگر g تابع وارون تابع f باشد، f نیز تابع وارون تابع g است و دامنه f برابر برد g و دامنه g برابر برد f است و نمودار این دو تابع نسبت به نیمساز ربع اول و سوم قرینه یکدیگرند.



مثال : دو تابع $y=\sqrt{x}$ و $y=x^{2}$ با دامنه $[0,\infty)$ وارون یکدیگرند.



مثال : تابع $y=\frac{1}{x}$ وارون خودش است و نمودارش نسبت به نیمساز ربع اول و سوم متقارن است.



با توجه به تعریف تابع وارون، مشخص است که اگر تابع f با دامنه $D_۱$ و تابع g با دامنه $D_۲$ وارون یکدیگر باشند داریم

$$g(f(x))=x \qquad x\in D_۱$$

$$f(g(x))=x \qquad x\in D_۲$$

بر عکس، اگر این تساوی‌ها برقرار گردند، می‌توان نتیجه گرفت f و g وارون یکدیگرند.

مثال : تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ وارون خود است زیرا $(fof)(x)=x$.

مثال : تابع $f(x)=\frac{۱}{x+۱}$ با دامنه $IR-\{-۱\}$ وارون تابع $g(x)=\frac{۱-x}{x}$ با دامنه $IR-\{۰\}$ است زیرا

$$f(g(x))=f(\frac{۱-x}{x})=\frac{۱}{\frac{۱-x}{x}+۱}=\frac{۱}{\frac{۱-x+x}{x}}=x$$

$$g(f(x))=g(\frac{۱}{x+۱})=\frac{۱-\frac{۱}{x+۱}}{\frac{۱}{x+۱}}=\frac{\frac{x+۱-۱}{x+۱}}{\frac{۱}{x+۱}}=x$$

مثال : برای هر عدد مثبت a که $a\neq ۱$ تابع $f(x)=a^x$ با دامنه IR وارون تابع $g(x)=\log x_a$ با دامنه $(۰,\infty)$ است و

$$f(g(x))=f(\log x_a)=a^{\log x_a}=x \qquad x\in(۰,\infty)$$

$$g(f(x))=g(a^x)=\log_{a_a}x=x \qquad x\in IR$$

مسائل

۱ــ برای توابع $f(x)=x^۲+۱$ و $g(x)=\frac{۱}{x}$ و $k(x)=۲^x$ ترکیب توابع زیر را حساب کنید.

fog , gof , fok , kof , fof ok

۲ــ دامنه تابع $f(x)=۳x+۱$ را به گونه‌ای محدود کنید که برای تابع $g(x)=\sqrt{۱-x}$ ترکیب gof قابل انجام باشد و gof را حساب کنید.

۳ــ برای تابع $f(x)=۱-\sqrt{x}$ آیا ترکیب fof قابل انجام است؟ دامنه f را به‌گونه‌ای محدود کنید که fof قابل انجام باشد.

۴ــ در تابع $y=\frac{ax+۱}{x-c}$ آیا می‌توان a و c را به گونه‌ای تعیین کرد که این تابع وارون خود باشد؟

۵ــ دامنه تابع $y=x^۲+۲x$ را به‌گونه‌ای محدود کنید که وارون‌پذیر باشد و وارون آن را به‌دست آورید.

۶ــ آیا تابع زیر وارون‌پذیر است؟ وارون آن را به دست آورید.

$$f(x)=\begin{cases} x^۲ & x\leq ۰ \\ -x^۲ & ۰<x \end{cases}$$

۷ــ ثابت کنید تابع $f(x)=\frac{۲^x-۱}{۲^x+۱}$ وارون‌پذیر است و وارون آن را به‌دست آورید.

دنباله‌ها

در ریاضی ۲ با مفهوم کلی دنباله‌های عددی و به‌طور خاص با دنباله‌های حسابی و هندسی آشنا شدیم. در آنجا گفته شد «هر تعدادی از اعداد که آن‌ها را پشت سرهم نوشته باشیم یک دنباله از اعداد تشکیل می‌دهند».

در واقع هر موقع مجموعه‌ای از اعداد را شماره‌گذاری می‌کنیم دنباله‌ای در دست داریم و هر عدد از دنباله را جملهٔ دنباله می‌نامیم. در دنبالهٔ با نام u، جملهٔ اول، جملهٔ دوم، ...، جمله nاُم، ...، آن را به‌ترتیب با $u_۱$، $u_۲$، ...، u_n، ... نشان دادیم. u_n را جملهٔ عمومی دنباله نیز می‌نامیم.

مثال : جملهٔ عمومی دنباله‌ای $u_n=n^۲-۴n$ است. شش جملهٔ ابتدای این دنباله چنین است :

$$-۳, -۴, -۳, ۰, ۵, ۱۲, \dots$$

هم‌چنین می‌توان دنبالهٔ نامتناهی را تابعی درنظر گرفت که دامنه آن مجموعه اعداد طبیعی ($\mathbb{N}$) و مقادیر آن اعداد حقیقی است. دنبالهٔ مثال قبل را می‌توان در جدولی به‌صورت زیر که نوعی از نمایش تابع است نشان داد :

n	۱	۲	۳	۴	۵	۶	...
u_n	−۳	−۴	−۳	۰	۵	۱۲	...

دنباله می‌تواند متناهی نیز باشد. در این‌صورت دامنه آن بخشی از $\mathbb{N}$ است. مانند دنبالهٔ عددهای طبیعی اول یک رقمی : ۷ ، ۵ ، ۳ ، ۲.

تمرین : پنج جملهٔ ابتدای هر یک از دنباله‌های زیر را بنویسید. (در صورت لزوم می‌توانید از ماشین حساب استفاده کنید.)

الف) $a_n=۱-۳n$ ب) $b_n=۳\times(\frac{۱}{۲})^n$ ج) $c_n=(-۱)^{n+۱}$ د) $d_n=\frac{۱}{n+۱}$

هـ) $e_n=(۱+\frac{۱}{n})^n$ و) $f_n=\frac{n(n+۱)}{۲}$ ز) $g_n=\frac{۷}{۹}(۱-۰/۱^n)$ ح) $h_n=\frac{۲n}{n+۳}$

مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی

برای به‌دست آوردن مجموع جملات دنبالهٔ ۱۵۰ و ... و ۱۰۲ و ۱۰۱ می‌توان روش زیر را به‌کار برد :

$$\begin{array}{l} ۱۰۱+۱۰۲+...+۱۵۰ \\ +۱۵۰+۱۴۹+...+۱۰۱ \\ \hline ۲۵۱+۲۵۱+...+۲۵۱=۵۰\times ۲۵۱ \end{array}$$

$\Rightarrow$ مجموع جملات $=\frac{۵۰}{۲}\times(۱۰۱+۱۵۰)$

و اگر مجموع اعداد فرد آن دنباله یعنی مجموع جملات دنبالهٔ ۱۴۹ و ... و ۱۰۳ و ۱۰۱ مورد نظر باشد به طریق مشابه :

$$\begin{array}{l} ۱۰۱+۱۰۳+...+۱۴۹ \\ +۱۴۹+۱۴۷+...+۱۰۱ \\ \hline ۲۵۰+۲۵۰+...+۲۵۰=۲۵\times ۲۵۰ \end{array}$$

$\Rightarrow$ مجموع جملات $=\frac{۲۵}{۲}\times(۱۰۱+۱۴۹)$

در دو مثالِ فوق اولی دنباله‌ای حسابی است با جملهٔ اول ۱۰۱ و جملهٔ آخر ۱۵۰ و تعداد جمله ۵۰ و دومی دنباله‌ای حسابی با جملهٔ اول ۱۰۱ و جملهٔ آخر ۱۴۹ و تعداد جملهٔ ۲۵است. در حالت کلی در دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول a و جملهٔ آخر a_n و تعداد جملهٔ n نیز می‌توان نوشت :

$$\begin{array}{l} a+a_۲+...+a_n \\ +a_n+a_{n-۱}+...+a \\ \hline (a+a_n)+(a+a_n)+...+(a+a_n)=n(a+a_n) \end{array}$$

$\Rightarrow$ مجموع جملات $=\frac{n}{۲}(a+a_n)$

بنابراین اگر مجموع n جملهٔ ابتدای دنباله را با s_n نشان دهیم : $s_n=\frac{n}{۲}(a+a_n)$

مثال : مجموع اعداد طبیعی مضرب ۳ کوچکتر از ۱۰۰ برابر است با $۱۶۸۳=(۹۹+۳)\frac{۳۳}{۲}$
زیرا در دنبالهٔ حسابی ۳×۳۳ و ... و ۳×۲ و ۳×۱ جملهٔ اول ۳ جملهٔ آخر ۹۹ و تعداد جمله‌ها ۳۳ است.

از طرفی می‌دانیم در دنباله‌ای حسابی با جملهٔ اول a و قدر نسبت d، جملهٔ nاُم از دستور $a_n=a+(n-۱)d$ به‌دست می‌آید. در نتیجه :

$$s_n=\frac{n}{۲}[۲a+(n-۱)d]$$

مثال : محصول تولید لوله‌های فولادی کارخانه‌ای، در آغاز سال ۱۳۹۰ برابر ۱۵ میلیون تن می‌باشد. قرار است تولید این لوله‌ها هر سال نسبت به سال قبل ۴ میلیون تن افزایش یابد. مجموع تولید لوله‌ها در دههٔ ۹۰ را پیش‌بینی کنید.

پاسخ : مقدار تولید لوله‌ها در سالِ اول یعنی سال ۱۳۹۰ برابر است با $a_1=۱۹$ تن. قدر نسبت این دنبالهٔ حسابی $d=۴$ و تعداد سال‌های یک دهه $n=۱۰$ است، پس

$$s_{۱۰}=\frac{۱۰}{۲}[۲(۱۹)+(۱۰-۱)(۴)]=۳۷۰ \text{ تن}$$

دنبالهٔ $۲^{۶۳}, \ldots, ۸, ۴, ۲, ۱$ را در نظر بگیرید. این دنباله، دنباله‌ای است هندسی با جملهٔ عمومی $۲^{n-۱}$.

برای به‌دست آوردن مجموعِ ۶۴ جمله ابتدای آن می‌نویسیم :

$$s_{۶۴}=۲^{۰}+۲^{۱}+۲^{۲}+\ldots+۲^{۶۳}$$

طرفین تساوی اخیر را در ۲ ضرب می‌کنیم :

$$۲\times s_{۶۴}=۲^{۱}+۲^{۲}+۲^{۳}+\ldots+۲^{۶۴}$$

سپس طرفین دو تساوی اخیر را از هم کم می‌کنیم نتیجه می‌شود :

$$s_{۶۴}=۲^{۶۴}-۱$$

به عنوان مثالی دیگر می‌خواهیم مجموعِ n جملهٔ ابتدای دنبالهٔ هندسی $\frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۹}, \frac{۱}{۲۷}, \cdots$ که جملهٔ عمومی آن $(\frac{۱}{۳})^n$ است را به‌دست آوریم :

$$s_n=\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۹}+\frac{۱}{۲۷}+\cdots+\frac{۱}{۳^n}$$

طرفین این تساوی را در $\frac{۱}{۳}$ ضرب می‌کنیم :

$$\frac{۱}{۳}\times s_n=\frac{۱}{۹}+\frac{۱}{۲۷}+\frac{۱}{۸۱}+\cdots+\frac{۱}{۳^{n+۱}}$$

طرفین دو تساوی اخیر را از هم کم می‌کنیم. نتیجه می‌شود :

$$(۱-\frac{۱}{۳})s_n=\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۳^{n+۱}}$$

$$s_n=\frac{\frac{۱}{۳}(۱-\frac{۱}{۳^n})}{۱-\frac{۱}{۳}}=\frac{۱}{۲}(۱-\frac{۱}{۳^n})$$

از ایده‌ای که در دو مثال قبل به‌کار رفت می‌توان استفاده نمود و مجموع n جملهٔ دنبالهٔ هندسی

با جملهٔ اولِ a و قدر نسبت qرا به‌دست آورد :

$$s_n=a+aq+aq^۲+\ldots+aq^{n-۱}$$

$$q\times s_n=aq+aq^۲+aq^۳+\ldots+aq^n$$

طرفین دو تساوی اخیر را از هم کم می‌کنیم :

$$(۱-q)s_n=a-aq^n$$

و در نتیجه :

$$s_n=\frac{a(۱-q^n)}{۱-q}\ ,\ q\neq ۱$$

از این دستور می‌توان برای محاسبهٔ مجموع هر تعداد جملهٔ یک دنبالهٔ هندسی استفاده نمود.

مثال : مجموع ده جملهٔ ابتدای دنبالهٔ $a_n=\frac{۳}{۲}(-۲)^n$ را به‌دست می‌آوریم. این دنباله، دنباله‌ای است هندسی با جملهٔ اول ۳- و قدر نسبت ۲-.

$$s_{۱۰}=\frac{-۳(۱-(-۲)^{۱۰})}{۱-(-۲)}=-(۱-۱۰۲۴)=۱۰۲۳$$

حد مجموع جملات دنبالهٔ هندسی نزولی

گفتیم برای محاسبهٔ مجموع n جملهٔ ابتدای دنبالهٔ هندسی از دستور زیر استفاده می‌کنیم :

$$s_n = \frac{a(۱-q^n)}{۱-q}$$

اگر $|q|<۱$ آنگاه با بزرگتر شدن n مقدار $|q^n|$ کوچکتر می‌شود. به عبارت دیگر هر گاه n بی‌نهایت بزرگ شود مقدار $|q^n|$ بی‌نهایت کوچک می‌شود. به عبارت دیگر حد q^n در بی‌نهایت صفر می‌شود و در نتیجه حد عبارت فوق برابر با $\frac{a}{۱-q}$ می‌شود.

مثال : مجموع تمام جملاتِ دنبالهٔ زیر (حد مجموع جملات دنباله) را حساب می‌کنیم.

$$۳, -۱, \frac{۱}{۳}, -\frac{۱}{۹}, \frac{۱}{۲۷}, \dots$$

$$s = \frac{۳}{۱-(-\frac{۱}{۳})} = \frac{۳}{\frac{۴}{۳}} = \frac{۹}{۴} = ۲/۲۵$$

مسائل

۱ــ مجموع همهٔ عددهای طبیعی مضرب ۷ و کوچکتر از ۱۰۰۰ را به‌دست آورید.

۲ــ در یک دنبالهٔ حسابی جملهٔ پنجم ۱۹− و جملهٔ دهم ۳۱ است. مجموع بیست جملهٔ ابتدای این دنباله را به‌دست آورید.

۳ــ دنباله‌ای حسابی مشخص کنید که جملهٔ اول آن ۲− بوده و مجموع پنج جملهٔ اول آن، یک‌سوم مجموع پنج جملهٔ بعدی باشد.

۴ــ نشان دهید $۱+۳+۵+\dots+(۲n-۱)=n^۲$.

۵ــ مجموع شش جملهٔ ابتدای یک دنبالهٔ هندسی ۹ برابر مجموع سه جملهٔ ابتدای آن دنباله است. قدر نسبت این دنباله را بیابید.

۶ــ احمد می‌خواهد پول‌های خود را پس‌انداز کند. او روز اول ۱۰۰۰ تومان در صندوق خود قرار می‌دهد و قرار می‌گذارد هر روز ۰/۹۹ پول واریزی روز قبل را به صندوق اضافه کند. پس از ۲۰

روز او چقدر پول در صندوق خواهد داشت؟ نشان دهید پول صندوقِ او هیچگاه از ۱۰۰,۰۰۰ تومان بیشتر نخواهد شد.

۷ــ برای محافظت از تابش‌های مضر مواد رادیواکتیو لایه‌های محافظتی ساخته شده است که شدت تابش‌ها پس از عبور از آن‌ها نصف می‌شود. حداقل از چند لایه باید استفاده کنیم تا شدت تابش ۹۷ درصد کاهش یابد؟

۸ــ با استفاده از دستور محاسبهٔ مجموع جملات دنبالهٔ هندسی، درستی اتحادهای زیر را نشان دهید.

الف) $x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1)$

ب) $x^n+1=(x+1)(x^{n-1}-x^{n-2}+\ldots-x+1)$

۹ــ با استفاده از اتحاد (الف) در مسئله قبل درستی اتحاد زیر را نشان دهید.

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}.b+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1})$$

حد دنباله‌ها : مفهوم حد دنباله‌ها مُشابه مفهوم حد تابع در $+\infty$ است که قبلاً (در ریاضی ۳) بیان گردید.

مثال : $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$ زیرا با بزرگ شدن عدد طبیعی n عدد $\frac{1}{n+1}$ به صفر نزدیک و نزدیکتر می‌شود. به عبارتی دیگر هر چقدر بخواهیم می‌توانیم $\frac{1}{n+1}$ را به ۰ نزدیک کنیم به شرط آن‌که n را به‌قدر کافی بزرگ کرده باشیم.

تعریف : هر دنباله که دارای حد بوده و حد آن عددی حقیقی باشد یک دنباله همگرا نامیده می‌شود.

به‌عنوان مثال هر یک از دنباله‌های $a_n=\frac{2n}{n+3}$ و $b_n=\frac{n^2+2}{n^2+1}$ همگرا می‌باشد زیرا به‌ترتیب دارای حدی برابر ۲ و ۱ هستند. اصطلاحاً گوییم این دنباله‌ها به ترتیب به ۲ و ۱ همگرا هستند.

امّا دنباله $c_n=(-1)^{n+1}$ همگرا نیست زیرا $c_n=\begin{cases}1 & \text{n فرد،}\\ -1 & \text{n زوج،}\end{cases}$ و با بزرگ شدن n به عدد خاصی نزدیک نمی‌شود. هم‌چنین دنبالهٔ $f_n=\frac{n(n+1)}{2}$ همگرا نیست زیرا حد آن $+\infty$ است و عددی حقیقی نیست.

بعضی دنباله‌های خاص : دنباله‌های صفحهٔ بعد را در نظر بگیرید :

$$a_n=\frac{1}{2^n}:1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16},\dots$$
$$\searrow\ \searrow\ \searrow\ \searrow$$

$$b_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n}:1,\frac{-1}{2},\frac{1}{3},-\frac{1}{4},\frac{1}{5},\dots$$
$$\searrow\ \nearrow\ \searrow\ \nearrow$$

$$c_n=n^2:1,4,9,16,25,\dots$$
$$\nearrow\ \nearrow\ \nearrow\ \nearrow$$

دنبالهٔ a چنان است که با افزایش شمارهٔ جمله، مقدار جمله کاهش می‌یابد. a نمونه‌ای از یک دنباله نزولی است. دنباله c چنان است که با افزایش شمارهٔ جمله، مقدار جمله افزایش می‌یابد. c مثالی از یک دنباله صعودی است. دنبالهٔ b نه صعودی است و نه نزولی. زیرا برای برخی از افزایش شماره‌ها مقدار جمله کاهش و برای برخی از افزایش شماره‌ها، مقدار جمله افزایش می‌یابد. در دنبالهٔ نزولی a داریم : $a_1>a_2>a_3>\dots$ و در دنبالهٔ صعودی b داریم : $b_1<b_2<b_3<\dots$.

تعریف : هرگاه دنبالهٔ u_n چنان باشد که همواره $u_n \le u_{n+1}$ آنگاه این دنباله را یک دنباله صعودی می‌نامیم. اگر همواره $u_n<u_{n+1}$ آنگاه دنباله را اکیداً صعودی می‌نامیم.

تعریف : هرگاه دنبالهٔ v_n چنان باشد که همواره $v_n \ge v_{n+1}$ آنگاه این دنباله را یک دنباله نزولی نامیم و اگر $v_n>v_{n+1}$ آنگاه این دنباله را اکیداً نزولی نامیم.

در هر دو حالت صعودی یا نزولی ، دنباله را یکنوا می‌نامند.

این بخش را با مفهوم دیگری در باب دنباله‌ها به پایان می‌رسانیم. دنبالهٔ $a_n=\frac{1}{n}$ را در نظر بگیرید. همواره $a_n<2$. عدد ۲ یک کران بالا برای این دنباله است. یا برای دنبالهٔ $b_n=\frac{2n^2+3}{n^2+1}$ عدد ۳ یک کران بالاست. زیرا همواره $b_n<3$.

تعریف : فرض کنیم α عدد حقیقی ثابتی باشد به قسمی که همواره $u_n<\alpha$. در این صورت α را یک کران بالا برای دنبالهٔ u_n گوییم و دنباله u_n را که دارای حداقل یک کران بالا باشد یک دنباله از بالا کراندار می‌نامیم.

برای دنبالهٔ $a_n=\frac{n^3}{1+n^2}$ ، همواره $a_n>0$. عدد ۰ یک کران پایین برای این دنباله است. هر یک از دنباله‌های $b_n=\frac{2n^2+3}{n^2+1}$ و $c_n=(-1)^n$ نیز دارای کران پایین هستند.

تعریف : هرگاه عدد حقیقی ثابتی مانند β یافت شود به قسمی که همواره $v_n > \beta$ دنبالهٔ v_n را یک دنباله از پایین کراندار نامیده و β را یک کران پایین دنباله v_n گوییم.

تعریف : دنباله‌ای که هم از بالا و هم از پایین کراندار باشد دنبالهٔ کراندار گوییم.

دنباله‌های $\frac{۱}{n}$ و $\frac{۲n^۲+۳}{n^۲+۱}$ و $(-۱)^n$ کراندارند ولی دنباله‌های $\frac{n^۳}{۱+n^۲}$ و $۲n+۳$ و $(-۱)^n n$ کراندار نیستند.

مسائل

۱ــ بررسی کنید از دنباله‌های زیر کدام صعودی، کدام نزولی و کدام نه صعودی‌اند و نه‌نزولی‌اند.

الف) $u_n=(-۱)^{n+۱}$ ب) $u_n=۳^{n-۱}$ ج) $u_n=\frac{۱}{n^۲+۱}$

د) $u_n=\frac{n^۲}{۲^n}$ هـ) $u_n=\frac{۳^n}{n^۳}$ و) $u_n=\frac{n(n+۱)}{۲}$

۲ــ دنباله‌ای مثال بزنید که هم صعودی باشد و هم نزولی.

۳ــ دو دنباله مثال بزنید که از بالا کراندار بوده ولی از پایین کراندار نباشند.

۴ــ دو دنباله مثال بزنید که از پایین کراندار بوده ولی از بالا کراندار نباشند.

۵ــ دو دنباله کراندار مثال بزنید.

۶ــ دو دنباله مثال بزنید که نه از بالا کراندار باشد و نه از پایین.

۷ــ با استفاده از ماشین حساب ده جمله نخست دنبالهٔ $e_n=(۱+\frac{۱}{n})^n$ را محاسبه کنید. آیا این دنباله کراندار است؟ (حدس بزنید)

۸ــ پنج جمله نخست دنباله‌ای که جملهٔ عمومی آن $u_n=(۱-\frac{۱}{n})^n$ است را محاسبه کنید. آیا این دنباله کراندار است؟

کاربرد تابع نمایی (رشد و زوال)

معرفی عدد e : یکی از اعدادی که در ساختمان طبیعت فراوان به کار رفته است عددی است گنگ که با حرف e نمایش داده و بسطِ اعشاری آن تا چند رقم اعشار برابر است با ...۲/۷۱۸۲۸۱=e

این که این عدد چیست و از کجا پیدا شده، بحث مفصلی دارد و ما در این بخش تنها به ماهیتِ ریاضی این عدد می‌پردازیم. در مسأله ۷ انتهای فصل قبل، ده جملهٔ نخست دنباله $(1+\frac{1}{n})^n$ را به‌طور تقریبی و با دقتِ چند رقم اعشار نوشتیم. یکبار دیگر آن جملات را می‌نویسیم :

n	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	...
$(1+\frac{1}{n})^n$	۲	۲/۲۵	۲/۳۷	۲/۴۴۱۴	۲/۴۸۸۳	۲/۵۲۱۶	۲/۵۴۶۴	۲/۵۶۵۷	۲/۵۸۱۱	۲/۵۹۳۷	...

مشاهده می‌کنیم که حاصل $(1+\frac{1}{n})^n$ بزرگ و بزرگتر می‌شود (دنباله صعودی است) ولی می‌توان ثابت کرد همیشه کوچکتر از ۳ باقی می‌ماند. در ریاضیاتی عالیتر ثابت می‌شود که هر دنبالهٔ صعودی و از بالا کراندار همگراست و دنبالهٔ فوق نیز به عددی حقیقی همگراست که آن را عدد e می‌نامیم.

تعریف : حد دنبالهٔ $(1+\frac{1}{n})^n$ را که عددی است حقیقی و گنگ با e نشان می‌دهیم.

$$e=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$$

امروزه با استفاده از کامپیوترهای پیشرفته، تقریب اعشاری e را تا بیش از یک میلیون رقم بعد از ممیز محاسبه کرده‌اند.

یادداشت تاریخی : e را به افتخار جان نپر (John Napier) ریاضیدان اسکاتلندی عددِ نپر نامیده‌اند. نپر نویسنده اسکاتلندی (تولد ۱۵۵۰ و وفات ۱۶۱۷ میلادی) بود که مطالعاتی در ریاضیات و الهیات داشته است. نپر در واقع مخترع لگاریتم است که این مفهوم را برای ساده‌ترکردن محاسبات وضع کرده است.

e در پدیده‌های طبیعی

وقتی تعداد معینی باکتری را در یک آزمایشگاه کشت می‌دهیم، جمعیت آن‌ها با گذشت زمان به شدت افزایش می‌یابد. هرگاه f(t) تعداد باکتری‌ها پس از t دقیقه از شروع کشت باشد آنگاه f(t) از مدل زیر پیروی می‌کند.

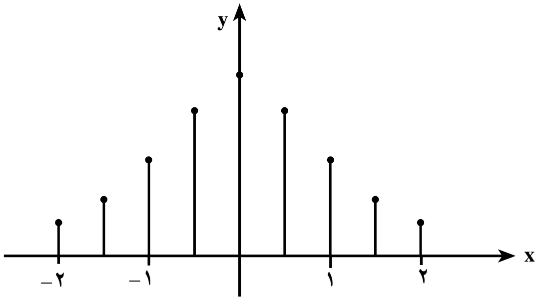
$$f(t)=Be^{۰/۰۴t}$$

که در آن B عددی است ثابت.

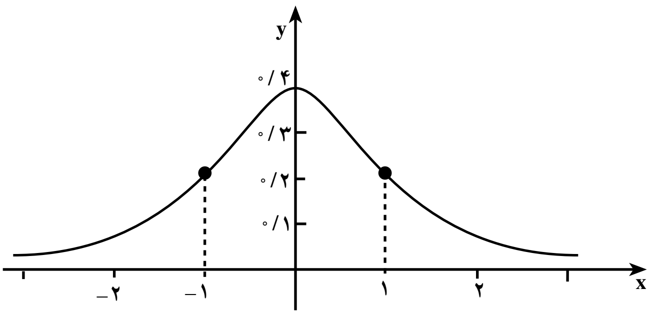
قیمت یک محصول صنعتی (مثلاً خودرو) با گذشت زمان و استفاده از خودرو کاهش می‌یابد. هرگاه $V(t)$ قیمت یک محصول صنعتی بعد از t سال از خرید آن باشد، $V(t)$ تابعی به‌صورت زیر است :

$$V(t)=Be^{-۰/۰۲t} \quad \text{(B مقدار ثابت)}$$

می‌دانیم تابع توزیع کمیت‌هایی مانند قد، وزن، خطای اندازه‌گیری قطر لوله‌های تولید شده در یک کارخانه، در یک جامعهٔ نمونه‌ای هنجار دارای یک نمودار میله‌ای به شکل روبه‌رو است.



اگر تعداد نمونه‌ها (تعداد میله‌ها) را افزایش دهیم و نقاط انتهایی میله‌ها را به هم وصل کنیم یک منحنی به‌دست می‌آید که نمودار آن به شکل زیر است :



این نمودار را نمودار زنگوله‌ای یا نمودار توزیع طبیعی (چگالی طبیعی) می‌نامیم. معادله این نمودار به صورت زیر است :

$$f(x)=\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}e^{\frac{-x^۲}{۲}}$$

جهان مملوّ از پدیده‌ها است. در هر پدیده کمیت یا کمیت‌هایی برحسب کمیت‌های دیگر (مثلاً زمان) تغییر می‌کنند. این تغییر ممکن است به‌صورت افزایشی باشد که در این صورت پدیده رشد را خواهیم داشت و یا آن‌که به‌صورت کاهشی باشد که آن‌را زوال می‌نامیم. افزایش جمعیت باکتری‌ها نمونه‌ای از رشد

است در حالی‌که کاهش قیمت مصنوعات صنعتی نمونه‌ای از زوال می‌باشد. تبدیل مواد رادیواکتیویته سنگین به عناصر سبک‌تر مستلزم کاهش مقدار اولیّه مواد رادیواکتیو می‌باشد و این پدیده نیز نمونه بارزی از زوال می‌باشد.

بعضی از تغییرات توابع، همچون تابع توزیع طبیعی، منحصراً رشد یا زوال نیستند بلکه ترکیبی پیچیده‌تر دارند.

وقتی تصور کنیم که در جهان پدیده‌های متنوع و بسیاری وجود دارد که مدل تغییرات آن‌ها متضمن عدد e (عدد نپر) می‌باشد، به اهمیت e بیشتر پی می‌بریم.

بی سبب نیست که لگاریتم در پایه e را **لگاریتم طبیعی** می‌نامند.

در مسائل اجتماعی و اقتصادی نیز ما به عدد e نیازمندیم. وقتی P ریال را به‌صورت مشارکت در سرمایه‌گذاری با نرخ $100i$ درصد پیوسته در یک مؤسسه اعتباری (بانک یا شرکت تولیدی) سرمایه‌گذاری می‌کنیم، سرمایه‌ای که پس از t سال حاصل می‌شود از مدل زیر پیروی می‌کند.

$$A=Pe^{it}$$

تابع نمایی طبیعی ــ تابع لگاریتم طبیعی

در ریاضی ۲ با تابع نمایی و تابع لگاریتم و برخی ویژگی‌های آن‌ها آشنا شدید. با انجام تمرین زیر مطالب گذشته را یادآوری نموده، سپس به نوع خاصی از این توابع وکاربرد آن‌ها می‌پردازیم.

تمرین :

۱ــ با استفاده از نماد لگاریتم، رابطه‌های داده شده را به‌صورت دیگر بنویسید.

الف) $3^4=81$ ب) $10^{-3}=0/001$ ج) $5^{-2}=\frac{1}{25}$ د) $2^0=1$

هـ) $8^{\frac{2}{3}}=4$ و) $625^{-\frac{3}{4}}=\frac{1}{125}$ ز) $e^0=1$ ح) $(\frac{1}{4})^{\frac{7}{2}}=\frac{1}{128}$

۲ــ رابطه‌های داده شده را به‌صورت نمایی بنویسید.

الف) $\log_{10}1=0$ ب) $\log_8 64=2$ ج) $\log_{10}1000=3$ د) $\log_8 2=\frac{1}{3}$

هـ) $\log_{\frac{1}{3}}9=-2$ و) $\log_{16}\frac{1}{8}=-\frac{3}{4}$ ز) $\log_{\frac{1}{2}}64=-6$ ح) $\log_{32}2=\frac{1}{5}$

۳ــ مقدار لگاریتم‌های داده شده را به‌دست آورید.

الف) $\log_{10}100$ ب) $\log_2\frac{1}{8}$ ج) $\log_{27}9$ د) $\log_6 6$

هـ) $\log_{۲۷} \frac{۱}{۸۱}$ و) $\log_{\frac{۱}{۴}} \frac{۱}{۳۲}$ ز) $\log_e ۱$ ح) $\log_e \sqrt{e}$

۴ــ معادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $\log_{\frac{۱}{۳}} x = -۴$ ب) $\log_۲(x-۱) = ۳$ ج) $\log_{\frac{۱}{۹}} x = \frac{۵}{۲}$ د) $\log(۳x+۱)=۲$

هـ) $\log(۲x-۱)+\log(x-۷)=\log ۷$ و) $۲\log x-\log(x+۱)=۱$

ز) $(۲^x-۱)(۲^x-۳)=۰$ ح) $۱۰^{\log(x+۱)}=۳$

۵ــ از روابط زیر کدام درست و کدام نادرست است؟ (c, b, a اعداد حقیقی مثبت و c مخالف صفر است.)

الف) $\log_c a + \log_c b = \log_c(a+b)$ ب) $\log_c a + \log_c b = \log_c(ab)$

ج) $\log_c a - \log_c b = \log_c(\frac{a}{b})$ د) $\log_c a - \log_c b = \log_c(a-b)$

هـ) $\log_c a^n = (\log_c a)^n$ و) $\log_c a^n = n\log_c a$

ز) $\log_{c^m} a^n = \frac{n}{m}\log_c a$ ح) $\log_{c^m} a^n = m^n \log_c a$

۶ــ ابتدا جدول را کامل کنید. سپس نمودارهای توابع زیر را در یک صفحهٔ مختصات رسم کنید.

$y=\log_۲ x \quad , \quad y=۲^x$

$y=\log_{\frac{۱}{۲}} x \ , \ y=(\frac{۱}{۲})^x$

x	-۳	-۲	-۱	۰	۱	۲	۳
۲^x							
$\log_۲ x$							
$(\frac{۱}{۲})^x$							
$\log_{\frac{۱}{۲}} x$							

۷ــ جدول زیر را در نظر بگیرید:

لگاریتم عدد	۰	۰/۳۰۱	۰/۴۷۷	...	۰/۶۹۹	...	۰/۸۴۵	...	...	۱
عدد	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰

هر عدد در ردیف دوم برابر است با ۱۰ به توان عدد نظیر از ردیفِ اول. برای مثال $۱۰^{۰/۸۴۵}$=۷. جدول را کامل کنید و مقدار عددی هریک از عبارت‌های زیر را به‌دست آورید. (در جدول، لگاریتم اعداد با دقت تا سه رقم اعشار آمده است.)

الف) $\log(۲\times۱۰^{۷})=$ ب) $\log ۳۲=$ ج) $\log ۵۶=$

د) $\log ۳۰۰۰۰۰=$ هـ) $\log\sqrt{۶}=$ و) $\log ۳۹۲=$

تابع نمایی طبیعی : وقتی پایه تابع نمایی عدد e باشد تابع نمایی حاصله را **تابع نمایی طبیعی** می‌نامیم؛ به عبارت دیگر تابع نمایی طبیعی تابع با ضابطهٔ $f(x)=e^{x}\quad(x\in IR)$ می‌باشد که در آن e عدد نپر است.

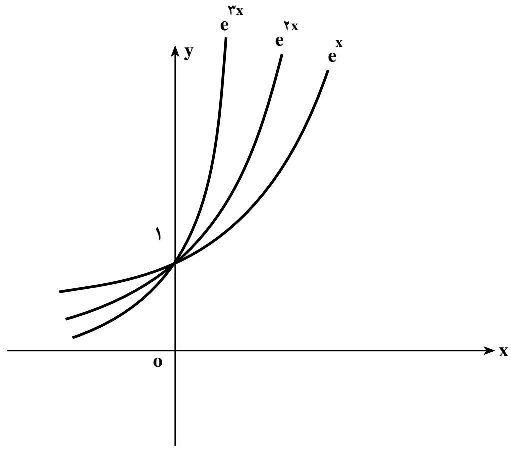
دامنه تابع نمایی طبیعی مجموعه اعداد حقیقی IR و برد آن مجموعه اعداد حقیقی مثبت است.

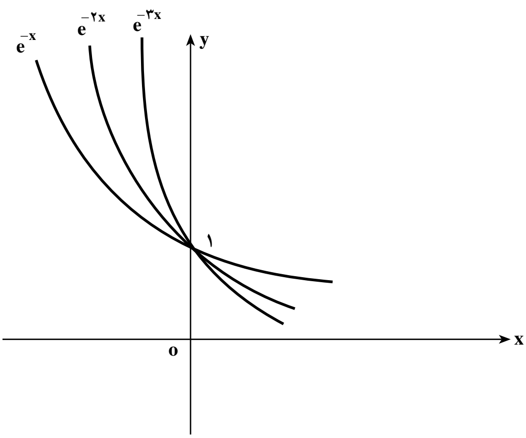
اکنون بخشی از نمودار تابع نمایی طبیعی را رسم می‌کنیم. ابتدا مقادیر تابع نمایی طبیعی را که متناظر بعضی از مقادیر x هستند در یک جدول درج می‌کنیم.

این مقادیر را با استفاده از ماشین حساب نیز می‌توان به‌دست آورد.

x	−۲	−۱	−۰/۵	۰	۰/۵	۱	۱/۵	۲	۲/۵
e^{x}	۰/۱	۰/۴	۰/۶	۱	۱/۵	۲/۷	۴/۵	۷/۴	۱۲/۲

سپس نقاطی از صفحه مختصات را که مختصاتشان در جدول آمده مشخص کرده و این نقاط را با یک منحنی هموار به هم وصل می‌کنیم تا بخشی از نمودار تابع نمایی طبیعی به دست آید.

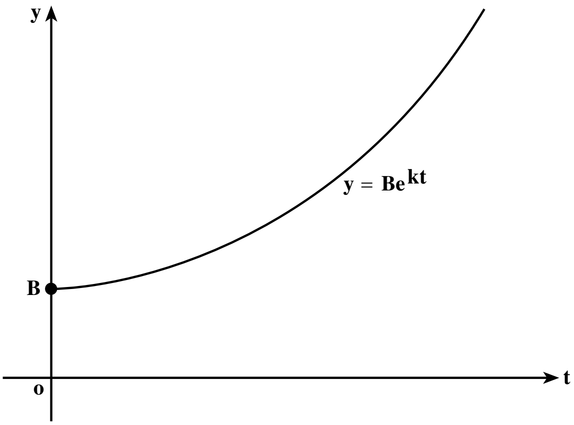




در بسیاری از شاخه‌های علمی با مدل‌های ریاضی که شامل توان‌های e است سر و کار داریم (یک مدل ریاضی رابطه یا معادله‌ای است که بین متغیرهای یک پدیده یا مشتقات آن‌ها برقرار است). بعضی از این مدل‌ها همان‌هایی هستند که رشد یا زوال نمایی نامیده می‌شوند. معادله (مدلی) به فرم

$$f(t)=Be^{kt} \qquad (t\geq 0) \qquad (*)$$

که در آن B و k ثابت و مثبت‌اند، تابعی با رشد نمایی را تعریف می‌کند. در فصل بعد خواهیم دید که هرگاه آهنگ رشد تابعی متناسب با اندازهٔ آن باشد. این تابع رشد نمایی دارد. برای رسم بخشی از نمودار (*) باید توجه کنیم که $f(0)=B$ و نیز این‌که $f(t)$ همواره عددی مثبت است که با افزایش t افزایش می‌یابد. نمودار توابعی که با رشد نمایی تعریف می‌شوند، به نام توابع رشد موسوم‌اند و به شکل زیر می‌باشند. $(k>0)$



معمولاً متغیر t در این‌گونه توابع متغیّر زمان می‌باشد.

مثال: در یک کشت نمونه‌ای از باکتری‌ها، تعداد باکتری‌ها در زمان t از مدل $V(t)=Be^{2t}$ پیروی می‌کند، که در آن B مقدار ثابت مثبتی است. هرگاه در لحظهٔ $t=0$ (شروع آزمایش) ۱۰۰۰ باکتری کشت داده شده باشند، پس از ۲ ثانیه از شروع چند باکتری وجود دارد؟

حل: داریم

$$1000=V(0)=Be^{2\times 0}=B$$

بنابراین $B=1000$. پس معادله تعداد باکتری‌ها به‌صورت

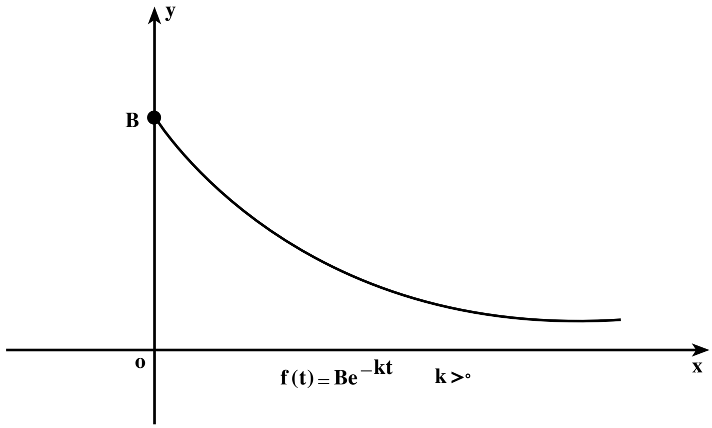
$$V(t)=1000e^{2t}$$

درمی‌آید. اکنون با قرار دادن $t=۲$،

$$V(۲)=۱۰۰۰e^{۲\times۲}=۱۰۰۰\times e^{۴}\approx ۵۴۰۰۰$$

یعنی پس از ۲ ثانیه از شروع کشت ۵۴۰۰۰ باکتری وجود دارد (مقدار تقریبی).

هرگاه معادله تابع به شکل $f(t)=Be^{-kt}$ باشد که در آن B و k مثبت‌اند، گوییم این تابع از مدل نزول نمایی پیروی می‌کند، یا اصطلاحاً تابع را یک تابع زوال می‌نامیم، با توجه به این‌که $f(۰)=B$ و $f(t)$ همواره عددی مثبت است که با افزایش t نقصان می‌یابد. نمودار چنین تابعی به شکل زیر است.



مثال زیر یک پدیده را که مدل ریاضی آن از تابع نزول نمایی پیروی می‌نماید ارایه می‌کند.

مثال : قیمت یک محصول صنعتی با استفاده از آن و گذشت زمان کاهش می‌یابد. فرض کنیم $V(t)$ قیمت یک محصول (ابزار یا خودرو) بعد از t سال از خرید آن باشد. هرگاه بدانیم که

$$V(t)=Be^{-۰/۰۲t}$$

که در آن B مقدار ثابتی است، چنانچه این محصول به قیمت ۱۰۰۰۰۰۰ تومان (وقتی که نو باشد) خریداری شده باشد، قیمت آن بعد از ۲ سال چقدر است؟

حل : داریم $V(۰)=۱۰۰۰۰۰۰$ (لحظه خرید کالا را وقتی که نو باشد لحظه صفر اختیار کرده‌ایم). لذا بنابر

$$V(۰)=Be^{-۰/۰۲\times۰}$$

$$۱۰۰۰۰۰۰=Be^{۰}$$

پس $B=۱۰۰۰۰۰۰$. پس با قرار دادن این مقدار در معادلهٔ قبل به‌دست می‌آوریم

$$V(t)=۱۰۰۰۰۰۰\, e^{-۰/۰۲t}$$

و قیمت این محصول پس از ۲ سال همان $V(۲)$ است؛ پس

$$\begin{aligned} V(۲)&=۱۰۰۰۰۰۰\, e^{-۰/۰۲\times ۲} \\ &=۱۰۰۰۰۰۰\, e^{-۰/۰۴} \\ &=۱۰۰۰۰۰۰\,(۰/۶۷۰۳۲۰) \\ &=۶۷۰۳۲۰ \end{aligned}$$

یعنی قیمت این محصول پس از ۲ سال برابر ۶۷۰۳۲۰ تومان است.

تابع لگاریتم طبیعی : تابع لگاریتم در پایه e را، **تابع لگاریتم طبیعی** می‌نامیم. درنتیجه

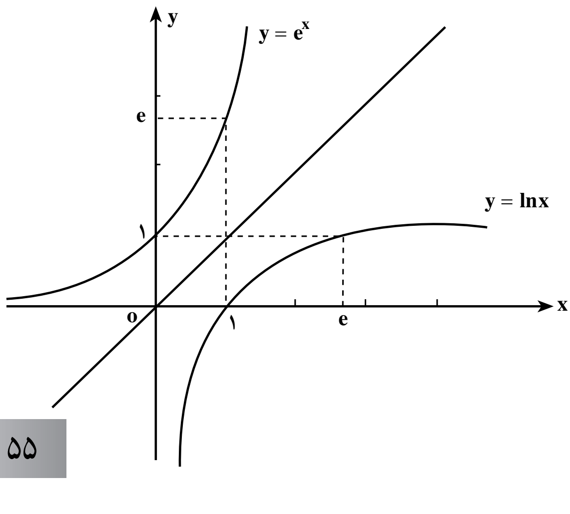
تابع لگاریتم طبیعی تابع معکوس تابع نمایی طبیعی است.

قرارداد : تابع لگاریتم طبیعی را می‌توانیم همانند حالت کلی با نماد $\log_e x$ نشان دهیم. ولی برای سادگی نام کوتاه‌تری برای این تابع انتخاب شده است و آن را با نماد ln نشان می‌دهند (l برای حرف اول لگاریتم و n برای حرف اول نِپِر می‌باشد).

مقادیر تابع ln را با lnx نشان می‌دهیم و آن را «لگاریتم طبیعی x» یا «لگاریتم نپری x» می‌خوانیم.

چون ln و تابع نمایی طبیعی توابع معکوس یکدیگرند، داریم

$y=\ln x$ اگر و فقط اگر $x=e^y$



بخشی از نمودار تابع لگاریتم طبیعی در شکل روبه‌رو رسم شده است.

مقادیر تابع لگاریتم طبیعی معمولاً در جدول‌هایی به نام جدول لگاریتم درج می‌شود. از ماشین حساب علمی با دکمه $\boxed{\ln}$ نیز می‌توان این مقادیر را به‌دست آورد.

از دیدگاه علمی می‌توانیم بگوییم که لگاریتم برای حل معادلاتی که مجهول در نما ظاهر می‌شود اختراع شده است. برای روشن‌تر شدن این مطلب به حل چند مثال کاربردی می‌پردازیم :

مثال : فرض کنیم تعداد باکتری‌ها در یک نوع کشت در دقیقه t از معادله

$$f(t)=1500\,e^{0/04t}$$

به‌دست آید. تعیین کنید بعد از چند دقیقه تعداد باکتری‌ها برابر ۳۰۰۰۰ می‌شود.

حل : فرض کنیم T دقیقه‌ای باشد که پس از آن ۳۰۰۰۰ باکتری به‌دست آید. پس داریم

$$f(T)=1500\,e^{0/04T}$$

چون $f(T)=30000$، داریم

$$30000=1500\,e^{0/04T}$$

یا

$$20=e^{0/04T}$$

ولی این معادله هم‌ارز است با معادله

$$0/04T=\ln 20$$

یا

$$0/04T=2/9957$$

$$T=\frac{2/9957}{0/04}=74/9$$

پس یک ساعت و ۱۴ دقیقه و ۵۴ ثانیه باید بگذرد تا تعداد باکتری‌ها به ۳۰۰۰۰ برسد.

مثال : شخصی مبلغ ۲۵۰۰۰۰۰۰ ریال را در یک حساب پس‌انداز با نرخ سود مشارکت ۱۰درصد مرکب پیوسته سرمایه‌گذاری کرده است. پس از چه مدت پول اولیه این شخص دو برابر می‌شود؟ هرگاه P ریال سرمایه اولیه را با نرخ سود مشارکت $100i$ درصد مرکب پیوسته سرمایه‌گذاری کنیم سود و سرمایه پس از t سال از معادله $A=Pe^{it}$ به‌دست می‌آید.

حل : داریم $100i=10$، یعنی $i=0/1$.

$$A=Pe^{it}$$

پس

$$۵۰۰۰۰۰۰۰۰ = ۲۵۰۰۰۰۰۰۰ e^{۰/۱t}$$

درنتیجه

$$۲ = e^{۰/۱t}$$

و این هم‌ارز است با

$$۰/۱t = \ln ۲$$

$$t = \frac{\ln ۲}{۰/۱} \simeq ۶/۹۳$$

یعنی تقریباً پس از ۷ سال (۶ سال و ۱۱ ماه و ۵ روز) سرمایه اولیهٔ شخص دو برابر می‌شود.

مسائل

۱ــ معادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $\ln(x-۳)=۲$

ب) $(e^x-۵)(۲e^x-۷)=۰$

ج) $(e^x+۳)^۲-۲۵=۰$

د) $\ln(۴x-۵)=\ln(۲-x)$

هـ) $\left|e^x-۱\right| = \left|۳-۲e^x\right|$

و) $\ln(۲x-۱)+\ln(x-۷)=\ln ۷$

۲ــ اعداد حقیقی x و y را چنان تعیین کنید که :

الف) $\begin{cases} \ln(۲x+۱)+\ln(۳y-۲)=\ln ۳x+\ln(y+۳) \\ \ln(x+۱)-\ln(y+۴)=-\ln ۳ \end{cases}$

ب) $\begin{cases} \ln x+\ln ۲y=\ln(xy+۲) \\ \ln(۱-x)+\ln(y+۱)=\ln(y-x-۱) \end{cases}$

۳ــ جمعیت شهری ۱۰۰۰۰ نفر است و با آهنگی متناسب با تعداد جمعیت افزایش می‌یابد. اگر این آهنگ ۶ درصد و جمعیت بعد از t سال $P(t)$ باشد، آنگاه $P(t)=۱۰۰۰۰e^{۰/۰۶t}$. تا کی انتظار می‌رود جمعیت به ۴۵۰۰۰ نفر برسد؟

۴ــ در یک نوع کشت ۲۰۰۰ باکتری موجود است، و بعد از t دقیقه $f(t)$ باکتری ظاهر می‌شود که $f(t)=۲۰۰۰e^{۰/۰۳۵t}$. چه وقت ۱۰۰۰۰ باکتری در کشت وجود خواهد داشت؟

۵ــ کارایی کارگر عادی در کارخانه‌ای با تابع $f(t)=100-60e^{-0/2t}$ داده می‌شود که کارگر بعد از t ماه اشتغال می‌تواند روزانه f(t) واحد کار را کامل کند. بعد از چند ماه تجربهٔ کاری، انتظار می‌رود که کارگر روزانه ۷۰ واحد را کامل کند؟

۶ــ قیمت فروش ابزاری، t سال پس از خرید، f(t) دلار است، که $f(t)=1200+8000e^{-0/25t}$. چند سال پس از خرید، قیمت فروش این ابزار ۲۰۰۰ دلار می‌شود؟

در مسایل ۹ــ۷ به فرمول زیر نیاز داریم :

$$A=Pe^{it}$$

در این فرمول P سرمایه اولیه است که با نرخ سود مشارکت ۱۰۰i درصد به مدت t سال در مؤسسه‌ای (بانک یا شرکت تولیدی) سرمایه‌گذاری می‌شود و A مقدار سرمایه پس از t سال است.

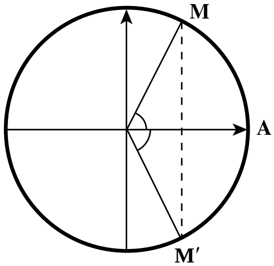
۷ــ چقدر طول می‌کشد تا ۵۰۰۰۰۰ ریال پس‌انداز با نرخ ۹ درصد مرکب پیوسته ۹۰۰۰۰۰ ریال شود؟

۸ــ مسأله ۷ را وقتی که نرخ سود شرکت در سرمایه‌گذاری ۱۲ درصد مرکب پیوسته باشد، حل کنید.

۹ــ چقدر طول می‌کشد تا یک سرمایه‌گذاری دو برابر شود هرگاه نرخ سود مشارکت در سرمایه‌گذاری ۸ درصد مرکب پیوسته باشد؟

معادلهٔ مثلثاتی

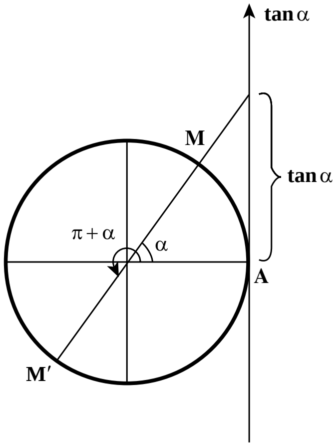
چگونه می‌توانیم تمام زوایایی را مشخص کنیم که یکی از نسبت‌های مثلثاتی آن داده شده باشد؟ به‌عنوان مثال کلیهٔ زوایایی را می‌خواهیم که کسینوس‌شان برابر $\frac{۱}{۲}$ باشد. همان‌طورکه در شکل زیر مشخص است در دو نقطه روی دایرهٔ مثلثاتی این اتفاق می‌افتد کلیهٔ کمان‌هایی که انتهای آن‌ها در یکی از نقاط M یا ´M باشند جواب مسئله هستند از آنجا که $\cos\frac{\pi}{۳}=\frac{۱}{۲}$ و $\cos(\frac{-\pi}{۳})=\frac{۱}{۲}$ ، همهٔ جواب‌های موردنظر به‌صورت $۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳}$ هستند. در حقیقت اگر k دور بزنیم و در یکی از نقاط M یا ´M متوقف شویم مقدار کسینوس تغییر نمی‌کند. به‌طورکلی کلیهٔ زوایای x که جواب معادله $\cos x=\cos\alpha$ می‌باشند عبارت‌اند از : $x=۲k\pi\pm\alpha$.



با روش مشابه می‌توان کلیهٔ زوایایی مانند x که جواب معادله $\sin x=\sin\alpha$ می‌باشند را به‌صورت $x=۲k\pi+\alpha$ و $x=۲k\pi+\pi-\alpha=(۲k+۱)\pi-\alpha$ به‌دست آورد.

حال می‌خواهیم کلیهٔ زوایایی مانند x را بیابیم که جواب معادله $\tan x=\tan\alpha$ باشند.

با توجه به آن که $\tan(\pi+x)=\tan x$ بنابراین هر مضربی از π که به α بیفزاییم تانژانت آن برابر $\tan\alpha$ خواهد شد و کلیهٔ جواب‌های معادله به‌صورت $x=k\pi+\alpha$ خواهد بود.



معادلهٔ مثلثاتی : معادلاتی که برحسب نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه مجهول نوشته می‌شوند را معادله مثلثاتی می‌نامیم به‌عنوان مثال ، $\sin^۲x+\cos x=۰$ و $۲\cos x=۱$ معادله‌هایی مثلثاتی هستند.

جواب معادله : مقدارهایی از زاویهٔ مجهول که به‌ازای آنها معادله برقرار شود، جواب معادله می‌نامند. مقصود از حل معادلهٔ مثلثاتی پیدا کردن کلیهٔ جواب‌های آن معادله است. به‌عنوان مثال کلیهٔ

جواب‌های معادلهٔ $\sin x = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$ برابر است : $x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۳}$ و $x = ۲k\pi + \frac{۲\pi}{۳}$

حل معادله‌های مثلثاتی

برای حل یک معادلهٔ مثلثاتی به کمک رابطه‌های مثلثاتی و دستورهای جبری آن را به معادلهٔ ساده‌تری تبدیل می‌کنیم تا به یکی از صورت‌های $\sin x = a$ یا $\cos x = a$ یا $\tan x = b$ تبدیل شود.

درصورتی که $-۱ \leq a \leq ۱$ می‌توان نوشت : $\sin\alpha = a$ پس $\sin x = \sin\alpha$

و از آن‌جا $x = ۲k\pi + \alpha$ و $x = ۲k\pi + \pi - \alpha$

اگر $a > ۱$ یا $a < -۱$ باشد معادله $\sin x = a$، یا $\cos x = a$ جواب ندارد.

برای حل $\tan x = b$ زاویهٔ β را چنان می‌یابیم که $\tan\beta = b$ پس $\tan x = \tan\beta$ و از آن‌جا $x = k\pi + \beta$.

به جواب‌هایی که به‌صورت بالا نوشته شده باشند جواب‌های کلی معادله می‌گویند. ممکن است در معادله جواب‌هایی که در فاصلهٔ مشخص قرار دارند مورد نظر باشند. در این صورت به k عددهای صحیح مختلف می‌دهیم تا جواب‌های مورد نظر به‌دست آید.

معادلات سادهٔ مثلثاتی

معادلات مثلثاتی دارای انواع مختلفی هستند که در این جا برخی از انواع سادهٔ آن مورد مطالعه قرار می‌گیرد که دو نوع از آن‌ها را بررسی خواهیم کرد.

الف) معادله شامل یکی از مقادیر نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ مجهول می‌باشد.

ابتدا این نوع معادلات را برحسب نسبت مثلثاتی که در معادله موجود است، حل کرده و پس از تعیین مقدار نسبت مثلثاتی، زوایایی را که جواب معادله هستند به‌دست می‌آوریم.

مثال : معادلهٔ $۲\sin x - \sqrt{۳} = ۰$ را حل کنید و جواب‌های کلی آن را بیابید.

حل : از حل معادله برحسب $\sin x$ داریم. $\sin x = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$ و از آن‌جا که $\sin\frac{\pi}{۳} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$ پس $\sin x = \sin\frac{\pi}{۳}$ و از آن‌جا $x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۳}$ و $x = ۲k\pi + \pi - \frac{\pi}{۳}$.

مثال : معادلهٔ $۴\cos^۲ x - ۹\cos x + ۵ = ۰$ را حل کنید و جواب‌های کلی آن را بیابید.

حل :

این معادله به یک معادلهٔ درجه دوم شبیه است با فرض $\cos x = t$ داریم : $۴t^۲ - ۹t + ۵ = ۰$ از حل این معادلهٔ درجه دوم داریم $t = ۱$ و $t = \frac{۵}{۴}$

$t=1 \Rightarrow \cos x=1 \Rightarrow \cos x=\cos 0 \Rightarrow x=2k\pi$

$t=\frac{5}{4} \Rightarrow \cos x=\frac{5}{4}$ این معادله جواب ندارد.

مثال : معادلهٔ $\tan^2 x-3=0$ را حل کنید و جواب‌های در بازهٔ $[0,2\pi]$ را به‌دست آورید.

حل : می‌توان نوشت $\tan^2 x=3$ و از آن‌جا $\tan x=\pm\sqrt{3}$ دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم.

$$\tan x=\sqrt{3} \Rightarrow \tan x=\tan\frac{\pi}{3} \Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{3}$$

$$\tan x=-\sqrt{3} \Rightarrow \tan x=\tan(\frac{-\pi}{3}) \Rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{3}$$

برای یافتن جواب‌های مورد نظر در بازهٔ $[0,2\pi]$ به k اعداد صحیح. و ۱± و ۲± و ... می‌دهیم تا کلیه جواب‌ها به‌دست آید.

همانطورکه در جدول مقابل مشخص است، معادله در این بازه ۴ جواب دارد.

k	x
۰	$\frac{\pi}{3}$
۱	$\frac{4\pi}{3},\frac{2\pi}{3}$
۲	$\frac{5\pi}{3}$

ب) معادله مثلثاتی شامل مقادیر چند نسبت مثلثاتی زاویهٔ مجهول می‌باشد.

مثلاً معادلاتی نظیر $\cos^2 x-\sin x=1$، $\tan x+2\cot x=3$، $\sin x\cos x+\sin x=0$ چند نسبت مثلثاتی از x را در بر دارند.

برای حل این گونه معادلات ممکن است با نقل تمام جملات در یک طرف تساوی و تبدیل نسبت‌ها به یک نسبت، یا تجزیه به عامل‌ها بتوان معادله را به معادلات ساده‌تر تبدیل کرده و بعد جواب‌های معادله را به‌دست آوریم.

مثال : معادلهٔ $2\cos^2 x=\sin x-1$ را حل کنید.

حل : می‌توان همه نسبت‌ها را به سینوس تبدیل کرد. داریم :

$$2(1-\sin^2 x)=\sin x-1$$

$$2\sin^2 x+\sin x-3=0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x=1 \\ \sin x=\frac{3}{2} \quad \text{(بدون جواب)} \end{cases}$$

$$\sin x = 1 \Rightarrow \sin x = \sin\frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{2} = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

حالات خاص : هرچند که روابط گفته شده برای حل معادلات مثلثاتی همواره برقرار است امّا در چند حالات خاص زیر می‌توان سریع‌تر جواب معادله را به‌دست آورد.

$$\begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \\ \sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \sin x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi \\ \cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \cos x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi + \pi \end{cases}$$

مثال : معادلهٔ $2\sin^3 x - \sin x = 0$ را حل کنید.

حل :

$$\sin x(2\sin^2 x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ 2\sin^2 x - 1 = 0 \Rightarrow \sin^2 x - \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

سه حالت در نظر می‌گیریم و در هر حالت معادلهٔ به دست‌آمده را حل می‌کنیم.

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin x = \sin\frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\sin x = \frac{-\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin x = \sin(-\frac{\pi}{4}) \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{4} \\ x = 2k\pi + \pi + \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

مثال : معادلهٔ $\tan x-2\cot x=1$ را حل کنید.

حل : برای حل این معادله کافی است قرار دهیم $\cot x=\frac{1}{\tan x}$ بنابراین :

$$\tan x-2\times\frac{1}{\tan x}=1$$

چون $\tan x\neq 0$ پس طرفین معادله را در $\tan x$ ضرب می‌کنیم داریم :

$$\tan^2 x-2=\tan x$$

$$\tan^2 x-\tan x-2=0$$

$$\tan x=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{1\pm 3}{2}\Rightarrow\begin{cases}\tan x=2\\ \tan x=-1\end{cases}$$

در حالت $\tan x=-1$ می‌توان نوشت :

$$\tan x=\tan(-\frac{\pi}{4})\Rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{4}$$

برای حل $\tan x=2$ فرض کنیم α زاویه‌ای باشد که تانژانت آن برابر ۲ باشد.

می‌توان نوشت $x=k\pi+\alpha$ که در آن $\boxed{\tan\alpha=2}$.

مثال : معادله‌های مثلثاتی $\sin x+\cos x+\sin x\cos x+1=0$ را حل کنید.

حل : معادله را به صورت زیر می‌نویسیم.

$$\sin x(1+\cos x)+(1+\cos x)=0$$

$$(1+\cos x)(\sin x+1)=0\Rightarrow\begin{cases}1+\cos x=0\Rightarrow\cos x=-1\Rightarrow x=2k\pi+\pi\\ 1+\sin x=0\Rightarrow\sin x=-1\Rightarrow x=2k\pi-\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

مثال : معادلهٔ $\cos 2x=\sin(\frac{\pi}{2}-x)$ را حل کنید.

حل : می‌توان $\sin(\frac{\pi}{2}-x)$ را به $\cos x$ تبدیل کرد و به معادلهٔ $\cos 2x=\cos x$ رسید علاوه‌بر آن که می‌توان عبارت را به‌صورت $2\cos^2 x-1=\cos x$ نوشت و از طریق یک معادلهٔ درجه دوم مقدار x را یافت. همچنین می‌توان مستقیماً عمل کرد.

$$\cos 2x=\cos x\Rightarrow 2x=2k\pi\pm x\left\langle\begin{array}{l}x=2k\pi\\ x=\frac{2k\pi}{3}\end{array}\right.$$

مثال : معادلهٔ $\sin ۴x+\sin ۳x=۰$ را حل کنید و جواب‌های در بازهٔ $[۰,\pi]$ را بیابید.

حل :

$$\sin ۴x=-\sin ۳x \Rightarrow \sin ۴x=\sin(-۳x)$$

$$\begin{cases} ۴x=۲k\pi+(-۳x) \Rightarrow x=\frac{۲}{۷}k\pi \\ ۴x=۲k\pi+\pi-(-۳x) \Rightarrow x=۲k\pi+\pi \end{cases}$$

حال با دادن اعداد صحیح ۰ و ۱± و ۲± و ...

k	۰	۱	۲	۳
x	$۰,\pi$	$\frac{۲\pi}{۷}$	$\frac{۴\pi}{۷}$	$\frac{۶\pi}{۷}$

مسائل

معادلات زیر را حل کرده و جواب‌های کلی آن‌ها را بیابید.

۱) $۲\sin ۲x-۱=۰$

۲) $۲\cos x+\sqrt{۳}=۰$

۳) $\sin ۲x+\sin x=۰$

۴) $\tan x=۳\cot x$

۵) $۲\sin^۲ ۲x-\sin ۲x-۱=۰$

۶) $\sin ۲x=\cos(\frac{\pi}{۲}-x)$

۷) $\sin ۲x\cos x-\cos ۲x\sin x=۱$

۸) $\cos ۲x-۳\cos x+۲=۰$

۹) $\cos^۲ x-\sin^۲ x=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

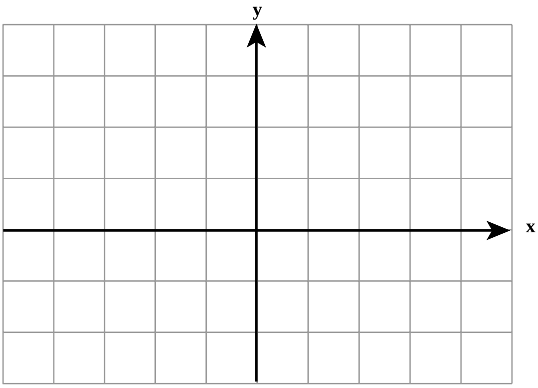
۱۰) $\cos x-\cos^۳ x=۰$

فصل ۲

توابع و معادلات

توابع درجه دوم

در ریاضی ۲ با رسم نمودار برخی از توابع درجهٔ دوم به کمکِ انتقالِ تابع $f(x)=x^۲$ آشنا شدیم. با انجام تمرین زیر، آمادهٔ یادگیری مطالبی دیگر می‌شویم :



تمرین : به روش یاد شده نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $g(x)=-x^۲$

ب) $h(x)=(x+۲)^۲$

ج) $s(x)=(x-۱)^۲+۲$

د) $t(x)=-x^۲-۳$

به منحنی نمایش تابع درجهٔ دوم سهمی گفته می‌شود. در نمودارِ $y=x^۲$ نقطهٔ $O(۰,۰)$ رأس سهمی است. در نمودارهای درجهٔ دوم دیگر از جمله نمودارهایی که در تمرین بالا رسم نموده‌اید چنین نقطه‌ای را مشاهده می‌کنید. در انتقال نمودار $y=x^۲$ به نمودار $y=a(x-x_۰)^۲+y_۰$ رأس سهمی نیز به نقطهٔ $(x_۰,y_۰)$ انتقال می‌یابد. مثلاً رأس سهمی $y=۲(x-۱)^۲+۳$ نقطهٔ $(۱,۳)$ و رأس سهمی $y=-x^۲-۲$ نقطهٔ $(۰,-۲)$ می‌باشد.

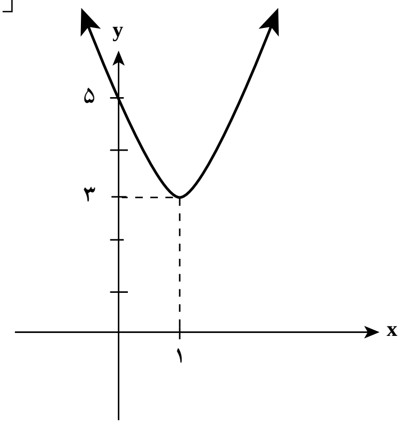
همچنین مشاهده کردید که در برخی نمودارها رأس سهمی پایین‌ترین نقطه (می‌نیمم) سهمی و در برخی بالاترین نقطه (ماکزیمم) سهمی می‌باشد. به‌عبارت دیگر در این نقطه، تابع درجه دوم کمترین مقدار یا بیشترین مقدار را داراست.

ضابطهٔ یک تابع درجه دوم در حالت کلی $y=ax^۲+bx+c$ است که در آن c, b, a اعداد ثابتی هستند و $a\neq ۰$ دامنهٔ این تابع IR و برد آن زیرمجموعه‌ای از IR می‌باشد. چنین ضابطه‌ای را می‌توان

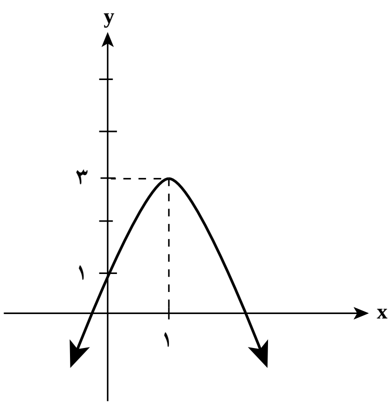
به‌صورت $y=a(x-x_\circ)^۲+y_\circ$ نیز نوشت :

مثال : تابع درجه دوم با ضابطهٔ $f(x)=۲x^۲-۴x+۵$ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت :

$$f(x)=۲(x^۲-۲x+\frac{۵}{۲})=۲\left[(x-۱)^۲-۱+\frac{۵}{۲}\right]$$
$$=۲(x-۱)^۲+۳$$



به‌ازای $x=۱$ مقدار تابع $f(۱)=۳$ است امّا به‌ازای سایر مقادیر چون $۲(x-۱)^۲$ مثبت است، $f(x)=۲(x-۱)^۲+۳$ بزرگتر از ۳ بوده و رأس سهمی یعنی نقطهٔ $\begin{bmatrix} ۱ \\ ۳ \end{bmatrix}$ نقطهٔ می‌نیمم است.



حال تابع $g(x)=-۲(x-۱)^۲+۳$ را درنظر بگیرید که ضریب $x^۲$ عددی منفی است $(a<\circ)$. به‌ازای $x=۱$ مقدار تابع $f(۱)=۳$ است اما به‌ازای سایر مقادیر چون $-۲(x-۱)^۲$ منفی است، $g(x)=-۲(x-۱)^۲+۳$ کوچکتر از ۳ بوده و رأس سهمی یعنی نقطهٔ $\begin{bmatrix} ۱ \\ ۳ \end{bmatrix}$ نقطهٔ ماکزیمم می‌باشد.

مثال : حاصل جمع دو عدد برابر ۱۱۰ است. این دو عدد را چنان بیابید که حاصل‌ضرب آن‌ها ماکزیمم شود.

حل : دو عدد را x و y می‌نامیم. داریم $x+y=۱۱\circ$ قرار می‌دهیم $P=xy$. پس

$$P=x(۱۱\circ-x)=-x^۲+۱۱\circ x=-(x-۵۵)^۲+۵۵^۲$$

عبارت اخیر وقتی ماکزیمم است که جمله اول آن برابر صفر شود.

$$x-۵۵=۰ \quad , \quad x=۵۵$$

پس $x=y=۵۵$ جواب مسئله است.

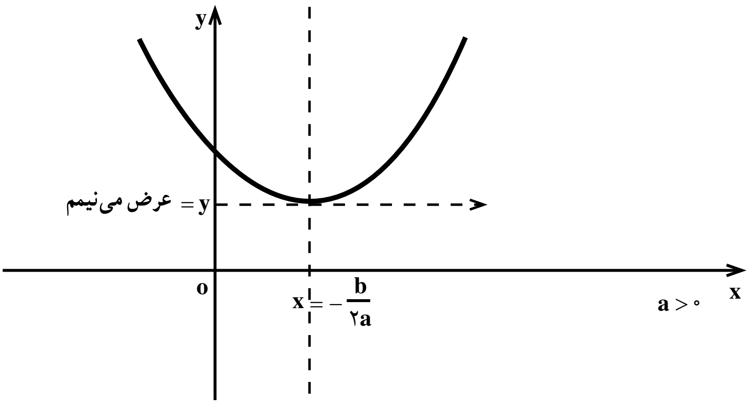
به‌طورکلی در مورد تابع $f(x)=ax^۲+bx+c$ می‌توان نوشت :

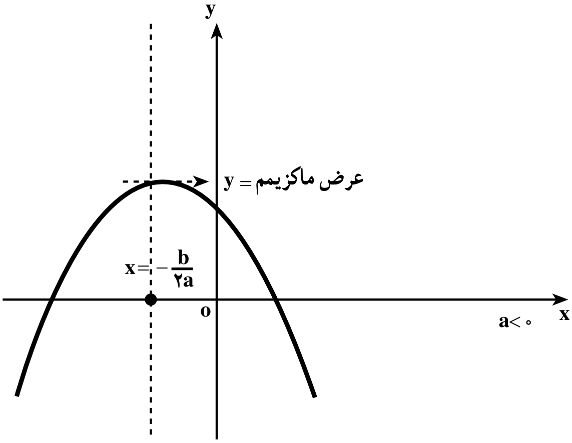
$$f(x)=a(x^۲+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a})=a\left[(x+\frac{b}{۲a})^۲+\frac{c}{a}-\frac{b^۲}{۴a^۲}\right]=a(x+\frac{b}{۲a})^۲+\frac{۴ac-b^۲}{۴a}$$

به‌ازای $x=-\frac{b}{۲a}$ ، مقدار تابع $\frac{۴ac-b^۲}{۴a}$ است. امّا به‌ازای سایر مقادیر :

الف) اگر $a>۰$ $a(x+\frac{b}{۲a})^۲$ مثبت و درنتیجه $f(x)>f(-\frac{b}{۲a})$ و نقطهٔ به طول $-\frac{b}{۲a}$ نقطهٔ می‌نیمم است.

ب) اگر $a<۰$ $a(x+\frac{b}{۲a})^۲$ منفی و درنتیجه $f(x)<f(-\frac{b}{۲a})$ و نقطهٔ به طول $-\frac{b}{۲a}$ نقطهٔ ماکزیمم است.



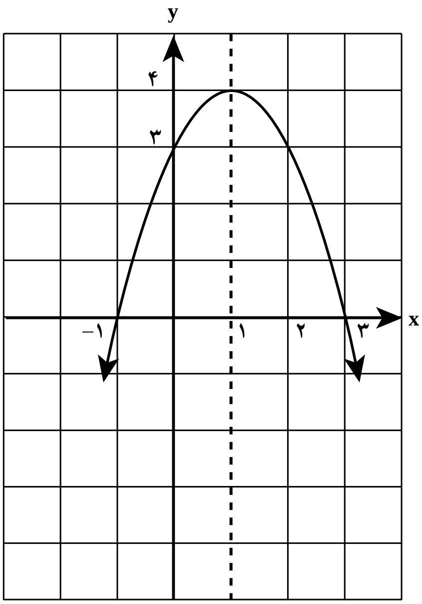


به‌طور خلاصه می‌توان گفت : تابع $f(x)=ax^2+bx+c$ به ازای $x=-\frac{b}{2a}$ ، اگر $a>0$ باشد کمترین مقدار و اگر $a<0$ باشد بیشترین مقدار را دارد.

مثال : کمترین مقدار تابع $f(x)=2x^2-3x+4$ را به‌صورت زیر تعیین می‌کنیم :

$$x=\frac{-b}{2a}=\frac{3}{4}\Rightarrow f(\frac{3}{4})=2(\frac{3}{4})^2-3(\frac{3}{4})+4=\frac{23}{8}$$

برای رسم نمودار تابع درجه دوم، معمولاً علاوه بر رأس سهمی، مختصات دو نقطهٔ دیگر در طرفین رأس و به فاصلهٔ مساوی از آن را تعیین می‌کنیم. برای رسم دقیق‌تر، مختصاتِ نقاط تلاقی نمودار با محورهای مختصات را نیز به‌دست می‌آوریم.



مثال : نمودار تابع $f(x)=-x^2+2x+3$ را رسم می‌کنیم.

رأس سهمی نقطهٔ $\left|\begin{array}{l}x=-\frac{b}{2a}=1\\ y=4\end{array}\right.$ و دو نقطه با فاصله مساوی در طرفین آن $\left|\begin{array}{l}x=2\\ y=3\end{array}\right.$ و $\left|\begin{array}{l}x=0\\ y=3\end{array}\right.$ می‌باشد. به‌علاوه :

نقطهٔ تلاقی منحنی با محور yها همان نقطه $\left|\begin{array}{l}x=0\\ y=3\end{array}\right.$ و نقطه تلاقی منحنی با محور xها با جایگذاری $y=0$ دو تابع و حل معادلهٔ نظیر به دست می‌آید :

$$y=\circ \to -x^{۲}+۲x+۳=\circ \xrightarrow{\text{حل معادله درجه دوم}} \left|\begin{array}{l} x=-۱ \\ y=\circ \end{array}\right. \text{ و } \left|\begin{array}{l} x=۳ \\ y=\circ \end{array}\right.$$

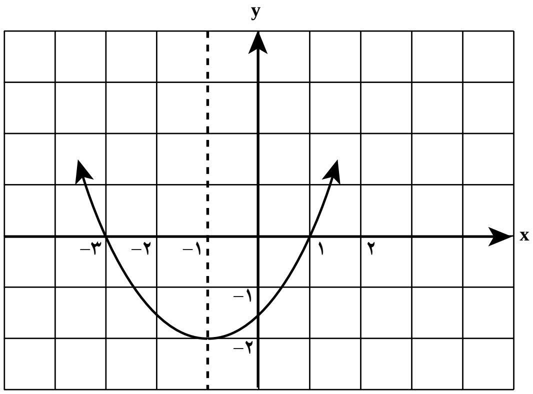
خط قائمی که از رأس سهمی می‌گذرد (در نمودار قبل خط $x=۱$) محور تقارن سهمی است (چرا؟) به‌طورکلی خط به معادله $x=\frac{-b}{۲a}$ محور تقارنِ سهمی است.

مثال : سهمی به معادلهٔ $y=\frac{۱}{۲}(x-۱)(x+۳)$ را رسم می‌کنیم.

نقاط $\left|\begin{array}{l} x=۱ \\ y=\circ \end{array}\right.$ و $\left|\begin{array}{l} x=-۳ \\ y=\circ \end{array}\right.$ نقاط برخورد سهمی با محور طول‌هاست.

به‌علاوه از دو نقطهٔ فوق نتیجه می‌شود، نقطهٔ $\left|\begin{array}{l} x=-۱ \\ y=-۲ \end{array}\right.$ رأس سهمی است (چطور؟)

نقطهٔ $\left|\begin{array}{l} x=\circ \\ y=-\frac{۳}{۲} \end{array}\right.$ نیز نقطه برخورد سهمی با محور عرض‌هاست.



مسائل

۱ــ نمودارهای توابع زیر را رسم کنید.

ب) $y=-۲x^{۲}+۲x-۱$ — الف) $y=۳x^{۲}+۶x$

د) $y=(۲-x)(۴+x)$ — ج) $y=۹x^{۲}+۶x+۱$

و) $y=۲x^{۲}-۳x+۴$ — هـ) $y=۲x^{۲}+۳$

۲ــ شخصی که در لبهٔ فوقانی ساختمانی به ارتفاع ۸۰ متر ایستاده است توپی را با سرعتِ اولیهٔ ۲۰ متر بر ثانیه به سوی بالا پرتاب می‌کند. بعد از t ثانیه ارتفاع توپ از سطح زمین برابر است

با $h=-5t^2+20t+80$. نمودار این تابع را رسم کنید. با استفاده از این نمودار به سؤالات زیر پاسخ دهید :

الف) توپ پس از چند ثانیه به زمین می‌خورد؟

ب) ماکزیمم ارتفاع توپ چقدر است؟ بعد از چند ثانیه به ماکزیمم ارتفاع می‌رسد؟

ج) بعد از چند ثانیه پس از پرتاب توپ به سطح بالای ساختمان برمی‌گردد؟

د) دامنهٔ این تابع را تعیین کنید.

۳ـ محیط مستطیلی ۱۰۰ متر است. طول و عرض آن را چنان تعیین کنید که مساحت مستطیل ماکزیمم شود.

۴ـ کمترین مقدار تابع $f(x)=x+\frac{4}{x}$ را به‌ازای مقادیر مثبتِ x تعیین کنید.

روابط بین ضرایب و جواب‌های معادلهٔ درجهٔ دوم

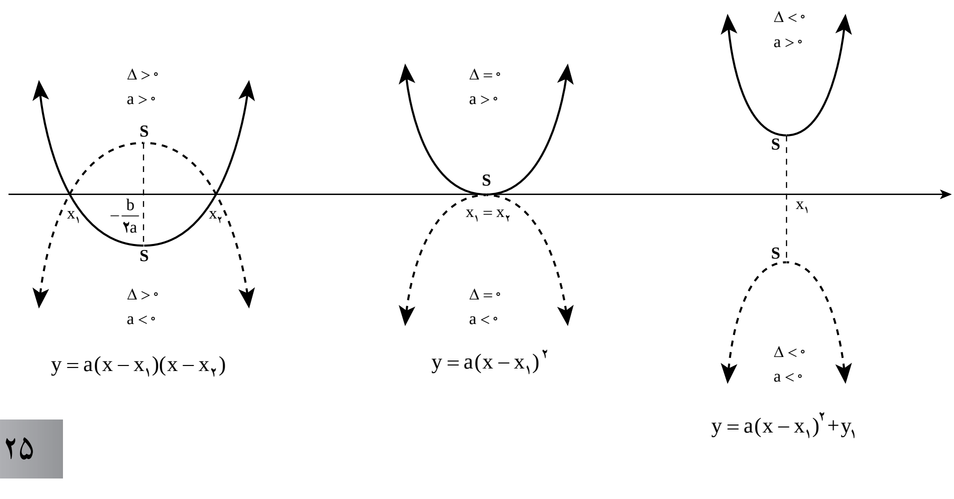
در ریاضی ۲ دیدیم که جواب‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2+bx+c=0$، طول نقاطِ برخورد نمودارِ تابع $y=ax^2+bx+c$ با محور xهاست. اگر $b^2-4ac<0$ باشد معادلهٔ فوق جواب ندارد و سهمی فوق محور xها را قطع نمی‌کند. اگر $b^2-4ac=0$، سهمی با محور xها در یک نقطه تماس دارد و اگر $b^2-4ac>0$ معادله دو جواب دارد و سهمی محور xها را در دو نقطه قطع می‌کند.

هم‌چنین دیدیم که اگر x_1 و x_2 جواب‌های معادلهٔ فوق باشند آنگاه :

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a} \qquad x_1x_2=\frac{c}{a}$$

و درنتیجه :

$$ax^2+bx+c=a(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a})=a(x-x_1)(x-x_2)$$



مثال : معادله‌ای درجهٔ دوم با ضرایب صحیح بنویسید که جواب‌های آن $\frac{۱}{۲}$ و ۳- باشد.

$$x=-۳,\ x=\frac{۱}{۲} \Rightarrow (x+۳)(x-\frac{۱}{۲})=۰ \Rightarrow x^۲+\frac{۵}{۲}x-\frac{۳}{۲}=۰ \Rightarrow ۲x^۲+۵x-۳=۰$$

مثال : معادلهٔ سهمی را بنویسید که محور طول‌ها را در ۳+ و ۱+ و محور عرض‌ها را در ۶+ قطع کند.

$$y=a(x-۱)(x-۳) \Rightarrow y=a(x^۲-۴x+۳)$$

و چون از نقطهٔ $\begin{bmatrix} ۰ \\ ۶ \end{bmatrix}$ می‌گذرد :
$$۶=۳a \Rightarrow a=۲$$

پس معادلهٔ سهمی $y=۲x^۲-۸x+۶$ می‌باشد.

مثال : مقدار m را چنان بیابید که مجموع جواب‌های معادلهٔ $۲x^۲-(m+۱)x-۳m=۰$ برابر ۳ باشد.

$$-\frac{b}{a}=۳ \Rightarrow ۳=\frac{m+۱}{۲} \Rightarrow m=۵$$

مثال : معادلهٔ درجه دومی بنویسید که جواب‌های آن معکوس جواب‌های $-۳x^۲+۲x+۱=۰$ باشد.

اگر جواب‌های معادلهٔ داده شده α و β باشد جواب‌های معادلهٔ خواسته شده $\frac{۱}{\alpha}$ و $\frac{۱}{\beta}$ است، پس :

$$(x-\frac{۱}{\alpha}).(x-\frac{۱}{\beta})=۰ \Rightarrow x^۲-(\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta})x+\frac{۱}{\alpha\beta}=۰ \Rightarrow x^۲-\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}x+\frac{۱}{\alpha\beta}=۰$$

$$x^۲-\frac{+\frac{۲}{۳}}{-\frac{۱}{۳}}x+\frac{۱}{-\frac{۱}{۳}}=۰ \Rightarrow x^۲+۲x-۳=۰$$

به‌طور کلی می‌توان نشان داد جواب‌های معادله‌های درجهٔ دوم $ax^۲+bx+c=۰$ و $cx^۲+bx+a=۰$ معکوس یکدیگرند.

مسائل

۱ــ معادله‌ای درجهٔ دوم بنویسید که جواب‌های آن دو عدد زیر باشند.

الف) ۳- و ۴   ب) $\frac{۳}{۲}$ و $\frac{۲}{۳}$ ج) $۲+\sqrt{۲}$ و $۲-\sqrt{۲}$

۲ــ مقدار m را چنان تعیین کنید که حاصل ضرب جواب‌های معادلهٔ $-mx^۲+۳x+m-۱=۰$ برابر ۲- شود.

۳ــ مقدار a را چنان تعیین کنید که جواب‌های معادلهٔ $۲x^۲-۵x+a=۰$ معکوس یکدیگر باشند.

سپس جواب‌های این معادله را بیابید.

۴ــ معادلهٔ سهمی را بنویسید که محور طول‌ها را در ۲+ و ۲− و محور عرض‌ها را در ۲+ قطع کند.

۵ــ معادلهٔ درجهٔ دومی بنویسید که جواب‌های آن معکوس جواب‌های $x^۲+۳x-۵=۰$ باشد.

تابع قدرمطلق

در ریاضی ۱ با مفهوم قدرمطلق یک عدد حقیقی و در ریاضی ۲ با تابع‌های قدرمطلقی آشنا شدید.

تمرین : ۱ــ عبارت‌های زیر را بدون نماد قدرمطلق بنویسید.

الف) $\left|۲-\sqrt{۲}\right|$ ب) $\left|۱-\sqrt{۳}\right|$ ج) $\left|a^۲+۱\right|$ د) $\left|-(x-۱)^۲-۳\right|$

۲ــ اگر $۱<x<۳$ حاصل عبارتِ $|x-۱|+|x-۳|$ را به‌دست آورید.

۳ــ در یک صفحهٔ مختصات نمودار تابع $f(x)=|x|$ را رسم کرده و با استفاده از آن نمودار توابع زیر را در همان صفحه رسم کنید.

الف) $g(x)=|x+۲|$ ب) $h(x)=-|x|$ ج) $k(x)=|x-۳|+۱$

د) $s(x)=۲-|x+۳|$ هـ) $t(x)=|۲x|$ و) $p(x)=|۲x-۳|$

با توجه به این‌که $|x|=\sqrt{x^۲}$ می‌توانیم نتیجه بگیریم $|xy|=|x||y|$ و $\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}$.

هم‌چنین $|x|=|-x|$ و $|x|^۲=x^۲$. برخی دیگر از ویژگی‌های قدرمطلق به قرار زیر است :

۱) اگر $|x|=a$, $a\geq ۰$ آنگاه $x=a$ یا $x=-a$.

۲) اگر $|x|\leq a$ آنگاه $-a<x<a$ و برعکس.

$$|x|\leq a \Rightarrow |x|^۲\leq a^۲ \Rightarrow x^۲\leq a^۲ \Rightarrow x^۲-a^۲\leq ۰ \Rightarrow (x+a)(x-a)\leq ۰$$

$$۰\leq x+a \text{ و } x-a\leq ۰ \Rightarrow -a\leq x\,,\, x\leq a \Rightarrow -a\leq x\leq a$$

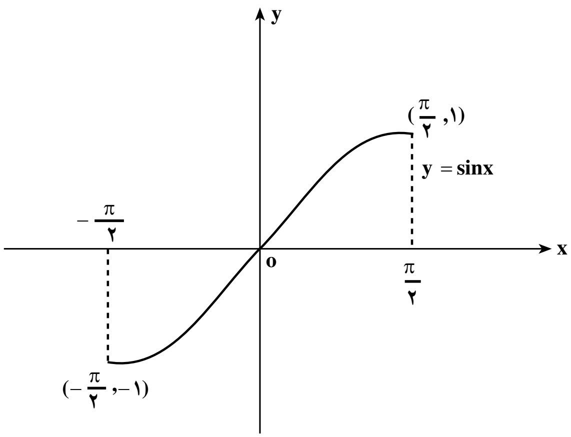
همین استدلال را برعکس نیز می‌توان ارائه کرد و از $-a<x<a$ نتیجه می‌شود $|x|<a$

مثال : جواب نامعادلهٔ $|۳-۵x|<۸$ را به‌دست می‌آوریم.

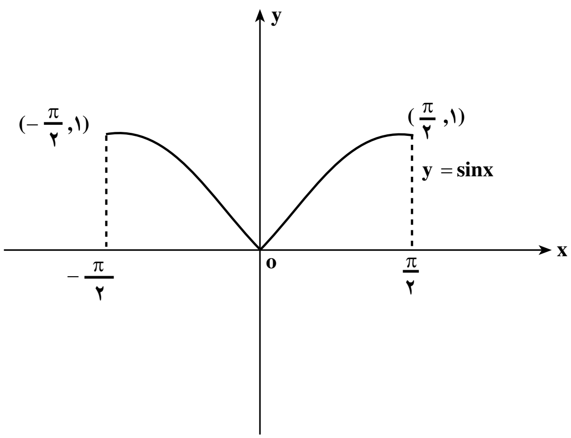
$$-۸<۳-۵x<۸ \Rightarrow -۱۱<-۵x<۵ \Rightarrow -۱<x<\frac{۱۱}{۵}$$

با استفاده از نمودار $y=f(x)$ می‌توان نمودار $y=|f(x)|$ را رسم کرد.

به‌عنوان مثال، منحنی نمایش تابع $y=\sin x$ $(-\frac{\pi}{۲}\le x\le \frac{\pi}{۲})$ به شکل مقابل است :



بنابراین، منحنی نمایش تابع $y=|\sin x|$ به شکل مقابل است.



به‌طورکلی در این روش ابتدا نمودار $y=f(x)$ را رسم می‌کنیم، قسمتی از نمودار که بالای محور xها است باقی می‌ماند ولی قسمتی که زیر محور xهاست را حذف و قرینهٔ آن نسبت به محور xها را رسم می‌کنیم به این ترتیب نمودار $y=|f(x)|$ به‌دست می‌آید. آیا می‌توانید علت درستی این روش را توضیح دهید؟

مسائل

۱ــ با استفاده از ویژگی ۲ نشان دهید برای هر عدد حقیقی x داریم : $-|x|\le x\le |x|$

۲ــ اگر $|x|>a$ و $a>۰$ نشان دهید $x<-a$ یا $x>a$ و برعکس.

۳ــ با استفاده از مسأله ۱ برای هر دو عدد حقیقی x و y نشان دهید

$$-|x|-|y|\le x+y\le |x|+|y|$$

و نتیجه بگیرید : $|x+y|\le |x|+|y|$ (رابطه نامساوی مثلثی)

۴ــ می‌توان نشان داد رابطهٔ نامساوی مثلثی برای هر تعداد عدد حقیقی برقرار است. برای سه عدد حقیقی $x_۱$ و $x_۲$ و $x_۳$ نشان دهید $|x_۱+x_۲+x_۳|\le |x_۱|+|x_۲|+|x_۳|$.

۵ــ معادله‌ها و نامعادله‌های زیر را حل کنید :

الف) $|۲x-۱|=۳$ ب) $\frac{۱}{|x+۵|}=۲$

ج) $\left|x+\frac{۲}{۳}\right|\le ۱$ د) $\frac{۳}{|x|}<۱$ هـ) $|۲x+۱|=|x-۲|$

۶ــ نمودار هریک از توابع زیر را رسم کنید :

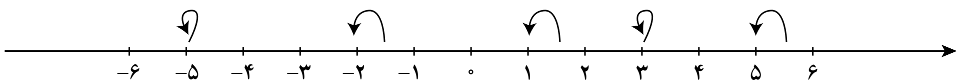
الف) $y=|۳-۲x|$ ب) $y=|۱-x^۲|$ ج) $y=|x^۳|$

د) $y=|\cos x|\ ,\ ۰\le x\le \pi$

۷ــ هریک از توابع زیر را به‌صورت یک تابع چند ضابطه‌ای (بدون نماد قدرمطلق) بنویسید. سپس نمودار هریک را رسم کنید :

الف) $y=۳-|x+۱|$ ب) $y=x|x|$ ج) $y=|x-۱|+|x+۱|$

تابع جزءِ صحیح : اگر x یک عدد حقیقی باشد، جزءِ صحیح x که با نماد $[x]$ نشان می‌دهیم بزرگترین عدد صحیحی است که کوچکتر یا مساوی x است. برای مثال :



$[-۵]=-۵$ $\left[-۱\frac{۳}{۵}\right]=-۲$ $[\sqrt{۲}]=۱$ $[۳]=۳$ $[۵/۷]=۵$

برای هر عدد حقیقی x، عدد صحیح n وجود دارد به‌طوری که $n\le x<n+۱$ درنتیجه $[x]=n$.

مثلاً چون $۳>\sqrt{۸}\ge ۲$ درنتیجه $\left[\sqrt{۸}\right]=۲$ و $-۵>-\frac{۱۷}{۳}\ge -۶$ درنتیجه $\left[-\frac{۱۷}{۳}\right]=-۶$

با توجّه به این تعریف می‌توان گفت $x=[x]+\alpha$ که در اینجا α جزء کسری x نامیده می‌شود و چون $[x]\le x<[x]+۱$ ، $۰\le \alpha<۱$.

در زیر به دو مورد از خواص تابع جزءِ صحیح اشاره می‌کنیم :

الف) $[x+k]=[x]+k \; ; \; k\in\mathbb{Z}$

ب) $[x]+[-x]=\begin{cases} \circ \; ; & x\in\mathbb{Z} \\ -۱ \; ; & x\notin\mathbb{Z} \end{cases}$

دلیل درستی احکام فوق را می‌نویسیم :

الف) گفتیم برای هر عدد حقیقی x، عدد صحیح n وجود دارد به‌طوری که $n\le x<n+۱$. درنتیجه $n+k\le x+k<n+k+۱$ و بنابراین $[x+k]=n+k$ و چون $n=[x]$ درنتیجه : $[x+k]=[x]+k$

ب) اگر $x\in\mathbb{Z}$ آنگاه $-x\in\mathbb{Z}$ و درنتیجه $[x]+[-x]=x+(-x)=\circ$

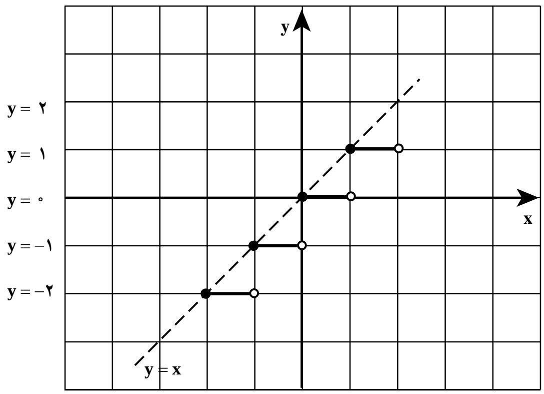
اگر $x\notin\mathbb{Z}$ آنگاه $n<x<n+۱$ و $-n-۱<-x<-n$. به ترتیب طبق تعریف نتیجه می‌شود $[x]=n$ و $[-x]=-n-۱$ درنتیجه $[x]+[-x]=n+(-n-۱)=-۱$

تابعی که به هر عدد حقیقی x، جزءِ صحیح x را نسبت دهد تابع جزءِ صحیح نامیده می‌شود : $f(x)=[x]$

چون جزءِ صحیح برای هر عدد حقیقی تعریف شده است پس دامنه این تابع مجموعه اعداد حقیقی (IR) ولی برد آن مجموعه اعداد صحیح ($\mathbb{Z}$) می‌باشد.

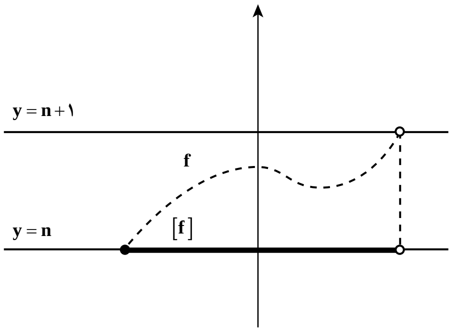
در زیر نمودار این تابع در بازهٔ $[-۲,۲)$ رسم شده است :

x	$y=[x]$
$-۲\le x<-۱$	-۲
$-۱\le x<\circ$	-۱
$\circ\le x<۱$	$\circ$
$۱\le x<۲$	۱



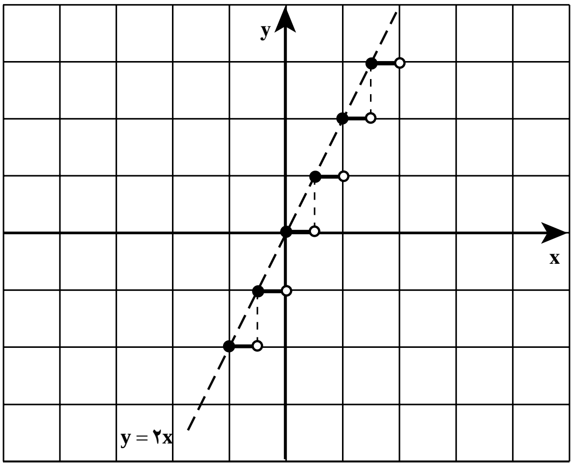
با استفاده از نمودار $y=x$ نیز می‌توان نمودار $y=[x]$ را رسم کرد. آیا می‌توانید در نمودار بالا، رابطهٔ بین نمودارهای این دو تابع را بیابید؟

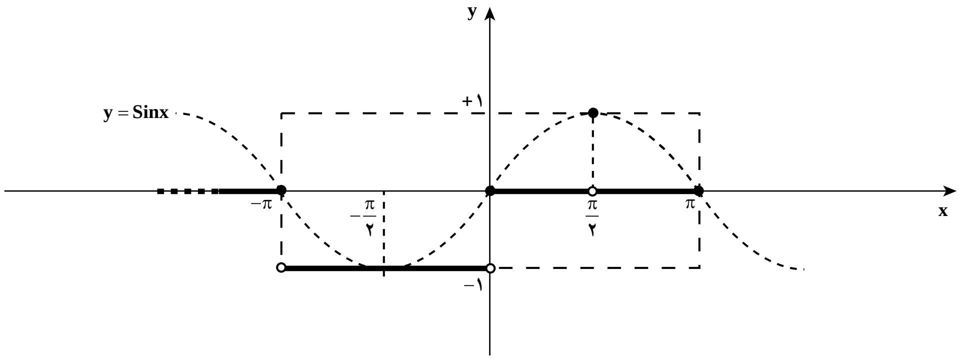
به‌طورکلی برای رسم نمودار $y=[f(x)]$ می‌توانیم از نمودار $y=f(x)$ استفاده نماییم. می‌دانیم که اگر $n \le f(x) < n+1$ آنگاه $[f(x)]=n$. $(n\in NI)$



بنابراین برای رسم نمودار $y=[f(x)]$ هر قسمتی از نمودار $y=f(x)$ که بُرد آن در بازهٔ $[n,n+1)$ قرارمی‌گیرد را حذف و به جای آن قطعه خط $y=n$ را رسم می‌کنیم.

مثال : در زیر نمودارهای دو تابع $y=[2x]$ و $y=[\sin x]$ با استفاده از نمودارهای $y=2x$ و $y=\sin x$ رسم شده است :





مسائل

۱ــ نمودارهای توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y=۲[x]+۱$

ب) $y=\left[\frac{x}{۲}\right]$

ج) $y=[\cos x]$ ؛ $-\pi \le x \le \pi$

د) $y=\left[x^{۲}\right]$ ؛ $-۲ \le x \le ۲$

۲ــ نمودار تابع $y=x-[x]$ را رسم کنید (راهنمایی : ابتدا نشان دهید $۰ \le x-[x]<۱$)

۳ــ اگر $f(x)=[x+۲]+[-x]$ و $x \notin \mathbb{Z}$ نشان دهید $f(x)=۱$

۴ــ با استفاده از نامساوی‌های $۴n^{۲}<۴n^{۲}+۲n+۱<۴n^{۲}+۴n+۱$ نشان دهید :

$$n \in \mathbb{N} ؛ \left[\sqrt{۴n^{۲}+۲n+۱}\right]=۲n$$

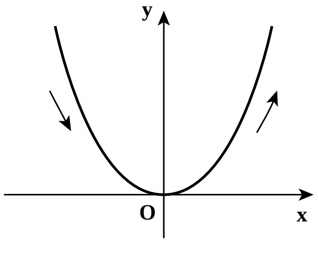
۵ــ معادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $[x-۳]=۴$ ب) $[۱-۲x]=-۵$

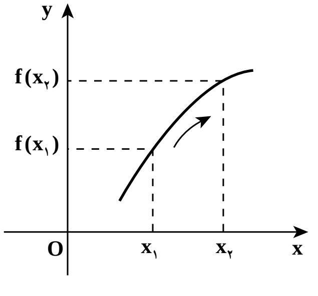
۶ــ فرض کنیم x و y دو عدد حقیقی باشند ثابت کنید :

$[x+y]=[x]+[y]$ یا $[x+y]=[x]+[y]+۱$

توابع صعودی و نزولی



اگر به نمودار تابع $f(x)=x^{۲}$ توجه کنید دیده می‌شود که روی بازه $[۰,+\infty)$ با افزایش مقادیر x مقادیر f(x) نیز افزایش می‌یابند. در این حالت گوییم تابع در حال صعود است. اما اگر این تابع را روی بازه $(-\infty,۰]$ نگاه کنیم، دیده می‌شود که با افزایش مقادیر x مقدار f(x) کاهش می‌یابد. در این حالت گوییم تابع در حال نزول است.

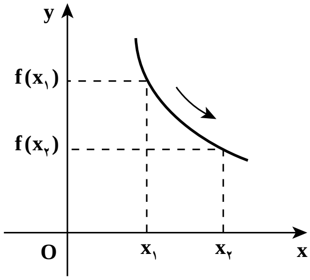


به‌طور کلی، اگر D بازه‌ای در دامنه تابع f باشد گوییم، f در بازه D صعودی است هرگاه برای هر $x_۱, x_۲ \in D$

$$x_۱<x_۲ \Rightarrow f(x_۱) \le f(x_۲)$$

و گوییم f در بازه D نزولی است هرگاه برای هر $x_1 , x_2 \in D$

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) \le f(x_1)$



برای مثال، توابع ثابت هم صعودی محسوب می‌شوند هم نزولی. توابع یک به یک و صعودی را توابع اکیداً صعودی می‌نامند. یک تابع f روی بازه اکیداً صعودی است اگر و فقط اگر برای هر $x_1 , x_2 \in D$

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

توابع ثابت جزو توابع اکیداً صعودی نیستند. توابع یک به یک و نزولی را نیز توابع اکیداً نزولی می‌نامند. یک تابع f روی بازه D اکیداً نزولی است اگر و فقط اگر برای هر $x_1 , x_2 \in D$

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$

مثال : با رسم نمودار تابع $y = x^2$ دیده می‌شود که این تابع روی بازه $(-\infty , 0]$ اکیداً نزولی و روی بازه $[0 , \infty)$ اکیداً صعودی است.

مثال : نمودار تابع $y = \frac{1}{x}$ نشان می‌دهد که این تابع روی بازه‌های $(-\infty , 0)$ و $(0 , \infty)$ اکیداً نزولی است، اما روی $IR - \{0\}$ نه صعودی است و نه نزولی.

مثال : نمودار تابع $y=\sin x$ نشان می‌دهد که این تابع روی بازه $\left[-\frac{\pi}{2} , \frac{\pi}{2}\right]$ اکیداً صعودی و روی بازه $\left[\frac{\pi}{2} , \frac{3\pi}{2}\right]$ اکیداً نزولی است.

مسائل

۱ــ تعیین کنید تابع $y=|x|$ روی چه بازه‌هایی صعودی و روی چه بازه‌هایی نزولی است.

۲ــ تعیین کنید تابع $y=|\sin x|$ روی چه بازه‌هایی صعودی و روی چه بازه‌هایی نزولی است.

۳ــ روی بازه $[0 , 2]$ نمودار یک تابع را رسم کنید که روی بازه $[0 , 1]$ صعودی و روی بازه $[1 , 2]$ نزولی باشد.

۴ــ روی بازه $[-1 , 1]$ نمودار تابعی را رسم کنید که روی بازه $[-1 , 0)$ و $[0 , 1]$ صعودی باشد ولی روی بازه $[-1 , 1]$ صعودی نباشد.

ترکیب توابع

اگر بادکنکی کروی را به‌گونه‌ای باد کنیم که شعاع آن در هر ثانیه ۲ سانتی‌متر افزایش یابد، حجم آن در هر لحظه چقدر است؟

اگر r شعاع بادکنک باشد، r برحسب زمان t به‌صورت $r=۲t$ است که t را بر حسب ثانیه و r را برحسب سانتی‌متر اندازه‌گیری کرده‌ایم. حجم کره به شعاع r برابر $V=\frac{۴}{۳}\pi r^{۳}$ است. r تابعی از t است و $r(t)=۲t$ و v تابعی از r است و $V(r)=\frac{۴}{۳}\pi r^{۳}$. اما حجم بادکنک تابعی از زمان t است و در هر لحظه t حجم بادکنک برابر $\frac{۴}{۳}\pi(۲t)^{۳}$ خواهد بود. این مقدار به شکل زیر محاسبه می‌شود :

$$V(r(t))=\frac{۴}{۳}\pi(r(t))^{۳}=\frac{۴}{۳}\pi(۲t)^{۳}=\frac{۳۲}{۳}\pi t^{۳}$$

این تابع جدید را ترکیب دو تابع $V(r)$ و $r(t)$ می‌نامند.

به‌طور کلی، اگر f و g دو تابع به‌گونه‌ای باشند که برای هر x در دامنه f مقدار $f(x)$ در دامنه g قرار بگیرد، می‌توانیم مقدار $g(f(x))$ را محاسبه کنیم و تابع جدیدی بسازیم که آن را به gof نشان می‌دهند. دامنه gof همان دامنهٔ f است و برای هر x در دامنه f خواهیم داشت.

$$(gof)(x)=g(f(x))$$

مثال : برای دو تابع $f(x)=۲x$ و $g(x)=x^{۳}$ چون دامنه هر دو تابع تمام اعداد حقیقی است می‌توانیم هر دو ترکیب gof و fog را انجام دهیم و داریم

$$(gof)(x)=g(f(x))=g(۲x)=(۲x)^{۳}=۸x^{۳}$$

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(x^{۳})=۲x^{۳}$$

در همین مثال دیده می‌شود، دو ترکیب fog و gof لزوماً با هم مساوی نیستند.

مثال : برای دو تابع $f(x)=x-۱$ و $g(x)=\sqrt{x}$ ، دامنه f تمام اعداد حقیقی است و ترکیب fog قابل انجام است و داریم

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(\sqrt{x})=\sqrt{x}-۱ \quad x\in[۰,\infty)$$

اما ترکیب gof قابل انجام نیست زیرا برد f تمام IR است در حالی که دامنه g فقط بازه $[۰,\infty)$ است. برای آن‌که ترکیب قابل انجام باشد، می‌توان دامنه f را به بازه $[۱,\infty)$ محدود کرد تا بُرد آن در $[۰,\infty)$ قرار گیرد، در این حالت داریم

$$(gof)(x)=g(f(x))=g(x-۱)=\sqrt{x-۱} \quad x\in[۱,\infty)$$

مثال : برای تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ ، ترکیب fof قابل انجام است و

$$(fof)(x)=f(f(x))=f\left(\frac{۱}{x}\right)=\frac{۱}{\frac{۱}{x}}=x \qquad x\in IR-\{۰\}$$

مثال : برای دو تابع $f(x)=|x|$ و $g(x)=\sin x$، هر دو ترکیب fog و gof قابل انجام است و

$(fog)(x)=f(g(x))=f(\sin x)=|\sin x|$

$(gof)(x)=g(f(x))=g(|x|)=\sin|x|$

تابع وارون

اگر طول ضلع یک مربع را به x و مساحت آن را با s نشان دهیم، s تابعی از x است و داریم $s(x)=x^۲$. اما x نیز تابعی از s است و از طریق معادله $s=x^۲$ می‌توانیم x را برحسب s حساب کنیم و داریم $x=\sqrt{s}$. اگر طول ضلع مربع را با l و مساحت مربع را با x نشان دهیم این تابع به صورت $l(x)=\sqrt{x}$ در می‌آید. در اینجا با دو تابع $s(x)$ و $l(x)$ روبه‌رو هستیم که هر کدام عکس عمل دیگری را انجام می‌دهد، یعنی

$$y=l(x)\Leftrightarrow s(y)=x$$

این گونه توابع را وارون یکدیگر می‌نامند.

این طور نیست که هر تابعی دارای تابع وارون باشد، شرط وجود تابع وارون برای یک تابع f آن است که برای هر y در بُرد f معادله $y=f(x)$ دارای جواب منحصر به‌فردی مانند x در دامنه f باشد. این به معنای یک به یک بودن f است.

مثال : تابع $y=x^۲$ وارون پذیر نیست زیرا یک به یک نیست. اما اگر دامنه این تابع را به بازه $(-\infty,۰]$ محدود کنیم تابعی یک به یک می‌شود و وارون‌پذیر خواهد بود. برای محاسبه تابع وارون آن، در معادله $y=x^۲$، x را بر حسب y محاسبه می‌کنیم و در محاسبه توجه داریم که $x\in(-\infty,۰]$.

$$y=x^۲\Rightarrow x=\pm\sqrt{y}\Rightarrow x=-\sqrt{y}$$

با تبدیل y به x و تبدیل x به y تابع $y=-\sqrt{x}$ به‌دست می‌آید که تابع وارون $y=x^۲$ با دامنه $(-\infty,۰]$ است.

مثال : تابع $y=\frac{1}{x^3}$ با دامنه $IR-\{0\}$ یک به یک است و وارون‌پذیر است. برای محاسبه تابع وارون، x را برحسب y محاسبه می‌کنیم.

$$y=\frac{1}{x^3}\Rightarrow x^3=\frac{1}{y}\Rightarrow x=\frac{1}{\sqrt[3]{y}}$$

با تبدیل y به x و تبدیل x به y تابع $y=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ به دست می‌آید که تابع وارون $y=\frac{1}{x^3}$ است.

مثال : تابع $y=\frac{2x+1}{x-1}$ با دامنه $IR-\{1\}$ یک به یک است زیرا

$$\frac{2x_1+1}{x_1-1}=\frac{2x_2+1}{x_2-1}\Rightarrow(2x_1+1)(x_2-1)=(2x_2+1)(x_1-1)$$

$$\Rightarrow 2x_1x_2-2x_1+x_2-1=2x_1x_2-2x_2+x_1-1$$

$$\Rightarrow -3x_1+3x_2=0\Rightarrow x_1=x_2$$

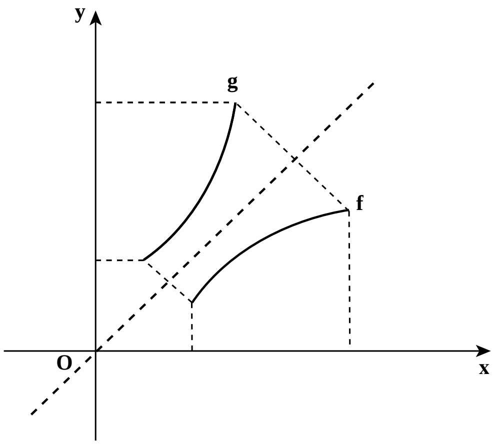
پس این تابع وارون‌پذیر است و برای محاسبه تابع وارون در معادله $y=\frac{2x+1}{x-1}$، x را بر حسب y حساب می‌کنیم.

$$y=\frac{2x+1}{x-1}\Rightarrow y(x-1)=2x+1\Rightarrow x(y-2)=1+y$$

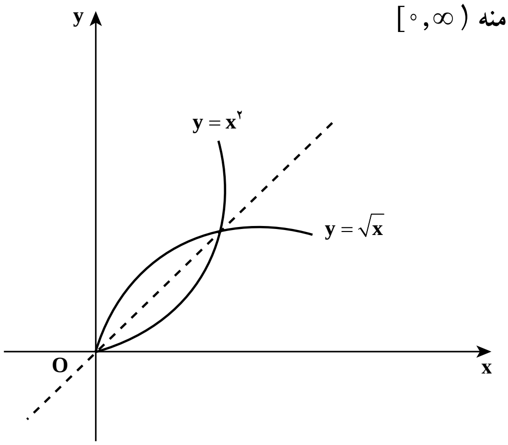
$$\Rightarrow x=\frac{1+y}{y-2}$$

با تبدیل y به x و تبدیل x به y تابع $y=\frac{x+1}{x-2}$ به دست می‌آید که تابع وارون تابع $y=\frac{2x+1}{x-1}$ است.

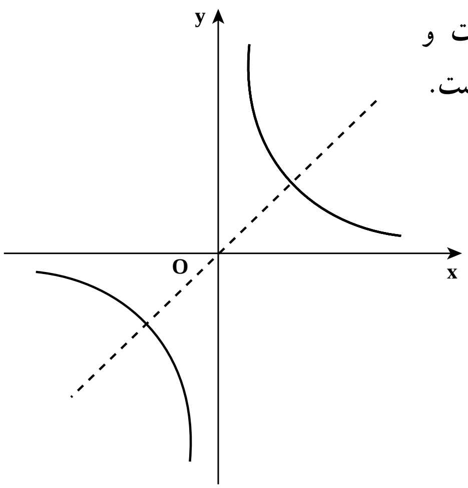
اگر g تابع وارون تابع f باشد، f نیز تابع وارون تابع g است و دامنه f برابر برد g و دامنه g برابر برد f است و نمودار این دو تابع نسبت به نیمساز ربع اول و سوم قرینه یکدیگرند.



مثال : دو تابع $y=\sqrt{x}$ و $y=x^{2}$ با دامنه $[0,\infty)$ وارون یکدیگرند.



مثال : تابع $y=\frac{1}{x}$ وارون خودش است و نمودارش نسبت به نیمساز ربع اول و سوم متقارن است.



با توجه به تعریف تابع وارون، مشخص است که اگر تابع f با دامنه $D_۱$ و تابع g با دامنه $D_۲$ وارون یکدیگر باشند داریم

$$g(f(x))=x \qquad x\in D_۱$$

$$f(g(x))=x \qquad x\in D_۲$$

بر عکس، اگر این تساوی‌ها برقرار گردند، می‌توان نتیجه گرفت f و g وارون یکدیگرند.

مثال : تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ وارون خود است زیرا $(fof)(x)=x$.

مثال : تابع $f(x)=\frac{۱}{x+۱}$ با دامنه $IR-\{-۱\}$ وارون تابع $g(x)=\frac{۱-x}{x}$ با دامنه $IR-\{۰\}$ است زیرا

$$f(g(x))=f(\frac{۱-x}{x})=\frac{۱}{\frac{۱-x}{x}+۱}=\frac{۱}{\frac{۱-x+x}{x}}=x$$

$$g(f(x))=g(\frac{۱}{x+۱})=\frac{۱-\frac{۱}{x+۱}}{\frac{۱}{x+۱}}=\frac{\frac{x+۱-۱}{x+۱}}{\frac{۱}{x+۱}}=x$$

مثال : برای هر عدد مثبت a که $a\neq ۱$ تابع $f(x)=a^x$ با دامنه IR وارون تابع $g(x)=\log x_a$ با دامنه $(۰,\infty)$ است و

$$f(g(x))=f(\log x_a)=a^{\log x_a}=x \qquad x\in(۰,\infty)$$

$$g(f(x))=g(a^x)=\log_{a}{a^x}=x \qquad x\in IR$$

مسائل

۱ــ برای توابع $f(x)=x^۲+۱$ و $g(x)=\frac{۱}{x}$ و $k(x)=۲^x$ ترکیب توابع زیر را حساب کنید.

fog , gof , fok , kof , fof ok

۲ــ دامنه تابع $f(x)=۳x+۱$ را به گونه‌ای محدود کنید که برای تابع $g(x)=\sqrt{۱-x}$ ترکیب gof قابل انجام باشد و gof را حساب کنید.

۳ــ برای تابع $f(x)=۱-\sqrt{x}$ آیا ترکیب fof قابل انجام است؟ دامنه f را به‌گونه‌ای محدود کنید که fof قابل انجام باشد.

۴ــ در تابع $y=\frac{ax+۱}{x-c}$ آیا می‌توان a و c را به گونه‌ای تعیین کرد که این تابع وارون خود باشد؟

۵ــ دامنه تابع $y=x^۲+۲x$ را به‌گونه‌ای محدود کنید که وارون‌پذیر باشد و وارون آن را به‌دست آورید.

۶ــ آیا تابع زیر وارون‌پذیر است؟ وارون آن را به دست آورید.

$$f(x)=\begin{cases} x^۲ & x\leq ۰ \\ -x^۲ & ۰<x \end{cases}$$

۷ــ ثابت کنید تابع $f(x)=\frac{۲^x-۱}{۲^x+۱}$ وارون‌پذیر است و وارون آن را به‌دست آورید.

دنباله‌ها

در ریاضی ۲ با مفهوم کلی دنباله‌های عددی و به‌طور خاص با دنباله‌های حسابی و هندسی آشنا شدیم. در آنجا گفته شد «هر تعدادی از اعداد که آن‌ها را پشت سرهم نوشته باشیم یک دنباله از اعداد تشکیل می‌دهند».

در واقع هر موقع مجموعه‌ای از اعداد را شماره‌گذاری می‌کنیم دنباله‌ای در دست داریم و هر عدد از دنباله را جملهٔ دنباله می‌نامیم. در دنبالهٔ با نام u، جملهٔ اول، جملهٔ دوم، ...، جمله nاُم، ...، آن را به‌ترتیب با $u_۱$، $u_۲$، ...، u_n، ... نشان دادیم. u_n را جملهٔ عمومی دنباله نیز می‌نامیم.

مثال : جملهٔ عمومی دنباله‌ای $u_n=n^۲-۴n$ است. شش جملهٔ ابتدای این دنباله چنین است :

$$-۳, -۴, -۳, ۰, ۵, ۱۲, \dots$$

هم‌چنین می‌توان دنبالهٔ نامتناهی را تابعی درنظر گرفت که دامنه آن مجموعه اعداد طبیعی ($\mathbb{N}$) و مقادیر آن اعداد حقیقی است. دنبالهٔ مثال قبل را می‌توان در جدولی به‌صورت زیر که نوعی از نمایش تابع است نشان داد :

n	۱	۲	۳	۴	۵	۶	...
u_n	−۳	−۴	−۳	۰	۵	۱۲	...

دنباله می‌تواند متناهی نیز باشد. در این‌صورت دامنه آن بخشی از $\mathbb{N}$ است. مانند دنبالهٔ عددهای طبیعی اول یک رقمی : ۷ ، ۵ ، ۳ ، ۲.

تمرین : پنج جملهٔ ابتدای هر یک از دنباله‌های زیر را بنویسید. (در صورت لزوم می‌توانید از ماشین حساب استفاده کنید.)

الف) $a_n=۱-۳n$　ب) $b_n=۳\times(\frac{۱}{۲})^n$　ج) $c_n=(-۱)^{n+۱}$　د) $d_n=\frac{۱}{n+۱}$

هـ) $e_n=(۱+\frac{۱}{n})^n$　و) $f_n=\frac{n(n+۱)}{۲}$　ز) $g_n=\frac{۷}{۹}(۱-۰/۱^n)$　ح) $h_n=\frac{۲n}{n+۳}$

مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی

برای به‌دست آوردن مجموع جملات دنبالهٔ ۱۵۰ و ... و ۱۰۲ و ۱۰۱ می‌توان روش زیر را به‌کار برد :

$$\begin{array}{l} ۱۰۱+۱۰۲+...+۱۵۰ \\ +۱۵۰+۱۴۹+...+۱۰۱ \\ \hline \end{array}$$

۲۵۱+۲۵۱+...+۲۵۱=۵۰×۲۵۱⇒ مجموع جملات $=\frac{۵۰}{۲}\times(۱۰۱+۱۵۰)$

و اگر مجموع اعداد فرد آن دنباله یعنی مجموع جملات دنبالهٔ ۱۴۹ و ... و ۱۰۳ و ۱۰۱ مورد نظر باشد به طریق مشابه :

$$\begin{array}{l} ۱۰۱+۱۰۳+...+۱۴۹ \\ +۱۴۹+۱۴۷+...+۱۰۱ \\ \hline \end{array}$$

۲۵۰+۲۵۰+...+۲۵۰=۲۵×۲۵۰⇒ مجموع جملات $=\frac{۲۵}{۲}\times(۱۰۱+۱۴۹)$

در دو مثالِ فوق اولی دنباله‌ای حسابی است با جملهٔ اول ۱۰۱ و جملهٔ آخر ۱۵۰ و تعداد جمله ۵۰ و دومی دنباله‌ای حسابی با جملهٔ اول ۱۰۱ و جملهٔ آخر ۱۴۹ و تعداد جملهٔ ۲۵است. در حالت کلی در دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول a و جملهٔ آخر a_n و تعداد جملهٔ n نیز می‌توان نوشت :

$$\begin{array}{l} a+a_۲+...+a_n \\ +a_n+a_{n-۱}+...+a \\ \hline \end{array}$$

$(a+a_n)+(a+a_n)+...+(a+a_n)=n(a+a_n)\Rightarrow$ مجموع جملات $=\frac{n}{۲}(a+a_n)$

بنابراین اگر مجموع n جملهٔ ابتدای دنباله را با s_n نشان دهیم : $s_n=\frac{n}{۲}(a+a_n)$

مثال : مجموع اعداد طبیعی مضرب ۳ کوچکتر از ۱۰۰ برابر است با $۱۶۸۳=(۹۹+۳)\frac{۳۳}{۲}$ زیرا در دنبالهٔ حسابی ۳۳×۳ و ... و ۲×۳ و ۱×۳ جملهٔ اول ۳ جملهٔ آخر ۹۹ و تعداد جمله‌ها ۳۳ است.

از طرفی می‌دانیم در دنباله‌ای حسابی با جملهٔ اول a و قدر نسبت d، جملهٔ nاُم از دستور $a_n=a+(n-۱)d$ به‌دست می‌آید. در نتیجه :

$$s_n=\frac{n}{۲}[۲a+(n-۱)d]$$

مثال : محصول تولید لوله‌های فولادی کارخانه‌ای، در آغاز سال ۱۳۹۰ برابر ۱۵ میلیون تن می‌باشد. قرار است تولید این لوله‌ها هر سال نسبت به سال قبل ۴ میلیون تن افزایش یابد. مجموع تولید لوله‌ها در دههٔ ۹۰ را پیش‌بینی کنید.

پاسخ : مقدار تولید لوله‌ها در سالِ اول یعنی سال ۱۳۹۰ برابر است با $a_1=۱۹$ تن. قدر نسبت این دنبالهٔ حسابی $d=۴$ و تعداد سال‌های یک دهه $n=۱۰$ است، پس

$$s_{۱۰}=\frac{۱۰}{۲}[۲(۱۹)+(۱۰-۱)(۴)]=۳۷۰ \text{ تن}$$

دنبالهٔ $۲^{۶۳}, \dots, ۸, ۴, ۲, ۱$ را در نظر بگیرید. این دنباله، دنباله‌ای است هندسی با جملهٔ عمومی $۲^{n-۱}$.

برای به‌دست آوردن مجموعِ ۶۴ جمله ابتدای آن می‌نویسیم :

$$s_{۶۴}=۲^{۰}+۲^{۱}+۲^{۲}+\dots+۲^{۶۳}$$

طرفین تساوی اخیر را در ۲ ضرب می‌کنیم :

$$۲\times s_{۶۴}=۲^{۱}+۲^{۲}+۲^{۳}+\dots+۲^{۶۴}$$

سپس طرفین دو تساوی اخیر را از هم کم می‌کنیم نتیجه می‌شود :

$$s_{۶۴}=۲^{۶۴}-۱$$

به عنوان مثالی دیگر می‌خواهیم مجموعِ n جملهٔ ابتدای دنبالهٔ هندسی $\frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۹}, \frac{۱}{۲۷}, \cdots$ که جملهٔ عمومی آن $(\frac{۱}{۳})^n$ است را به‌دست آوریم :

$$s_n=\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۹}+\frac{۱}{۲۷}+\cdots+\frac{۱}{۳^n}$$

طرفین این تساوی را در $\frac{۱}{۳}$ ضرب می‌کنیم :

$$\frac{۱}{۳}\times s_n=\frac{۱}{۹}+\frac{۱}{۲۷}+\frac{۱}{۸۱}+\cdots+\frac{۱}{۳^{n+۱}}$$

طرفین دو تساوی اخیر را از هم کم می‌کنیم. نتیجه می‌شود :

$$(۱-\frac{۱}{۳})s_n=\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۳^{n+۱}}$$

$$s_n=\frac{\frac{۱}{۳}(۱-\frac{۱}{۳^n})}{۱-\frac{۱}{۳}}=\frac{۱}{۲}(۱-\frac{۱}{۳^n})$$

از ایده‌ای که در دو مثال قبل به‌کار رفت می‌توان استفاده نمود و مجموع n جملهٔ دنبالهٔ هندسی

با جملهٔ اولِ a و قدر نسبت qرا به‌دست آورد :

$$s_n=a+aq+aq^۲+\ldots+aq^{n-۱}$$

$$q\times s_n=aq+aq^۲+aq^۳+\ldots+aq^n$$

طرفین دو تساوی اخیر را از هم کم می‌کنیم :

$$(۱-q)s_n=a-aq^n$$

و در نتیجه :

$$s_n=\frac{a(۱-q^n)}{۱-q}\ ,\ q\neq ۱$$

از این دستور می‌توان برای محاسبهٔ مجموع هر تعداد جملهٔ یک دنبالهٔ هندسی استفاده نمود.

مثال : مجموع ده جملهٔ ابتدای دنبالهٔ $a_n=\frac{۳}{۲}(-۲)^n$ را به‌دست می‌آوریم. این دنباله، دنباله‌ای است هندسی با جملهٔ اول ۳- و قدر نسبت ۲-.

$$s_{۱۰}=\frac{-۳(۱-(-۲)^{۱۰})}{۱-(-۲)}=-(۱-۱۰۲۴)=۱۰۲۳$$

حد مجموع جملات دنبالهٔ هندسی نزولی

گفتیم برای محاسبهٔ مجموع n جملهٔ ابتدای دنبالهٔ هندسی از دستور زیر استفاده می‌کنیم :

$$s_n = \frac{a(۱-q^n)}{۱-q}$$

اگر $|q|<۱$ آنگاه با بزرگتر شدن n مقدار $|q^n|$ کوچکتر می‌شود. به عبارت دیگر هر گاه n بی‌نهایت بزرگ شود مقدار $|q^n|$ بی‌نهایت کوچک می‌شود. به عبارت دیگر حد q^n در بی‌نهایت صفر می‌شود و در نتیجه حد عبارت فوق برابر با $\frac{a}{۱-q}$ می‌شود.

مثال : مجموع تمام جملاتِ دنبالهٔ زیر (حد مجموع جملات دنباله) را حساب می‌کنیم.

$$۳, -۱, \frac{۱}{۳}, -\frac{۱}{۹}, \frac{۱}{۲۷}, \ldots$$

$$s = \frac{۳}{۱-(-\frac{۱}{۳})} = \frac{۳}{\frac{۴}{۳}} = \frac{۹}{۴} = ۲/۲۵$$

مسائل

۱ــ مجموع همهٔ عددهای طبیعی مضرب ۷ و کوچکتر از ۱۰۰۰ را به‌دست آورید.

۲ــ در یک دنبالهٔ حسابی جملهٔ پنجم ۱۹− و جملهٔ دهم ۳۱ است. مجموع بیست جملهٔ ابتدای این دنباله را به‌دست آورید.

۳ــ دنباله‌ای حسابی مشخص کنید که جملهٔ اول آن ۲− بوده و مجموع پنج جملهٔ اول آن، یک‌سوم مجموع پنج جملهٔ بعدی باشد.

۴ــ نشان دهید $۱+۳+۵+\ldots+(۲n-۱)=n^۲$.

۵ــ مجموع شش جملهٔ ابتدای یک دنبالهٔ هندسی ۹ برابر مجموع سه جملهٔ ابتدای آن دنباله است. قدر نسبت این دنباله را بیابید.

۶ــ احمد می‌خواهد پول‌های خود را پس‌انداز کند. او روز اول ۱۰۰۰ تومان در صندوق خود قرار می‌دهد و قرار می‌گذارد هر روز ۰/۹۹ پول واریزی روز قبل را به صندوق اضافه کند. پس از ۲۰

روز او چقدر پول در صندوق خواهد داشت؟ نشان دهید پول صندوقِ او هیچگاه از ۱۰۰,۰۰۰ تومان بیشتر نخواهد شد.

۷ــ برای محافظت از تابش‌های مضر مواد رادیواکتیو لایه‌های محافظتی ساخته شده است که شدت تابش‌ها پس از عبور از آن‌ها نصف می‌شود. حداقل از چند لایه باید استفاده کنیم تا شدت تابش ۹۷ درصد کاهش یابد؟

۸ــ با استفاده از دستور محاسبهٔ مجموع جملات دنبالهٔ هندسی، درستی اتحادهای زیر را نشان دهید.

الف) $x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\dots+x+1)$

ب) $x^n+1=(x+1)(x^{n-1}-x^{n-2}+\dots-x+1)$

۹ــ با استفاده از اتحاد (الف) در مسئله قبل درستی اتحاد زیر را نشان دهید.

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}.b+\dots+ab^{n-2}+b^{n-1})$$

حد دنباله‌ها : مفهوم حد دنباله‌ها مُشابه مفهوم حد تابع در $+\infty$ است که قبلاً (در ریاضی ۳) بیان گردید.

مثال : $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$ زیرا با بزرگ شدن عدد طبیعی n عدد $\frac{1}{n+1}$ به صفر نزدیک و نزدیکتر می‌شود. به عبارتی دیگر هر چقدر بخواهیم می‌توانیم $\frac{1}{n+1}$ را به ۰ نزدیک کنیم به شرط آن‌که n را به‌قدر کافی بزرگ کرده باشیم.

تعریف : هر دنباله که دارای حد بوده و حد آن عددی حقیقی باشد یک دنباله همگرا نامیده می‌شود.

به‌عنوان مثال هر یک از دنباله‌های $a_n=\frac{2n}{n+3}$ و $b_n=\frac{n^2+2}{n^2+1}$ همگرا می‌باشد زیرا به‌ترتیب دارای حدی برابر ۲ و ۱ هستند. اصطلاحاً گوییم این دنباله‌ها به ترتیب به ۲ و ۱ همگرا هستند.

امّا دنباله $c_n=(-1)^{n+1}$ همگرا نیست زیرا $c_n=\begin{cases}1 & \text{n فرد،}\\ -1 & \text{n زوج،}\end{cases}$ و با بزرگ شدن n به عدد خاصی نزدیک نمی‌شود. هم‌چنین دنبالهٔ $f_n=\frac{n(n+1)}{2}$ همگرا نیست زیرا حد آن $+\infty$ است و عددی حقیقی نیست.

بعضی دنباله‌های خاص : دنباله‌های صفحهٔ بعد را در نظر بگیرید :

$$a_n=\frac{1}{2^n}:1\,,\frac{1}{2}\,,\frac{1}{4}\,,\frac{1}{8}\,,\frac{1}{16}\,,\dots$$
$$\searrow\ \searrow\ \searrow\ \searrow$$

$$b_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n}:1\,,\frac{-1}{2}\,,\frac{1}{3}\,,-\frac{1}{4}\,,\frac{1}{5}\,,\dots$$
$$\searrow\ \nearrow\ \searrow\ \nearrow$$

$$c_n=n^2:1\,,4\,,9\,,16\,,25\,,\dots$$
$$\nearrow\ \nearrow\ \nearrow\ \nearrow$$

دنبالهٔ a چنان است که با افزایش شمارهٔ جمله، مقدار جمله کاهش می‌یابد. a نمونه‌ای از یک دنباله نزولی است. دنباله c چنان است که با افزایش شمارهٔ جمله، مقدار جمله افزایش می‌یابد. c مثالی از یک دنباله صعودی است. دنبالهٔ b نه صعودی است و نه نزولی. زیرا برای برخی از افزایش شماره‌ها مقدار جمله کاهش و برای برخی از افزایش شماره‌ها، مقدار جمله افزایش می‌یابد. در دنبالهٔ نزولی a داریم : $a_1>a_2>a_3>\dots$ و در دنبالهٔ صعودی b داریم : $b_1<b_2<b_3<\dots$.

تعریف : هرگاه دنبالهٔ u_n چنان باشد که همواره $u_n \le u_{n+1}$ آنگاه این دنباله را یک دنباله صعودی می‌نامیم. اگر همواره $u_n<u_{n+1}$ آنگاه دنباله را اکیداً صعودی می‌نامیم.

تعریف : هرگاه دنبالهٔ v_n چنان باشد که همواره $v_n \ge v_{n+1}$ آنگاه این دنباله را یک دنباله نزولی نامیم و اگر $v_n>v_{n+1}$ آنگاه این دنباله را اکیداً نزولی نامیم.

در هر دو حالت صعودی یا نزولی ، دنباله را یکنوا می‌نامند.

این بخش را با مفهوم دیگری در باب دنباله‌ها به پایان می‌رسانیم. دنبالهٔ $a_n=\frac{1}{n}$ را در نظر بگیرید. همواره $a_n<2$. عدد ۲ یک کران بالا برای این دنباله است. یا برای دنبالهٔ $b_n=\frac{2n^2+3}{n^2+1}$ عدد ۳ یک کران بالاست. زیرا همواره $b_n<3$.

تعریف : فرض کنیم α عدد حقیقی ثابتی باشد به قسمی که همواره $u_n<\alpha$. در این صورت α را یک کران بالا برای دنبالهٔ u_n گوییم و دنباله u_n را که دارای حداقل یک کران بالا باشد یک دنباله از بالا کراندار می‌نامیم.

برای دنبالهٔ $a_n=\frac{n^3}{1+n^2}$ ، همواره $a_n>0$. عدد ۰ یک کران پایین برای این دنباله است. هر یک از دنباله‌های $b_n=\frac{2n^2+3}{n^2+1}$ و $c_n=(-1)^n$ نیز دارای کران پایین هستند.

تعریف : هرگاه عدد حقیقی ثابتی مانند β یافت شود به قسمی که همواره $v_n>\beta$ دنبالهٔ v_n را یک دنباله از پایین کراندار نامیده و β را یک کران پایین دنباله v_n گوییم.

تعریف : دنباله‌ای که هم از بالا و هم از پایین کراندار باشد دنبالهٔ کراندار گوییم.

دنباله‌های $\frac{۱}{n}$ و $\frac{۲n^۲+۳}{n^۲+۱}$ و $(-۱)^n$ کراندارند ولی دنباله‌های $\frac{n^۳}{۱+n^۲}$ و $۲n+۳$ و $(-۱)^n n$ کراندار نیستند.

مسائل

۱ــ بررسی کنید از دنباله‌های زیر کدام صعودی، کدام نزولی و کدام نه صعودی‌اند و نه‌نزولی‌اند.

الف) $u_n=(-۱)^{n+۱}$ ب) $u_n=۳^{n-۱}$ ج) $u_n=\frac{۱}{n^۲+۱}$

د) $u_n=\frac{n^۲}{۲^n}$ هـ) $u_n=\frac{۳^n}{n^۳}$ و) $u_n=\frac{n(n+۱)}{۲}$

۲ــ دنباله‌ای مثال بزنید که هم صعودی باشد و هم نزولی.

۳ــ دو دنباله مثال بزنید که از بالا کراندار بوده ولی از پایین کراندار نباشند.

۴ــ دو دنباله مثال بزنید که از پایین کراندار بوده ولی از بالا کراندار نباشند.

۵ــ دو دنباله کراندار مثال بزنید.

۶ــ دو دنباله مثال بزنید که نه از بالا کراندار باشد و نه از پایین.

۷ــ با استفاده از ماشین حساب ده جمله نخست دنبالهٔ $e_n=(۱+\frac{۱}{n})^n$ را محاسبه کنید. آیا این دنباله کراندار است؟ (حدس بزنید)

۸ــ پنج جمله نخست دنباله‌ای که جملهٔ عمومی آن $u_n=(۱-\frac{۱}{n})^n$ است را محاسبه کنید. آیا این دنباله کراندار است؟

کاربرد تابع نمایی (رشد و زوال)

معرفی عدد e : یکی از اعدادی که در ساختمان طبیعت فراوان به کار رفته است عددی است گنگ که با حرف e نمایش داده و بسطِ اعشاری آن تا چند رقم اعشار برابر است با ...۲/۷۱۸۲۸۱=e

این‌که این عدد چیست و از کجا پیدا شده، بحث مفصلی دارد و ما در این بخش تنها به ماهیتِ ریاضی این عدد می‌پردازیم. در مسأله ۷ انتهای فصل قبل، ده جملهٔ نخست دنباله $(1+\frac{1}{n})^n$ را به‌طور تقریبی و با دقتِ چند رقم اعشار نوشتیم. یکبار دیگر آن جملات را می‌نویسیم :

n	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	...
$(1+\frac{1}{n})^n$	۲	۲/۲۵	۲/۳۷	۲/۴۴۱۴	۲/۴۸۸۳	۲/۵۲۱۶	۲/۵۴۶۴	۲/۵۶۵۷	۲/۵۸۱۱	۲/۵۹۳۷	...

مشاهده می‌کنیم که حاصل $(1+\frac{1}{n})^n$ بزرگ و بزرگتر می‌شود (دنباله صعودی است) ولی می‌توان ثابت کرد همیشه کوچکتر از ۳ باقی می‌ماند. در ریاضیاتی عالیتر ثابت می‌شود که هر دنبالهٔ صعودی و از بالا کراندار همگراست و دنبالهٔ فوق نیز به عددی حقیقی همگراست که آن را عدد e می‌نامیم.

تعریف : حد دنبالهٔ $(1+\frac{1}{n})^n$ را که عددی است حقیقی و گنگ با e نشان می‌دهیم.

$$e=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$$

امروزه با استفاده از کامپیوترهای پیشرفته، تقریب اعشاری e را تا بیش از یک میلیون رقم بعد از ممیز محاسبه کرده‌اند.

یادداشت تاریخی : e را به افتخار جان نپر (John Napier) ریاضیدان اسکاتلندی عددِ نپر نامیده‌اند. نپر نویسنده اسکاتلندی (تولد ۱۵۵۰ و وفات ۱۶۱۷ میلادی) بود که مطالعاتی در ریاضیات و الهیات داشته است. نپر در واقع مخترع لگاریتم است که این مفهوم را برای ساده‌ترکردن محاسبات وضع کرده است.

e در پدیده‌های طبیعی

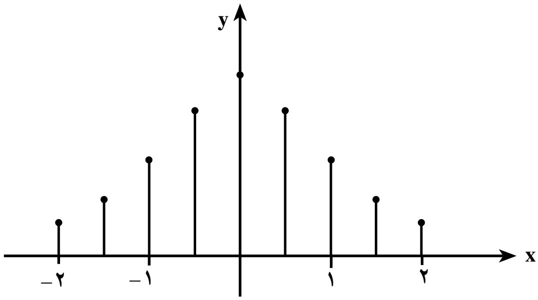
وقتی تعداد معینی باکتری را در یک آزمایشگاه کشت می‌دهیم، جمعیت آن‌ها با گذشت زمان به شدت افزایش می‌یابد. هرگاه f(t) تعداد باکتری‌ها پس از t دقیقه از شروع کشت باشد آنگاه f(t) از مدل زیر پیروی می‌کند.

$$f(t)=Be^{۰/۰۴t}$$

که در آن B عددی است ثابت.

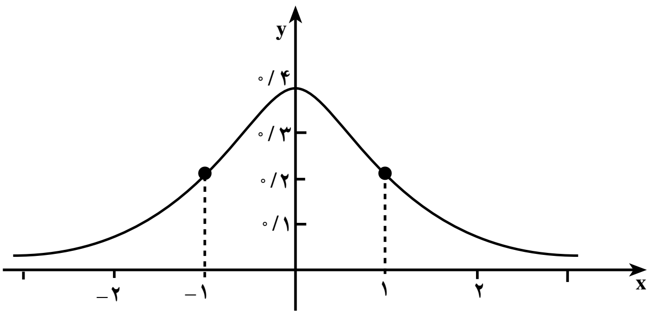
قیمت یک محصول صنعتی (مثلاً خودرو) با گذشت زمان و استفاده از خودرو کاهش می‌یابد. هرگاه $V(t)$ قیمت یک محصول صنعتی بعد از t سال از خرید آن باشد، $V(t)$ تابعی به‌صورت زیر است :

$$V(t)=Be^{-۰/۰۲t} \quad \text{(B مقدار ثابت)}$$



می‌دانیم تابع توزیع کمیت‌هایی مانند قد، وزن، خطای اندازه‌گیری قطر لوله‌های تولید شده در یک کارخانه، در یک جامعه نمونه‌ای هنجار دارای یک نمودار میله‌ای به شکل روبه‌رو است.

اگر تعداد نمونه‌ها (تعداد میله‌ها) را افزایش دهیم و نقاط انتهایی میله‌ها را به هم وصل کنیم یک منحنی به‌دست می‌آید که نمودار آن به شکل زیر است :



این نمودار را نمودار زنگوله‌ای یا نمودار توزیع طبیعی (چگالی طبیعی) می‌نامیم. معادله این نمودار به صورت زیر است :

$$f(x)=\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}e^{\frac{-x^۲}{۲}}$$

جهان مملوّ از پدیده‌ها است. در هر پدیده کمیت یا کمیت‌هایی برحسب کمیت‌های دیگر (مثلاً زمان) تغییر می‌کنند. این تغییر ممکن است به‌صورت افزایشی باشد که در این صورت پدیده رشد را خواهیم داشت و یا آن‌که به‌صورت کاهشی باشد که آن‌را زوال می‌نامیم. افزایش جمعیت باکتری‌ها نمونه‌ای از رشد

است در حالی‌که کاهش قیمت مصنوعات صنعتی نمونه‌ای از زوال می‌باشد. تبدیل مواد رادیواکتیویته سنگین به عناصر سبک‌تر مستلزم کاهش مقدار اولیّه مواد رادیواکتیو می‌باشد و این پدیده نیز نمونه بارزی از زوال می‌باشد.

بعضی از تغییرات توابع، همچون تابع توزیع طبیعی، منحصراً رشد یا زوال نیستند بلکه ترکیبی پیچیده‌تر دارند.

وقتی تصور کنیم که در جهان پدیده‌های متنوع و بسیاری وجود دارد که مدل تغییرات آن‌ها متضمن عدد e (عدد نپر) می‌باشد، به اهمیت e بیشتر پی می‌بریم.

بی سبب نیست که لگاریتم در پایه e را **لگاریتم طبیعی** می‌نامند.

در مسائل اجتماعی و اقتصادی نیز ما به عدد e نیازمندیم. وقتی P ریال را به‌صورت مشارکت در سرمایه‌گذاری با نرخ $۱۰۰i$ درصد پیوسته در یک مؤسسه اعتباری (بانک یا شرکت تولیدی) سرمایه‌گذاری می‌کنیم، سرمایه‌ای که پس از t سال حاصل می‌شود از مدل زیر پیروی می‌کند.

$$A=Pe^{it}$$

تابع نمایی طبیعی ــ تابع لگاریتم طبیعی

در ریاضی ۲ با تابع نمایی و تابع لگاریتم و برخی ویژگی‌های آن‌ها آشنا شدید. با انجام تمرین زیر مطالب گذشته را یادآوری نموده، سپس به نوع خاصی از این توابع وکاربرد آن‌ها می‌پردازیم.

تمرین :

۱ــ با استفاده از نماد لگاریتم، رابطه‌های داده شده را به‌صورت دیگر بنویسید.

الف) $۳^{۴}=۸۱$ ب) $۱۰^{-۳}=۰/۰۰۱$ ج) $۵^{-۲}=\frac{۱}{۲۵}$ د) $۲^{۰}=۱$

هـ) $۸^{\frac{۲}{۳}}=۴$ و) $۶۲۵^{-\frac{۳}{۴}}=\frac{۱}{۱۲۵}$ ز) $e^{۰}=۱$ ح) $(\frac{۱}{۴})^{\frac{۷}{۲}}=\frac{۱}{۱۲۸}$

۲ــ رابطه‌های داده شده را به‌صورت نمایی بنویسید.

الف) $\log_{۱۰}۱=۰$ ب) $\log_{۸}۶۴=۲$ ج) $\log_{۱۰}۱۰۰۰=۳$ د) $\log_{۸}۲=\frac{۱}{۳}$

هـ) $\log_{\frac{۱}{۳}}۹=-۲$ و) $\log_{۱۶}\frac{۱}{۸}=-\frac{۳}{۴}$ ز) $\log_{\frac{۱}{۲}}۶۴=-۶$ ح) $\log_{۳۲}۲=\frac{۱}{۵}$

۳ــ مقدار لگاریتم‌های داده شده را به‌دست آورید.

الف) $\log_{۱۰}۱۰۰$ ب) $\log_{۲}\frac{۱}{۸}$ ج) $\log_{۲۷}۹$ د) $\log_{۶}۶$

هـ) $\log_{۲۷}\frac{۱}{۸۱}$ و) $\log_{\frac{۱}{۴}}\frac{۱}{۳۲}$ ز) $\log_{e}۱$ ح) $\log_{e}\sqrt{e}$

۴ـ معادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $\log_{\frac{۱}{۳}}x=-۴$ ب) $\log_{۲}(x-۱)=۳$ ج) $\log_{\frac{۱}{۹}}x=\frac{۵}{۲}$ د) $\log(۳x+۱)=۲$

هـ) $\log(۲x-۱)+\log(x-۷)=\log۷$ و) $۲\log x-\log(x+۱)=۱$

ز) $(۲^{x}-۱)(۲^{x}-۳)=۰$ ح) $۱۰^{\log(x+۱)}=۳$

۵ـ از روابط زیر کدام درست و کدام نادرست است؟ (c, b, a اعداد حقیقی مثبت و c مخالف صفر است.)

الف) $\log_{c}a+\log_{c}b=\log_{c}(a+b)$ ب) $\log_{c}a+\log_{c}b=\log_{c}(ab)$

ج) $\log_{c}a-\log_{c}b=\log_{c}(\frac{a}{b})$ د) $\log_{c}a-\log_{c}b=\log_{c}(a-b)$

هـ) $\log_{c}a^{n}=(\log_{c}a)^{n}$ و) $\log_{c}a^{n}=n\log_{c}a$

ز) $\log_{c^{m}}a^{n}=\frac{n}{m}\log_{c}a$ ح) $\log_{c^{m}}a^{n}=m^{n}\log_{c}a$

۶ـ ابتدا جدول را کامل کنید. سپس نمودارهای توابع زیر را در یک صفحهٔ مختصات رسم کنید.

$y=\log_{۲}x \quad , \quad y=۲^{x}$

$y=\log_{\frac{۱}{۲}}x \ , \ y=(\frac{۱}{۲})^{x}$

x	-۳	-۲	-۱	۰	۱	۲	۳
۲^{x}							
$\log_{۲}x$							
$(\frac{۱}{۲})^{x}$							
$\log_{\frac{۱}{۲}}x$							

۷ـ جدول زیر را در نظر بگیرید :

لگاریتم عدد	۰	۰/۳۰۱	۰/۴۷۷	...	۰/۶۹۹	...	۰/۸۴۵	...	...	۱
عدد	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰

هر عدد در ردیف دوم برابر است با ۱۰ به توان عدد نظیر از ردیفِ اول. برای مثال $۱۰^{۰/۸۴۵}=۷$. جدول را کامل کنید و مقدار عددی هریک از عبارت‌های زیر را به‌دست آورید. (در جدول، لگاریتم اعداد با دقت تا سه رقم اعشار آمده است.)

الف) $\log(۲\times۱۰^{۷})=$ ب) $\log ۳۲=$ ج) $\log ۵۶=$

د) $\log ۳۰۰۰۰۰=$ هـ) $\log\sqrt{۶}=$ و) $\log ۳۹۲=$

تابع نمایی طبیعی : وقتی پایه تابع نمایی عدد e باشد تابع نمایی حاصله را **تابع نمایی طبیعی** می‌نامیم؛ به عبارت دیگر تابع نمایی طبیعی تابع با ضابطهٔ $f(x)=e^{x}\quad (x\in IR)$ می‌باشد که در آن e عدد نپر است.

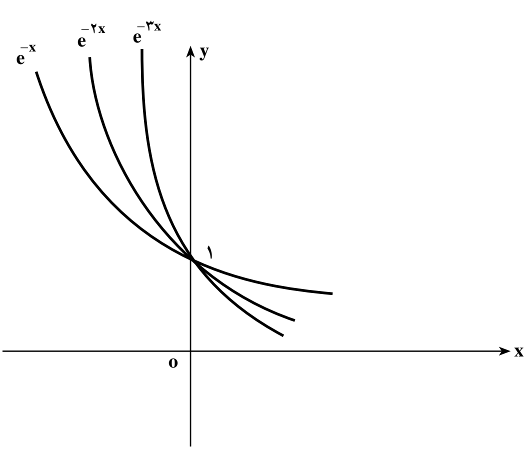
دامنه تابع نمایی طبیعی مجموعه اعداد حقیقی IR و برد آن مجموعه اعداد حقیقی مثبت است.

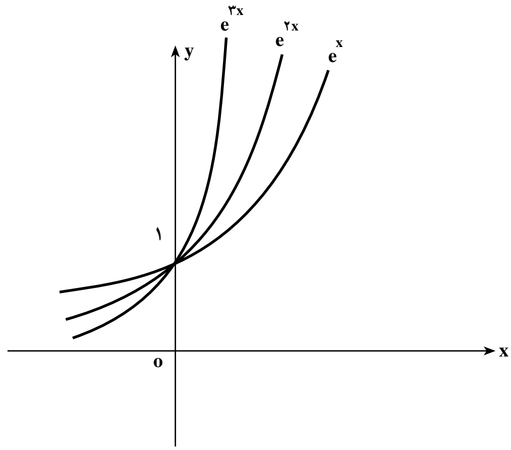
اکنون بخشی از نمودار تابع نمایی طبیعی را رسم می‌کنیم. ابتدا مقادیر تابع نمایی طبیعی را که متناظر بعضی از مقادیر x هستند در یک جدول درج می‌کنیم.

این مقادیر را با استفاده از ماشین حساب نیز می‌توان به‌دست آورد.

x	−۲	−۱	−۰/۵	۰	۰/۵	۱	۱/۵	۲	۲/۵
e^{x}	۰/۱	۰/۴	۰/۶	۱	۱/۵	۲/۷	۴/۵	۷/۴	۱۲/۲

سپس نقاطی از صفحه مختصات را که مختصاتشان در جدول آمده مشخص کرده و این نقاط را با یک منحنی هموار به هم وصل می‌کنیم تا بخشی از نمودار تابع نمایی طبیعی به دست آید.

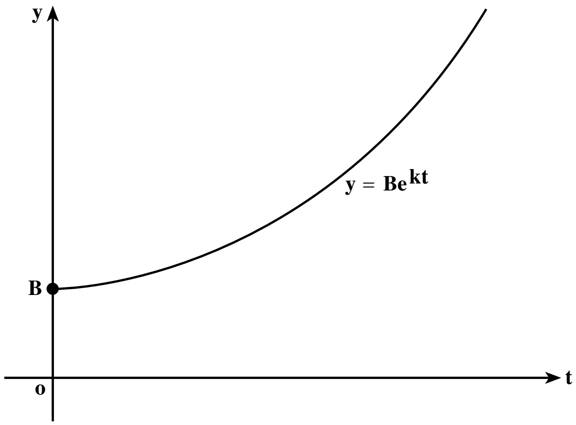




در بسیاری از شاخه‌های علمی با مدل‌های ریاضی که شامل توان‌های e است سر و کار داریم (یک مدل ریاضی رابطه یا معادله‌ای است که بین متغیرهای یک پدیده یا مشتقات آن‌ها برقرار است). بعضی از این مدل‌ها همان‌هایی هستند که رشد یا زوال نمایی نامیده می‌شوند. معادله (مدلی) به فرم

$$f(t)=Be^{kt} \qquad (t\geq ۰) \qquad (*)$$

که در آن B و k ثابت و مثبت‌اند، تابعی با رشد نمایی را تعریف می‌کند. در فصل بعد خواهیم دید که هرگاه آهنگ رشد تابعی متناسب با اندازهٔ آن باشد. این تابع رشد نمایی دارد. برای رسم بخشی از نمودار (*) باید توجه کنیم که $f(۰)=B$ و نیز این‌که $f(t)$ همواره عددی مثبت است که با افزایش t افزایش می‌یابد. نمودار توابعی که با رشد نمایی تعریف می‌شوند، به نام توابع رشد موسوم‌اند و به شکل زیر می‌باشند. ($k>۰$)



معمولاً متغیر t در این‌گونه توابع متغیّر زمان می‌باشد.

مثال : در یک کشت نمونه‌ای از باکتری‌ها، تعداد باکتری‌ها در زمان t از مدل $V(t)=Be^{۲t}$ پیروی می‌کند، که در آن B مقدار ثابت مثبتی است. هرگاه در لحظهٔ $t=۰$ (شروع آزمایش) ۱۰۰۰ باکتری کشت داده شده باشند، پس از ۲ ثانیه از شروع چند باکتری وجود دارد؟

حل : داریم

$$۱۰۰۰=V(۰)=Be^{۲\times۰}=B$$

بنابراین $B=۱۰۰۰$. پس معادله تعداد باکتری‌ها به‌صورت

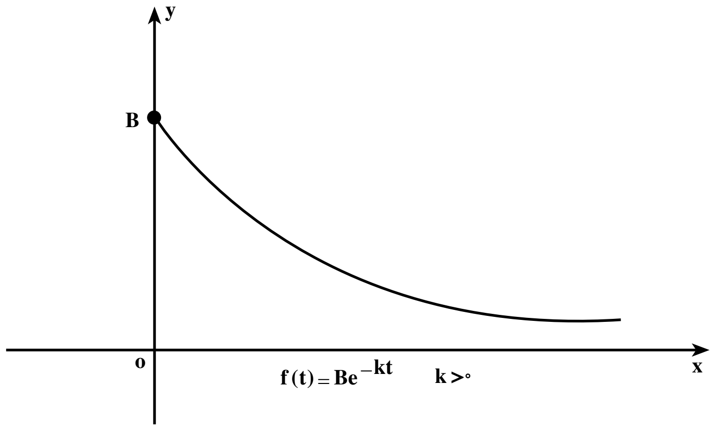
$$V(t)=۱۰۰۰e^{۲t}$$

درمی‌آید. اکنون با قرار دادن $t=۲$،

$$V(۲)=۱۰۰۰e^{۲\times ۲}=۱۰۰۰\times e^{۴}\approx ۵۴۰۰۰$$

یعنی پس از ۲ ثانیه از شروع کشت ۵۴۰۰۰ باکتری وجود دارد (مقدار تقریبی).

هرگاه معادله تابع به شکل $f(t)=Be^{-kt}$ باشد که در آن B و k مثبت‌اند، گوییم این تابع از مدل نزول نمایی پیروی می‌کند، یا اصطلاحاً تابع را یک تابع زوال می‌نامیم، با توجه به این‌که $f(۰)=B$ و $f(t)$ همواره عددی مثبت است که با افزایش t نقصان می‌یابد. نمودار چنین تابعی به شکل زیر است.



$f(t)=Be^{-kt} \quad k>۰$

مثال زیر یک پدیده را که مدل ریاضی آن از تابع نزول نمایی پیروی می‌نماید ارایه می‌کند.

مثال : قیمت یک محصول صنعتی با استفاده از آن و گذشت زمان کاهش می‌یابد. فرض کنیم $V(t)$ قیمت یک محصول (ابزار یا خودرو) بعد از t سال از خرید آن باشد. هرگاه بدانیم که

$$V(t)=Be^{-۰/۰۲t}$$

که در آن B مقدار ثابتی است، چنانچه این محصول به قیمت ۱۰۰۰۰۰۰ تومان (وقتی که نو باشد) خریداری شده باشد، قیمت آن بعد از ۲ سال چقدر است؟

حل : داریم $V(۰)=۱۰۰۰۰۰۰$ (لحظه خرید کالا را وقتی که نو باشد لحظه صفر اختیار کرده‌ایم). لذا بنابر

$$V(۰)=Be^{-۰/۰۲\times ۰}$$

$$۱۰۰۰۰۰۰=Be^{۰}$$

پس $B=۱۰۰۰۰۰۰$. پس با قراردادن این مقدار در معادلهٔ قبل به‌دست می‌آوریم

$$V(t)=۱۰۰۰۰۰۰\, e^{-۰/۰۲t}$$

و قیمت این محصول پس از ۲ سال همان $V(۲)$ است؛ پس

$$V(۲)=۱۰۰۰۰۰۰\, e^{-۰/۰۲\times ۲}$$

$$=۱۰۰۰۰۰۰\, e^{-۰/۰۴}$$

$$=۱۰۰۰۰۰۰(۰/۶۷۰۳۲۰)$$

$$=۶۷۰۳۲۰$$

یعنی قیمت این محصول پس از ۲ سال برابر ۶۷۰۳۲۰ تومان است.

تابع لگاریتم طبیعی : تابع لگاریتم در پایه e را، **تابع لگاریتم طبیعی** می‌نامیم. درنتیجه

$$\boxed{\text{تابع لگاریتم طبیعی تابع معکوس تابع نمایی طبیعی است.}}$$

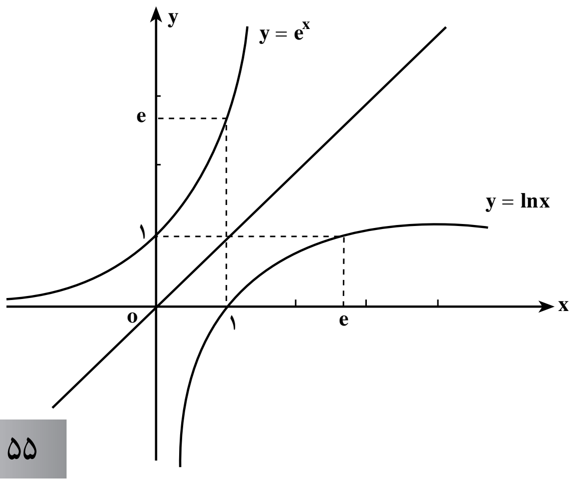
قرارداد : تابع لگاریتم طبیعی را می‌توانیم همانند حالت کلی با نماد $\log_e x$ نشان دهیم. ولی برای سادگی نام کوتاه‌تری برای این تابع انتخاب شده است و آن را با نماد ln نشان می‌دهند (l برای حرف اول لگاریتم و n برای حرف اول نِپِر می‌باشد).

مقادیر تابع ln را با lnx نشان می‌دهیم و آن را «لگاریتم طبیعی x» یا «لگاریتم نپری x» می‌خوانیم.

چون ln و تابع نمایی طبیعی توابع معکوس یکدیگرند، داریم

$$\boxed{y=\ln x \text{ اگر و فقط اگر } x=e^y}$$

بخشی از نمودار تابع لگاریتم طبیعی در شکل روبه‌رو رسم شده است.



مقادیر تابع لگاریتم طبیعی معمولاً در جدول‌هایی به نام جدول لگاریتم درج می‌شود. از ماشین حساب علمی با دکمه $\boxed{\ln}$ نیز می‌توان این مقادیر را به‌دست آورد.

از دیدگاه علمی می‌توانیم بگوییم که لگاریتم برای حل معادلاتی که مجهول در نما ظاهر می‌شود اختراع شده است. برای روشن‌تر شدن این مطلب به حل چند مثال کاربردی می‌پردازیم :

مثال : فرض کنیم تعداد باکتری‌ها در یک نوع کشت در دقیقه t از معادله

$$f(t)=۱۵۰۰\,e^{۰/۰۴t}$$

به‌دست آید. تعیین کنید بعد از چند دقیقه تعداد باکتری‌ها برابر ۳۰۰۰۰ می‌شود.

حل : فرض کنیم T دقیقه‌ای باشد که پس از آن ۳۰۰۰۰ باکتری به‌دست آید. پس داریم

$$f(T)=۱۵۰۰\,e^{۰/۰۴T}$$

چون $f(T)=۳۰۰۰۰$، داریم

$$۳۰۰۰۰=۱۵۰۰\,e^{۰/۰۴T}$$

یا

$$۲۰=e^{۰/۰۴T}$$

ولی این معادله هم‌ارز است با معادله

$$۰/۰۴T=\ln ۲۰$$

یا

$$۰/۰۴T=۲/۹۹۵۷$$

$$T=\frac{۲/۹۹۵۷}{۰/۰۴}=۷۴/۹$$

پس یک ساعت و ۱۴ دقیقه و ۵۴ ثانیه باید بگذرد تا تعداد باکتری‌ها به ۳۰۰۰۰ برسد.

مثال : شخصی مبلغ ۲۵۰۰۰۰۰۰ ریال را در یک حساب پس‌انداز با نرخ سود مشارکت ۱۰ درصد مرکب پیوسته سرمایه‌گذاری کرده است. پس از چه مدت پول اولیه این شخص دو برابر می‌شود؟ هرگاه P ریال سرمایه اولیه را با نرخ سود مشارکت $۱۰۰i$ درصد مرکب پیوسته سرمایه‌گذاری کنیم سود و سرمایه پس از t سال از معادله $A=Pe^{it}$ به‌دست می‌آید.

حل : داریم $۱۰۰i=۱۰$، یعنی $i=۰/۱$.

$$A=Pe^{it}$$

پس

$$۵۰۰۰۰۰۰۰۰=۲۵۰۰۰۰۰۰۰\, e^{۰/۱t}$$

درنتیجه

$$۲=e^{۰/۱t}$$

و این هم‌ارز است با

$$۰/۱t=\ln ۲$$

$$t=\frac{\ln ۲}{۰/۱}\simeq ۶/۹۳$$

یعنی تقریباً پس از ۷ سال (۶ سال و ۱۱ ماه و ۵ روز) سرمایه اولیهٔ شخص دو برابر می‌شود.

مسائل

۱ــ معادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $\ln(x-۳)=۲$

ب) $(e^x-۵)(۲e^x-۷)=۰$

ج) $(e^x+۳)^۲-۲۵=۰$

د) $\ln(۴x-۵)=\ln(۲-x)$

هـ) $\left|e^x-۱\right|=\left|۳-۲e^x\right|$

و) $\ln(۲x-۱)+\ln(x-۷)=\ln ۷$

۲ــ اعداد حقیقی x و y را چنان تعیین کنید که :

الف) $\begin{cases}\ln(۲x+۱)+\ln(۳y-۲)=\ln ۳x+\ln(y+۳)\\ \ln(x+۱)-\ln(y+۴)=-\ln ۳\end{cases}$

ب) $\begin{cases}\ln x+\ln ۲y=\ln(xy+۲)\\ \ln(۱-x)+\ln(y+۱)=\ln(y-x-۱)\end{cases}$

۳ــ جمعیت شهری ۱۰۰۰۰ نفر است و با آهنگی متناسب با تعداد جمعیت افزایش می‌یابد. اگر این آهنگ ۶ درصد و جمعیت بعد از t سال $P(t)$ باشد، آنگاه $P(t)=۱۰۰۰۰e^{۰/۰۶t}$. تا کی انتظار می‌رود جمعیت به ۴۵۰۰۰ نفر برسد؟

۴ــ در یک نوع کشت ۲۰۰۰ باکتری موجود است، و بعد از t دقیقه $f(t)$ باکتری ظاهر می‌شود که $f(t)=۲۰۰۰e^{۰/۰۳۵t}$. چه وقت ۱۰۰۰۰ باکتری در کشت وجود خواهد داشت؟

۵ــ کارایی کارگر عادی در کارخانه‌ای با تابع $f(t)=100-60e^{-0/2t}$ داده می‌شود که کارگر بعد از t ماه اشتغال می‌تواند روزانه f(t) واحد کار را کامل کند. بعد از چند ماه تجربهٔ کاری، انتظار می‌رود که کارگر روزانه ۷۰ واحد را کامل کند؟

۶ــ قیمت فروش ابزاری، t سال پس از خرید، f(t) دلار است، که $f(t)=1200+8000e^{-0/25t}$. چند سال پس از خرید، قیمت فروش این ابزار ۲۰۰۰ دلار می‌شود؟

در مسایل ۹ــ۷ به فرمول زیر نیاز داریم :

$$A=Pe^{it}$$

در این فرمول P سرمایه اولیه است که با نرخ سود مشارکت $100i$ درصد به مدت t سال در مؤسسه‌ای (بانک یا شرکت تولیدی) سرمایه‌گذاری می‌شود و A مقدار سرمایه پس از t سال است.

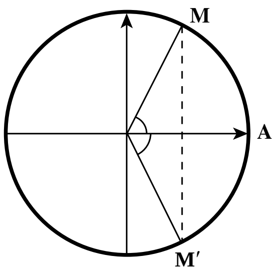
۷ــ چقدر طول می‌کشد تا ۵۰۰۰۰۰ ریال پس‌انداز با نرخ ۹ درصد مرکب پیوسته ۹۰۰۰۰۰ ریال شود؟

۸ــ مسأله ۷ را وقتی که نرخ سود شرکت در سرمایه‌گذاری ۱۲ درصد مرکب پیوسته باشد، حل کنید.

۹ــ چقدر طول می‌کشد تا یک سرمایه‌گذاری دو برابر شود هرگاه نرخ سود مشارکت در سرمایه‌گذاری ۸ درصد مرکب پیوسته باشد؟

معادلهٔ مثلثاتی

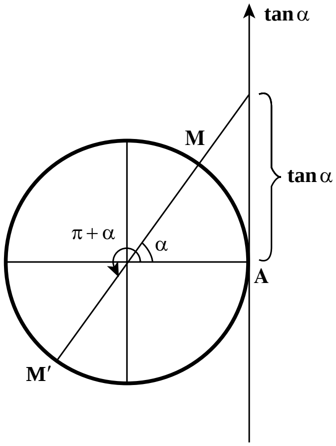
چگونه می‌توانیم تمام زوایایی را مشخص کنیم که یکی از نسبت‌های مثلثاتی آن داده شده باشد؟ به‌عنوان مثال کلیهٔ زوایایی را می‌خواهیم که کسینوس‌شان برابر $\frac{1}{2}$ باشد. همان‌طورکه در شکل زیر مشخص است در دو نقطه روی دایرهٔ مثلثاتی این اتفاق می‌افتد کلیهٔ کمان‌هایی که انتهای آن‌ها در یکی از نقاط M یا ´M باشند جواب مسئله هستند از آنجا که $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$ و $\cos(\frac{-\pi}{3})=\frac{1}{2}$ ، همهٔ جواب‌های موردنظر به‌صورت $2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$ هستند. در حقیقت اگر k دور بزنیم و در یکی از نقاط M یا ´M متوقف شویم مقدار کسینوس تغییر نمی‌کند. به‌طورکلی کلیهٔ زوایای x که جواب معادله $\cos x=\cos\alpha$ می‌باشند عبارت‌اند از : $x=2k\pi\pm\alpha$.



با روش مشابه می‌توان کلیهٔ زوایایی مانند x که جواب معادله $\sin x=\sin\alpha$ می‌باشند را به‌صورت $x=2k\pi+\alpha$ و $x=2k\pi+\pi-\alpha=(2k+1)\pi-\alpha$ به‌دست آورد.

حال می‌خواهیم کلیهٔ زوایایی مانند x را بیابیم که جواب معادله $\tan x=\tan\alpha$ باشند.

با توجه به آن که $\tan(\pi+x)=\tan x$ بنابراین هر مضربی از π که به α بیفزاییم تانژانت آن برابر $\tan\alpha$ خواهد شد و کلیهٔ جواب‌های معادله به‌صورت $x=k\pi+\alpha$ خواهد بود.



معادلهٔ مثلثاتی : معادلاتی که برحسب نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه مجهول نوشته می‌شوند را معادله مثلثاتی می‌نامیم به‌عنوان مثال ، $\sin^2 x+\cos x=0$ ، $2\cos x=1$ معادله‌هایی مثلثاتی هستند.

جواب معادله : مقدارهایی از زاویهٔ مجهول که به‌ازای آنها معادله برقرار شود، جواب معادله می‌نامند. مقصود از حل معادلهٔ مثلثاتی پیدا کردن کلیهٔ جواب‌های آن معادله است. به‌عنوان مثال کلیهٔ

جواب‌های معادلهٔ $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ برابر است : $x = 2k\pi + \frac{\pi}{3}$ و $x = 2k\pi + \frac{2\pi}{3}$

حل معادله‌های مثلثاتی

برای حل یک معادلهٔ مثلثاتی به کمک رابطه‌های مثلثاتی و دستورهای جبری آن را به معادلهٔ ساده‌تری تبدیل می‌کنیم تا به یکی از صورت‌های $\sin x = a$ یا $\cos x = a$ یا $\tan x = b$ تبدیل شود.

درصورتی که $-1 \leq a \leq 1$ می‌توان نوشت : $\sin\alpha = a$ پس $\sin x = \sin\alpha$

و از آن‌جا $x = 2k\pi + \alpha$ و $x = 2k\pi + \pi - \alpha$

اگر $a > 1$ یا $a < -1$ باشد معادله $\sin x = a$، یا $\cos x = a$ جواب ندارد.

برای حل $\tan x = b$ زاویهٔ β را چنان می‌یابیم که $\tan\beta = b$ پس $\tan x = \tan\beta$ و از آن‌جا $x = k\pi + \beta$.

به جواب‌هایی که به‌صورت بالا نوشته شده باشند جواب‌های کلی معادله می‌گویند. ممکن است در معادله جواب‌هایی که در فاصلهٔ مشخص قرار دارند مورد نظر باشند. در این صورت به k عددهای صحیح مختلف می‌دهیم تا جواب‌های مورد نظر به‌دست آید.

معادلات سادهٔ مثلثاتی

معادلات مثلثاتی دارای انواع مختلفی هستند که در این جا برخی از انواع سادهٔ آن مورد مطالعه قرار می‌گیرد که دو نوع از آن‌ها را بررسی خواهیم کرد.

الف) معادله شامل یکی از مقادیر نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ مجهول می‌باشد.

ابتدا این نوع معادلات را برحسب نسبت مثلثاتی که در معادله موجود است، حل کرده و پس از تعیین مقدار نسبت مثلثاتی، زوایایی را که جواب معادله هستند به‌دست می‌آوریم.

مثال : معادلهٔ $2\sin x - \sqrt{3} = 0$ را حل کنید و جواب‌های کلی آن را بیابید.

حل : از حل معادله برحسب $\sin x$ داریم. $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ و از آن‌جا که $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ پس $\sin x = \sin\frac{\pi}{3}$ و از آن‌جا $x = 2k\pi + \frac{\pi}{3}$ و $x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{3}$.

مثال : معادلهٔ $4\cos^2 x - 9\cos x + 5 = 0$ را حل کنید و جواب‌های کلی آن را بیابید.

حل :

این معادله به یک معادلهٔ درجه دوم شبیه است با فرض $\cos x = t$ داریم : $4t^2 - 9t + 5 = 0$ از حل این معادلهٔ درجه دوم داریم $t = 1$ و $t = \frac{5}{4}$

$t=۱ \Rightarrow \cos x=۱ \Rightarrow \cos x=\cos ۰ \Rightarrow x=۲k\pi$

$t=\frac{۵}{۴} \Rightarrow \cos x=\frac{۵}{۴}$ این معادله جواب ندارد.

مثال : معادلهٔ $\tan^۲ x-۳=۰$ را حل کنید و جواب‌های در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ را به‌دست آورید.

حل : می‌توان نوشت $\tan^۲ x=۳$ و از آن‌جا $\tan x=\pm\sqrt{۳}$ دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم.

$$\tan x=\sqrt{۳} \Rightarrow \tan x=\tan\frac{\pi}{۳} \Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۳}$$

$$\tan x=-\sqrt{۳} \Rightarrow \tan x=\tan(\frac{-\pi}{۳}) \Rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{۳}$$

برای یافتن جواب‌های مورد نظر در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ به k اعداد صحیح. و ۱± و ۲± و ... می‌دهیم تا کلیه جواب‌ها به‌دست آید.

همانطورکه در جدول مقابل مشخص است، معادله در این بازه ۴ جواب دارد.

k	x
۰	$\frac{\pi}{۳}$
۱	$\frac{۴\pi}{۳},\frac{۲\pi}{۳}$
۲	$\frac{۵\pi}{۳}$

ب) معادله مثلثاتی شامل مقادیر چند نسبت مثلثاتی زاویهٔ مجهول می‌باشد.

مثلاً معادلاتی نظیر $\cos^۲ x-\sin x=۱$، $\tan x+۲\cot x=۳$، $\sin x\cos x+\sin x=۰$ چند نسبت مثلثاتی از x را در بر دارند.

برای حل این گونه معادلات ممکن است با نقل تمام جملات در یک طرف تساوی و تبدیل نسبت‌ها به یک نسبت، یا تجزیه به عامل‌ها بتوان معادله را به معادلات ساده‌تر تبدیل کرده و بعد جواب‌های معادله را به‌دست آوریم.

مثال : معادلهٔ $۲\cos^۲ x=\sin x-۱$ را حل کنید.

حل : می‌توان همه نسبت‌ها را به سینوس تبدیل کرد. داریم :

$$۲(۱-\sin^۲ x)=\sin x-۱$$

$$۲\sin^۲ x+\sin x-۳=۰ \Rightarrow \begin{cases} \sin x=۱ \\ \sin x=\frac{۳}{۲} \quad \text{(بدون جواب)} \end{cases}$$

$$\sin x=۱\Rightarrow \sin x=\sin\frac{\pi}{۲}\Rightarrow \begin{matrix} x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲} \\ x=۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۲}=۲k\pi+\frac{\pi}{۲} \end{matrix}$$

حالات خاص : هرچند که روابط گفته شده برای حل معادلات مثلثاتی همواره برقرار است امّا در چند حالات خاص زیر می‌توان سریع‌تر جواب معادله را به‌دست آورد.

$$\begin{cases} \sin x=\circ\Rightarrow x=k\pi \\ \sin x=۱\Rightarrow x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲} \\ \sin x=-۱\Rightarrow x=۲k\pi-\frac{\pi}{۲} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos x=۱\Rightarrow x=۲k\pi \\ \cos x=\circ\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۲} \\ \cos x=-۱\Rightarrow x=۲k\pi+\pi \end{cases}$$

مثال : معادلهٔ $۲\sin^۳x-\sin x=\circ$ را حل کنید.

حل :

$$\sin x(۲\sin^۲ x-۱)=\circ\Rightarrow \begin{cases} \sin x=\circ \\ ۲\sin^۲ x-۱=\circ\Rightarrow \sin^۲ x-\frac{۱}{۲}\Rightarrow \sin x=\pm\frac{\sqrt{۲}}{۲} \end{cases}$$

سه حالت در نظر می‌گیریم و در هر حالت معادلهٔ به دست‌آمده را حل می‌کنیم.

$$\sin x=\circ\Rightarrow x=k\pi$$

$$\sin x=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow \sin x=\sin\frac{\pi}{۴}\Rightarrow \begin{cases} x=۲k\pi+\frac{\pi}{۴} \\ x=۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۴} \end{cases}$$

$$\sin x=\frac{-\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow \sin x=\sin(-\frac{\pi}{۴})\Rightarrow \begin{cases} x=۲k\pi-\frac{\pi}{۴} \\ x=۲k\pi+\pi+\frac{\pi}{۴} \end{cases}$$

مثال : معادلهٔ $\tan x-2\cot x=1$ را حل کنید.

حل : برای حل این معادله کافی است قرار دهیم $\cot x=\frac{1}{\tan x}$ بنابراین :

$$\tan x-2\times\frac{1}{\tan x}=1$$

چون $\tan x\neq 0$ پس طرفین معادله را در $\tan x$ ضرب می‌کنیم داریم :

$$\tan^2 x-2=\tan x$$

$$\tan^2 x-\tan x-2=0$$

$$\tan x=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{1\pm 3}{2}\Rightarrow\begin{cases}\tan x=2\\ \tan x=-1\end{cases}$$

در حالت $\tan x=-1$ می‌توان نوشت :

$$\tan x=\tan(-\frac{\pi}{4})\Rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{4}$$

برای حل $\tan x=2$ فرض کنیم α زاویه‌ای باشد که تانژانت آن برابر ۲ باشد.

می‌توان نوشت $x=k\pi+\alpha$ که در آن $\boxed{\tan\alpha=2}$.

مثال : معادله‌های مثلثاتی $\sin x+\cos x+\sin x\cos x+1=0$ را حل کنید.

حل : معادله را به صورت زیر می‌نویسیم.

$$\sin x(1+\cos x)+(1+\cos x)=0$$

$$(1+\cos x)(\sin x+1)=0\Rightarrow\begin{cases}1+\cos x=0\Rightarrow\cos x=-1\Rightarrow x=2k\pi+\pi\\ 1+\sin x=0\Rightarrow\sin x=-1\Rightarrow x=2k\pi-\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

مثال : معادلهٔ $\cos 2x=\sin(\frac{\pi}{2}-x)$ را حل کنید.

حل : می‌توان $\sin(\frac{\pi}{2}-x)$ را به $\cos x$ تبدیل کرد و به معادلهٔ $\cos 2x=\cos x$ رسید علاوه‌بر آن که می‌توان عبارت را به‌صورت $2\cos^2 x-1=\cos x$ نوشت و از طریق یک معادلهٔ درجه دوم مقدار x را یافت. همچنین می‌توان مستقیماً عمل کرد.

$$\cos 2x=\cos x\Rightarrow 2x=2k\pi\pm x\quad\begin{cases}x=2k\pi\\ x=\frac{2k\pi}{3}\end{cases}$$

مثال : معادلهٔ $\sin ۴x + \sin ۳x = ۰$ را حل کنید و جواب‌های در بازهٔ $[۰,\pi]$ را بیابید.

حل :

$$\sin ۴x = -\sin ۳x \Rightarrow \sin ۴x = \sin(-۳x)$$

$$\begin{cases} ۴x = ۲k\pi + (-۳x) \Rightarrow x = \frac{۲}{۷}k\pi \\ ۴x = ۲k\pi + \pi - (-۳x) \Rightarrow x = ۲k\pi + \pi \end{cases}$$

حال با دادن اعداد صحیح ۰ و ۱ ± و ۲ ± و ...

k	۰	۱	۲	۳
x	$۰, \pi$	$\frac{۲\pi}{۷}$	$\frac{۴\pi}{۷}$	$\frac{۶\pi}{۷}$

مسائل

معادلات زیر را حل کرده و جواب‌های کلی آن‌ها را بیابید.

۱) $۲\sin ۲x - ۱ = ۰$

۲) $۲\cos x + \sqrt{۳} = ۰$

۳) $\sin ۲x + \sin x = ۰$

۴) $\tan x = ۳\cot x$

۵) $۲\sin^۲ ۲x - \sin ۲x - ۱ = ۰$

۶) $\sin ۲x = \cos(\frac{\pi}{۲} - x)$

۷) $\sin ۲x \cos x - \cos ۲x \sin x = ۱$

۸) $\cos ۲x - ۳\cos x + ۲ = ۰$

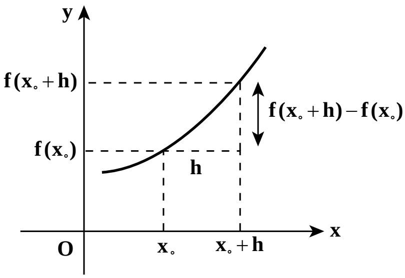
۹) $\cos^۲ x - \sin^۲ x = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۱۰) $\cos x - \cos^۳ x = ۰$

فصل ۳

مشتق توابع

یادآوری و تکمیل



سال گذشته با مفهوم مشتق توابع آشنا شده‌اید.

برای یک تابع مانند f با تغییر مقدارهای متغیر x مقادیر f(x) نیز تغییراتی می‌کنند. مشتق یک تابع، چگونگی تغییر مقدار تابع را نسبت به مقدار متغیر نشان می‌دهد. در یک نقطه $x_\circ$ از دامنه f اگر به اندازه h واحد از $x_\circ$ دور شویم، مقدار تابع از $f(x_\circ)$ به $f(x_\circ+h)$ تغییر می‌کند.

میزان تغییرات f برابر $f(x_\circ+h)-f(x_\circ)$ و میزان تغییرات x به اندازه h است.

کسر $\frac{f(x_\circ+h)-f(x_\circ)}{h}$ نسبت این تغییرات را حساب می‌کند و حد آن در $h=\circ$ (در صورت وجود) مشتق f در $x_\circ$ نامیده‌ایم و با $f'(x_\circ)$ نشان داده‌ایم.

مثال : مشتق تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را در نقطه دلخواه $x_\circ\in(\circ,\infty)$ حساب کنید.

حل :

$$f'(x_\circ)=\lim_{h\to\circ}\frac{\sqrt{x_\circ+h}-\sqrt{x_\circ}}{h}=\lim_{h\to\circ}\frac{(\sqrt{x_\circ+h}-\sqrt{x_\circ})(\sqrt{x_\circ+h}+\sqrt{x_\circ})}{h(\sqrt{x_\circ+h}+\sqrt{x_\circ})}$$

$$=\lim_{h\to\circ}\frac{(x_\circ+h)-x_\circ}{h(\sqrt{x_\circ+h}+\sqrt{x_\circ})}=\lim_{h\to\circ}\frac{۱}{\sqrt{x_\circ+h}+\sqrt{x_\circ}}=\frac{۱}{۲\sqrt{x_\circ}}$$

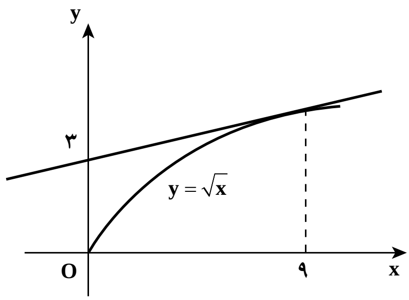
سال گذشته دیدیم که $f'(x_\circ)$ نشان‌دهنده ضریب زاویه (شیب) خط مماس بر نمودار f در نقطه $(x_\circ,f(x_\circ))$ است. بنابراین معادله خط مماس بر نمودار f در نقطه $(x_\circ,f(x_\circ))$ عبارت است از :

$$y-f(x_\circ)=f'(x_\circ)(x-x_\circ)$$

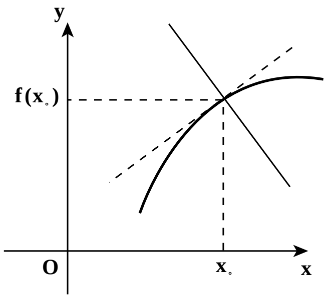
مثال : معادله خط مماس بر نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را در نقطه $(۹,۳)$ بنویسید.

حل : داریم $f'(۹)=\frac{۱}{۲\sqrt{۹}}=\frac{۱}{۶}$ پس معادله خط مماس عبارت است از :

$$y-۳=\frac{۱}{۶}(x-۹)$$



اگر خطی نمودار تابعی مانند f را به گونه‌ای قطع کند که بر خط مماس بر نمودار f در آن نقطه عمود شود، گوییم خط بر نمودار تابع در آن نقطه عمود است.



اگر این نقطه $(x_۰,f(x_۰))$ باشد، ضریب زاویه خط مماس $f'(x_۰)$ است، پس ضریب زاویه خط عمود، در حالت $f'(x_۰)\neq ۰$ برابر $-\frac{۱}{f'(x_۰)}$ است. پس معادله خط عمود بر نمودار تابع f در نقطه $(x_۰,f(x_۰))$ عبارت است از :

$$y-f(x_۰)=-\frac{۱}{f'(x_۰)}(x-x_۰)$$

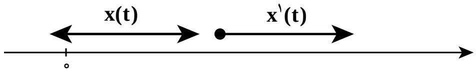
در حالتی که $f'(x_۰)=۰$ ، خط مماس بر نمودار f افقی است و عمود بر آن موازی محور yها است و معادله آن $x=x_۰$ خواهد بود.

مثال : معادله خط عمود بر نمودار تابع $y=\frac{۱}{x}$ را در نقطه $(۲,\frac{۱}{۲})$ بنویسید.

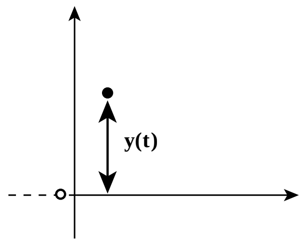
حل : داریم $y'=\frac{-۱}{x^۲}$ ، پس $y'(۲)=\frac{-۱}{۴}$ و ضریب زاویه خط عمود ۴ خواهد بود.

$$y-۲=۴(x-\frac{۱}{۲})$$

سال گذشته دیدیم که اگر متحرکی روی محور xها در حال حرکت باشد و در هر لحظه t در مکان x(t) قرار داشته باشد، مشتق x(t) در هر لحظه نسبت تغییرات مکان به تغییرات زمان را می‌سنجد که در فیزیک آن را سرعت متحرک می‌نامند. پس سرعت این متحرک در لحظه $t_۰$ برابر است با $x'(t_۰)$.



مثال : سیبی را در لحظه $t=0$ از زمین رو به بالا پرتاب می‌کنیم. معادله حرکت آن به صورت $y(t)=-5t^2+30t$ است، که y بر حسب متر و t بر حسب ثانیه است. این حرکت چند ثانیه طول می‌کشد و سرعت حرکت سیب در لحظه آخر چقدر است؟



حل : داریم $y(0)=0$ و $y(6)=0$، یعنی سیب در لحظات $t=0$ و $t=6$ در سطح زمین است در لحظه $t=0$ از سطح زمین رو به بالا حرکت کرده است و در لحظه $t=6$ مجدداً به زمین برگشته است. سرعت حرکت سیب در لحظه آخر $y'(6)$ است.

$$y'(t)=-10t+30 \Rightarrow y'(6)=-60+30=-30$$

یعنی سیب با سرعت سی متر بر ثانیه به زمین برخورد می‌کند.

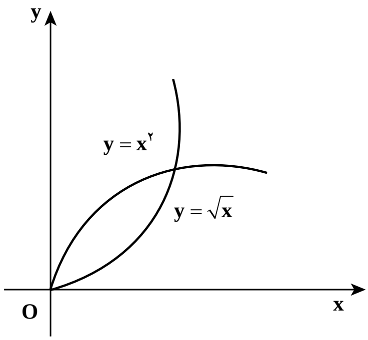
در مثال بالا دیدیم که مقدار مشتق منفی شده است، منفی شدن مقدار مشتق چه معنایی دارد؟

در مثال قبل اگر سرعت حرکت سیب را در لحظه $t=0$ حساب کنیم داریم $y'(0)=30$ و در این لحظه مقدار مشتق مثبت است، اما در لحظه آخر مقدار مشتق منفی است. تفاوت این دو لحظه در آن است که در لحظه $t=0$ سیب رو به بالا حرکت می‌کند و مقدارهای $y(t)$ در حال افزایش هستند، اما در لحظه $t=6$، سیب رو به پایین حرکت می‌کند و مقدارهای $y(t)$ رو به کاهش هستند. علامت مشتق نشان‌دهنده آن است که تابع در اطراف آن نقطه در حال افزایش است یا کاهش.

اگر تابع f در یک بازه حول x_0 صعودی باشد، کسر $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ نامنفی است و حد آن نیز نامنفی خواهد بود، یعنی $f'(x_0)\geq 0$. اما اگر تابع f در یک بازه حول x_0 نزولی باشد این کسر نامثبت است و حد آن نیز نامثبت خواهد بود، یعنی $f'(x_0)\leq 0$.

بنابراین علامت مشتق تابع نشانگر وضعیت تابع از لحاظ صعودی بودن یا نزولی‌بودن است.

اندازه مشتق نیز نشان می‌دهد شدت صعود یا نزول تابع چقدر است. برای مثال توابع $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=x^{۲}$ هر دو روی بازه $(۰,\infty)$ صعودی هستند و مشتق آن‌ها مثبت است.



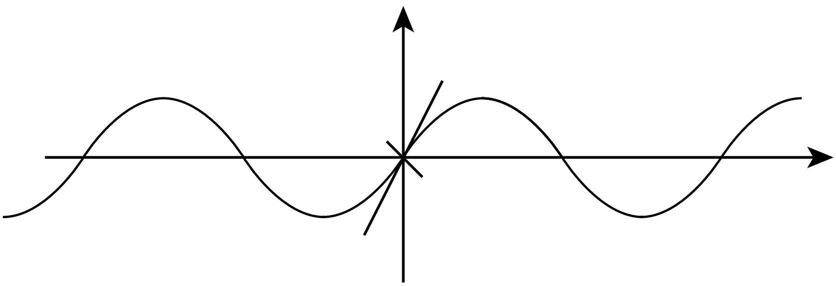
اما سرعت صعود $f(x)$ مدام در حال کاهش است ولی سرعت صعود $g(x)$ مدام در حال افزایش است. این مطلب در مشتق آن‌ها دیده می‌شود، داریم $f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}$ و $g'(x)=۲x$.

با افزایش x، مقدار $f'(x)$ در حال کاهش ولی مقدار $g'(x)$ در حال افزایش است.

بنابراین اندازه مشتق نشان می‌دهد که مقادیر تابع با چه سرعتی در حال صعود یا نزول هستند.

مثال : سرعت صعود تابع $y=\sin x$ در چه نقطه‌ای از همه بیشتر است؟

حل : باید ببینیم بیشترین مقدار y' در کجاست. داریم $y'=\cos x$ و این تابع در $x=۰$ مقدار ۱ را دارد که بیشترین مقدار $\cos x$ است. پس در $x=۰$، تابع $y=\sin x$ بیشترین سرعت افزایش را دارد. البته در نقاط به صورت $x=۲k\pi$ نیز همین وضعیت برقرار است.



تمرین

۱ــ متحرّکی روی یک خط افقی حرکت می کند که قانون حرکت آن $s=\frac{۱}{۳}t^{۳}-۳t^{۲}+۸t+۱۰$

است، در چه بازه زمانی متحرّک در جهت مثبت خطّ، حرکت می‌کند؟ در کدام بازه زمانی متحرّک در جهت منفی خطّ حرکت می‌کند؟ در کدام لحظه‌ها متحرّک تغییر جهت می‌دهد؟

۲ــ توپی را با سرعت اوّلیه ۷۸/۴ متر در ثانیه به‌طور قائم از زمین به بالا پرتاب می‌کنیم. اگر جهت مثبت فاصله از نقطه پرتاب به طرف بالا باشد، مطلوب است محاسبهٔ

الف) سرعت لحظه‌ای توپ در پایان یک ثانیه

ب) سرعت لحظه‌ای در پایان ۴ ثانیه

ج) مدت زمان لازم برای رسیدن توپ به بالاترین نقطه

د) ارتفاعی که توپ بالا خواهد رفت

هـ) مدتی که طول می‌کشد تا توپ به زمین برسد.

و) سرعت لحظه‌ای توپ وقتی که به زمین می‌رسد.

۳ــ منحنی به معادله $y=x^{۲}$ مفروض است. نقطه‌ای واقع بر این منحنی به دست آورید که خط قائم بر منحنی در آن نقطه از نقطه $A(۳۵,۲۲)$ بگذرد.

۴ــ دو منحنی به معادلات $y=\frac{۱}{۲}x^{۲}+ax$ و $y=x^{۲}+\frac{۱}{۲}a^{۲}$ مفروضند که در آن a یک عدد ثابت است. ثابت کنید که این دو منحنی در نقطه $A(a,\frac{۳}{۲}a^{۲})$ دارای خط مماس مشترک می‌باشند. اصطلاحاً می‌گویند این دو منحنی در نقطه $A(a,\frac{۳}{۲}a^{۲})$ بر هم مماس هستند.

مشتق‌های یک‌طرفه : در محاسبه مشتق یک تابع f در نقطه $x_{۰}$ باید حد زیر را حساب کنیم.

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(x_{۰}+h)-f(x_{۰})}{h}$$

اگر در محاسبه این حد، ابتدا حدهای چپ و راست را حساب کنیم، حدهای به‌دست‌آمده را مشتق‌های چپ و راست f در $x_{۰}$ می‌نامند. مشتق‌های چپ و راست f در $x_{۰}$ را به شکل زیر نشان می‌دهند.

$$f'_{+}(x_{۰})=\lim_{h\to ۰^{+}}\frac{f(x_{۰}+h)-f(x_{۰})}{h}$$

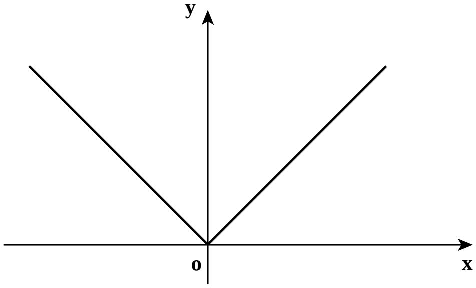
$$f'_{-}(x_{۰})=\lim_{h\to ۰^{-}}\frac{f(x_{۰}+h)-f(x_{۰})}{h}$$

در محاسبه مشتق‌های چپ و راست ممکن است به حالاتی برخورد کنیم که مشتق‌های چپ و راست مساوی نباشند که در این حالت گوییم تابع مشتق‌پذیر نیست. در این حالت وضعیت نمودار تابع در سمت راست و چپ نقطه متفاوت است.

مثال : مشتق‌های چپ و راست تابع $f(x)=|x|$ را در $x=0$ حساب کنید.

حل :
$$f'_{+}(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{|0+h|-|0|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1$$

$$f'_{-}(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{|0+h|-|0|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$



نمودار این تابع نیز نشان می‌دهد که در نقطه $x=0$ در سمت چپ، نمودار تابع به‌صورت خط $y=-x$ است و مماس بر آن دارای ضریب زاویه ۱- است ولی درسمت راست صفر نمودار تابع به‌صورت $y=x$ است و ضریب زاویه خط مماس ۱+ است.

مثال : مشتق‌های چپ و راست تابع $f(x)=|\sin x|$ را در $x=0$ بررسی کنید.

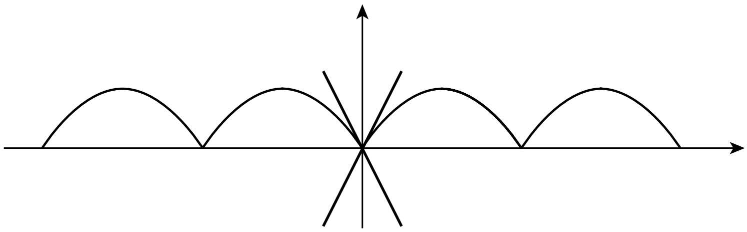
حل : برای xهای مثبت در بازه $[0,\frac{\pi}{2})$ مقدار $\sin x$ نامنفی است و روی این بازه $f(x)=\sin x$ پس مشتق راست f در صفر همان مشتق راست $\sin x$ در صفر است. البته $\sin x$ در صفر مشتق‌پذیر است و مشتق راست آن همان مشتق آن است. پس

$$f'_{+}(0) = \cos 0 = 1$$

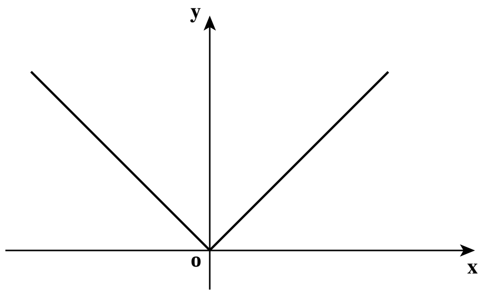
برای xهای منفی در بازه $(-\frac{\pi}{2},0]$ ، مقادیر $\sin x$ منفی است و تابع $f(x)$ روی این بازه به‌صورت $f(x)=-\sin x$ است. پس مشتق چپ f در صفر همان مشتق چپ $-\sin x$ در صفر است. اما $-\sin x$ تابعی مشتق‌پذیر است و مشتق چپ آن همان مشتق آن است. پس

$$f'_{-}(0) = -\cos 0 = -1$$

پس تابع $f(x)=|\sin x|$ در صفر مشتق‌پذیر نیست و نمودار تابع نیز نشان می‌دهد که مماس بر نمودار در سمت چپ و راست تابع با هم فرق دارند.



مشتق‌پذیری یک تابع خاصیتی قویتر از پیوستگی است. تابعی که در یک نقطه مشتق‌پذیر است، حتماً در آن نقطه پیوسته است. اما یک تابع می‌تواند در یک نقطه پیوسته باشد اما در آن نقطه مشتق‌پذیر نباشد. مثلاً تابع $y=|x|$ در $x=0$ پیوسته است. اما در این نقطه مشتق‌پذیر نیست.



فرض کنید تابع f در اطراف نقطه x_0 تعریف شده باشد و در این نقطه مشتق‌پذیر باشد، برای اثبات آن که f در x_0 پیوسته است باید ثابت کنیم $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ ، این شرط معادل با آن است که $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0))=0$ (چرا؟)

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0))=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\times(x-x_0)$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\times\lim_{x\to x_0}(x-x_0)$$

$$=f'(x_0)\times 0=0$$

قضایای مشتق توابع

برای محاسبه مشتق توابع باید حد یک کسر را حساب کنیم و اگر تابع پیچیده باشد، محاسبه حد آن کسر مشکل خواهد شد. قضایایی در محاسبه مشتق توابع وجود دارد که کار محاسبه مشتق را آسانتر می‌کند. مثلاً سال گذشته دیدیم که برای دو تابع f و g که در اطراف نقطه‌ای مانند x_0 تعریف

شده‌اند و در نقطه $x_\circ$ مشتق‌پذیرند، تابع f+g نیز در $x_\circ$ مشتق‌پذیر است و

$$(f+g)'(x_\circ)=f'(x_\circ)+g'(x_\circ)$$

درستی این قضیه به سادگی با محاسبه به‌دست می‌آید :

$$\begin{aligned}(f+g)'(x_\circ)&=\lim_{h\to\circ}\frac{(f+g)(x_\circ+h)-(f+g)(x_\circ)}{h}\\&=\lim_{h\to\circ}\frac{f(x_\circ+h)+g(x_\circ+h)-f(x_\circ)-g(x_\circ)}{h}\\&=\lim_{h\to\circ}\frac{(f(x_\circ+h)-f(x_\circ)+(g(x_\circ+h)-g(x_\circ))}{h}\\&=\lim_{h\to\circ}\frac{f(x_\circ+h)-f(x_\circ)}{h}+\lim_{h\to\circ}\frac{g(x_\circ+h)-g(x_\circ)}{h}=f'(x_\circ)+g'(x_\circ)\end{aligned}$$

برای توابع $f-g$, $f.g$, $\frac{f}{g}(g(x_\circ)\neq\circ)$ نیز مشتق‌پذیری در $x_\circ$ برقرار است و داریم :

$$(f-g)'(x_\circ)=f'(x_\circ)-g'(x_\circ)$$

$$(f.g)'(x_\circ)=f'(x_\circ)g(x_\circ)+f(x_\circ)g'(x_\circ)$$

$$(\frac{f}{g})'(x_\circ)=\frac{f'(x_\circ)g(x_\circ)-f(x_\circ)g'(x_\circ)}{g(x_\circ)۲}$$

همچنین سال گذشته دیدیم برای ترکیب دو تابع f و g داریم :

$$f(g(x))'=f'(g(x))g'(x)$$

اگر u(x) تابع مشتق‌پذیری باشد، مشتقات زیر برقرارند.

$$(u(x)^n)'=nu(x)^{n-۱}u'(x)$$

$$(\sqrt{u(x)})'=\frac{u'(x)}{۲\sqrt{u(x)}}\qquad(\circ<u(x))$$

$$(\sin(u(x)))'=\cos u(x).u'(x)$$

$$(\frac{۱}{u(x)})'=\frac{-u'(x)}{u(x)^۲}$$

مثال : مشتق تابع $f(x)=\sqrt{x^۲+۱}$ را حساب کنید.

حل : اگر قرار دهیم $g(x)=x^۲+۱$ و $h(x)=\sqrt{x}$ داریم $f(x)=h(g(x))$. پس

$$f'(x)=h'(g(x)).g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{g(x)}}.g'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

مثال : مشتق تابع $f(x)=\sin^4 x$ را حساب کنید.

حل : اگر قرار دهیم $g(x)=\sin x$, $h(x)=x^4$ داریم $f(x)=h(g(x))$. پس

$$f'(x)=h'(g(x)).g'(x)=4(g(x))^3.g'(x)=4\sin^3 x\cos x$$

مثال : مشتق تابع $f(x)=\sin x^4$ را حساب کنید.

حل : اگر توابع g و h مانند مثال پیش باشند داریم $f(x)=g(h(x))$. پس

$$f'(x)=g'(h(x)).h'(x)=\cos h(x).h'(x)=\cos x^4.4x^3$$

مسائل

۱ــ مشتق تابع $y=x^3$ را از طریق تعریف در نقطه دلخواه $x=a$ حساب کنید.

۲ــ معادله خط مماس بر نمودار تابع $y=x+\frac{1}{x}$ را در نقطه به طول $x=1$ را بنویسید. معادله خط عمود بر نمودار این تابع را درنقطه به طول $x=-1$ بنویسید.

۳ــ آیا می‌توان خطی از نقطه $(3,0)$ گذراند که بر سهمی $y=x^2$ عمود شود؟ چند خط با این ویژگی وجود دارد؟

۴ــ ماشینی با سرعت ثابت در حال حرکت است و ناگهان ترمز می‌کند تا بایستد. معادله حرکت این ماشین روی محوری که بر خیابان منطبق است به صورت $x(t)=-\frac{t^2}{2}+30t$ است. t زمان برحسب ثانیه است که از لحظه شروع ترمز اندازه‌گیری شده است و $x(t)$ برحسب متر است.

الف) ماشین پس از طی چند متر می‌ایستد؟

ب) ماشین پس از ترمزکردن چند ثانیه طول می‌کشد که بایستد؟

ج) سرعت ماشین در لحظه ترمزکردن چقدر بوده است؟

د) پس از چند ثانیه سرعت ماشین به ۲ متر بر ثانیه می‌رسد؟

۵ــ منحنی نمودار تابع $y=\sin x$ با چه زاویه‌هایی محور xها را قطع می‌کند؟ (زاویه خط مماس بر نمودار تابع با محور xها)

۶ــ ثابت کنید خط‌های $y=2$ و $y=-2$ بر نمودار تابع $y=x+\frac{1}{x}$ مماس هستند.

۷ــ تابع $y=x^3-x^2-x$ را در نظر بگیرید.

الف) این تابع در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی است؟

ب) این تابع در چند نقطه محور xها را قطع می‌کند و با چه زاویه‌ای محور xها را قطع می‌کند؟

ج) بیشترین سرعت نزول تابع در چه نقطه‌ای رخ می‌دهد و مقدار سرعت نزول در این نقطه چقدر است؟

د) در چه نقاطی سرعت صعود تابع ۷ است؟

۸ــ برای هر عدد ثابت c و تابع مشتق‌پذیر f. با استفاده از تعریف مشتق ثابت کنید :

$$(cf)'(x) = cf'(x)$$

۹ــ برای سه تابع مشتق‌پذیر h,g,f ثابت کنید :

$$(f+g+h)'(x) = f'(x)+g'(x)+h'(x)$$

$$(f.g.h)'(x) = f'(x)g(x)h(x)+f(x)g'(x)h(x)+f(x)g(x)h'(x)$$

۱۰ــ با استفاده از مشتق حاصل‌ضرب توابع، مشتق توابع $y=x^۲$ و $y=x^۳$ را حساب کنید. برای مشتق تابع $y=x^n$ چه حدسی می‌زنید؟ حدس خود را برای $y=x^۴$ و $y=x^۵$ ثابت کنید.

۱۱ــ مشتق توابع زیر را حساب کنید.

الف) $y=\sin(۱+x^۲)$ ب) $y=\sin^۲(x+۱)$

ج) $y=\sqrt{\dfrac{\sin x}{۱+\cos x}}$ د) $y=\sin(\sin x)$

۱۲ــ فرض می‌کنیم $f(x)=\begin{cases} -۳x+۵ & \text{اگر} \quad x\le ۲ \\ x^۲-۲x-۱ & \text{اگر} \quad x>۲ \end{cases}$ مطلوب است محاسبهٔ $f'_-(۲)$ و $f'_+(۲)$، آیا این تابع در $x=۲$ مشتق‌پذیر است؟

۱۳ــ فرض می‌کنیم $f(x)=\begin{cases} ۲x+۵ & \text{اگر} \quad x\le ۳ \\ ۳x+۲ & \text{اگر} \quad x>۳ \end{cases}$ مطلوب است محاسبهٔ $f'_-(۳)$ و $f'_+(۳)$، آیا این تابع در $x=۳$ مشتق‌پذیر است؟

۱۴ــ تابع $y=\begin{cases} ax^۲+bx+۱ \ , & x\ge ۲ \\ x^۳ \ , & x<۲ \end{cases}$ مفروض است. اگر این تابع در نقطه $x=۲$ مشتق‌پذیر باشد اعداد ثابت a و b را به‌دست آورید.

مشتق توابع نمایی و لگاریتمی

در فصل قبل با عدد نپر آشنا شدیم. عدد نپر را که با e نشان دادیم حد دنباله $(۱+\frac{۱}{n})^n$ می‌باشد.

$$\lim_{n\to\infty}(۱+\frac{۱}{n})^n = e$$

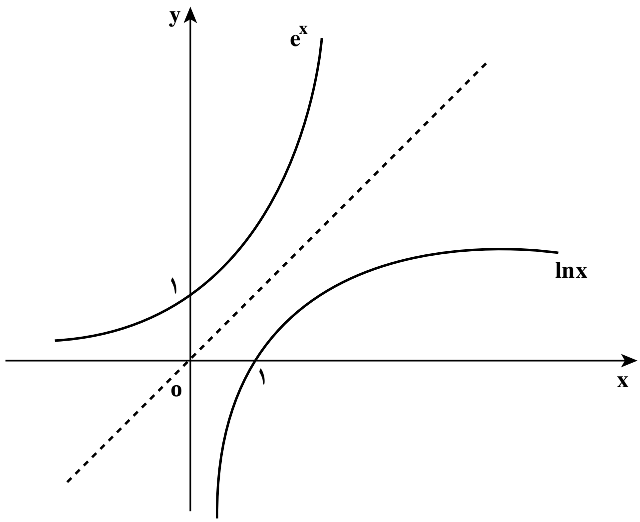
این عدد خصوصیت‌های قابل توجهی دارد که باعث می‌شود در ریاضیات به آن توجه شود. در حدگیری بالا اگر به جای عدد طبیعی n، متغیر حقیقی x ($x\in(۰,\infty)$) نیز به‌کار برده شود، تساوی همچنان برقرار است، یعنی $\lim_{x\to\infty}(۱+\frac{۱}{x})^x = e$. با درنظرگیری $x=\frac{۱}{t}$ شرط بزرگ‌شدن x، معادل آن است که t به صفر نزدیک شود، پس :

$$\lim_{t\to۰}(۱+t)^{\frac{۱}{t}} = e$$

لگاریتم بر پایه عدد نپر را با ln نشان می‌دهند و آن را لگاریتم طبیعی می‌نامند.

$$\ln a=b \Leftrightarrow e^b=a$$

توابع نمایی و لگاریتمی همگی توابعی پیوسته‌اند. از آن‌جا که e>۱، توابع e^x (با دامنه R) و lnx(با دامنه. $(۰,\infty)$) صعودی و پیوسته می‌باشند.



از آنجا که lnx تابعی پیوسته است از $\lim\limits_{x\to ۰}(۱+x)^{\frac{۱}{x}}=e$ می‌توان نتیجه گرفت

$$\lim_{x\to ۰}\ln(۱+x)^{\frac{۱}{x}}=\ln e=۱$$

بنابراین :

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\ln(۱+x)}{x}=۱$$

تساوی بالا نشان می‌دهد تابع lnx در x=۱ مشتق‌پذیر است و مشتق آن در x=۱ برابر ۱ است. زیرا

$$\ln'(۱)=\lim_{h\to ۰}\frac{\ln(۱+h)-\ln ۱}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{\ln(۱+h)}{h}=۱$$

در سایر نقاط $x\in(۰,\infty)$ نیز تابع lnx مشتق‌پذیر است و $(\ln x)'=\frac{۱}{x}$ زیرا

$$(\ln x)'=\lim_{h\to ۰}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{\ln(\frac{x+h}{x})}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{\ln(۱+\frac{h}{x})}{h}\times\frac{x}{x}=\lim_{h\to ۰}\frac{\ln(۱+\frac{h}{x})}{\frac{h}{x}}\times\frac{۱}{x}$$

$$=\lim_{k\to ۰}\frac{\ln(۱+k)}{k}\times\frac{۱}{x}=\frac{۱}{x}\qquad (k=\frac{h}{x})$$

از آن‌جا که e^x وارون تابع lnx است مشتق آن به شکل زیر به‌دست می‌آید.

$$\ln(e^x)=x\Rightarrow \ln\quad(e^x).(e^x)\quad=۱$$

$$\Rightarrow\frac{۱}{e^x}.(e^x)'=۱\Rightarrow(e^x)'=e^x$$

بنابراین e^x تابعی است که مشتق آن با خودش مساوی است. این از ویژگی‌های برجسته عدد نپر است و برای سایر اعداد این ویژگی برقرار نیست.

حال، برای عدد مثبت دلخواه a می‌توانیم مشتق تابع نمایی $y=a^x$ را حساب کنیم. ابتدا مشاهده می‌کنیم lny=xlna، بنابراین

$y=e^{\ln y}= e^{x\ln a}$

با استفاده از قاعده مشتق تابع مرکب،اگر قرار دهیم $u(x)=x\ln a$ داریم

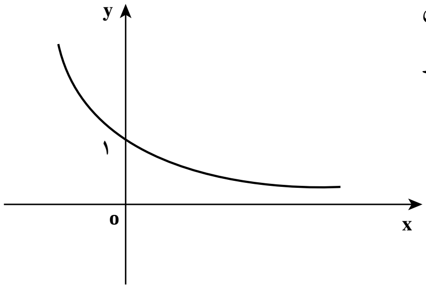
$y=e^{u(x)}\Rightarrow y \quad =e^{u(x)}.u \quad (x)=y.\ln a=a^x.\ln a$

بنابراین

$(a^x) \quad =a^x.\ln a$

دیده می‌شود که فقط به ازای $a=e$ مشتق a^x برابر خودش می‌شود.

اگر $۰<a<۱$، مشتق a^x منفی است و این تابع نزولی است که قبلاً مشاهده کرده بودیم. در این حالت نمودار تابع $y=a^x$ به شکل مقابل است.



مثال : تابع $\ln|x|$ روی $IR-\{۰\}$ قابل تعریف است. این تابع مشتق‌پذیر است و

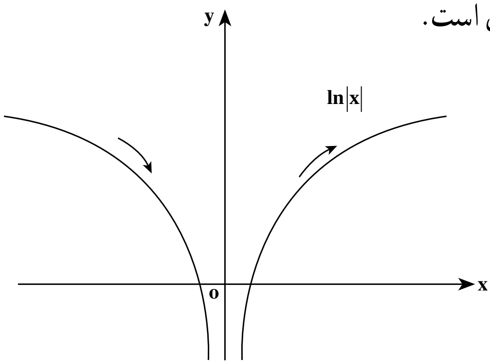
$$(\ln|x|)' = \frac{۱}{x}$$

برای مقادیر مثبت x درستی تساوی را دیده‌ایم و برای مقادیر منفی x داریم

$(\ln|x|) \quad =(\ln(-x)) \quad =\ln \quad (-x)\times(-x)$

$$= \frac{۱}{-x}\times(-۱) = \frac{۱}{x}$$

مشتق این تابع در xهای منفی، منفی است و تابع در اعداد منفی نزولی است و مشتق این تابع در xهای مثبت، مثبت و تابع در اعداد مثبت صعودی است.



اگر $u(x)$ تابع مشتق پذیری باشد که همواره ناصفر است می‌توانیم تابع $\ln|u(x)|$ را تشکیل دهیم که تابعی مشتق‌پذیر است. طبق قاعده مشتق تابع مرکب داریم

$$(\ln|u(x)|)' = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

همچنین اگر $u(x)$ تابع مشتق‌پذیر دلخواهی باشد، می‌توانیم تابع $e^{u(x)}$ را تشکیل دهیم که تابعی مشتق‌پذیر است. طبق قاعده مشتق تابع مرکب داریم

$$(e^{u(x)})' = e^{u(x)}.u'(x)$$

یکی از جاهایی که توابع نمایی رخ می‌دهند در رشد یا زوال کمیت‌ها است. برای مثال افزایش جمعیت انسان‌ها به‌گونه‌ای است که هر ساله با ضریب ثابتی از جمعیت سال قبل به جمعیت اضافه می‌شود. این ضریب را نرخ رشد جمعیت می‌نامند. اگر این ضریب را با k نشان دهیم و جمعیت در سال nام را با y_n نشان دهیم، داریم

$$y_{n+۱}=y_n+ky_n$$

اگر n را به صورت یک متغیر پیوسته از زمان در نظر بگیریم و به جای سال بعد یک لحظه جلوتر به اندازه h واحد را درنظر بگیریم می‌توانیم بنویسیم

$$y(x+h) \approx y(x)+h(ky(x))$$

یعنی

$$\frac{y(x+h)-y(x)}{h} \approx ky(x)$$

این رابطه نشان می‌دهد که در حد وقتی h به صفر نزدیک می‌شود، داریم

$$y'(x)=ky(x)$$

یعنی مشتق y مضربی از خود y است. این ویژگی فقط در توابع نمایی برقرار است و باید داشته باشیم $y(x)=Ae^{Bx}$. از آن‌جا که $y'(x)=Ae^{Bx}\times B$ باید $B=k$، A نیز $y(۰)$ است و میزان جمعیت در لحظه ابتدایی است، پس

$$y(x)=Ae^{kx}$$

اگر k مثبت باشد این تابع صعودی است ولی k می‌تواند منفی هم باشد که نشان‌دهنده زوال یا کاهش y است. در مواردی مانند فروپاشی هسته‌های رادیواکتیو، میزان رادیواکتیو بودن مواد در حال کاهش است و مقدار k منفی خواهد بود.

مسائل

۱ــ مشتق توابع زیر را حساب کنید.

الف) $y=e^{۲x}+e^{-x}+۲$ ب) $y = xe^{x^{۲}-۱}$

ج) $y=\ln(۱+\cos^{۲}x)$ د) $y=\sin x e^{\cos x}$

۲ــ تابع $y=xe^{x}$ را در نظر بگیریدکه روی IR تعریف شده است.

الف) این تابع در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی است؟

ب) نمودار این تابع در چند نقطه محور xها را قطع می کند؟

ج) زاویه برخورد نمودار تابع با محور xها چقدر است؟

د) نمودار این تابع چه شکلی می‌تواند باشد؟

۳ــ توابع زیر در چه نقاطی تعریف شده‌اند و مشتق آن‌ها در این نقاط چیست؟

الف) $\ln(\sin x)$ ب) $\ln|\cos x|$

ج) $\ln(x^{۲}-x)$ د) $\ln(|\ln x|)$

۴ــ هر ماده رادیواکتیو نیمه عمری دارد که با T نشان می‌دهیم. اگر $f(t)$ مقدار ماده رادیواکتیو در زمان t باشد، نیمه عمر T به معنای آن است که پس از گذشت T واحد زمانی مقدار ماده رادیواکتیو نصف می‌شود، یعنی برای هر t داریم

$$f(t+T)=\frac{۱}{۲}f(t)$$

تابع $f(t)$ به‌صورت $f(t)=Ae^{kt}$ است که A مقدار ماده رادیواکتیو در **لحظه** ابتدایی $t=۰$ است. مقدار k را بر حسب T تعیین کنید.

۵ــ برای یک عدد حقیقی b تابع $y(x)=x^{b}$ را در نظر بگیرید و با نوشتن آن به‌صورت $y(x)=e^{b\ln x}$ ثابت کنید.

$$(x^{b})' = bx^{b-۱}$$

مشتق ضمنی : اگر معادله‌ای بر حسب دو متغیر x و y داشته باشیم، ممکن است بتوان از آن معادله y را برحسب x حل کرد و یک تابع برحسب x به‌دست آورد.

مثال : در معادله $۲x-۳y=۱$ می‌توانیم y را برحسب x حل کنیم که نتیجه می‌شود

$$y=\frac{۱}{۳}(۱-۲x)$$

در اینجا گوییم معادله $۲x+۳y=۱$ به‌طور ضمنی تابع $y=\frac{۱}{۳}(۱-۲x)$ را تعریف کرده است.

مثال : در معادله $۲x^۲+۳y^۲=۱$ می‌توانیم y را برحسب xحل کنیم، ولی فقط یک جواب به دست نمی‌آید و حداقل دو جواب به شکل زیر قابل محاسبه است.

$$y=\pm\sqrt{\frac{۱}{۳}(۱-۲x^۲)}$$

هر کدام از این جواب‌ها توابعی هستند که به‌طور ضمنی توسط معادله $۲x^۲+۳y^۲=۱$ تعریف شده‌اند.

توابعی که به‌طور ضمنی توسط یک معادله تعریف می‌شوند، را توابع ضمنی می‌نامند. گاهی اوقات محاسبه صریح تابع ضمنی امکان‌ناپذیر است،اگر چه می‌دانیم چنین تابعی وجود دارد. اگر معادله تعریف کننده تابع ضمنی نسبت به متغیرهای x و y مشتق‌پذیری داشته باشد، تابع ضمنی نیز مشتق‌پذیر می‌شود و می‌توانیم مشتق آن را به‌طور ضمنی حساب کنیم.

مثال : فرض $y(x)$ تابعی باشد که به‌طور ضمنی توسط معادله $۲x^۲+۳y^۲=۱$ تعریف شده است، یعنی $۲x^۲+۳y(x)^۲=۱$ طرفین توابع مشتق‌پذیری از x هستند و طرف دوم تابع ثابت است. با مشتق‌گیری از طرفین نتیجه می‌شود.

$$۴x+۶y(x)y\quad(x)=۰$$

$$\Rightarrow y'(x)=-\frac{۲x}{۳y(x)}$$

در این مثال خاص می‌دانیم $y(x)=\sqrt{\frac{۱}{۳}(۱-۲x^۲)}$ یا $y(x)=-\sqrt{\frac{۱}{۳}(۱-۲x^۲)}$

اگر مشتق y را مستقیماً نیز حساب کنیم می‌بینیم تساوی $y'(x)=-\frac{۲x}{۳y(x)}$ برقرار است. در این مثال دیده می‌شود که برای محاسبه $y\quad(x)$ تقسیم بر $y(x)$ پیش می‌آید و لازم است $y(x)$ ناصفر باشد بنابراین مشتق‌پذیری تابع ضمنی این مثال فقط در جاهایی است که $y(x)$ ناصفر باشد. فرمول صریح $y(x)$ نیز نشان می‌دهد که این تابع در xهایی که $y(x)$ صفر است مشتق‌پذیری ندارد.

مثال : در معادله $x^۲+xy+y^۲=۳$ ، $x=۱$ و $y=۱$ یک جواب آن است و این معادله تعریف کننده یک تابع ضمنی $y(x)$ است به‌گونه‌ای که $y(۱)=۱$. مشتق این تابع را در $x=۱$ بیابید.

حل : داریم $x^۲+xy(x)+y(x)^۲=۳$، با مشتق‌گیری نسبت به x داریم

$$۲x+y(x)+xy'(x)+۲y(x)y'(x)=۰$$

$$\Rightarrow y'(x)=-\frac{۲x+y(x)}{x+۲y(x)}$$

$$\Rightarrow y'(۱)=-\frac{۲\times ۱+y(۱)}{۱+۲y(۱)}=-\frac{۲+۱}{۱+۲}=-۱$$

مثال : معادله $x\sin y+x+y=۰$ دارای یک جواب $x=\pi$ و $y=-\pi$ است. و این معادله یک تابع ضمنی $y=f(x)$ تعریف می‌کند که $f(\pi)=-\pi$. $f'(\pi)$ را حساب کنید.

حل : داریم $x\sin f(x)+x+f(x)=۰$ با مشتق‌گیری داریم

$$\sin f(x)+x\cos f(x).f'(x)+۱+f'(x)=۰$$

$$\Rightarrow f'(x)=-\frac{۱+\sin f(x)}{x\cos f(x)+۱}$$

$$\Rightarrow f'(\pi)=-\frac{۱+\sin f(\pi)}{\pi\cos f(\pi)+۱}=\frac{۱+\sin(-\pi)}{\pi\cos(-\pi)+۱}$$

$$=\frac{۱}{۱-\pi}$$

مسائل

۱ــ نشان دهید که نقطه $A(۱,۱)$ روی نمودار معادله $x^۴+y^۴+x^۲y^۲-۳=۰$ قرار دارد. اگر $y(x)$ تابعی باشد که توسط این معادله تعریف شده است و $y(۱)=۱$، معادله خط مماس بر نمودار این تابع را در نقطه A بنویسید.

۲ــ در تمرین‌های زیر با استفاده از مشتق‌گیری ضمنی مشتق y نسبت به x را محاسبه کنید.

الف) $x\sin y+y\cos x=۱$

ب) $y=\cos(x-y)$

ج) $x^۲y^۲=x^۲+y^۲$

۳ــ معادله خطّ مماس بر منحنی به معادلهٔ $x^۴+y^۴+x^۲y^۲-۳=۰$ در نقطهٔ $A(۱,۱)$ را به‌دست آورید.

۴ــ معادله خطّ مماس بر منحنی به معادلهٔ $\sqrt{x}+\sqrt{y}=۴$ در نقطهٔ $A(۴,۴)$ را به‌دست آورید.

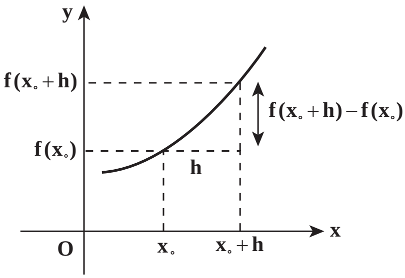
۵ــ در چه نقطه‌ای از منحنی به معادلهٔ $x+\sqrt{xy}+y=۱$ خطّ مماس بر منحنی موازی با محور xها است؟

۶ــ اگر $۸y^۲-۲xy^۳=-۱۶$ آهنگ تغییر لحظه‌ای y نسبت به x در نقطهٔ $A(۳,۲)$ را به‌دست آورید.

فصل ۳

مشتق توابع

یادآوری و تکمیل



سال گذشته با مفهوم مشتق توابع آشنا شده‌اید.

برای یک تابع مانند f با تغییر مقدارهای متغیر x مقادیر f(x) نیز تغییراتی می‌کنند. مشتق یک تابع، چگونگی تغییر مقدار تابع را نسبت به مقدار متغیر نشان می‌دهد.

در یک نقطه $x_\circ$ از دامنه f اگر به اندازه h واحد از $x_\circ$ دور شویم، مقدار تابع از $f(x_\circ)$ به $f(x_\circ+h)$ تغییر می‌کند.

میزان تغییرات f برابر $f(x_\circ+h)-f(x_\circ)$ و میزان تغییرات x به اندازه h است.

کسر $\frac{f(x_\circ+h)-f(x_\circ)}{h}$ نسبت این تغییرات را حساب می‌کند و حد آن در $h=\circ$ (در صورت وجود) مشتق f در $x_\circ$ نامیده‌ایم و با $f'(x_\circ)$ نشان داده‌ایم.

مثال : مشتق تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را در نقطه دلخواه $x_\circ\in(\circ,\infty)$ حساب کنید.

حل :

$$f'(x_\circ)=\lim_{h\to\circ}\frac{\sqrt{x_\circ+h}-\sqrt{x_\circ}}{h}=\lim_{h\to\circ}\frac{(\sqrt{x_\circ+h}-\sqrt{x_\circ})(\sqrt{x_\circ+h}+\sqrt{x_\circ})}{h(\sqrt{x_\circ+h}+\sqrt{x_\circ})}$$

$$=\lim_{h\to\circ}\frac{(x_\circ+h)-x_\circ}{h(\sqrt{x_\circ+h}+\sqrt{x_\circ})}=\lim_{h\to\circ}\frac{۱}{\sqrt{x_\circ+h}+\sqrt{x_\circ}}=\frac{۱}{۲\sqrt{x_\circ}}$$

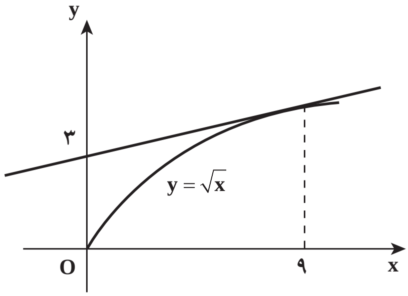
سال گذشته دیدیم که $f'(x_\circ)$ نشان‌دهنده ضریب زاویه (شیب) خط مماس بر نمودار f در نقطه $(x_\circ,f(x_\circ))$ است. بنابراین معادله خط مماس بر نمودار f در نقطه $(x_\circ,f(x_\circ))$ عبارت است از :

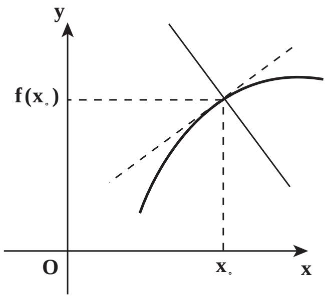
$$y-f(x_\circ)=f'(x_\circ)(x-x_\circ)$$

مثال : معادله خط مماس بر نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را در نقطه(۹,۳) بنویسید.

حل : داریم $f'(۹)=\frac{۱}{۲\sqrt{۹}}=\frac{۱}{۶}$ پس معادله خط مماس عبارت است از :

$$y-۳=\frac{۱}{۶}(x-۹)$$





اگر خطی نمودار تابعی مانند f را به گونه‌ای قطع کند که بر خط مماس بر نمودار f در آن نقطه عمود شود، گوییم خط بر نمودار تابع در آن نقطه عمود است.

اگر این نقطه $(x_۰,f(x_۰))$ باشد، ضریب زاویه خط مماس $f'(x_۰)$ است، پس ضریب زاویه خط عمود، در حالت $f'(x_۰)\neq ۰$ برابر $-\frac{۱}{f'(x_۰)}$ است. پس معادله خط عمود بر نمودار تابع f در نقطه $(x_۰,f(x_۰))$ عبارت است از :

$$y-f(x_۰)=-\frac{۱}{f'(x_۰)}(x-x_۰)$$

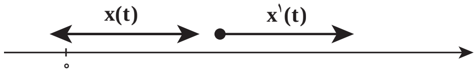
در حالتی که $f'(x_۰)=۰$ ، خط مماس بر نمودار f افقی است و عمود بر آن موازی محور yها است و معادله آن $x=x_۰$ خواهد بود.

مثال : معادله خط عمود بر نمودار تابع $y=\frac{۱}{x}$ را در نقطه $(۲,\frac{۱}{۲})$ بنویسید.

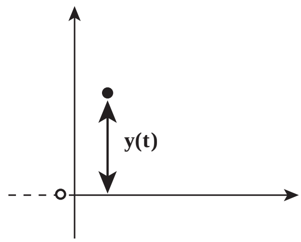
حل : داریم $y'=\frac{-۱}{x^۲}$ ، پس $y'(۲)=\frac{-۱}{۴}$ و ضریب زاویه خط عمود ۴ خواهد بود.

$$y-۲=۴(x-\frac{۱}{۲})$$

سال گذشته دیدیم که اگر متحرکی روی محور xها در حال حرکت باشد و در هر لحظه t در مکان x(t) قرار داشته باشد، مشتق x(t) در هر لحظه نسبت تغییرات مکان به تغییرات زمان را می‌سنجد که در فیزیک آن را سرعت متحرک می‌نامند. پس سرعت این متحرک در لحظه $t_۰$ برابر است با $x'(t_۰)$.



مثال : سیبی را در لحظه $t=0$ از زمین رو به بالا پرتاب می‌کنیم. معادله حرکت آن به صورت $y(t)=-5t^2+30t$ است، که y بر حسب متر و t بر حسب ثانیه است. این حرکت چند ثانیه طول می‌کشد و سرعت حرکت سیب در لحظه آخر چقدر است؟



حل : داریم $y(0)=0$ و $y(6)=0$، یعنی سیب در لحظات $t=0$ و $t=6$ در سطح زمین است در لحظه $t=0$ از سطح زمین رو به بالا حرکت کرده است و در لحظه $t=6$ مجدداً به زمین برگشته است. سرعت حرکت سیب در لحظه آخر $y'(6)$ است.

$$y'(t)=-10t+30 \Rightarrow y'(6)=-60+30=-30$$

یعنی سیب با سرعت سی متر بر ثانیه به زمین برخورد می‌کند.

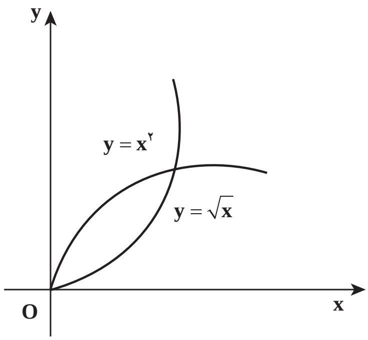
در مثال بالا دیدیم که مقدار مشتق منفی شده است، منفی شدن مقدار مشتق چه معنایی دارد؟

در مثال قبل اگر سرعت حرکت سیب را در لحظه $t=0$ حساب کنیم داریم $y'(0)=30$ و در این لحظه مقدار مشتق مثبت است، اما در لحظه آخر مقدار مشتق منفی است. تفاوت این دو لحظه در آن است که در لحظه $t=0$ سیب رو به بالا حرکت می‌کند و مقدارهای $y(t)$ در حال افزایش هستند، اما در لحظه $t=6$، سیب رو به پایین حرکت می‌کند و مقدارهای $y(t)$ رو به کاهش هستند. علامت مشتق نشان‌دهنده آن است که تابع در اطراف آن نقطه در حال افزایش است یا کاهش.

اگر تابع f در یک بازه حول x_0 صعودی باشد، کسر $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ نامنفی است و حد آن نیز نامنفی خواهد بود، یعنی $f'(x_0)\geq 0$. اما اگر تابع f در یک بازه حول x_0 نزولی باشد این کسر نامثبت است و حد آن نیز نامثبت خواهد بود، یعنی $f'(x_0)\leq 0$.

بنابراین علامت مشتق تابع نشانگر وضعیت تابع از لحاظ صعودی بودن یا نزولی‌بودن است.

اندازه مشتق نیز نشان می‌دهد شدت صعود یا نزول تابع چقدر است. برای مثال توابع $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=x^{۲}$ هر دو روی بازه $(۰,\infty)$ صعودی هستند و مشتق آن‌ها مثبت است.



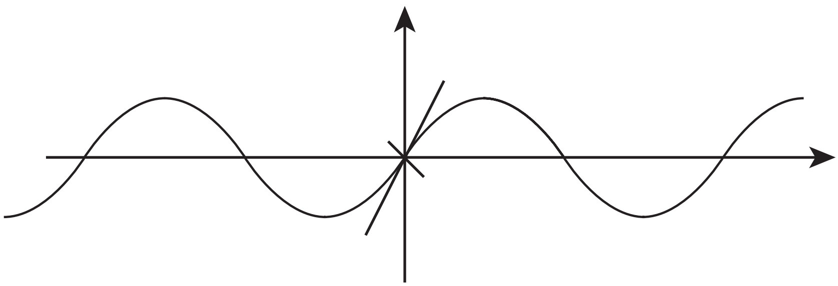
اما سرعت صعود $f(x)$ مدام در حال کاهش است ولی سرعت صعود $g(x)$ مدام در حال افزایش است. این مطلب در مشتق آن‌ها دیده می‌شود، داریم $f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}$ و $g'(x)=۲x$.

با افزایش x، مقدار $f'(x)$ در حال کاهش ولی مقدار $g'(x)$ در حال افزایش است.

بنابراین اندازه مشتق نشان می‌دهد که مقادیر تابع با چه سرعتی در حال صعود یا نزول هستند.

مثال : سرعت صعود تابع $y=\sin x$ در چه نقطه‌ای از همه بیشتر است؟

حل : باید ببینیم بیشترین مقدار y' در کجاست. داریم $y'=\cos x$ و این تابع در $x=۰$ مقدار ۱ را دارد که بیشترین مقدار $\cos x$ است. پس در $x=۰$، تابع $y=\sin x$ بیشترین سرعت افزایش را دارد. البته در نقاط به صورت $x=۲k\pi$ نیز همین وضعیت برقرار است.



تمرین

۱ــ متحرّکی روی یک خط افقی حرکت می کند که قانون حرکت آن $s=\frac{۱}{۳}t^{۳}-۳t^{۲}+۸t+۱۰$

است، در چه بازه زمانی متحرّک در جهت مثبت خطّ، حرکت می‌کند؟ در کدام بازه زمانی متحرّک در جهت منفی خطّ حرکت می‌کند؟ در کدام لحظه‌ها متحرّک تغییر جهت می‌دهد؟

۲ــ توپی را با سرعت اوّلیه ۷۸/۴ متر در ثانیه به‌طور قائم از زمین به بالا پرتاب می‌کنیم. اگر جهت مثبت فاصله از نقطه پرتاب به طرف بالا باشد، مطلوب است محاسبهٔ

الف) سرعت لحظه‌ای توپ در پایان یک ثانیه

ب) سرعت لحظه‌ای در پایان ۴ ثانیه

ج) مدت زمان لازم برای رسیدن توپ به بالاترین نقطه

د) ارتفاعی که توپ بالا خواهد رفت

هـ) مدتی که طول می‌کشد تا توپ به زمین برسد.

و) سرعت لحظه‌ای توپ وقتی که به زمین می‌رسد.

۳ــ منحنی به معادله $y=x^۲$ مفروض است. نقطه‌ای واقع بر این منحنی به دست آورید که خط قائم بر منحنی در آن نقطه از نقطه $A(۳۵,۲۲)$ بگذرد.

۴ــ دو منحنی به معادلات $y = x^۲ + \frac{۱}{۲}a^۲$ و $y = \frac{۱}{۲}x^۲ + ax$ مفروضند که در آن a یک عدد ثابت است. ثابت کنید که این دو منحنی در نقطه $A(a,\frac{۳}{۲}a^۲)$ دارای خط مماس مشترک می‌باشند. اصطلاحاً می‌گویند این دو منحنی در نقطه $A(a,\frac{۳}{۲}a^۲)$ بر هم مماس هستند.

مشتق‌های یک‌طرفه: در محاسبه مشتق یک تابع f در نقطه $x_\circ$ باید حد زیر را حساب کنیم.

$$\lim_{h\to\circ} \frac{f(x_\circ+h)-f(x_\circ)}{h}$$

اگر در محاسبه این حد، ابتدا حدهای چپ و راست را حساب کنیم، حدهای به‌دست‌آمده را مشتق‌های چپ و راست f در $x_\circ$ می‌نامند. مشتق‌های چپ و راست f در $x_\circ$ را به شکل زیر نشان می‌دهند.

$$f'_+(x_\circ) = \lim_{h\to\circ^+} \frac{f(x_\circ+h)-f(x_\circ)}{h}$$

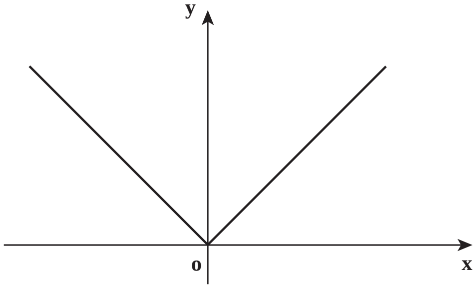
$$f'_-(x_\circ) = \lim_{h\to\circ^-} \frac{f(x_\circ+h)-f(x_\circ)}{h}$$

در محاسبه مشتق‌های چپ و راست ممکن است به حالاتی برخورد کنیم که مشتق‌های چپ و راست مساوی نباشند که در این حالت گوییم تابع مشتق‌پذیر نیست. در این حالت وضعیت نمودار تابع در سمت راست و چپ نقطه متفاوت است.

مثال : مشتق‌های چپ و راست تابع $f(x)=|x|$ را در $x=0$ حساب کنید.

حل :
$$f'_+(0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{|0+h|-|0|}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h}{h}=1$$

$$f'_-(0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{|0+h|-|0|}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-h}{h}=-1$$



نمودار این تابع نیز نشان می‌دهد که در نقطه $x=0$ در سمت چپ، نمودار تابع به‌صورت خط $y=-x$ است و مماس بر آن دارای ضریب زاویه -1 است ولی درسمت راست صفر نمودار تابع به‌صورت $y=x$ است و ضریب زاویه خط مماس $+1$ است.

مثال : مشتق‌های چپ و راست تابع $f(x)=|\sin x|$ را در $x=0$ بررسی کنید.

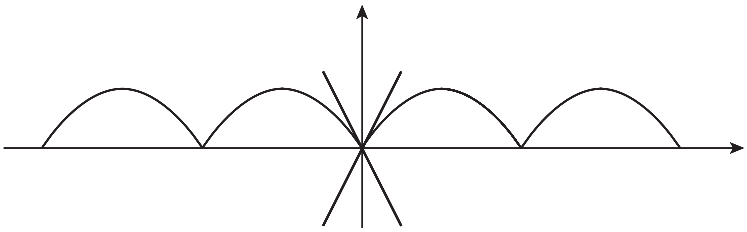
حل : برای xهای مثبت در بازه $[0,\frac{\pi}{2})$ مقدار $\sin x$ نامنفی است و روی این بازه $f(x)=\sin x$ پس مشتق راست f در صفر همان مشتق راست $\sin x$ در صفر است. البته $\sin x$ در صفر مشتق‌پذیر است و مشتق راست آن همان مشتق آن است. پس

$$f'_+(0)=\cos 0=1$$

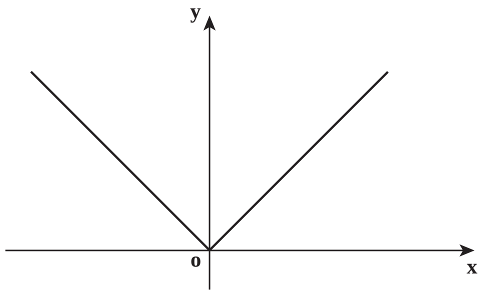
برای xهای منفی در بازه $(-\frac{\pi}{2},0]$ ، مقادیر $\sin x$ منفی است و تابع $f(x)$ روی این بازه به‌صورت $f(x)=-\sin x$ است. پس مشتق چپ f در صفر همان مشتق چپ $-\sin x$ در صفر است. اما $-\sin x$ تابعی مشتق‌پذیر است و مشتق چپ آن همان مشتق آن است. پس

$$f'_-(0)=-\cos 0=-1$$

پس تابع $f(x)=|\sin x|$ در صفر مشتق‌پذیر نیست و نمودار تابع نیز نشان می‌دهد که مماس بر نمودار در سمت چپ و راست تابع با هم فرق دارند.



مشتق‌پذیری یک تابع خاصیتی قویتر از پیوستگی است. تابعی که در یک نقطه مشتق‌پذیر است، حتماً در آن نقطه پیوسته است. اما یک تابع می‌تواند در یک نقطه پیوسته باشد اما در آن نقطه مشتق‌پذیر نباشد. مثلاً تابع $y=|x|$ در $x=0$ پیوسته است. اما در این نقطه مشتق‌پذیر نیست.



فرض کنید تابع f در اطراف نقطه x_0 تعریف شده باشد و در این نقطه مشتق‌پذیر باشد، برای اثبات آن که f در x_0 پیوسته است باید ثابت کنیم $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ ، این شرط معادل با آن است که $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0))=0$ (چرا؟)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0)) &= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\times(x-x_0)\\ &= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\times\lim_{x\to x_0}(x-x_0)\\ &= f'(x_0)\times 0=0\end{aligned}$$

قضایای مشتق توابع

برای محاسبه مشتق توابع باید حد یک کسر را حساب کنیم و اگر تابع پیچیده باشد، محاسبه حد آن کسر مشکل خواهد شد. قضایایی در محاسبه مشتق توابع وجود دارد که کار محاسبه مشتق را آسانتر می‌کند. مثلاً سال گذشته دیدیم که برای دو تابع f و g که در اطراف نقطه‌ای مانند x_0 تعریف

شده‌اند و در نقطه x_0 مشتق‌پذیرند، تابع f+g نیز در x_0 مشتق‌پذیر است و

$$(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$$

درستی این قضیه به سادگی با محاسبه به‌دست می‌آید :

$$\begin{aligned}(f+g)'(x_0)&=\lim_{h\to 0}\frac{(f+g)(x_0+h)-(f+g)(x_0)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)+g(x_0+h)-f(x_0)-g(x_0)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{(f(x_0+h)-f(x_0)+(g(x_0+h)-g(x_0))}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}=f'(x_0)+g'(x_0)\end{aligned}$$

برای توابع $f-g$, $f.g$, $\frac{f}{g}(g(x_0)\neq 0)$ نیز مشتق‌پذیری در x_0 برقرار است و داریم :

$$(f-g)'(x_0)=f'(x_0)-g'(x_0)$$

$$(f.g)'(x_0)=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$$

$$(\frac{f}{g})'(x_0)=\frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

همچنین سال گذشته دیدیم برای ترکیب دو تابع f و g داریم :

$$f(g(x))'=f'(g(x))g'(x)$$

اگر u(x) تابع مشتق‌پذیری باشد، مشتقات زیر برقرارند.

$$(u(x)^n)'=nu(x)^{n-1}u'(x)$$

$$(\sqrt{u(x)})'=\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}\qquad (0<u(x))$$

$$(\sin(u(x)))'=\cos u(x).u'(x)$$

$$(\frac{1}{u(x)})'=\frac{-u'(x)}{u(x)^2}$$

مثال : مشتق تابع $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ را حساب کنید.

حل : اگر قرار دهیم $g(x)=x^2+1$ و $h(x)=\sqrt{x}$ داریم $f(x)=h(g(x))$. پس

$$f'(x)=h'(g(x)).g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{g(x)}}.g'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

مثال : مشتق تابع $f(x)=\sin^4 x$ را حساب کنید.

حل : اگر قرار دهیم $g(x)=\sin x$, $h(x)=x^4$ داریم $f(x)=h(g(x))$. پس

$$f'(x)=h'(g(x)).g'(x)=4(g(x))^3.g'(x)=4\sin^3 x\cos x$$

مثال : مشتق تابع $f(x)=\sin x^4$ را حساب کنید.

حل : اگر توابع g و h مانند مثال پیش باشند داریم $f(x)=g(h(x))$. پس

$$f'(x)=g'(h(x)).h'(x)=\cos h(x).h'(x)=\cos x^4.4x^3$$

مسائل

۱ــ مشتق تابع $y=x^3$ را از طریق تعریف در نقطه دلخواه $x=a$ حساب کنید.

۲ــ معادله خط مماس بر نمودار تابع $y=x+\frac{1}{x}$ را در نقطه به طول $x=1$ را بنویسید. معادله خط عمود بر نمودار این تابع را درنقطه به طول $x=-1$ بنویسید.

۳ــ آیا می‌توان خطی از نقطه $(3,0)$ گذراند که بر سهمی $y=x^2$ عمود شود؟ چند خط با این ویژگی وجود دارد؟

۴ــ ماشینی با سرعت ثابت در حال حرکت است و ناگهان ترمز می‌کند تا بایستد. معادله حرکت این ماشین روی محوری که بر خیابان منطبق است به صورت $x(t)=-\frac{t^2}{2}+30t$ است. t زمان برحسب ثانیه است که از لحظه شروع ترمز اندازه‌گیری شده است و $x(t)$ برحسب متر است.

الف) ماشین پس از طی چند متر می‌ایستد؟

ب) ماشین پس از ترمزکردن چند ثانیه طول می‌کشد که بایستد؟

ج) سرعت ماشین در لحظه ترمزکردن چقدر بوده است؟

د) پس از چند ثانیه سرعت ماشین به ۲ متر بر ثانیه می‌رسد؟

۵ــ منحنی نمودار تابع $y=\sin x$ با چه زاویه‌هایی محور xها را قطع می‌کند؟ (زاویه خط مماس بر نمودار تابع با محور xها)

۶ــ ثابت کنید خط‌های $y=2$ و $y=-2$ بر نمودار تابع $y=x+\frac{1}{x}$ مماس هستند.

۷ــ تابع $y=x^3-x^2-x$ را در نظر بگیرید.

الف) این تابع در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی است؟

ب) این تابع در چند نقطه محور xها را قطع می‌کند و با چه زاویه‌ای محور xها را قطع می‌کند؟

ج) بیشترین سرعت نزول تابع در چه نقطه‌ای رخ می‌دهد و مقدار سرعت نزول در این نقطه چقدر است؟

د) در چه نقاطی سرعت صعود تابع ۷ است؟

۸ــ برای هر عدد ثابت c و تابع مشتق‌پذیر f. با استفاده از تعریف مشتق ثابت کنید :

$$(cf)'(x) = cf'(x)$$

۹ــ برای سه تابع مشتق‌پذیر h,g,f ثابت کنید :

$$(f+g+h)'(x) = f'(x)+g'(x)+h'(x)$$

$$(f.g.h)'(x) = f'(x)g(x)h(x)+f(x)g'(x)h(x)+f(x)g(x)h'(x)$$

۱۰ــ با استفاده از مشتق حاصل‌ضرب توابع، مشتق توابع $y=x^۲$ و $y=x^۳$ را حساب کنید. برای مشتق تابع $y=x^n$ چه حدسی می‌زنید؟ حدس خود را برای $y=x^۴$ و $y=x^۵$ ثابت کنید.

۱۱ــ مشتق توابع زیر را حساب کنید.

الف) $y=\sin(۱+x^۲)$　　ب) $y=\sin^۲(x+۱)$

ج) $y=\sqrt{\dfrac{\sin x}{۱+\cos x}}$　　د) $y=\sin(\sin x)$

۱۲ــ فرض می‌کنیم $f(x)=\begin{cases}-۳x+۵ & \text{اگر } x\le ۲\\ x^۲-۲x-۱ & \text{اگر } x>۲\end{cases}$ مطلوب است محاسبهٔ $f'_-(۲)$ و $f'_+(۲)$، آیا این تابع در $x=۲$ مشتق‌پذیر است؟

۱۳ــ فرض می‌کنیم $f(x)=\begin{cases}۲x+۵ & \text{اگر } x\le ۳\\ ۳x+۲ & \text{اگر } x>۳\end{cases}$ مطلوب است محاسبهٔ $f'_-(۳)$ و $f'_+(۳)$، آیا این تابع در $x=۳$ مشتق‌پذیر است؟

۱۴ــ تابع $y=\begin{cases}ax^۲+bx+۱ , & x\ge ۲\\ x^۳ , & x<۲\end{cases}$ مفروض است. اگر این تابع در نقطه $x=۲$ مشتق‌پذیر باشد اعداد ثابت a و b را به‌دست آورید.

مشتق توابع نمایی و لگاریتمی

در فصل قبل با عدد نپر آشنا شدیم. عدد نپر را که با e نشان دادیم حد دنباله $(۱+\frac{۱}{n})^n$ می‌باشد.

$$\lim_{n\to\infty}(۱+\frac{۱}{n})^n = e$$

این عدد خصوصیت‌های قابل توجهی دارد که باعث می‌شود در ریاضیات به آن توجه شود.

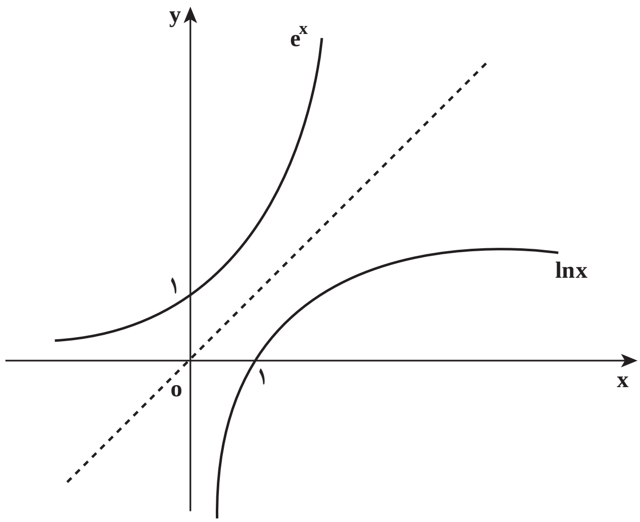
در حدگیری بالا اگر به جای عدد طبیعی n، متغیر حقیقی x ($x\in(۰,\infty)$) نیز به‌کار برده شود، تساوی همچنان برقرار است، یعنی $\lim_{x\to\infty}(۱+\frac{۱}{x})^x = e$. با درنظرگیری $x=\frac{۱}{t}$ شرط بزرگ‌شدن x، معادل آن است که t به صفر نزدیک شود، پس:

$$\lim_{t\to ۰}(۱+t)^{\frac{۱}{t}} = e$$

لگاریتم بر پایه عدد نپر را با ln نشان می‌دهند و آن را لگاریتم طبیعی می‌نامند.

$$\ln a=b \Leftrightarrow e^b=a$$

توابع نمایی و لگاریتمی همگی توابعی پیوسته‌اند. از آن‌جا که e>۱، توابع e^x (با دامنه R) و lnx(با دامنه. $(۰,\infty)$) صعودی و پیوسته می‌باشند.



از آنجا که lnx تابعی پیوسته است از $\lim\limits_{x\to ۰}(۱+x)^{\frac{۱}{x}}=e$ می‌توان نتیجه گرفت

$$\lim_{x\to ۰}\ln(۱+x)^{\frac{۱}{x}}=\ln e=۱$$

بنابراین :

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\ln(۱+x)}{x}=۱$$

تساوی بالا نشان می‌دهد تابع lnx در x=۱ مشتق‌پذیر است و مشتق آن در x=۱ برابر ۱ است.

زیرا

$$\ln'(۱)=\lim_{h\to ۰}\frac{\ln(۱+h)-\ln ۱}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{\ln(۱+h)}{h}=۱$$

در سایر نقاط $x\in(۰,\infty)$ نیز تابع lnx مشتق‌پذیر است و $(\ln x)'=\frac{۱}{x}$ زیرا

$$(\ln x)'=\lim_{h\to ۰}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{\ln(\frac{x+h}{x})}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{\ln(۱+\frac{h}{x})}{h}\times\frac{x}{x}=\lim_{h\to ۰}\frac{\ln(۱+\frac{h}{x})}{\frac{h}{x}}\times\frac{۱}{x}$$

$$=\lim_{k\to ۰}\frac{\ln(۱+k)}{k}\times\frac{۱}{x}=\frac{۱}{x}\qquad (k=\frac{h}{x})$$

از آن‌جا که e^x وارون تابع lnx است مشتق آن به شکل زیر به‌دست می‌آید.

$$\ln(e^x)=x\Rightarrow \ln'(e^x).(e^x)'=۱$$

$$\Rightarrow\frac{۱}{e^x}.(e^x)'=۱\Rightarrow(e^x)'=e^x$$

بنابراین e^x تابعی است که مشتق آن با خودش مساوی است. این از ویژگی‌های برجسته عدد نپر است و برای سایر اعداد این ویژگی برقرار نیست.

حال، برای عدد مثبت دلخواه a می‌توانیم مشتق تابع نمایی $y=a^x$ را حساب کنیم. ابتدا مشاهده می‌کنیم lny=xlna، بنابراین

$y=e^{\ln y}=e^{x\ln a}$

با استفاده از قاعده مشتق تابع مرکب،اگر قرار دهیم $u(x)=x\ln a$ داریم

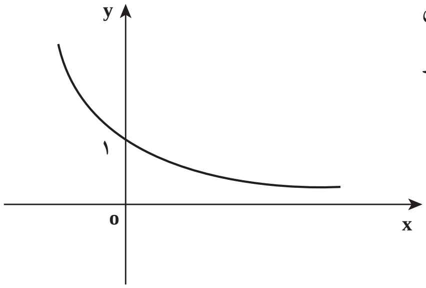
$y=e^{u(x)} \Rightarrow y'=e^{u(x)}.u'(x)=y.\ln a=a^x.\ln a$

بنابراین

$(a^x)'=a^x.\ln a$

دیده می‌شود که فقط به ازای $a=e$ مشتق a^x برابر خودش می‌شود.

اگر $۰<a<۱$، مشتق a^x منفی است و این تابع نزولی است که قبلاً مشاهده کرده بودیم. در این حالت نمودار تابع $y=a^x$ به شکل مقابل است.



مثال : تابع $\ln|x|$ روی $IR-\{۰\}$ قابل تعریف است. این تابع مشتق‌پذیر است و

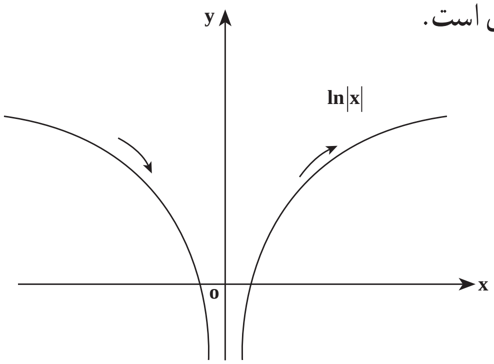
$$(\ln|x|)'=\frac{۱}{x}$$

برای مقادیر مثبت x درستی تساوی را دیده‌ایم و برای مقادیر منفی x داریم

$$(\ln|x|)'=(\ln(-x))'=\ln'(-x)\times(-x)'$$

$$=\frac{۱}{-x}\times(-۱)=\frac{۱}{x}$$

مشتق این تابع در xهای منفی، منفی است و تابع در اعداد منفی نزولی است و مشتق این تابع در xهای مثبت، مثبت و تابع در اعداد مثبت صعودی است.



اگر $u(x)$ تابع مشتق پذیری باشد که همواره ناصفر است می‌توانیم تابع $\ln|u(x)|$ را تشکیل دهیم که تابعی مشتق‌پذیر است. طبق قاعده مشتق تابع مرکب داریم

$$(\ln|u(x)|)' = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

همچنین اگر $u(x)$ تابع مشتق‌پذیر دلخواهی باشد، می‌توانیم تابع $e^{u(x)}$ را تشکیل دهیم که تابعی مشتق‌پذیر است. طبق قاعده مشتق تابع مرکب داریم

$$(e^{u(x)})' = e^{u(x)} . u'(x)$$

یکی از جاهایی که توابع نمایی رخ می‌دهند در رشد یا زوال کمیت‌ها است. برای مثال افزایش جمعیت انسان‌ها به‌گونه‌ای است که هر ساله با ضریب ثابتی از جمعیت سال قبل به جمعیت اضافه می‌شود. این ضریب را نرخ رشد جمعیت می‌نامند. اگر این ضریب را با k نشان دهیم و جمعیت در سال nام را با y_n نشان دهیم، داریم

$$y_{n+۱} = y_n + ky_n$$

اگر n را به صورت یک متغیر پیوسته از زمان در نظر بگیریم و به جای سال بعد یک لحظه جلوتر به اندازه h واحد را درنظر بگیریم می‌توانیم بنویسیم

$$y(x+h) \approx y(x) + h(ky(x))$$

یعنی

$$\frac{y(x+h) - y(x)}{h} \approx ky(x)$$

این رابطه نشان می‌دهد که در حد وقتی h به صفر نزدیک می‌شود، داریم

$$y'(x) = ky(x)$$

یعنی مشتق y مضربی از خود y است. این ویژگی فقط در توابع نمایی برقرار است و باید داشته باشیم $y(x)=Ae^{Bx}$. از آن‌جا که $y'(x)=Ae^{Bx} \times B$ باید $B=k$ ، A نیز $y(۰)$ است و میزان جمعیت در لحظه ابتدایی است، پس

$$y(x) = Ae^{kx}$$

اگر k مثبت باشد این تابع صعودی است ولی k می‌تواند منفی هم باشد که نشان‌دهنده زوال یا کاهش y است. در مواردی مانند فروپاشی هسته‌های رادیواکتیو، میزان رادیواکتیو بودن مواد در حال کاهش است و مقدار k منفی خواهد بود.

مسائل

۱ــ مشتق توابع زیر را حساب کنید.

الف) $y=e^{۲x}+e^{-x}+۲$ ب) $y = xe^{x^{۲}-۱}$

ج) $y=\ln(۱+\cos^{۲}x)$ د) $y=\sin x e^{\cos x}$

۲ــ تابع $y=xe^{x}$ را در نظر بگیرید که روی IR تعریف شده است.

الف) این تابع در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی است؟

ب) نمودار این تابع در چند نقطه محور xها را قطع می‌کند؟

ج) زاویه برخورد نمودار تابع با محور xها چقدر است؟

د) نمودار این تابع چه شکلی می‌تواند باشد؟

۳ــ توابع زیر در چه نقاطی تعریف شده‌اند و مشتق آن‌ها در این نقاط چیست؟

الف) $\ln(\sin x)$ ب) $\ln|\cos x|$

ج) $\ln(x^{۲}-x)$ د) $\ln(|\ln x|)$

۴ــ هر ماده رادیواکتیو نیمه عمری دارد که با T نشان می‌دهیم. اگر f(t) مقدار ماده رادیواکتیو در زمان t باشد، نیمه عمر T به معنای آن است که پس از گذشت T واحد زمانی مقدار ماده رادیواکتیو نصف می‌شود، یعنی برای هر t داریم

$$f(t+T)=\frac{۱}{۲}f(t)$$

تابع f(t) به‌صورت $f(t)=Ae^{kt}$ است که A مقدار ماده رادیواکتیو در لحظه ابتدایی $t=۰$ است. مقدار k را بر حسب T تعیین کنید.

۵ــ برای یک عدد حقیقی b تابع $y(x)=x^{b}$ را در نظر بگیرید و با نوشتن آن به‌صورت $y(x)=e^{b\ln x}$ ثابت کنید.

$$(x^{b})'=bx^{b-۱}$$

مشتق ضمنی : اگر معادله‌ای بر حسب دو متغیر x و y داشته باشیم، ممکن است بتوان از آن معادله y را برحسب x حل کرد و یک تابع برحسب x به‌دست آورد.

مثال : در معادله $۲x-۳y=۱$ می‌توانیم y را برحسب x حل کنیم که نتیجه می‌شود

$$y=\frac{۱}{۳}(۱-۲x)$$

در اینجا گوییم معادله $2x+3y=1$ به‌طور ضمنی تابع $y=\frac{1}{3}(1-2x)$ را تعریف کرده است.

مثال : در معادله $2x^2+3y^2=1$ می‌توانیم y را برحسب x حل کنیم، ولی فقط یک جواب به دست نمی‌آید و حداقل دو جواب به شکل زیر قابل محاسبه است.

$$y=\pm\sqrt{\frac{1}{3}(1-2x^2)}$$

هر کدام از این جواب‌ها توابعی هستند که به‌طور ضمنی توسط معادله $2x^2+3y^2=1$ تعریف شده‌اند.

توابعی که به‌طور ضمنی توسط یک معادله تعریف می‌شوند، را توابع ضمنی می‌نامند. گاهی اوقات محاسبه صریح تابع ضمنی امکان‌ناپذیر است، اگر چه می‌دانیم چنین تابعی وجود دارد. اگر معادله تعریف کننده تابع ضمنی نسبت به متغیرهای x و y مشتق‌پذیری داشته باشد، تابع ضمنی نیز مشتق‌پذیر می‌شود و می‌توانیم مشتق آن را به‌طور ضمنی حساب کنیم.

مثال : فرض $y(x)$ تابعی باشد که به‌طور ضمنی توسط معادله $2x^2+3y^2=1$ تعریف شده است، یعنی $2x^2+3y(x)^2=1$ طرفین توابع مشتق‌پذیری از x هستند و طرف دوم تابع ثابت است. با مشتق‌گیری از طرفین نتیجه می‌شود.

$$4x+6y(x)y'(x)=0$$

$$\Rightarrow y'(x)=-\frac{2x}{3y(x)}$$

در این مثال خاص می‌دانیم $y(x)=\sqrt{\frac{1}{3}(1-2x^2)}$ یا $y(x)=-\sqrt{\frac{1}{3}(1-2x^2)}$

اگر مشتق y را مستقیماً نیز حساب کنیم می‌بینیم تساوی $y'(x)=-\frac{2x}{3y(x)}$ برقرار است.

در این مثال دیده می‌شود که برای محاسبه $y'(x)$ تقسیم بر $y(x)$ پیش می‌آید و لازم است $y(x)$ ناصفر باشد بنابراین مشتق‌پذیری تابع ضمنی این مثال فقط در جاهایی است که $y(x)$ ناصفر باشد. فرمول صریح $y(x)$ نیز نشان می‌دهد که این تابع در xهایی که $y(x)$ صفر است مشتق‌پذیری ندارد.

مثال : در معادله $x^2+xy+y^2=3$ ، $x=1$ و $y=1$ یک جواب آن است و این معادله تعریف کننده یک تابع ضمنی $y(x)$ است به‌گونه‌ای که $y(1)=1$. مشتق این تابع را در $x=1$ بیابید.

حل : داریم $x^۲+xy(x)+y(x)^۲=۳$، با مشتق‌گیری نسبت به x داریم

$$۲x+y(x)+xy'(x)+۲y(x)y'(x)=۰$$

$$\Rightarrow y'(x)=-\frac{۲x+y(x)}{x+۲y(x)}$$

$$\Rightarrow y'(۱)=-\frac{۲\times۱+y(۱)}{۱+۲y(۱)}=-\frac{۲+۱}{۱+۲}=-۱$$

مثال : معادله $x\sin y+x+y=۰$ دارای یک جواب $x=\pi$ و $y=-\pi$ است. و این معادله یک تابع ضمنی $y=f(x)$ تعریف می‌کند که $f(\pi)=-\pi$. $f'(\pi)$ را حساب کنید.

حل : داریم $x\sin f(x)+x+f(x)=۰$ با مشتق‌گیری داریم

$$\sin f(x)+x\cos f(x).f'(x)+۱+f'(x)=۰$$

$$\Rightarrow f'(x)=-\frac{۱+\sin f(x)}{x\cos f(x)+۱}$$

$$\Rightarrow f'(\pi)=-\frac{۱+\sin f(\pi)}{\pi\cos f(\pi)+۱}=\frac{۱+\sin(-\pi)}{\pi\cos(-\pi)+۱}$$

$$=\frac{۱}{۱-\pi}$$

مسائل

۱ــ نشان دهید که نقطه $A(1,1)$ روی نمودار معادله $x^4+y^4+x^2y^2-3=0$ قرار دارد. اگر $y(x)$ تابعی باشد که توسط این معادله تعریف شده است و $y(1)=1$، معادله خط مماس بر نمودار این تابع را در نقطه A بنویسید.

۲ــ در تمرین‌های زیر با استفاده از مشتق‌گیری ضمنی مشتق y نسبت به x را محاسبه کنید.

الف) $x\sin y+y\cos x=1$

ب) $y=\cos(x-y)$

ج) $x^2y^2=x^2+y^2$

۳ــ معادله خطّ مماس بر منحنی به معادلهٔ $x^4+y^4+x^2y^2-3=0$ در نقطهٔ $A(1,1)$ را به‌دست آورید.

۴ــ معادله خطّ مماس بر منحنی به معادلهٔ $\sqrt{x}+\sqrt{y}=4$ در نقطهٔ $A(4,4)$ را به‌دست آورید.

۵ــ در چه نقطه‌ای از منحنی به معادلهٔ $x+\sqrt{xy}+y=1$ خطّ مماس بر منحنی موازی با محور xها است؟

۶ــ اگر $8y^2-2xy^3=-16$ آهنگ تغییر لحظه‌ای y نسبت به x در نقطهٔ $A(3,2)$ را به‌دست آورید.

فصل ۴

کاربردهای مشتق

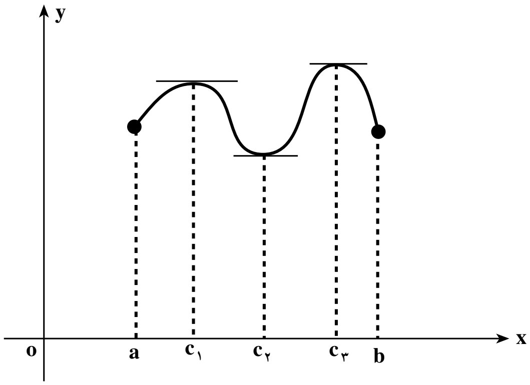
همان‌گونه که در فصل قبل ملاحظه شد تفسیر آهنگ تغییر از مشتق ریشه در مسائل فیزیکی و پدیده‌های طبیعی دارد و تعبیر هندسی مشتق رویکردی نظری و انتزاعی را ارائه می‌دهد. دامنه کاربردهای مشتق در هر دو حیطه توسعه یافته است. کاربردهای مشتق در داخل ریاضیات به بررسی رفتار و شناسایی ویژگی‌های تابع‌ها مربوط می‌شود. مدلسازی مسائل زندگی و پدیده‌های طبیعی و حل و بررسی آن‌ها نیز با مفهوم مشتق در رابطه است. نمونه بارزی از این‌گونه پدیده‌ها، پدیدهٔ رشد و زوال می‌باشد که هم در ارتباط با مشتق و هم در رابطه با انتگرال است که در فصل آخر از آن صحبت خواهیم کرد. در این فصل بعضی از کاربردهای مشتق ارائه می‌شوند.

ماکزیمم و می‌نیمم یک تابع

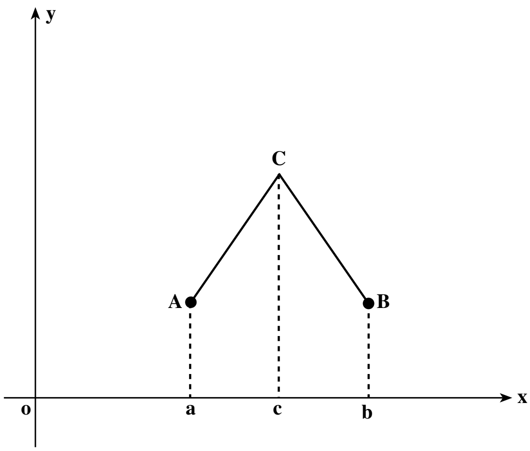
در این بخش نقاط ماکزیمم و می‌نیمم نمودار یک تابع را تعیین می‌کنیم و بررسی می‌کنیم که در کدام بازه تابع صعودی است و در چه بازه‌ای تابع نزولی است. با به‌دست آوردن این اطلاعات می‌توانیم منحنی نمایش یک تابع را دقیق‌تر رسم کنیم.

ماکزیمم و می‌نیمم نسبی و مطلق یک تابع : تابع $y = f(x)$ با دامنه $[a , b]$ مفروض است، فرض می‌کنیم (e, g) یک بازه شامل c در دامنه f است به طوری که به ازای هر $x \in (e, g)$، $f(x) \le f(c)$ در این صورت می‌گوییم تابع f در c **ماکزیمم نسبی** است. اگر به ازای هر $x \in (e, g)$ داشته باشیم $f(x) \ge f(c)$ می‌گوییم f در c **می‌نیمم نسبی** است. اگر به ازای هر $x \in [a , b]$ داشته باشیم $f(x) \le f(c)$ می‌گوییم f در بازه $[a , b]$ در نقطه c **ماکزیمم مطلق** است. همچنین اگر به ازای هر $x \in [a , b]$، $f(x) \ge f(c)$ گوییم تابع f در بازه $[a , b]$ در c **می‌نیمم مطلق** است.

ممکن است یک تابع در یک بازه دارای چندین ماکزیمم و می‌نیمم نسبی باشد ولی مقدار ماکزیمم و می‌نیمم مطلق آن در صورت وجود منحصر به‌فرد هستند.



درشکل مقابل منحنی نمایش تابع در c_1، ماکزیمم نسبی است، در c_2 می‌نیمم مطلق است، در c_3 نیز ماکزیمم مطلق است. در این شکل تابع داده شده در این سه نقطه مشتق‌پذیر است، به عبارت دیگر، خطوط مماس بر منحنی در این سه نقطه وجود دارند و با محور xها موازی هستند، در نتیجه شیب خطوط مماس در این سه نقطه صفر است. ممکن است تابعی در $c \in (a,b)$ ماکزیمم یا می‌نیمم باشد ولی در c مشتق‌پذیر نباشد، به شکل مقابل توجّه کنید :



تابع $y = f(x)$ با دامنه $[a, b]$ که منحنی نمایش آن از دو پاره‌خطّ AC و BC تشکیل یافته است را ملاحظه می‌کنیم، این تابع در c ماکزیمم مطلق است ولی تابع در c مشتق‌پذیر نیست. مشتق چپ آن شیب خطّ AC است و مشتق راست آن شیب خط مستقیم BC می‌باشد، بنابراین، مشتق‌های چپ و راست تابع در c یکی نیستند. درنتیجه تابع در c مشتق‌پذیر نیست.

چگونه می‌توان ماکزیمم و می‌نیمم یک تابع را تعیین نمود؟ در قضیه زیر تا حدودی به این پرسش پاسخ داده می‌شود. این قضیه را بدون اثبات می‌پذیریم.

قضیهٔ ۱ : تابع $f(x)$ با دامنه $[a, b]$ مفروض است، فرض کنیم f در $c \in (a, b)$ ماکزیمم نسبی (می‌نیمم نسبی) است، علاوه بر آن فرض می‌کنیم f در c مشتق‌پذیر باشد، در این صورت $f \quad (c) = 0$.

با توجّه به قضیهٔ ۱ و آنچه که در بالا گفته شد نقـاط ماکزیمم و می‌نیمم نسبی یـا مطلق یک تابع نقاطی هستند که مقدار مشتق در آن نقاط صفر است، یا مشتق وجود ندارد.

تعریف : تابع f با دامنه $[a, b]$ مفروض است، نقاطی از بازهٔ (a, b) که مشتق f در آن نقاط صفر است یـا نقاطی از این بازه که مشتق f در آن نقاط وجـود ندارد را **نقاط بحرانی** تـابع f می‌نامند.

قضیهٔ زیر یک خاصیّت دیگر توابع پیوسته را بیان می‌کند، از این قضیه برای اثبات قضیه‌های بعدی استفاده می‌کنیم، خود این قضیه را بدون اثبات می‌پذیریم.

قضیهٔ ۲ : اگر تابع f بر بازه بسته $[a, b]$ پیوسته باشد، f در این بازه دارای ماکزیمم مطلق و می‌نیمم مطلق خواهد بود.

با توجّه به این قضیه اگر تابع f بر بازه بسته $[a, b]$ پیوسته باشد آنگاه f در این بازه دارای ماکزیمم مطلق و می‌نیمم مطلق است. چگونه می‌توان این ماکزیمم مطلق و می‌نیمم مطلق را به‌دست آورد؟ ابتدا نقاط بحرانی تابع f را به دست می‌آوریم و مقادیر تابع f را به ازای این نقاط بحرانی محاسبه می‌کنیم، سپس $f(a)$ و $f(b)$ را محاسبه می‌کنیم، در این مقدارها، کوچکترین آن‌ها می‌نیمم مطلق تابع و بزرگترین آن‌ها ماکزیمم مطلق تابع خواهد بود.

مثال۱ : تابع $f(x) = x^{\frac{۸}{۳}} - x^{\frac{۲}{۳}}$ با دامنه $[-۸,۲۷]$ را درنظر بگیرید، ماکزیمم و می‌نیمم مطلق آن را به‌دست آورید.

حل : ابتدا نقاط بحرانی این تابع را به دست می‌آوریم. توجّه داریم که

$$f'(x) = \frac{۸}{۳}x^{\frac{۵}{۳}} - \frac{۲}{۳}x^{-\frac{۱}{۳}}$$

بنابراین، $f'(x) = ۰$ نتیجه می‌دهد

$$\frac{۸}{۳}x^{\frac{۵}{۳}} - \frac{۲}{۳}x^{-\frac{۱}{۳}} = ۰$$

و از آنجا $۴x^۲ - ۱ = ۰$ در نتیجه

$$x = \pm\frac{۱}{۲}$$

از $f'(x) = \frac{۸}{۳}x^{\frac{۵}{۳}} - \frac{۲}{۳}x^{-\frac{۱}{۳}}$ دیده می‌شود که مشتق تابع در $x = ۰$ وجود ندارد بنابراین، مجموعهٔ نقاط بحرانی تابع عبارت است از $\{-\frac{۱}{۲}, ۰, \frac{۱}{۲}\}$.

توجه داریم که $f(\frac{۱}{۲}) = f(-\frac{۱}{۲}) = (\frac{۱}{۲})^{\frac{۸}{۳}} - (\frac{۱}{۲})^{\frac{۲}{۳}}$ و از آنجا $f(\frac{۱}{۲}) = f(-\frac{۱}{۲}) = -\frac{۳}{۴\sqrt[۳]{۴}}$، درضمن $f(۰) = ۰$. حال مقادیر تابع f را در دو نقطه انتهای بازه $[-۸,۲۷]$ محاسبه می‌کنیم، و از آنجا $f(۲۷) = ۶۵۶۱ - ۹ = ۶۵۵۲$ و $f(-۲۸) = ۲۵۲$. بنابراین

$$\min\left\{-\frac{۳}{۴\sqrt[۳]{۴}}, ۰\ , ۲۵۲{,}۶۵۵۲\right\} = -\frac{۳}{۴\sqrt[۳]{۴}}\ ,\ \max\left\{-\frac{۳}{۴\sqrt[۳]{۴}}, ۰\ , ۲۵۲{,}۶۵۵۲\right\} = ۶۵۵۲$$

یعنی می‌نیمم مطلق این تابع برابر $-\frac{۳}{۴\sqrt[۳]{۴}}$ و ماکزیمم مطلق آن برابر **۶۵۵۲** است.

مثال۲ : ماکزیمم مطلق تابع $f(x) = x\sqrt{a^۲ - x^۲}$ را، که در آن $-a \le x \le a$ و a مقدار مثبتی است، پیدا کنید.

حل :

$$f'(x) = \sqrt{a^۲ - x^۲} - \frac{x^۲}{\sqrt{a^۲ - x^۲}}$$

از حل معادله $f'(x) = ۰$ نتیجه می‌شود که

$$\sqrt{a^۲ - x^۲} = \frac{x^۲}{\sqrt{a^۲ - x^۲}}$$

بنابراین

$$a^۲ - x^۲ = x^۲ \text{ یا } x^۲ = \frac{a^۲}{۲}$$

پس $x = \pm\frac{a\sqrt{۲}}{۲}$ ، ملاحظه می‌کنیم که تابع مورد بحث در $x = \frac{a\sqrt{۲}}{۲}$ ماکزیمم مطلق و در $x = -\frac{a\sqrt{۲}}{۲}$ می‌نیمم مطلق دارد.

مسائل

در مسایل ۱ تا ۵ نقاط بحرانی توابع داده شده را به‌دست آورید.

۱ــ $f(x) = ۲x^۳ - ۹x^۲ + ۱۲x + ۶۰$

۲ــ $g(x) = ۲x^۳ - ۲x^۲ - ۱۶x + ۱$

۳ــ $g(x) = x^{\frac{۶}{۵}} - ۱۲x^{\frac{۱}{۵}}$

۴ــ $f(x) = (x^۳ - ۳x^۲ + ۴)^{\frac{۱}{۳}}$

۵ــ $f(x) = x^{\frac{۷}{۶}} - \frac{۷}{۲}x^{\frac{۲}{۳}} + ۵$

در مسایل ۶ تا ۱۱ مقادیر ماکزیمم و می‌نیمم مطلق توابع مفروض بر بازه داده شده را درصورت وجود محاسبه کنید.

۶ــ $g(x) = x^۴ - ۸x^۲ + ۱۶ \quad ; \quad [-۱,۴]$

۷ــ $f(x) = x^۳ + ۵x - ۴ \quad ; \quad [-۳,-۱]$

۸ــ $f(x)=(x+۱)^{\frac{۲}{۳}} \quad ; \quad [-۲,۱]$

۹ــ $f(x)=۱-(x-۳)^{\frac{۲}{۳}} \quad ; \quad [-۵,۴]$

۱۰ــ $f(x)=x^{\frac{۷}{۶}}-\frac{۷}{۲}x^{\frac{۲}{۳}}+۵ \quad ; \quad [۰,۶۴]$

۱۱ــ $f(x)=۲x^۳-۹x^۲+۱۲x+۶۰ \quad ; \quad [-۲,۳]$

دیدیم که اگر تابع $f(x)$ در نقطه درونی $x=x_۰$ دارای یک ماکزیمم یا می‌نیمم نسبی (مطلق) باشد و $f'(x_۰)$ موجود باشد آنگاه $f'(x_۰)=۰$، چگونه می‌توان تشخیص داد که تابع $f(x)$ در $x=x_۰$ دارای یک ماکزیمم نسبی است یا یک می‌نیمم نسبی؟ برای پاسخ به این پرسش از آزمون مشتق اول استفاده می‌کنیم. قبل از بیان قضیه مربوطه متذکر می‌شویم که اگر تابع f در بازه (a,b) تعریف شده باشد و $x_۰\in(a,b)$ موجود باشد به‌طوری که $f(x_۰)=۰$ و به ازای هر $x\in(a,x_۰)$ داشته باشیم $f(x)>۰$ و به ازای هر $x\in(x_۰,b)$ داشته باشیم $f(x_۰)<۰$ می‌گویند تابع f در $x_۰$ تغییر علامت می‌دهد و از مثبت به منفی می‌رود. اگر به ازای هر $x\in(a,x_۰)$ داشته باشیم $f(x)<۰$ و به ازای هر $x\in(x_۰,b)$ داشته باشیم $f(x)>۰$ باز هم می‌گویند f در $x_۰$ تغییر علامت می‌دهد و از منفی به مثبت می‌رود.

قضیهٔ ۳ (تشخیص ماکزیمم نسبی از می‌نیمم نسبی با استفاده از آزمون مشتق اوّل) :
فرض می‌کنیم تابع f در بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ پیوسته و در بازهٔ (a,b) مشتق‌پذیر باشد، عدد $x_۰\in(a,b)$ به‌گونه‌ایست که $f'(x_۰)=۰$ و f' در $x_۰$ تغییر علامت می‌دهد و از مثبت به منفی می‌رود آنگاه f در $x_۰$ دارای یک ماکزیمم نسبی است.

چنانکه هنگام عبور از $x_۰$ تابع f' از منفی به مثبت برود به طریق مشابه می‌توان ثابت نمود که f در $x_۰$ دارای یک می‌نیمم نسبی است.

مثال : ماکزیمم و می‌نیمم نسبی تابع $y=\frac{۱}{۳}x^۳-\frac{۵}{۲}x^۲+۶x+۱۰$ را به دست آورید، آیا این تابع ماکزیمم و می‌نیمم مطلق دارد؟ چرا؟

حل : از $y=\frac{۱}{۳}x^۳-\frac{۵}{۲}x^۲+۶x+۱۰$ نتیجه می‌شود $y'=x^۲-۵x+۶$، حال سعی می‌کنیم این y' را به حاصل‌ضرب چند جمله‌ای‌های درجه اوّل یا دوّم تجزیه کنیم، برای این منظور ابتدا ریشه‌های معادلهٔ $x^۲-۵x+۶=۰$ را محاسبه می‌کنیم، این ریشه‌ها عبارتند از $x=۲$ و $x=۳$، بنابراین، $y'=(x-۲)(x-۳)$ حال y' را تعیین علامت می‌کنیم.

x	$-\infty$		۲		۳		$+\infty$
$y' = x^2 - 5x + 6$		$+$	0	$-$	0	$+$	

با توجّه به این جدول دیده می‌شود که در $x = 2$ ، y از مثبت به منفی می‌رود و با توجّه به قضیهٔ قبل در $x = 2$ تابع دارای یک ماکزیمم نسبی است، در $x = 3$ ، y از منفی به مثبت می‌رود و به موجب قضیهٔ قبل تابع داده شده در $x = 3$ دارای یک می‌نیمم نسبی است. توجّه داریم که

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x + 10\right) = -\infty$$

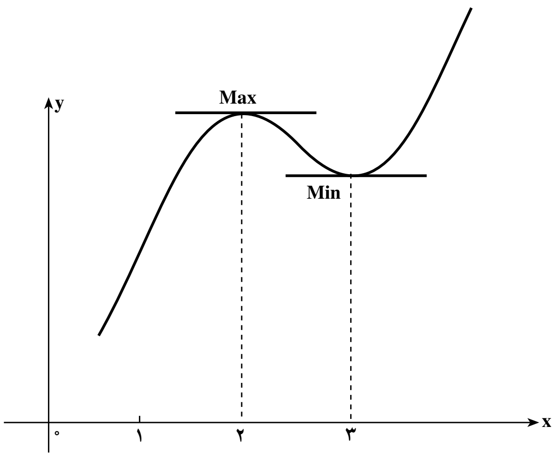
و

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x + 10\right) = +\infty$$

بنابراین، تابع $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x + 10$ ماکزیمم و می‌نیمم مطلق ندارد. جدول تغییرات این تابع به شکل زیر است

x	$-\infty$		۲		۳		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{44}{3}$	$\searrow$	$\frac{29}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

با توجّه به این جدول دیده می‌شود که در بازهٔ $(-\infty, 2)$ داریم $y' > 0$ و با توجه به قضیه‌ای که داشتیم در این بازه تابع صعودی است، در بازهٔ $(2, 3)$ داریم $y' < 0$ و به موجب همان قضیه تابع در این بازه نزولی است. در بازهٔ $(3, +\infty)$ نیز تابع صعودی است. با توجّه به این جدول، منحنی نمایش تغییرات تابع $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x + 10$ به شکل مقابل است :



مسائل

در تمرین‌های ۱ تا ۴ ماکزیمم و می‌نیمم نسبی توابع داده شده را به‌دست آورید.

۱ــ $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 30$

۲ــ $y = 3x^5 - 25x^3 + 60x + 10$

۳ــ $y = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 100$

۴ــ $y = x^4 - 12x^3 + 52x^2 - 96x + 100$

۵ــ در تمرین‌های ۱ تا ۴، آیا توابع داده شده دارای ماکزیمم یا می‌نیمم مطلق هستند؟ چرا؟

۶ــ ثابت کنید تابع $y = x^3$ همواره صعودی است و از آنجا نتیجه بگیرید که این تابع ماکزیمم و می‌نیمم ندارد.

۷ــ در تابع $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 30$ ثابت کنید پاره خطّی که نقاط ماکزیمم و می‌نیمم روی نمودار تابع را به هم وصل می‌کند توسّط منحنی نمایش تابع به دو قسمت مساوی تقسیم می‌شود.

۸ــ ضرایب ثابت a و b را چنان تعیین کنید که تابع با ضابطهٔ $f(x) = x^3 + ax^2 + b$ در $(3, 2)$ یک ماکزیمم یا می‌نیمم نسبی داشته باشد.

۹ــ ضرایب a، b و c را چنان تعیین کنید که تابع با ضابطهٔ $f(x) = ax^2 + bx + c$ در $x = 1$ دارای مقدار ماکزیمم نسبی ۷ باشد و نمودار تابع $y = f(x)$ از نقطهٔ $(2, -2)$ بگذرد.

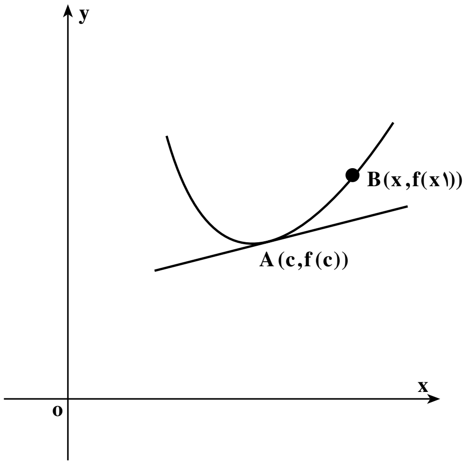
۱۰ــ تابع $f(x) = x^{2n+1}$ مفروض است که در آن n یک عدد صحیح و مثبت است، ثابت کنید که این تابع صعودی است و از آنجا نتیجه بگیرید که ماکزیمم و می‌نیمم نسبی ندارد.

۱۱ــ تابع $y = x^{2n}$ مفروض است که در آن n یک عدد صحیح و مثبت است، ثابت کنید که این تابع در $x = 0$ دارای یک می‌نیمم مطلق است.

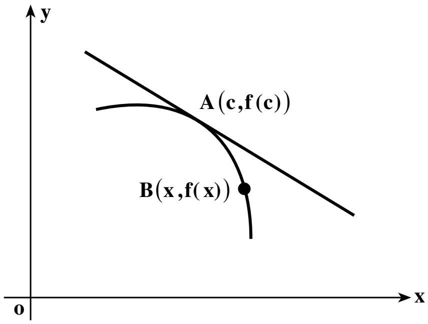
مشتقات مراتب بالاتر

چنانکه تابع $y = f(x)$ مشتق‌پذیر باشد، مشتق مرتبه اوّل آن را با علامت $y \; = f \; (x)$ نشان می‌دهند. اگر تابع $f \; (x)$ نیز مشتق‌پذیر باشد مشتق آن را با $y \; = f \; (x)$ نشان می‌دهند، چنانکه تابع $f \; (x)$ باز هم مشتق‌پذیر باشد مشتق آن را با $y \; = f \; (x)$ نشان می‌دهند. به‌طور کلّی، مشتق مرتبه nام تابع $y = f(x)$ را با علامت $y^{(n)} = f^{(n)}(x)$ نشان می‌دهند. توجّه داریم که $f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)}(x))$.

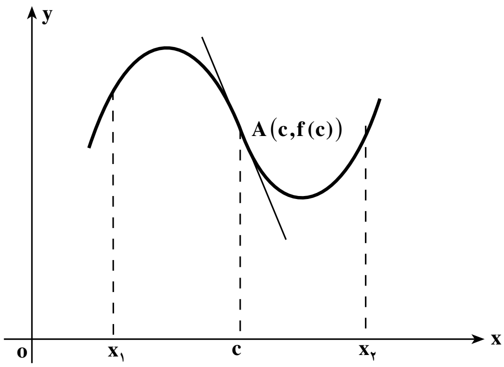
تقعر منحنی و نقاط عطف آن



تعریف ۱ : می‌گویند تقعر منحنی نمایش تابع $y = f(x)$ در نقطهٔ $A(c, f(c))$ رو به بالاست هرگاه (c) f موجود باشد و بازه بازی مانند I شامل c یافت شود که به ازای هر $x \neq c$ در I، نـقطهٔ $B(x, f(x))$ روی منحنی، بالای خطّ مماس بر منحنی در نقطهٔ $A(c, f(c))$ باشد (شکل مقابل).



تعریف ۲ : می‌گویند تقعر منحنی نمایش تابع $y = f(x)$ در نقطهٔ $A(c, f(c))$ رو به پایین است هرگاه (c) f موجود باشد و بازه بازی مانند I شامل c یافت شود که به ازای هر $x \neq c$ در I، نقطهٔ $B(x,f(x))$ روی منحنی، پایین خطّ مماس بر منحنی در نقطهٔ $A(c, f(c))$ باشد (شکل مقابل).



تعریف۳ : می‌گویند نقطهٔ $A(c, f(c))$ یک نقطهٔ عطف منحنی نمایش تابع $y = f(x)$ است هرگاه خط مماس بر منحنی در نقطه A موجود باشد و دو عدد $x_۱ < c$ و $x_۲ > c$ موجود باشد به طوری که تقعر منحنی در هر نقطهٔ $B(x, f(x))$، $(x \in (x_۱, c))$ با تقعر آن در هر نقطهٔ $C(x, f(x))$، $(x \in (c, x_۲))$ متفاوت باشد (شکل مقابل).

فرض می‌کنیم تابعی مانند f روی یک بازه باز شامل c مشتق‌پذیر باشد. آنگاه ثابت می‌کنند :

۱) اگر f (c) > ۰ تقعر منحنی نمایش تابع $y = f(x)$ در نقطهٔ $A(c, f(c))$ رو به بالا است.

۲) اگر f (c) < ۰ تقعر منحنی نمایش تابع $y = f(x)$ در نقطهٔ $A(c, f(c))$ رو به پایین است.

۳) اگر $C(d,f(d))$ یک نقطه عطف منحنی نمایش تابع $y=f(x)$ باشد، آنگاه اگر $f''(d)$ موجود باشد ثابت می‌کنند $f''(d)=۰$.

بنابراین، طول نقاط عطف نمایش تابع $y=f(x)$ از حلّ معادلهٔ $f''(x)=۰$ به‌دست می‌آیند، البتّه همه xهایی که از حلّ این معادله به‌دست می‌آیند نشان‌دهنده نقاط عطف منحنی نیستند، آن‌هایی نقاط عطف را نشان می‌دهند که در آنها $f''(x)$ تغییر علامت بدهد.

به عنوان مثال، منحنی نمایش تابع $y=x^۳+۲x^۲+۳x+۱۰$ را درنظر می‌گیریم، ملاحظه می‌کنیم که $y'=۳x^۲+۴x+۳$ و $y''=۶x+۴$ بنابراین، $y''=۰$ نتیجه می‌دهد $x=-\frac{۲}{۳}$، ملاحظه می‌کنیم که تابع $y''=۶x+۴$ در نقطهٔ $x=-\frac{۲}{۳}$ تغییر علامت می‌دهد، بنابراین، $x=-\frac{۲}{۳}$ طول نقطهٔ عطف منحنی است. منحنی نمایش تابع $y=(x-۱)^۴$ را درنظر می‌گیریم، ملاحظه می‌کنیم که $y'=۴(x-۱)^۳$ و $y''=۱۲(x-۱)^۲$ بنابراین، $y''=۰$ نتیجه می‌دهد $x=۱$، در $x=۱$ تابع $y''=۱۲(x-۱)^۲$ تغییر علامت نمی‌دهد، درنتیجه $x=۱$ طول نقطهٔ عطف منحنی نیست.

مثال : ثابت کنید نقطه عطف منحنی نمایش تابع $y=x^۳-۴x^۲-۳x+۱۰$ مرکز تقارن آن است.

حل : از $y=x^۳-۴x^۲-۳x+۱۰$ نتیجه می شود $y'=۳x^۲-۸x-۳$ و $y''=۶x-۸$. از حلّ معادلهٔ $y''=۰$ نتیجه می‌شود $۶x-۸=۰$ و از آنجا $x=\frac{۴}{۳}$، چون $y''=۶x-۸$ درجه اوّل است، در $x=\frac{۴}{۳}$ تغییر علامت می‌دهد و از منفی به مثبت می‌رود، بنابراین $x=\frac{۴}{۳}$ طول نقطهٔ عطف منحنی است. با قرار دادن $x=\frac{۴}{۳}$ در معادلهٔ $y=x^۳-۴x^۲-۳x+۱۰$ داریم

$$y=(\frac{۴}{۳})^۳-۴(\frac{۴}{۳})^۲-۳(\frac{۴}{۳})+۱۰$$

و از آنجا

$$y=\frac{۳۴}{۲۷}$$

بنابراین، $A(\frac{۴}{۳},\frac{۳۴}{۲۷})$ نقطهٔ عطف منحنی است. حال مبدأ مختصات را به نقطهٔ $A(\frac{۴}{۳},\frac{۳۴}{۲۷})$ انتقال می‌دهیم در نتیجه $x=X+\frac{۴}{۳}$ و $y=Y+\frac{۳۴}{۲۷}$ با قرار دادن در معادله منحنی داده شده داریم

$$Y+\frac{۳۴}{۲۷}=(X+\frac{۴}{۳})^۳-۴(X+\frac{۴}{۳})^۲-۳(x+\frac{۴}{۳})+۱۰$$

و از آنجا

$$Y = X^{۳} - \frac{۲۵}{۳}X$$

با تبدیل $X \to -X$ و $Y \to -Y$ این معادله تغییر نمی‌کند، پس مبدأ مختصات جدید با همان نقطهٔ عطف $A(\frac{۴}{۳}, \frac{۳۴}{۲۷})$ مرکز تقارن منحنی نمایش تابع $y = x^{۳} - ۴x^{۲} - ۳x + ۱۰$ است.

مسائل

در مسایل ۱ تا ۵، تعیین کنید که در چه بازه‌ای تقعّر منحنی تابع داده شده رو به بالا است، در چه بازه‌ای تقعر آن رو به پایین است، و نقاط عطف را نیز درصورت وجود به‌دست آورید.

۱ــ $y = ۱۶x^{۴} + ۳۲x^{۳} + ۲۴x^{۲} - ۵x - ۲۰$

۲ــ $y = x^{۴} - ۸x^{۳} + ۲۴x^{۲}$

۳ــ $y = \frac{x}{x^{۲} - ۱}$

۴ــ $y = \frac{۱}{۱۲}x^{۴} + \frac{۱}{۶}x^{۳} - x^{۲}$

۵ــ $y = x^{۳} + ۳x^{۲} - ۳x + ۳$

۶ــ نقاط ماکزیمم و می‌نیمم نسبی و نقطهٔ عطف منحنی نمایش تابع $y = x^{۳} - ۴x^{۲} - ۳x + ۱۰$ را به‌دست آورید. ثابت کنید که این سه نقطه بر یک استقامت هستند و نقطه عطف وسط پاره‌خطّ واصل بین نقاط ماکزیمم و می‌نیمم نسبی است.

۷ــ $y = ax^{۳} + bx^{۲} + cx + d$، ضرایب a، b، c و d را چنان تعیین کنید که این تابع در (۰,۳) دارای یک ماکزیمم یا می‌نیمم نسبی باشد و منحنی نمایش آن در (۱- , ۱) یک نقطهٔ عطف داشته باشد.

۸ــ اگر $y = ax^{۳} + bx^{۲}$، ضرایب ثابت a و b را چنان تعیین کنید که منحنی نمایش این تابع در نقطهٔ (۱,۲) دارای یک نقطهٔ عطف باشد.

۹ــ طول نقاط عطف یک منحنی به معادلهٔ $y = (x^{۲} - ۷x + ۱۴)e^{x}$ را بدست آورید.

رسم نمودار یک تابع

پیش از این با رسم نمودار توابع از طریق نقطه‌یابی و انتقال آشنا شده‌ایم. این روش محدودیت‌های بسیاری دارد و فقط در مورد توابع ساده قابل به‌کار بردن است. علاوه بر این رسم نمودار تابع با این

روش دقت بسیار کمی دارد.

برای توابع مشتق‌پذیر، از طریق مشتق تابع می‌توان بازه‌هایی که تابع در آن‌ها صعودی یا نزولی است، تشخیص داد و می‌توان جاهایی که تابع تغییر جهت می‌دهد و از حالت صعودی به نزولی و از حالت نزولی به صعودی تغییر وضعیت می‌دهد تشخیص داد و با مشتق دوم جهت تقعر نمودار تابع را مشخص کرد و با رسم جدول تغییرات تابع، چگونگی تغییرات تابع را با دقت کافی به‌دست آورد.

برای توابع پیوسته با دامنه IR که مشتق‌پذیری هم دارند، تعیین علامت مشتق تابع و نقاط بحرانی تابع نقش اصلی را در رسم تابع بازی می‌کنند.

مثال : نمودار تابع $y = -x^۲ + ۲x + ۳$ را رسم کنید.

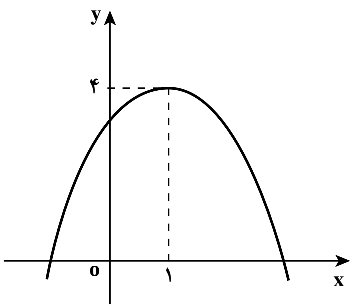
حل : داریم $y' = -۲x + ۲$. y' در $x = ۱$ صفر است و علامت y' و وضعیت صعودی و نزولی این تابع در جدول زیر مشخص شده است.

x	$-\infty$		۱		$+\infty$
y'		+	۰	−	
y		↗	۴	↘	

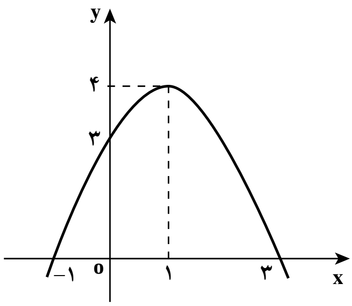
برای دقت بیشتر لازم است حد تابع در $+\infty$ و $-\infty$ نیز معلوم گردد. در این مثال $\lim\limits_{x\to+\infty} -x^۲ + ۲x + ۳ = -\infty$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} -x^۲ + ۲x + ۳ = -\infty$. پس جدول به شکل زیر درمی‌آید.

x	$-\infty$		۱		$+\infty$
y'		+	۰	−	
y	$-\infty$	↗	۴	↘	$-\infty$

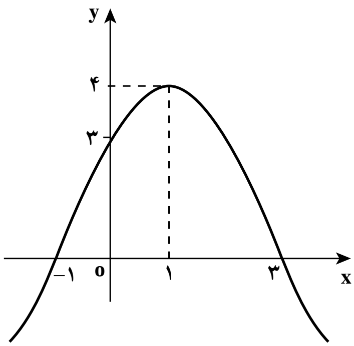
این جدول نشان می‌دهد که با تغییر x از $-\infty$ تا ۱، مقدار تابع از $-\infty$ تا ۴ صعود می‌کند و سپس با تغییر x از ۱ تا $+\infty$، مقدار تابع از ۴ تا $-\infty$ نزول می‌کند.



برای رسم بهتر، می‌توانیم محل تلاقی نمودار را با محور xها و yها به‌دست آوریم. جواب‌های معادله $y=-x^{2}+2x+3=0$، نشان‌دهنده محل‌های برخورد نمودار با محور xها هستند (چرا؟). جواب‌های این معادله $x=-1$ و $x=3$ هستند. به ازای $x=0$ داریم $y=3$ که محل برخورد نمودار تابع با محور yها را نشان می‌دهد (چرا؟)



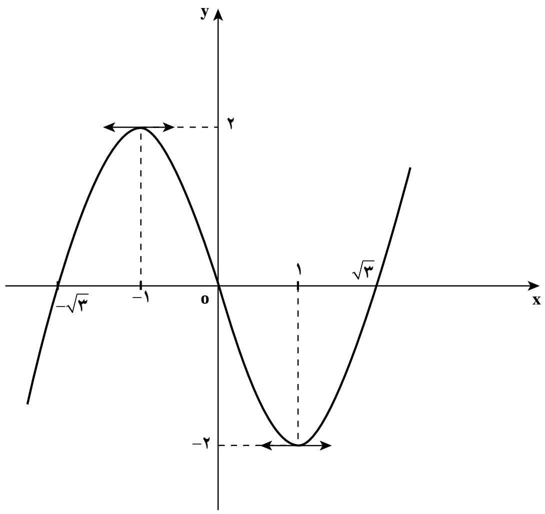
هنوز هم منحنی‌های زیادی هستند که می‌توانند از این نقاط بگذرند و به همین شکل صعود و نزول کنند، مثلاً منحنی مقابل. از کجا مطمئن هستیم که این منحنی نادرست است؟ با بررسی وضعیت تقعر نمودار تابع می‌توان تشخیص داد که کدام نمودار درست است. بنابراین مناسب است که در جدول تغییرات تابع علامت y'' را نیز مشخص کنیم. داریم $y''=-2$. پس تقعر نمودار تابع همواره به سمت پایین است و نمودار بالایی صحیح نیست. علاوه بر این در هر نقطه از نمودار تابع با محاسبه مقدار y' وضعیت خط مماس را می‌توان تشخیص داد و معلوم می‌شود نمودار تابع در هر نقطه با چه زاویه‌ای نسبت به محور xها در حال تغییر است.



مثال : نمودار تابع $y=x^{3}-3x$ را رسم کنید.

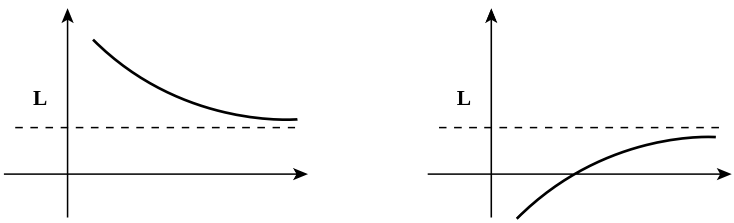
حل : داریم $y'=3x^{2}-3$ و $y''=6x$ و معادله $x^{3}-3x=0$ دارای سه جواب $x=0$ و $x=\pm\sqrt{3}$ است و نمودار تابع در سه نقطه محور xها را قطع می‌کند. به ازای $x=0$ داریم $y=0$ و نمودار تابع در همین نقطه محور y ها را قطع می‌کند. حد این تابع در $+\infty$، $+\infty$ است و حد این تابع در $-\infty$، $-\infty$ است. جدول تغییرات تابع به شکل زیر است.

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
y'		+		+	0	−		−	0	+		+	
y	$-\infty$	↗	0	↗	2	↘	0	↘	-2	↗	0	↗	$+\infty$
y''		−		−		−	0	+		+		+	
				تقعر رو به پایین			عطف			تقعر رو به بالا			

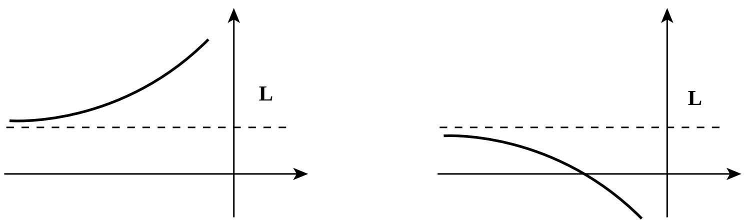


مجانب‌های نمودار توابع

در توابعی که حد آن‌ها در $+\infty$ عددی مانند L شود، نمودار تابع به‌گونه‌ای خواهد شد که در مقادیر بزرگ x به خط افقی $y = L$ نزدیک می‌شود. در این حالت گوییم خط $y = L$ مجانب افقی تابع در $+\infty$ است. شکل‌های زیر نمونه‌ای از مجانب افقی در $+\infty$ است.



به‌طور مشابه اگر حد تابعی در $-\infty$ برابر عدد L شود، نمودار تابع در مقادیر منفی x که از لحاظ قدرمطلق بزرگ هستند، به خط افقی $y = L$ نزدیک می‌شود و در این حالت گوییم خط $y = L$ مجانب افقی نمودار تابع در $-\infty$ است. شکل‌های زیر نمونه‌هایی از مجانب افقی در $-\infty$ است.

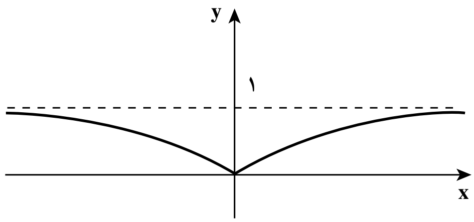


مثال : نمودار تابع $y=\frac{x^۲}{x^۲+۱}$ را رسم کنید.

حل : داریم
$$y'=\frac{۲x(x^۲+۱)-۲x\times x^۲}{(x^۲+۱)^۲}=\frac{۲x}{(x^۲+۱)^۲}$$

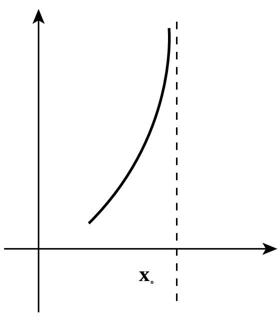
y' در $x=۰$ صفر است و علامت آن همان علامت $۲x$ است. حد این تابع در $\pm\infty$ برابر ۱ است. پس $y=۱$ مجانب افقی آن در $\pm\infty$ است.

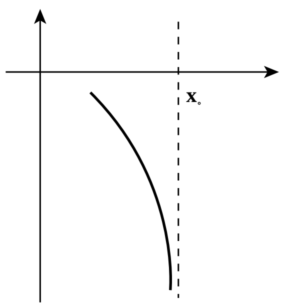
x	$-\infty$		۰		$+\infty$
y′		−	۰	+	
y	۱	↘	۰	↗	۱



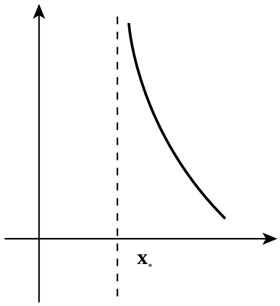
در برخی توابع ممکن است حد چپ تابعی در نقطهٔ $x_۰$ ، $+\infty$ (یا $-\infty$) شود. در این موارد خط عمودی $x=x_۰$ به‌گونه‌ای است که نمودار تابع با نزدیک شدن x به $x_۰$ از چپ، به این خط در مقادیر بزرگ مثبت (یا مقادیر منفی از لحاظ قدرمطلق بزرگ) نزدیک می‌شود.

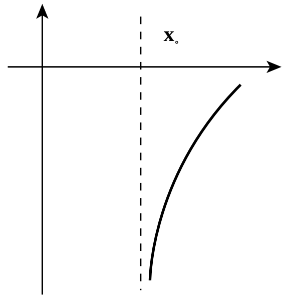
در این حالت گوییم خط عمودی $x=x_۰$ یک مجانب قائم نمودار تابع است. شکل‌های زیر نمونه ای از مجانب قائم در قسمت چپ $x_۰$ را نشان می‌دهد.





در حالتی که حد راست تابع در $x_۰$، $+\infty$ (یا $-\infty$) باشد، مجدداً خط عمودی $x = x_۰$ را یک مجانب قائم نمودار تابع می‌نامند و شکل‌های زیر نمونه‌هایی از این حالت را نشان می‌دهند.





مثال : نمودار تابع $y = \frac{۱}{x^۲ - ۱}$ را رسم کنید.

حل : دامنه این تابع نقاط ± ۱ را ندارد و در این نقاط داریم

$$\lim_{x \to ۱^+} \frac{۱}{x^۲ - ۱} = +\infty \quad , \quad \lim_{x \to ۱^-} \frac{۱}{x^۲ - ۱} = -\infty$$

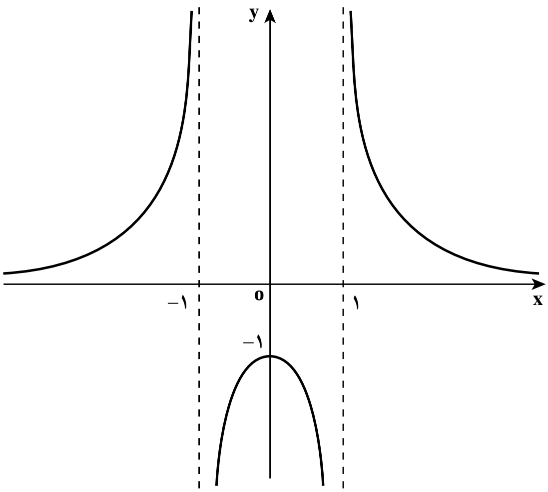
$$\lim_{x \to -۱^+} \frac{۱}{x^۲ - ۱} = -\infty \quad , \quad \lim_{x \to -۱^-} \frac{۱}{x^۲ - ۱} = +\infty$$

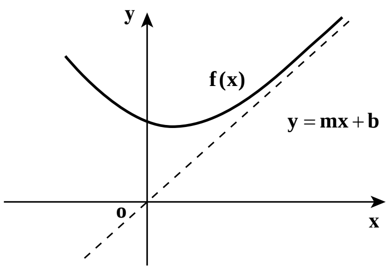
بنابراین خط‌های $x = ۱$ ،$x = -۱$ از مجانب‌های قائم این تابع می‌باشند.

از آن‌جا که $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{۱}{x^۲ - ۱} = ۰$ ، خط $y = ۰$ نیز مجانب افقی تابع در $\pm\infty$ است. $\frac{۱}{x^۲ - ۱}$ هیچ‌گاه صفر نمی‌شود، پس نمودار تابع محور xها را قطع نمی‌کند. به ازای $x = ۰$ داریم $y = ۱$، پس نمودار تابع در $y = ۱$ محور yها را قطع می‌کند.

همچنین داریم $y' = \frac{-۲x}{(x^۲ - ۱)^۲}$ ، پس در $x = ۰$, y صفر می‌شود و علامت آن همان علامت $-۲x$ است. جدول تغییرات این تابع به صورت زیر است.

x	$-\infty$		-۱		۰		۱		$+\infty$
y'		$+$	‖	$+$	۰	$-$	‖	$-$	
y	۰	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-۱	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	۰





مجانب مایل : در حالت‌هایی که حد تابع $f(x)$ در $+\infty$ یا $-\infty$ برابر بینهایت شود ممکن است بتوان خطی به‌صورت $y = mx + b$ یافت به‌گونه‌ای که مقادیر $f(x)$ و $mx + b$ در $+\infty$ یا $-\infty$ نزدیک هم باشند و نمودار $f(x)$ و خط $y = mx + b$ در $+\infty$ یا $-\infty$ به هم نزدیک شوند، مانند شکل مقابل.

در این حالت خط $y = mx + b$ را یک مجانب مایل نمودار تابع f می‌نامند. به‌طور دقیق‌تر گوییم خط $y = mx + b$ یک مجانب نمودار تابع در $+\infty$ است هرگاه

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - (mx + b)) = ۰$$

شکل بالا نشان‌دهنده همین وضعیت می‌باشد. گوییم خط $y = mx + b$ یک مجانب نمودار f در $-\infty$ است هرگاه

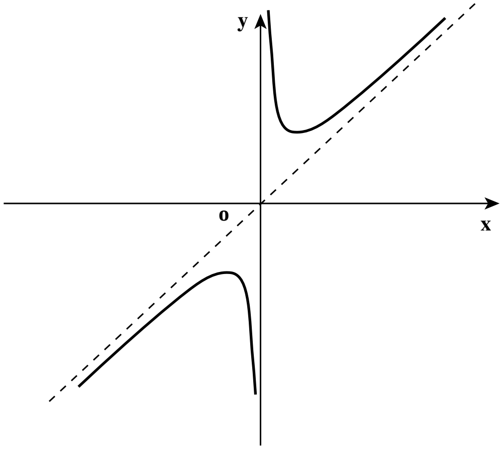
$$\lim_{x \to -\infty} (f(x) - (mx + b)) = ۰$$

در حالت $m \neq ۰$ این مجانب‌ها را **مجانب مایل** می‌نامند.

مثال : در تابع $f(x) = \frac{x^۲ + ۱}{x}$ ، خط $x = ۰$ مجانب قائم و خط $y = x$ در $+\infty$ و $-\infty$ مجانب مایل است زیرا

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^۲ + ۱}{x} - x\right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{۱}{x} = ۰$$

با رسم جدول تغییرات تابع دیده می‌شود نمودار تابع به شکل زیر است.

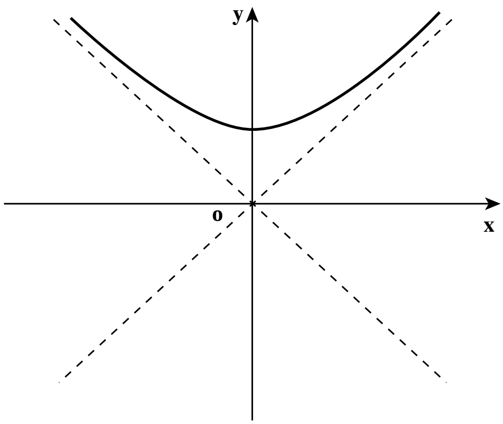


مثال : در تابع $f(x)=\sqrt{1+x^2}$ ، **خط** $y=x$ در $+\infty$ **مجانب مایل نمودار تـابع است و خـط** $y=-x$ در $-\infty$ **مجانب مایل نمودار تابع است** زیرا

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+x^2}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{1+x^2}-x)(\sqrt{1+x^2}+x)}{\sqrt{1+x^2}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{1+x^2}-(-x)=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{1+x^2}+x=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}-x}=0$$

با رسم جدول تغییرات تابع دیده می‌شود که نمودار تابع به شکل زیر است.



یکی از راه‌های یافتن مجانب مایل نمودار تابع f آن است که با محاسبات جبری، ضابطه $f(x)$ را به صورت $f(x) = g(x) + mx + b$ دربیاوریم به‌گونه‌ای که $g(x)$ تابعی باشد که در $+\infty$ یا $-\infty$ حد صفر داشته باشد.

روشن است که در این حالت شرط $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(mx+b))=0$ خود به خود برقرار می‌شود و $y = mx + b$ یک مجانب مایل نمودار f خواهد بود.

مثال : مجانب‌های مایل تابع $f(x)=\dfrac{x^3+x^2+2x}{x^2+1}$ را بیابید.

حل : با تقسیم صورت بر مخرج داریم : $f(x)=x+1+\dfrac{x-1}{x^2+1}$

چون $\dfrac{x-1}{x^2+1}$ در $+\infty$ و $-\infty$ حد صفر دارد خط $y = x + 1$ در $+\infty$ و $-\infty$ مجانب مایل نمودار f است.

درحالت کلی برای یافتن مجانب مایل باید عملیات زیر را به‌کار بریم. اگر نمودار f در $+\infty$ دارای خط مجانبی به‌صورت $y = mx + b$ باشد از شرط $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(mx+b))=0$ می‌توان با تقسیم تابع $f(x) - (mx + b)$ بر x نتیجه گرفت $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=m$. پس حد $\dfrac{f(x)}{x}$ در $+\infty$ را بررسی می‌کنیم،در صورتی که این حد موجود باشد، ضریب زاویه خط مجانب به‌دست می‌آید. با به دست آمدن m ، حد $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-mx)$ را بررسی می‌کنیم، در صورتی که این حد موجود باشد، مقدار b نیز به‌دست می‌آید و خط مجانب مایل موجود خواهد بود. همین عملیات را در $-\infty$ می‌توان انجام داد تا خط مجانب مایل (در صورت وجود) در $-\infty$ به‌دست آید.

مثال : خط مجانب مایل تابع $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x^4}}{1+x}$ را (در صورت وجود) در $+\infty$ و $-\infty$ به‌دست آورید.

حل : حد $\dfrac{f(x)}{x}$ را در $+\infty$ بررسی می‌کنیم.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^4}}{(1+x)x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{1+x^4}{(1+x)^2x^2}}=1$$

پس ضریب زاویه خط مجانب مایل در $+\infty$ (در صورت وجود) برابر ۱ است.

حد $f(x) - x$ را در $+\infty$ بررسی می‌کنیم.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{۱+x^۴}}{۱+x} - x = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{۱+x^۴} - x - x^۲}{۱+x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{۱+x^۴ - (x+x^۲)^۲}{(۱+x)(\sqrt{۱+x^۴} + x + x^۲)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{۱ - x^۲ - ۲x^۳}{(۱+x)(\sqrt{۱+x^۴} + x + x^۲)} = -۱$$

پس خط $y = x - ۱$ مجانب مایل این تابع در $+\infty$ است.

این حدگیری‌ها در $-\infty$ نیز دقیقاً مانند بالا هستند و خط $y = x - ۱$ مجانب مایل این تابع در $-\infty$ نیز می‌باشد.

در توابعی که دامنه آن‌ها تمام IR نباشد، ابتدا لازم است به دامنه آن‌ها دقت شود و جدول تغییرات فقط در محدوده دامنه تابع رسم شود.

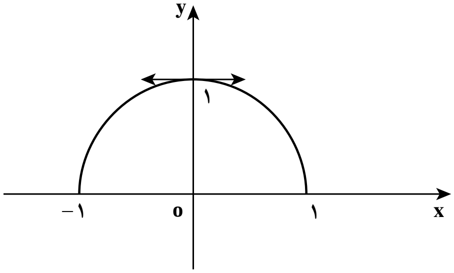
مثال: نمودار تابع $y = \sqrt{۱ - x^۲}$ را رسم کنید.

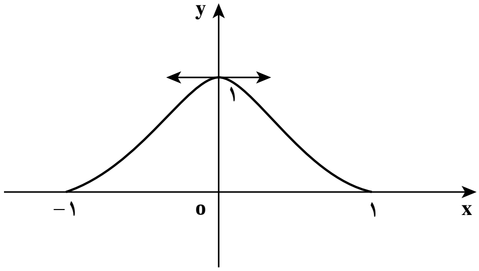
حل: دامنه این تابع بازه $[-۱,۱]$ است. در این حالت بحثی درباره مجانب افقی وجود ندارد زیرا حد تابع در $\pm\infty$ معنا ندارد. این تابع دارای حد $+\infty$ یا $-\infty$ در هیچ نقطه‌ای نیست پس مجانب قائم ندارد. مقدار y به ازای $x = \pm۱$ صفر می شود که نشان می‌دهد نمودار تابع در این نقاط محور xها را قطع می‌کند. به ازای $x = ۰$ داریم $y = ۱$، پس نمودار تابع در $y = ۱$ محور yها را قطع می‌کند.

داریم $y' = \frac{-x}{\sqrt{۱ - x^۲}}$ و به ازای $x = ۰$، y صفر می شود و علامت y همان علامت $-x$ است. جدول تغییرات تابع به شکل زیر است

x	-۱		۰		۱
y'		+	۰	−	
y	۰	↗	۱	↘	۰

شکل تابع می‌تواند به صورت‌های زیر باشد :

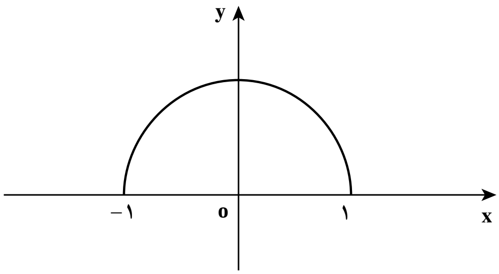




برای تشخیص بهتر شکل تابع لازم است بدانیم، نمودار تابع با چه زاویه‌ای از نقطهٔ ۱− خارج و به نقطهٔ ۱ وارد می‌شود (زاویه خط مماس با محور xها) و جهت تقعر منحنی چگونه است. y در ۱±تعریف نشده است ولی حد y در ۱± مقادیر ∞± دارد که نشان می‌دهد خط مماس بر نمودار تابع در این نقاط عمودی است. پس نمودار تابع به‌طور عمودی از این نقاط خارج یا به آن داخل می‌شود. همچنین

$$y'' = \frac{-1\times\sqrt{1-x^2} + x\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{-1}{(\sqrt{1-x^2})^3}$$

یعنی y همواره منفی است و جهت تقعر روبه پایین است. بنابراین شکل صحیح به صورت زیر باید باشد.



به آسانی می‌توانید تحقیق کنید که نمودار این تابع دقیقاً یک نیم‌دایره به شعاع ۱ است. فاصله نقاط نمودار این تابع را تا مبدأ حساب کنید.

با توجه به این مثال‌ها، می‌توان روش رسم نمودار یک تابع را به شکل زیر خلاصه کرد :

۱) دامنه تابع را مشخص کنید.

۲) اگر حد تابع در ∞± معنا دارد، آن را حساب کنید تا رفتار تابع در ∞+ و ∞− مشخص شود و (در صورت وجود) مجانب‌های افقی و مایل تعیین شوند.

۳) در صورت وجود، نقاطی که حد چپ یا راست تابع در این نقاط ∞+ یا ∞− است مشخص شوند، تا مجانب‌های قائم نمودار تابع تعیین شوند.

۴) نقاط برخورد نمودار تابع با محور xها و محور yها تعیین شوند.

۵) y در نقاط مشتق‌پذیری محاسبه شود و تعیین علامت شود و نقاط ماکزیمم و می‌نیمم تعیین شوند.

۶) y در صورت امکان محاسبه شود و تعیین علامت شود و نقاط عطف در صورت وجود

تعیین شوند.

۷) اطلاعات به‌دست آمده از بندهای قبل را در جدول تغییرات تابع وارد می‌کنیم تا بازه‌هایی که تابع صعودی یا نزولی است مشخص شود و معلوم شود تابع از چه نقاطی به چه نقاطی صعود یا نزول می‌کند و در چه نقاط ماکزیمم یا می‌نیمم می‌شود.

۸) نمودار تابع طبق جدول رسم شود و در نقاطی که ابهام دارد که با چه زاویه‌ای وارد یا خارج می‌شود، مقدار y در این نقاط محاسبه شوند.

به چند مثال زیر توجّه کنید :

مثال ۱ : نمودار نمایش تغییرات تابع $y=\dfrac{x}{x^۲-۱}$ را رسم کنید.

حل : خطوط مستقیم به معادلات $x=۱$ ، $x=-۱$ و $y=۰$ مجانب‌های منحنی نمایش این تابع هستند. (چرا؟) حال با مشتق‌گیری از تابع $y=\dfrac{x}{x^۲-۱}$ داریم $y'=\dfrac{x^۲-۱-۲x^۲}{(x^۲-۱)^۲}$ و از آنجا $y'=\dfrac{-x^۲-۱}{(x^۲-۱)^۲}$ بنابراین، همواره $y<۰$ و درنتیجه تابع همواره نزولی است. برای به‌دست آوردن تقعر منحنی y را محاسبه می‌کنیم، با مشتق‌گیری از طرفین رابطهٔ

$$y'=\frac{-x^۲-۱}{(x^۲-۱)^۲}$$

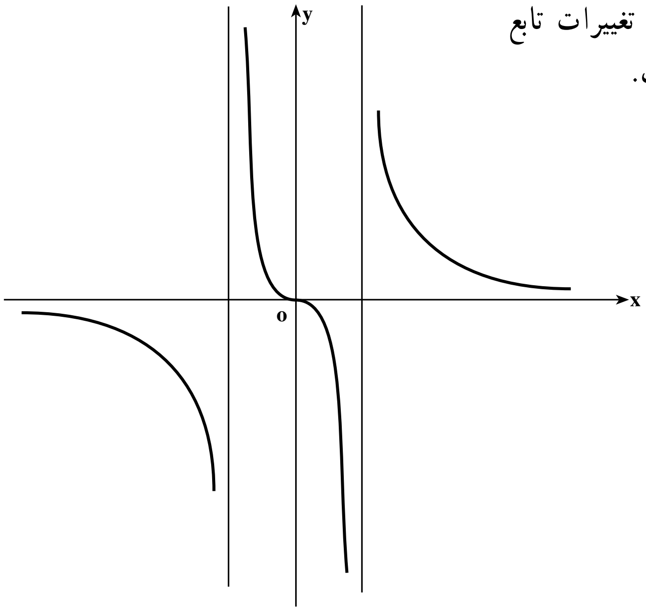
داریم

$$y''=\frac{۲x(x^۲-۱)(x^۲+۳)}{(x^۲-۱)^۴}$$

چون $\dfrac{۲(x^۲+۳)}{(x^۲-۱)^۴}>۰$ ، y با $x(x^۲-۱)$ هم علامت است. جدول تغییرات تابع را به شکل زیر تنظیم می‌کنیم :

x	$-\infty$		-۱		۰		۱		$+\infty$
y'		$-$		$-$		$-$		$-$	
y	۰	$\searrow$	$-\infty \mid +\infty$	$\searrow$	۰	$\searrow$	$-\infty \mid +\infty$	$\searrow$	۰
y''		$-$		$+$		$-$		$+$	
		تقعر رو به پایین		تقعر رو به بالا		تقعر رو به پایین		تقعر رو به بالا	

بنابراین، منحنی نمایش تغییرات تابع $y=\frac{x}{x^{۲}-۱}$ به شکل مقابل است.



با تبدیل $x \to -x$ و $y \to -y$ معادلهٔ $y=\frac{x}{x^{۲}-۱}$ تغییر نمی‌کند، پس مبدأ مختصات مرکز تقارن آن است.

مثال ۲ : منحنی نمایش تغییرات تابع $y=\frac{۱}{۱+x^{۲}}$ را رسم کنید.

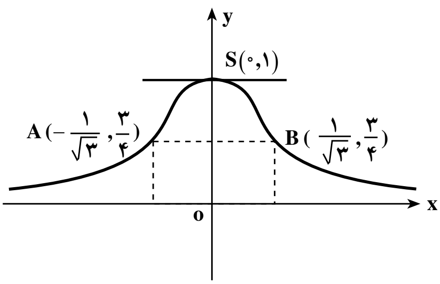
حل : ملاحظه می‌کنیم که $\frac{۱}{۱+x^{۲}}>۰$ در نتیجه $y>۰$ بنابراین، همه نقاط منحنی در بالای محور xها واقع هستند. با مشتق‌گیری از طرفین رابطهٔ $y=\frac{۱}{۱+x^{۲}}$ داریم $y'=\frac{-۲x}{(۱+x^{۲})^{۲}}$ ، $y = ۰$ نتیجه می‌دهد $x=۰$. با تبدیل $x \to -x$ معادلهٔ $y=\frac{۱}{۱+x^{۲}}$ تغییر نمی‌کند و محور yها محور تقارن منحنی نمایش آن است. ملاحظه می‌کنیم $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۱}{۱+x^{۲}}=۰$ بنابراین، خط $y=۰$ (محور xها) مجانب افقی منحنی است. چون $x^{۲}\geq ۰$ ، $y=\frac{۱}{۱+x^{۲}}\leq ۱$ در نتیجه $۰<y\leq ۱$، بنابراین، منحنی نمایش تابع بین دو خطّ $y=۰$ و $y=۱$ واقع است. با مشتق‌گیری از طرفین رابطهٔ $y'=\frac{-۲x}{(x^{۲}-۱)^{۲}}$ داریم

$$y''=\frac{(۱+x^{۲})(-۲x^{۲}-۲+۸x^{۲})}{(۱+x^{۲})^{۴}}$$

درنتیجه $y''=\frac{۶x^۲-۲}{(۱+x^۲)^۳}$ ، $y''=۰$ نتیجه می‌دهد $۶x^۲-۲=۰$ و از آنجا $x=\pm\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ ، چون $(۱+x^۲)^۳>۰$ ، y'' با $۶x^۲-۲$ هم علامت است. جدول تغییرات تابع به شکل زیر است :

x	$-\infty$		$-\frac{۱}{\sqrt{۳}}$		۰		$\frac{۱}{\sqrt{۳}}$		$+\infty$
y'		+		+		−		−	
y	۰	↗	$\frac{۳}{۴}$	↗	۱	↘	$\frac{۳}{۴}$	↘	۰
y''		+		−		−		+	
		تقعر رو به بالا		تقعر رو به پایین		تقعر رو به پایین		تقعر رو به بالا	

بنابراین، منحنی نمایش تغییرات تابع $y=\frac{۱}{۱+x^۲}$ به شکل زیر است.



در $x=۰$ ، y' تغییر علامت می‌دهد و از مثبت به منفی می‌رود بنابراین، $S(۰,۱)$ نقطهٔ ماکزیمم مطلق تابع است. ملاحظه می‌کنیم که به‌ازای $x=\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ و $x=-\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ ، $y''=۰$ و در این نقاط y'' تغییر علامت می‌دهد، بنابراین، $A(-\frac{۱}{\sqrt{۳}},\frac{۳}{۴})$ و $B(\frac{۱}{\sqrt{۳}},\frac{۳}{۴})$ نقاط عطف منحنی هستند.

مثال ۳ : منحنی نمایش تابع $y=\frac{۲x+۳}{۳x+۵}$ را رسم کنید.

حل : ابتدا مجانب‌های این منحنی را به دست می‌آوریم، توجّه داریم که

$$\lim_{x\to\pm\infty} y=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۲x+۳}{۳x+۵}=\frac{۲}{۳}$$

بنابراین، خط $y=\frac{۲}{۳}$ مجانب افقی است. ریشه مخرج کسر عبارت است از $x=-\frac{۵}{۳}$

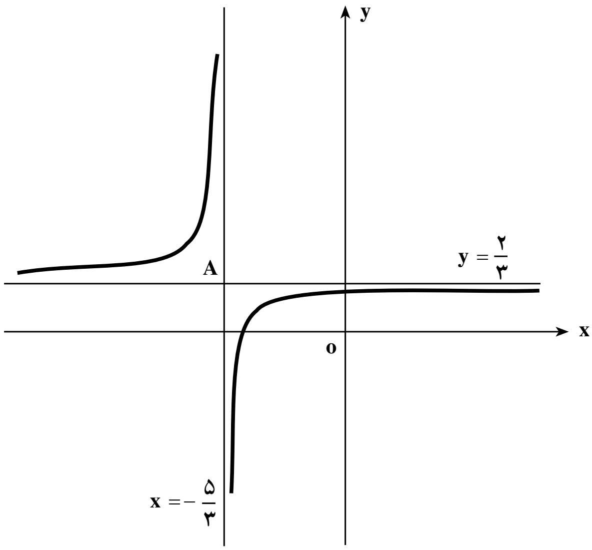
بنابراین،

$$\lim_{x\to -\frac{۵}{۳}} \frac{۲x+۳}{۳x+۵} = \pm\infty$$

درنتیجه خط $x=-\frac{۵}{۳}$ مجانب قائم است. حال از طرفین $y=\frac{۲x+۳}{۳x+۵}$ نسبت به x مشتق می‌گیریم و از آنجا $y'=\frac{۱}{(۳x+۵)^{۲}}$ بنابراین، $y \quad > ۰$ درنتیجه تابع صعودی است. با توجّه به $y'=\frac{۱}{(۳x+۵)^{۲}}$ ملاحظه می‌شود که $y''=\frac{-۶(۳x+۵)}{(۳x+۵)^{۴}}$ چون مخرج این کسر $(۳x+۵)^{۴}>۰$، y با $-۶(۳x+۵)$ هم علامت است. حال جدول تغییرات این تابع را به شکل زیر تنظیم می‌کنیم :

x	$-\infty$		$-\frac{۵}{۳}$		$+\infty$
y'		+	‖	+	
y	$\frac{۲}{۳}$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$\frac{۲}{۳}$
y''		+ +	‖	− −	
		تقعر رو به بالا		تقعر رو به پایین	

بنابراین، منحنی نمایش تغییرات تابع $y=\frac{۲x+۳}{۳x+۵}$ به شکل زیر است :



در این شکل $A(-\frac{۵}{۳},\frac{۲}{۳})$ محل تلاقی مجانب‌های منحنی می‌باشد. چنان که مبدأ مختصات را به نقطهٔ $A(-\frac{۵}{۳},\frac{۲}{۳})$ انتقال دهیم به‌سادگی می‌توان تحقیق نمود که محل تلاقی دو مجانب یعنی همان نقطهٔ $A(-\frac{۵}{۳},\frac{۲}{۳})$ مرکز تقارن منحنی است.

تابع $y=\frac{۲x+۳}{۳x+۵}$ را یک تابع هموگرافیک می‌نامند. صورت کلی توابع هموگرافیک به شکل $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ می‌باشد که در آن ضرایب a، b، c و d اعداد ثابت هستند و a و c توأماً صفر نیستند.

مسائل

منحنی نمایش توابع زیر را رسم کنید.

۱ـ $y=x^۳+۴x^۲-۳x+۱۰$

۲ـ $y=x^۴+x^۲+۱$

۳ـ $y=\frac{۲x-۳}{۳x-۵}$

۴ـ $y=\frac{x}{x^۲+۱}$

۵ـ $y=\frac{x^۲}{x-۱}$

۶ـ $y=\sqrt{x^۲-۱}$

۷ـ $y=\frac{x^۲}{\sqrt{x-۱}}$

فصل ۴

کاربردهای مشتق

همان‌گونه که در فصل قبل ملاحظه شد تفسیر آهنگ تغییر از مشتق ریشه در مسائل فیزیکی و پدیده‌های طبیعی دارد و تعبیر هندسی مشتق رویکردی نظری و انتزاعی را ارائه می‌دهد. دامنه کاربردهای مشتق در هر دو حیطه توسعه یافته است. کاربردهای مشتق در داخل ریاضیات به بررسی رفتار و شناسایی ویژگی‌های تابع‌ها مربوط می‌شود. مدلسازی مسائل زندگی و پدیده‌های طبیعی و حل و بررسی آن‌ها نیز با مفهوم مشتق در رابطه است. نمونه بارزی از این‌گونه پدیده‌ها، پدیدهٔ رشد و زوال می‌باشد که هم در ارتباط با مشتق و هم در رابطه با انتگرال است که در فصل آخر از آن صحبت خواهیم کرد. در این فصل بعضی از کاربردهای مشتق ارائه می‌شوند.

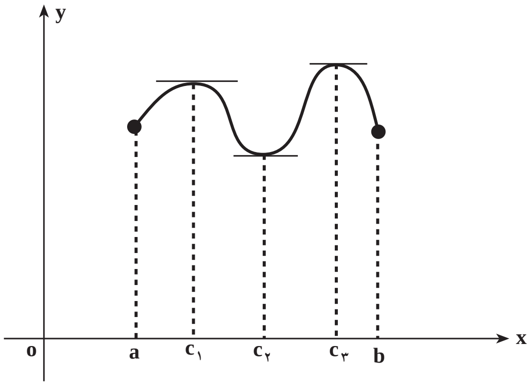
ماکزیمم و می‌نیمم یک تابع

در این بخش نقاط ماکزیمم و می‌نیمم نمودار یک تابع را تعیین می‌کنیم و بررسی می‌کنیم که در کدام بازه تابع صعودی است و در چه بازه‌ای تابع نزولی است. با به‌دست آوردن این اطلاعات می‌توانیم منحنی نمایش یک تابع را دقیق‌تر رسم کنیم.

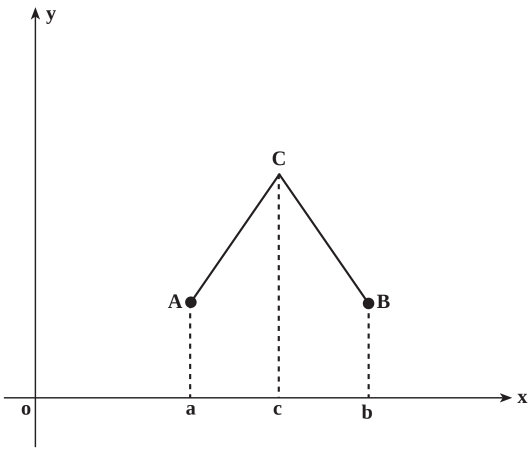
ماکزیمم و می‌نیمم نسبی و مطلق یک تابع : تابع $y = f(x)$ با دامنه $[a , b]$ مفروض است، فرض می‌کنیم (e, g) یک بازه شامل c در دامنه f است به طوری که به ازای هر $x \in (e, g)$ ، $f(x) \le f(c)$ در این صورت می‌گوییم تابع f در c **ماکزیمم نسبی** است. اگر به ازای هر $x \in (e, g)$ داشته باشیم $f(x) \ge f(c)$ می‌گوییم f در c **می‌نیمم نسبی** است. اگر به ازای هر $x \in [a , b]$ داشته باشیم $f(x) \le f(c)$ می‌گوییم f در بازه $[a , b]$ در نقطه c **ماکزیمم مطلق** است. همچنین اگر به ازای هر $x \in [a , b]$ ، $f(x) \ge f(c)$ گوییم تابع f در بازه $[a , b]$ در c **می‌نیمم مطلق** است.

ممکن است یک تابع در یک بازه دارای چندین ماکزیمم و می‌نیمم نسبی باشد ولی مقدار ماکزیمم و می‌نیمم مطلق آن در صورت وجود منحصر به‌فرد هستند.

در شکل مقابل منحنی نمایش تابع در c_1، ماکزیمم نسبی است، در c_2 می‌نیمم مطلق است، در c_3 نیز ماکزیمم مطلق است. در این شکل تابع داده شده در این سه نقطه مشتق‌پذیر است، به عبارت دیگر، خطوط مماس بر منحنی در این سه نقطه وجود دارند و با محور xها موازی هستند، در نتیجه شیب خطوط مماس در این سه نقطه صفر است. ممکن است تابعی در $c \in (a,b)$ ماکزیمم یا می‌نیمم باشد ولی در c مشتق‌پذیر نباشد، به شکل مقابل توجّه کنید:



تابع $y = f(x)$ با دامنه $[a, b]$ که منحنی نمایش آن از دو پاره‌خطّ AC و BC تشکیل یافته است را ملاحظه می‌کنیم، این تابع در c ماکزیمم مطلق است ولی تابع در c مشتق‌پذیر نیست. مشتق چپ آن شیب خطّ AC است و مشتق راست آن شیب خط مستقیم BC می‌باشد، بنابراین، مشتق‌های چپ و راست تابع در c یکی نیستند. درنتیجه تابع در c مشتق‌پذیر نیست.



چگونه می‌توان ماکزیمم و می‌نیمم یک تابع را تعیین نمود؟ در قضیه زیر تا حدودی به این پرسش پاسخ داده می‌شود. این قضیه را بدون اثبات می‌پذیریم.

قضیهٔ ۱ : تابع $f(x)$ با دامنه $[a, b]$ مفروض است، فرض کنیم f در $c \in (a, b)$ ماکزیمم نسبی (می‌نیمم نسبی) است، علاوه بر آن فرض می‌کنیم f در c مشتق‌پذیر باشد، در این صورت $f'(c) = 0$.

با توجّه به قضیهٔ ۱ و آنچه که در بالا گفته شد نقـاط ماکزیمم و می‌نیمم نسبی یـا مطلق یک تابع نقاطی هستند که مقدار مشتق در آن نقاط صفر است، یا مشتق وجود ندارد.

تعریف : تابع f با دامنه $[a, b]$ مفروض است، نقاطی از بازهٔ (a, b) که مشتق f در آن نقاط صفر است یـا نقاطی از این بازه که مشتق f در آن نقاط وجـود ندارد را **نقاط بحرانی** تـابع f می‌نامند.

قضیهٔ زیر یک خاصیّت دیگر توابع پیوسته را بیان می‌کند، از این قضیه برای اثبات قضیه‌های بعدی استفاده می‌کنیم، خود این قضیه را بدون اثبات می‌پذیریم.

قضیهٔ ۲ : اگر تابع f بر بازه بسته $[a, b]$ پیوسته باشد، f در این بازه دارای ماکزیمم مطلق و می‌نیمم مطلق خواهد بود.

با توجّه به این قضیه اگر تابع f بر بازه بسته $[a, b]$ پیوسته باشد آنگاه f در این بازه دارای ماکزیمم مطلق و می‌نیمم مطلق است. چگونه می‌توان این ماکزیمم مطلق و می‌نیمم مطلق را به‌دست آورد؟ ابتدا نقاط بحرانی تابع f را به دست می‌آوریم و مقادیر تابع f را به ازای این نقاط بحرانی محاسبه می‌کنیم، سپس $f(a)$ و $f(b)$ را محاسبه می‌کنیم، در این مقدارها، کوچکترین آن‌ها می‌نیمم مطلق تابع و بزرگترین آن‌ها ماکزیمم مطلق تابع خواهد بود.

مثال۱ : تابع $f(x) = x^{\frac{۸}{۳}} - x^{\frac{۲}{۳}}$ با دامنه $[-۸,۲۷]$ را درنظر بگیرید، ماکزیمم و می‌نیمم مطلق آن را به‌دست آورید.

حل : ابتدا نقاط بحرانی این تابع را به دست می‌آوریم. توجّه داریم که

$$f'(x) = \frac{۸}{۳}x^{\frac{۵}{۳}} - \frac{۲}{۳}x^{-\frac{۱}{۳}}$$

بنابراین، $f'(x) = ۰$ نتیجه می‌دهد

$$\frac{۸}{۳}x^{\frac{۵}{۳}} - \frac{۲}{۳}x^{-\frac{۱}{۳}} = ۰$$

و از آنجا $۴x^۲ - ۱ = ۰$ در نتیجه

$$x = \pm\frac{۱}{۲}$$

از $f'(x) = \frac{۸}{۳}x^{\frac{۵}{۳}} - \frac{۲}{۳}x^{-\frac{۱}{۳}}$ دیده می‌شود که مشتق تابع در $x = ۰$ وجود ندارد بنابراین، مجموعهٔ نقاط بحرانی تابع عبارت است از $\{-\frac{۱}{۲}, ۰, \frac{۱}{۲}\}$.

توجه داریم که $f(\frac{۱}{۲}) = f(-\frac{۱}{۲}) = (\frac{۱}{۲})^{\frac{۸}{۳}} - (\frac{۱}{۲})^{\frac{۲}{۳}}$ و از آنجا $f(\frac{۱}{۲}) = f(-\frac{۱}{۲}) = -\frac{۳}{۴\sqrt[۳]{۴}}$، درضمن $f(۰) = ۰$. حال مقادیر تابع f را در دو نقطه انتهای بازه $[-۸,۲۷]$ محاسبه می‌کنیم، و از آنجا $f(۲۷) = ۶۵۶۱ - ۹ = ۶۵۵۲$ و $f(-۲۸) = ۲۵۲$. بنابراین

$$\min\left\{-\frac{۳}{۴\sqrt[۳]{۴}}, ۰, ۲۵۲,۶۵۵۲\right\} = -\frac{۳}{۴\sqrt[۳]{۴}} \ , \ \max\left\{-\frac{۳}{۴\sqrt[۳]{۴}}, ۰, ۲۵۲,۶۵۵۲\right\} = ۶۵۵۲$$

یعنی می‌نیمم مطلق این تابع برابر $-\frac{۳}{۴\sqrt[۳]{۴}}$ و ماکزیمم مطلق آن برابر ۶۵۵۲ است.

مثال۲ : ماکزیمم مطلق تابع $f(x) = x\sqrt{a^۲ - x^۲}$ را، که در آن $-a \le x \le a$ و a مقدار مثبتی است، پیدا کنید.

حل :

$$f'(x) = \sqrt{a^۲ - x^۲} - \frac{x^۲}{\sqrt{a^۲ - x^۲}}$$

از حل معادله $f'(x) = ۰$ نتیجه می‌شود که

$$\sqrt{a^۲ - x^۲} = \frac{x^۲}{\sqrt{a^۲ - x^۲}}$$

بنابراین

$$a^۲ - x^۲ = x^۲ \text{ یا } x^۲ = \frac{a^۲}{۲}$$

پس $x = \pm\frac{a\sqrt{۲}}{۲}$ ، ملاحظه می‌کنیم که تابع مورد بحث در $x = \frac{a\sqrt{۲}}{۲}$ ماکزیمم مطلق و در $x = -\frac{a\sqrt{۲}}{۲}$ می‌نیمم مطلق دارد.

مسائل

در مسایل ۱ تا ۵ نقاط بحرانی توابع داده شده را به‌دست آورید.

۱ــ $f(x) = ۲x^۳ - ۹x^۲ + ۱۲x + ۶۰$

۲ــ $g(x) = ۲x^۳ - ۲x^۲ - ۱۶x + ۱$

۳ــ $g(x) = x^{\frac{۶}{۵}} - ۱۲x^{\frac{۱}{۵}}$

۴ــ $f(x) = (x^۳ - ۳x^۲ + ۴)^{\frac{۱}{۳}}$

۵ــ $f(x) = x^{\frac{۷}{۶}} - \frac{۷}{۲}x^{\frac{۲}{۳}} + ۵$

در مسایل ۶ تا ۱۱ مقادیر ماکزیمم و می‌نیمم مطلق توابع مفروض بر بازه داده شده را درصورت وجود محاسبه کنید.

۶ــ $g(x) = x^۴ - ۸x^۲ + ۱۶ \quad ; \quad [-۱,۴]$

۷ــ $f(x) = x^۳ + ۵x - ۴ \quad ; \quad [-۳,-۱]$

۸ـ $f(x)=(x+1)^{\frac{2}{3}}$ ؛ $[-2,1]$

۹ـ $f(x)=1-(x-3)^{\frac{2}{3}}$ ؛ $[-5,4]$

۱۰ـ $f(x)=x^{\frac{7}{6}}-\frac{7}{2}x^{\frac{2}{3}}+5$ ؛ $[0,64]$

۱۱ـ $f(x)=2x^3-9x^2+12x+60$ ؛ $[-2,3]$

دیدیم که اگر تابع $f(x)$ در نقطه درونی $x=x_0$ دارای یک ماکزیمم یا می‌نیمم نسبی (مطلق) باشد و $f'(x_0)$ موجود باشد آنگاه $f'(x_0)=0$، چگونه می‌توان تشخیص داد که تابع $f(x)$ در $x=x_0$ دارای یک ماکزیمم نسبی است یا یک می‌نیمم نسبی؟ برای پاسخ به این پرسش از آزمون مشتق اول استفاده می‌کنیم. قبل از بیان قضیه مربوطه متذکر می‌شویم که اگر تابع f در بازه (a,b) تعریف شده باشد و $x_0\in(a,b)$ موجود باشد به‌طوری که $f(x_0)=0$ و به ازای هر $x\in(a,x_0)$ داشته باشیم $f(x)>0$ و به ازای هر $x\in(x_0,b)$ داشته باشیم $f(x_0)<0$ می‌گویند تابع f در x_0 تغییر علامت می‌دهد و از مثبت به منفی می‌رود. اگر به ازای هر $x\in(a,x_0)$ داشته باشیم $f(x)<0$ و به ازای هر $x\in(x_0,b)$ داشته باشیم $f(x)>0$ باز هم می‌گویند f در x_0 تغییر علامت می‌دهد و از منفی به مثبت می‌رود.

قضیهٔ ۳ (تشخیص ماکزیمم نسبی از می‌نیمم نسبی با استفاده از آزمون مشتق اوّل) :
فرض می‌کنیم تابع f در بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ پیوسته و در بازهٔ (a,b) مشتق‌پذیر باشد، عدد $x_0\in(a,b)$ به‌گونه‌ایست که $f'(x_0)=0$ و f' در x_0 تغییر علامت می‌دهد و از مثبت به منفی می‌رود آنگاه f در x_0 دارای یک ماکزیمم نسبی است.

چنانکه هنگام عبور از x_0 تابع f' از منفی به مثبت برود به طریق مشابه می‌توان ثابت نمود که f در x_0 دارای یک می‌نیمم نسبی است.

مثال : ماکزیمم و می‌نیمم نسبی تابع $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+6x+10$ را به دست آورید، آیا این تابع ماکزیمم و می‌نیمم مطلق دارد؟ چرا؟

حل : از $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+6x+10$ نتیجه می‌شود $y'=x^2-5x+6$، حال سعی می‌کنیم این y' را به حاصل‌ضرب چند جمله‌ای‌های درجه اوّل یا دوّم تجزیه کنیم، برای این منظور ابتدا ریشه‌های معادلهٔ $x^2-5x+6=0$ را محاسبه می‌کنیم، این ریشه‌ها عبارتند از $x=2$ و $x=3$، بنابراین، $y'=(x-2)(x-3)$ حال y' را تعیین علامت می‌کنیم.

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$y' = x^2 - 5x + 6$		$+$	0	$-$	0	$+$	

با توجّه به این جدول دیده می‌شود که در $x = 2$, y' از مثبت به منفی می‌رود و با توجّه به قضیهٔ قبل در $x = 2$ تابع دارای یک ماکزیمم نسبی است، در $x = 3$, y' از منفی به مثبت می‌رود و به موجب قضیهٔ قبل تابع داده شده در $x = 3$ دارای یک می‌نیمم نسبی است. توجّه داریم که

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x + 10\right) = -\infty$$

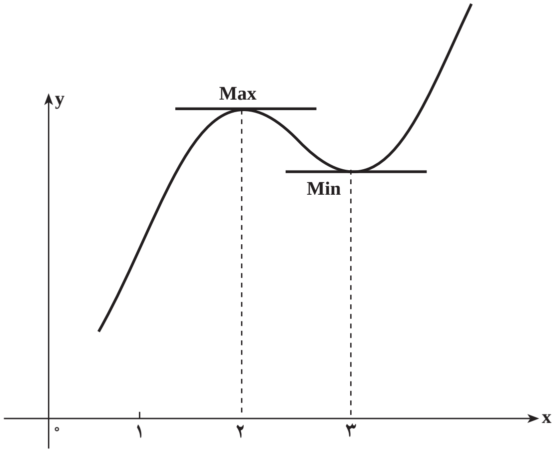
و

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x + 10\right) = +\infty$$

بنابراین، تابع $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x + 10$ ماکزیمم و می‌نیمم مطلق ندارد. جدول تغییرات این تابع به شکل زیر است

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{44}{3}$	$\searrow$	$\frac{29}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

با توجّه به این جدول دیده می‌شود که در بازهٔ $(-\infty, 2)$ داریم $y' > 0$ و با توجه به قضیه‌ای که داشتیم در این بازه تابع صعودی است، در بازهٔ $(2, 3)$ داریم $y' < 0$ و به موجب همان قضیه تابع در این بازه نزولی است. در بازهٔ $(3, +\infty)$ نیز تابع صعودی است. با توجّه به این جدول، منحنی نمایش تغییرات تابع $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x + 10$ به شکل مقابل است :



مسائل

در تمرین‌های ۱ تا ۴ ماکزیمم و می‌نیمم نسبی توابع داده شده را به‌دست آورید.

۱ـ $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 30$

۲ـ $y = 3x^5 - 25x^3 + 60x + 10$

۳ـ $y = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 100$

۴ـ $y = x^4 - 12x^3 + 52x^2 - 96x + 100$

۵ـ در تمرین‌های ۱ تا ۴، آیا توابع داده شده دارای ماکزیمم یا می‌نیمم مطلق هستند؟ چرا؟

۶ـ ثابت کنید تابع $y = x^3$ همواره صعودی است و از آنجا نتیجه بگیرید که این تابع ماکزیمم و می‌نیمم ندارد.

۷ـ در تابع $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 30$ ثابت کنید پاره خطّی که نقاط ماکزیمم و می‌نیمم روی نمودار تابع را به هم وصل می‌کند توسّط منحنی نمایش تابع به دو قسمت مساوی تقسیم می‌شود.

۸ـ ضرایب ثابت a و b را چنان تعیین کنید که تابع با ضابطهٔ $f(x) = x^3 + ax^2 + b$ در $(2, 3)$ یک ماکزیمم یا می‌نیمم نسبی داشته باشد.

۹ـ ضرایب a، b و c را چنان تعیین کنید که تابع با ضابطهٔ $f(x) = ax^2 + bx + c$ در $x = 1$ دارای مقدار ماکزیمم نسبی ۷ باشد و نمودار تابع $y = f(x)$ از نقطهٔ $(2, -2)$ بگذرد.

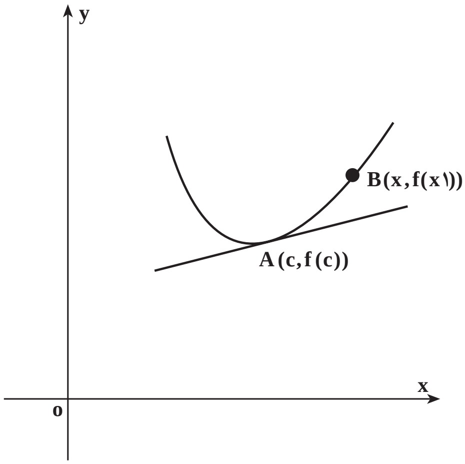
۱۰ـ تابع $f(x) = x^{2n+1}$ مفروض است که در آن n یک عدد صحیح و مثبت است، ثابت کنید که این تابع صعودی است و از آنجا نتیجه بگیرید که ماکزیمم و می‌نیمم نسبی ندارد.

۱۱ـ تابع $y = x^{2n}$ مفروض است که در آن n یک عدد صحیح و مثبت است، ثابت کنید که این تابع در $x = 0$ دارای یک می‌نیمم مطلق است.

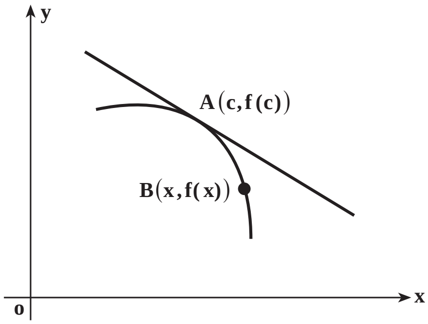
مشتقات مراتب بالاتر

چنانکه تابع $y = f(x)$ مشتق‌پذیر باشد، مشتق مرتبه اوّل آن را با علامت $y' = f'(x)$ نشان می‌دهند. اگر تابع $f'(x)$ نیز مشتق‌پذیر باشد مشتق آن را با $y'' = f''(x)$ نشان می‌دهند، چنانکه تابع $f''(x)$ باز هم مشتق‌پذیر باشد مشتق آن را با $y''' = f'''(x)$ نشان می‌دهند. به‌طور کلّی، مشتق مرتبه nام تابع $y = f(x)$ را با علامت $y^{(n)} = f^{(n)}(x)$ نشان می‌دهند. توجّه داریم که $f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)}(x))'$.

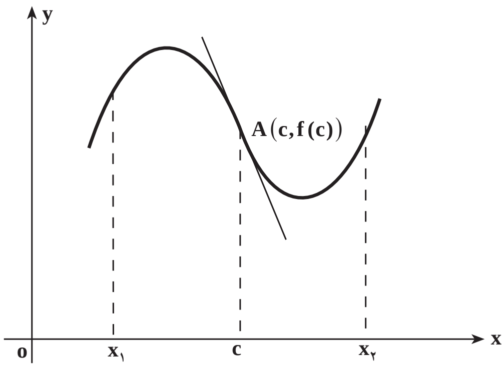
تقعر منحنی و نقاط عطف آن



تعریف ۱ : می‌گویند تقعر منحنی نمایش تابع $y = f(x)$ در نقطهٔ $A(c, f(c))$ رو به بالاست هرگاه $f'(c)$ موجود باشد و بازه بازی مانند I شامل c یافت شود که به ازای هر $x \neq c$ در I، نقطهٔ $B(x, f(x))$ روی منحنی، بالای خطّ مماس بر منحنی در نقطهٔ $A(c, f(c))$ باشد (شکل مقابل).



تعریف ۲ : می‌گویند تقعر منحنی نمایش تابع $y = f(x)$ در نقطهٔ $A(c, f(c))$ رو به پایین است هرگاه $f'(c)$ موجود باشد و بازه بازی مانند I شامل c یافت شود که به ازای هر $x \neq c$ در I، نقطهٔ $B(x,f(x))$ روی منحنی، پایین خطّ مماس بر منحنی در نقطهٔ $A(c, f(c))$ باشد (شکل مقابل).



تعریف۳ : می‌گویند نقطهٔ $A(c, f(c))$ یک نقطهٔ عطف منحنی نمایش تابع $y = f(x)$ است هرگاه خط مماس بر منحنی در نقطه A موجود باشد و دو عدد $x_1 < c$ و $x_2 > c$ موجود باشد به طوری که تقعر منحنی در هر نقطهٔ $B(x, f(x))$، $(x \in (x_1, c))$ با تقعر آن در هر نقطهٔ $C(x, f(x))$، $(x \in (c, x_2))$ متفاوت باشد (شکل مقابل).

فرض می‌کنیم تابعی مانند f روی یک بازه باز شامل c مشتق‌پذیر باشد. آنگاه ثابت می‌کنند :

۱) اگر $f''(c) > 0$ تقعر منحنی نمایش تابع $y = f(x)$ در نقطهٔ $A(c, f(c))$ رو به بالا است.

۲) اگر $f''(c) < 0$ تقعر منحنی نمایش تابع $y = f(x)$ در نقطهٔ $A(c, f(c))$ رو به پایین است.

۳) اگر $C(d,f(d))$ یک نقطه عطف منحنی نمایش تابع $y=f(x)$ باشد، آنگاه اگر $f''(d)$ موجود باشد ثابت می‌کنند $f''(d)=۰$.

بنابراین، طول نقاط عطف نمایش تابع $y=f(x)$ از حلّ معادلهٔ $f''(x)=۰$ به‌دست می‌آیند، البتّه همه xهایی که از حلّ این معادله به‌دست می‌آیند نشان‌دهنده نقاط عطف منحنی نیستند، آن‌هایی نقاط عطف را نشان می‌دهند که در آنها $f''(x)$ تغییر علامت بدهد.

به عنوان مثال، منحنی نمایش تابع $y=x^۳+۲x^۲+۳x+۱۰$ را درنظر می‌گیریم، ملاحظه می‌کنیم که $y'=۳x^۲+۴x+۳$ و $y''=۶x+۴$ بنابراین، $y''=۰$ نتیجه می‌دهد $x=-\frac{۲}{۳}$، ملاحظه می‌کنیم که تابع $y''=۶x+۴$ در نقطهٔ $x=-\frac{۲}{۳}$ تغییر علامت می‌دهد، بنابراین، $x=-\frac{۲}{۳}$ طول نقطهٔ عطف منحنی است. منحنی نمایش تابع $y=(x-۱)^۴$ را درنظر می‌گیریم، ملاحظه می‌کنیم که $y'=۴(x-۱)^۳$ و $y''=۱۲(x-۱)^۲$ بنابراین،$y''=۰$ نتیجه می‌دهد$x=۱$ ، در $x=۱$ تابع $y''=۱۲(x-۱)^۲$ تغییر علامت نمی‌دهد، درنتیجه $x=۱$ طول نقطهٔ عطف منحنی نیست.

مثال : ثابت کنید نقطه عطف منحنی نمایش تابع $y=x^۳-۴x^۲-۳x+۱۰$ مرکز تقارن آن است.

حل : از $y=x^۳-۴x^۲-۳x+۱۰$ نتیجه می شود $y'=۳x^۲-۸x-۳$ و $y''=۶x-۸$. از حلّ معادلهٔ $y''=۰$ نتیجه می‌شود $۶x-۸=۰$ و از آنجا $x=\frac{۴}{۳}$ ، چون $y''=۶x-۸$ درجه اوّل است، در $x=\frac{۴}{۳}$ تغییر علامت می‌دهد و از منفی به مثبت می‌رود، بنابراین $x=\frac{۴}{۳}$ طول نقطهٔ عطف منحنی است. با قرار دادن $x=\frac{۴}{۳}$ در معادلهٔ $y=x^۳-۴x^۲-۳x+۱۰$ داریم

$$y=(\frac{۴}{۳})^۳-۴(\frac{۴}{۳})^۲-۳(\frac{۴}{۳})+۱۰$$

و از آنجا

$$y=\frac{۳۴}{۲۷}$$

بنابراین، $A(\frac{۴}{۳},\frac{۳۴}{۲۷})$ نقطهٔ عطف منحنی است. حال مبدأ مختصات را به نقطهٔ $A(\frac{۴}{۳},\frac{۳۴}{۲۷})$ انتقال می‌دهیم در نتیجه $x=X+\frac{۴}{۳}$ و $y=Y+\frac{۳۴}{۲۷}$ با قرار دادن در معادله منحنی داده شده داریم

$$Y+\frac{۳۴}{۲۷}=(X+\frac{۴}{۳})^۳-۴(X+\frac{۴}{۳})^۲-۳(x+\frac{۴}{۳})+۱۰$$

و از آنجا

$$Y = X^{۳} - \frac{۲۵}{۳}X$$

با تبدیل $X \to -X$ و $Y \to -Y$ این معادله تغییر نمی‌کند، پس مبدأ مختصات جدید با همان نقطهٔ عطف $A(\frac{۴}{۳}, \frac{۳۴}{۲۷})$ مرکز تقارن منحنی نمایش تابع $y = x^{۳} - ۴x^{۲} - ۳x + ۱۰$ است.

مسائل

در مسایل ۱ تا ۵، تعیین کنید که در چه بازه‌ای تقعّر منحنی تابع داده شده رو به بالا است، در چه بازه‌ای تقعر آن رو به پایین است، و نقاط عطف را نیز درصورت وجود به‌دست آورید.

۱ــ $y = ۱۶x^{۴} + ۳۲x^{۳} + ۲۴x^{۲} - ۵x - ۲۰$

۲ــ $y = x^{۴} - ۸x^{۳} + ۲۴x^{۲}$

۳ــ $y = \frac{x}{x^{۲} - ۱}$

۴ــ $y = \frac{۱}{۱۲}x^{۴} + \frac{۱}{۶}x^{۳} - x^{۲}$

۵ــ $y = x^{۳} + ۳x^{۲} - ۳x + ۳$

۶ــ نقاط ماکزیمم و می‌نیمم نسبی و نقطهٔ عطف منحنی نمایش تابع $y = x^{۳} - ۴x^{۲} - ۳x + ۱۰$ را به‌دست آورید. ثابت کنید که این سه نقطه بر یک استقامت هستند و نقطه عطف وسط پاره‌خطّ واصل بین نقاط ماکزیمم و می‌نیمم نسبی است.

۷ــ $y = ax^{۳} + bx^{۲} + cx + d$، ضرایب a، b، c و d را چنان تعیین کنید که این تابع در $(۰,۳)$ دارای یک ماکزیمم یا می‌نیمم نسبی باشد و منحنی نمایش آن در $(۱ , -۱)$ یک نقطهٔ عطف داشته باشد.

۸ــ اگر $y = ax^{۳} + bx^{۲}$، ضرایب ثابت a و b را چنان تعیین کنید که منحنی نمایش این تابع در نقطهٔ $(۱,۲)$ دارای یک نقطهٔ عطف باشد.

۹ــ طول نقاط عطف یک منحنی به معادلهٔ $y = (x^{۲} - ۷x + ۱۴)e^{x}$ را بدست آورید.

رسم نمودار یک تابع

پیش از این با رسم نمودار توابع از طریق نقطه‌یابی و انتقال آشنا شده‌ایم. این روش محدودیت‌های بسیاری دارد و فقط در مورد توابع ساده قابل به‌کار بردن است. علاوه بر این رسم نمودار تابع با این

روش دقت بسیار کمی دارد.

برای توابع مشتق‌پذیر، از طریق مشتق تابع می‌توان بازه‌هایی که تابع در آن‌ها صعودی یا نزولی است، تشخیص داد و می‌توان جاهایی که تابع تغییر جهت می‌دهد و از حالت صعودی به نزولی و از حالت نزولی به صعودی تغییر وضعیت می‌دهد تشخیص داد و با مشتق دوم جهت تقعر نمودار تابع را مشخص کرد و با رسم جدول تغییرات تابع، چگونگی تغییرات تابع را با دقت کافی به‌دست آورد.

برای توابع پیوسته با دامنه $\mathbb{R}$ که مشتق‌پذیری هم دارند، تعیین علامت مشتق تابع و نقاط بحرانی تابع نقش اصلی را در رسم تابع بازی می‌کنند.

مثال : نمودار تابع $y = -x^{۲} + ۲x + ۳$ را رسم کنید.

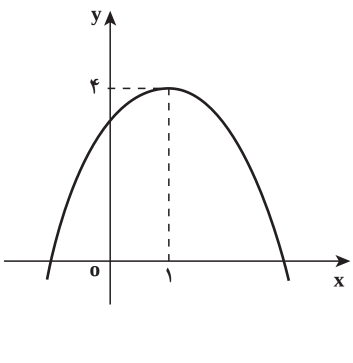
حل : داریم $y' = -۲x + ۲$. y' در $x = ۱$ صفر است و علامت y' و وضعیت صعودی و نزولی این تابع در جدول زیر مشخص شده است.

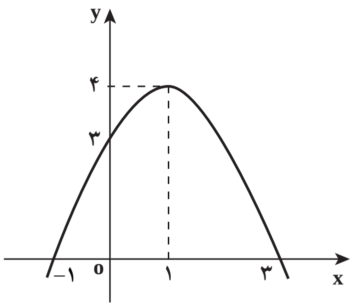
x	$-\infty$		۱		$+\infty$
y'		$+$	۰	$-$	
y		$\nearrow$	۴	$\searrow$	

برای دقت بیشتر لازم است حد تابع در $+\infty$ و $-\infty$ نیز معلوم گردد. در این مثال $\lim\limits_{x\to+\infty} -x^{۲} + ۲x + ۳ = -\infty$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} -x^{۲} + ۲x + ۳ = -\infty$. پس جدول به شکل زیر درمی‌آید.

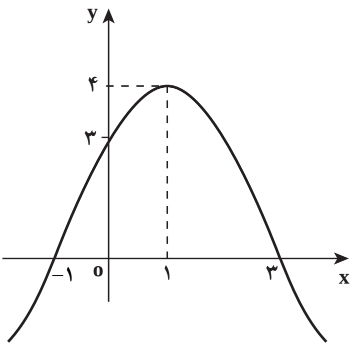
x	$-\infty$		۱		$+\infty$
y'		$+$	۰	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	۴	$\searrow$	$-\infty$

این جدول نشان می‌دهد که با تغییر x از $-\infty$ تا ۱، مقدار تابع از $-\infty$ تا ۴ صعود می‌کند و سپس با تغییر x از ۱ تا $+\infty$، مقدار تابع از ۴ تا $-\infty$ نزول می‌کند.





برای رسم بهتر، می‌توانیم محل تلاقی نمودار را با محور xها و yها به‌دست آوریم. جواب‌های معادله $y=-x^۲+۲x+۳=۰$، نشان‌دهنده محل‌های برخورد نمودار با محور xها هستند (چرا؟). جواب‌های این معادله $x=-۱$ و $x=۳$ هستند. به ازای $x=۰$ داریم $y=۳$ که محل برخورد نمودار تابع با محور yها را نشان می‌دهد (چرا؟)

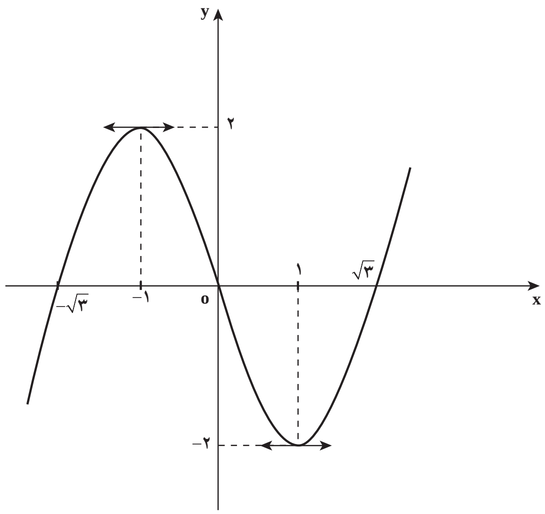


هنوز هم منحنی‌های زیادی هستند که می‌توانند از این نقاط بگذرند و به همین شکل صعود و نزول کنند، مثلاً منحنی مقابل. از کجا مطمئن هستیم که این منحنی نادرست است؟ با بررسی وضعیت تقعر نمودار تابع می‌توان تشخیص داد که کدام نمودار درست است. بنابراین مناسب است که در جدول تغییرات تابع علامت y'' را نیز مشخص کنیم. داریم $y''=-۲$. پس تقعر نمودار تابع همواره به سمت پایین است و نمودار بالایی صحیح نیست. علاوه بر این در هر نقطه از نمودار تابع با محاسبه مقدار y' وضعیت خط مماس را می‌توان تشخیص داد و معلوم می‌شود نمودار تابع در هر نقطه با چه زاویه‌ای نسبت به محور xها در حال تغییر است.

مثال : نمودار تابع $y=x^۳-۳x$ را رسم کنید.

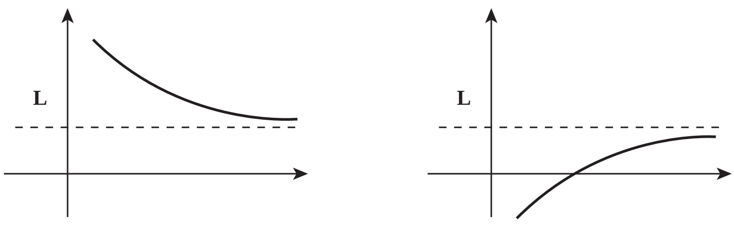
حل : داریم $y'=۳x^۲-۳$ و $y''=۶x$ و معادله $x^۳-۳x=۰$ دارای سه جواب $x=۰$ و $x=\pm\sqrt{۳}$ است و نمودار تابع در سه نقطه محور xها را قطع می‌کند. به ازای $x=۰$ داریم $y=۰$ و نمودار تابع در همین نقطه محور y ها را قطع می‌کند. حد این تابع در $+\infty$، $+\infty$ است و حد این تابع در $-\infty$، $-\infty$ است. جدول تغییرات تابع به شکل زیر است.

x	$-\infty$		$-\sqrt{۳}$		-۱		۰		۱		$\sqrt{۳}$		$+\infty$
y'		+		+	۰	−		−	۰	+		+	
y	$-\infty$	↗	۰	↗	۲	↘	۰	↘	-۲	↗	۰	↗	$+\infty$
y''		−		−		−	۰	+		+		+	
		تقعر رو به پایین					عطف			تقعر رو به بالا			

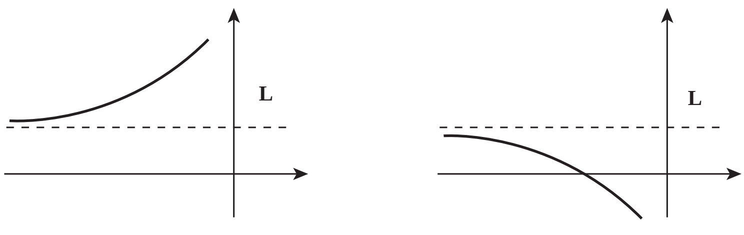


مجانب‌های نمودار توابع

در توابعی که حد آن‌ها در $+\infty$ عددی مانند L شود، نمودار تابع به‌گونه‌ای خواهد شد که در مقادیر بزرگ x به خط افقی $y = L$ نزدیک می‌شود. در این حالت گوییم خط $y = L$ مجانب افقی تابع در $+\infty$ است. شکل‌های زیر نمونه‌ای از مجانب افقی در $+\infty$ است.



به‌طور مشابه اگر حد تابعی در $-\infty$ برابر عدد L شود، نمودار تابع در مقادیر منفی x که از لحاظ قدرمطلق بزرگ هستند، به خط افقی $y = L$ نزدیک می‌شود و در این حالت گوییم خط $y = L$ مجانب افقی نمودار تابع در $-\infty$ است. شکل‌های زیر نمونه‌هایی از مجانب افقی در $-\infty$ است.



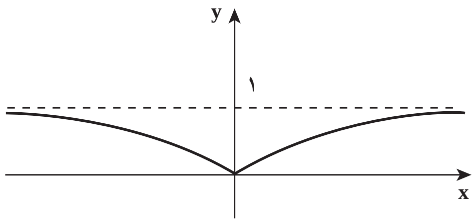
مثال : نمودار تابع $y = \frac{x^۲}{x^۲ + ۱}$ را رسم کنید.

حل : داریم

$$y' = \frac{۲x(x^۲+۱) - ۲x \times x^۲}{(x^۲+۱)^۲} = \frac{۲x}{(x^۲+۱)^۲}$$

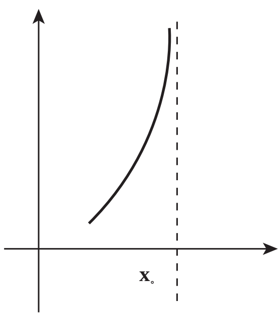
y' در $x = ۰$ صفر است و علامت آن همان علامت $۲x$ است. حد این تابع در $\pm\infty$ برابر ۱ است. پس $y = ۱$ مجانب افقی آن در $\pm\infty$ است.

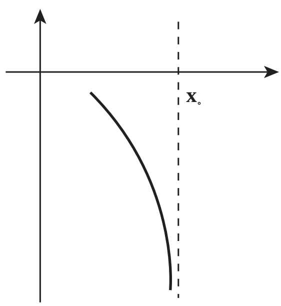
x	$-\infty$		۰		$+\infty$
y′		−	۰	+	
y	۱	↘	۰	↗	۱



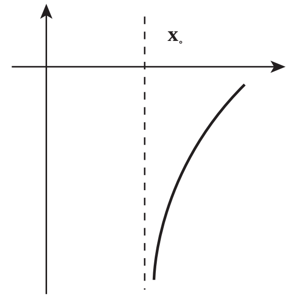
در برخی توابع ممکن است حد چپ تابعی در نقطهٔ $x_۰$ ، $+\infty$ (یا $-\infty$) شود. در این موارد خط عمودی $x = x_۰$ به‌گونه‌ای است که نمودار تابع با نزدیک شدن x به $x_۰$ از چپ، به این خط در مقادیر بزرگ مثبت (یا مقادیر منفی از لحاظ قدرمطلق بزرگ) نزدیک می‌شود.

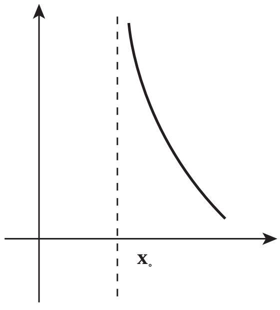
در این حالت گوییم خط عمودی $x = x_۰$ یک مجانب قائم نمودار تابع است. شکل‌های زیر نمونه‌ای از مجانب قائم در قسمت چپ $x_۰$ را نشان می‌دهد.





در حالتی که حد راست تابع در x_0، $+\infty$ (یا $-\infty$) باشد، مجدداً خط عمودی $x = x_0$ را یک مجانب قائم نمودار تابع می‌نامند و شکل‌های زیر نمونه‌هایی از این حالت را نشان می‌دهند.





مثال : نمودار تابع $y = \frac{1}{x^2 - 1}$ را رسم کنید.

حل : دامنه این تابع نقاط ± 1 را ندارد و در این نقاط داریم

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x^2-1} = +\infty \quad , \quad \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x^2-1} = -\infty$$

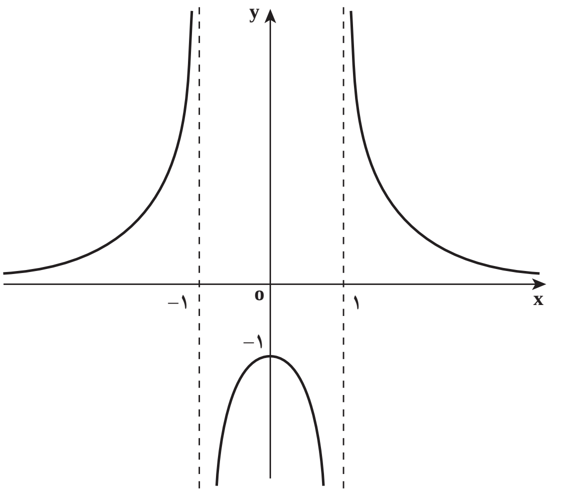
$$\lim_{x\to -1^+} \frac{1}{x^2-1} = -\infty \quad , \quad \lim_{x\to -1^-} \frac{1}{x^2-1} = +\infty$$

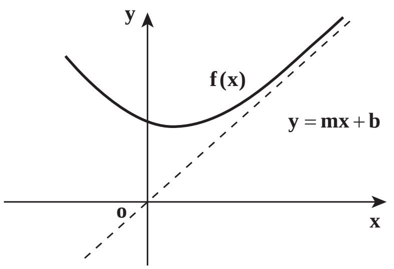
بنابراین خط‌های $x = 1$، $x = -1$ از مجانب‌های قائم این تابع می‌باشند.

از آن‌جا که $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^2-1} = 0$ ، خط $y = 0$ نیز مجانب افقی تابع در $\pm\infty$ است. $\frac{1}{x^2-1}$ هیچ‌گاه صفر نمی‌شود، پس نمودار تابع محور xها را قطع نمی‌کند. به ازای $x = 0$ داریم $y = 1$، پس نمودار تابع در $y = 1$ محور yها را قطع می‌کند.

همچنین داریم $y' = \frac{-2x}{(x^2-1)^2}$ ، پس در $x = 0$, y' صفر می‌شود و علامت آن همان علامت $-2x$ است. جدول تغییرات این تابع به صورت زیر است.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		+		+	0	−		−	
y	0	↗	$+\infty$ | $-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	0





مجانب مایل : در حالت‌هایی که حد تابع $f(x)$ در $+\infty$ یا $-\infty$ برابر بینهایت شود ممکن است بتوان خطی به‌صورت $y = mx + b$ یافت به‌گونه‌ای که مقادیر $f(x)$ و $mx + b$ در $+\infty$ یا $-\infty$ نزدیک هم باشند و نمودار $f(x)$ و خط $y = mx + b$ در $+\infty$ یا $-\infty$ به هم نزدیک شوند، مانند شکل مقابل.

در این حالت خط $y = mx + b$ را یک مجانب مایل نمودار تابع f می‌نامند. به‌طور دقیق‌تر گوییم خط $y = mx + b$ یک مجانب نمودار تابع در $+\infty$ است هرگاه

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(mx+b))=۰$$

شکل بالا نشان‌دهنده همین وضعیت می‌باشد. گوییم خط $y = mx + b$ یک مجانب نمودار f در $-\infty$ است هرگاه

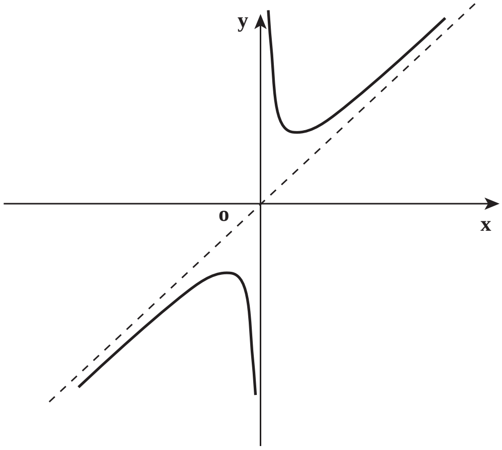
$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-(mx+b))=۰$$

در حالت $m \neq ۰$ این مجانب‌ها را **مجانب مایل** می‌نامند.

مثال : در تابع $f(x)=\frac{x^۲+۱}{x}$، خط $x = ۰$ مجانب قائم و خط $y = x$ در $+\infty$ و $-\infty$ مجانب مایل است زیرا

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^۲+۱}{x}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۱}{x}=۰$$

با رسم جدول تغییرات تابع دیده می‌شود نمودار تابع به شکل زیر است.

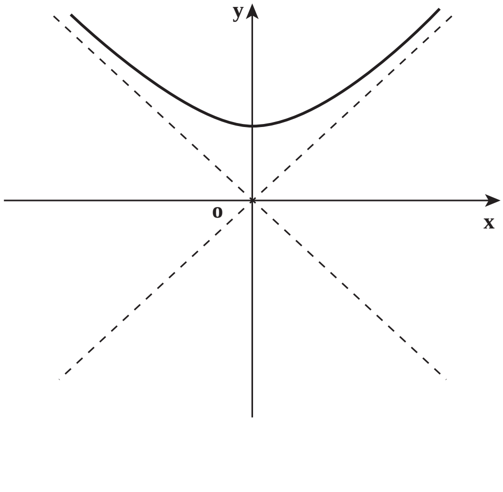


مثال : در تابع $f(x)=\sqrt{1+x^2}$ ، **خط** $y=x$ در $+\infty$ **مجانب مایل نمودار تـابع است و خـط** $y=-x$ در $-\infty$ **مجانب مایل نمودار تابع است** زیرا

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+x^2}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{1+x^2}-x)(\sqrt{1+x^2}+x)}{\sqrt{1+x^2}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{1+x^2}-(-x)=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{1+x^2}+x=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}-x}=0$$

با رسم جدول تغییرات تابع دیده می‌شود که نمودار تابع به شکل زیر است.



یکی از راه‌های یافتن مجانب مایل نمودار تابع f آن است که با محاسبات جبری، ضابطه $f(x)$ را به صورت $f(x) = g(x) + mx + b$ دربیاوریم به‌گونه‌ای که $g(x)$ تابعی باشد که در $+\infty$ یا $-\infty$ حد صفر داشته باشد.

روشن است که در این حالت شرط $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(mx+b))=0$ خود به خود برقرار می‌شود و $y = mx + b$ یک مجانب مایل نمودار f خواهد بود.

مثال : مجانب‌های مایل تابع $f(x)=\dfrac{x^3+x^2+2x}{x^2+1}$ را بیابید.

حل : با تقسیم صورت بر مخرج داریم : $f(x)=x+1+\dfrac{x-1}{x^2+1}$

چون $\dfrac{x-1}{x^2+1}$ در $+\infty$ و $-\infty$ حد صفر دارد خط $y = x + 1$ در $+\infty$ و $-\infty$ مجانب مایل نمودار f است.

درحالت کلی برای یافتن مجانب مایل باید عملیات زیر را به‌کار بریم. اگر نمودار f در $+\infty$ دارای خط مجانبی به‌صورت $y = mx + b$ باشد از شرط $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(mx+b))=0$ می‌توان با تقسیم تابع $f(x) - (mx + b)$ بر x نتیجه گرفت $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=m$. پس حد $\dfrac{f(x)}{x}$ در $+\infty$ را بررسی می‌کنیم،در صورتی که این حد موجود باشد، ضریب زاویه خط مجانب به‌دست می‌آید. با به دست آمدن m ، حد $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-mx)$ را بررسی می‌کنیم، در صورتی که این حد موجود باشد، مقدار b نیز به‌دست می‌آید و خط مجانب مایل موجود خواهد بود. همین عملیات را در $-\infty$ می‌توان انجام داد تا خط مجانب مایل (در صورت وجود) در $-\infty$ به‌دست آید.

مثال : خط مجانب مایل تابع $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x^4}}{1+x}$ را (در صورت وجود) در $+\infty$ و $-\infty$ به‌دست آورید.

حل : حد $\dfrac{f(x)}{x}$ را در $+\infty$ بررسی می‌کنیم.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^4}}{(1+x)x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{1+x^4}{(1+x)^2x^2}}=1$$

پس ضریب زاویه خط مجانب مایل در $+\infty$ (در صورت وجود) برابر ۱ است.

حد $f(x) - x$ را در $+\infty$ بررسی می‌کنیم.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{۱+x^۴}}{۱+x} - x = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{۱+x^۴} - x - x^۲}{۱+x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{۱+x^۴-(x+x^۲)^۲}{(۱+x)(\sqrt{۱+x^۴}+x+x^۲)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{۱-x^۲-۲x^۳}{(۱+x)(\sqrt{۱+x^۴}+x+x^۲)} = -۱$$

پس خط $y = x - ۱$ مجانب مایل این تابع در $+\infty$ است.

این حدگیری‌ها در $-\infty$ نیز دقیقاً مانند بالا هستند و خط $y = x - ۱$ مجانب مایل این تابع در $-\infty$ نیز می‌باشد.

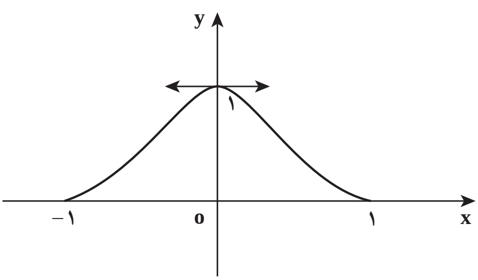
در توابعی که دامنه آن‌ها تمام IR نباشد، ابتدا لازم است به دامنه آن‌ها دقت شود و جدول تغییرات فقط در محدوده دامنه تابع رسم شود.

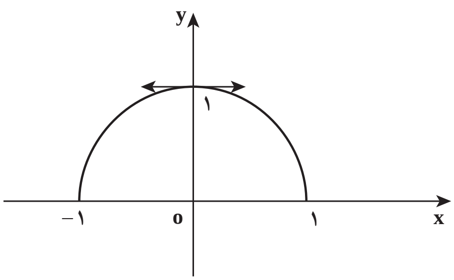
مثال : نمودار تابع $y = \sqrt{۱-x^۲}$ را رسم کنید.

حل : دامنه این تابع بازه $[-۱,۱]$ است. در این حالت بحثی درباره مجانب افقی وجود ندارد زیرا حد تابع در $\pm\infty$ معنا ندارد. این تابع دارای حد $+\infty$ یا $-\infty$ در هیچ نقطه‌ای نیست پس مجانب قائم ندارد. مقدار y به ازای $x = \pm۱$ صفر می شود که نشان می‌دهد نمودار تابع در این نقاط محور xها را قطع می‌کند. به ازای $x = ۰$ داریم $y = ۱$، پس نمودار تابع در $y = ۱$ محور yها را قطع می‌کند. داریم $y' = \frac{-x}{\sqrt{۱-x^۲}}$ و به ازای $x = ۰$ ، y' صفر می شود و علامت y' همان علامت $-x$ است. جدول تغییرات تابع به شکل زیر است

x	-۱		۰		۱
y′		+	۰	−	
y	۰	↗	۱	↘	۰

شکل تابع می‌تواند به صورت‌های زیر باشد :

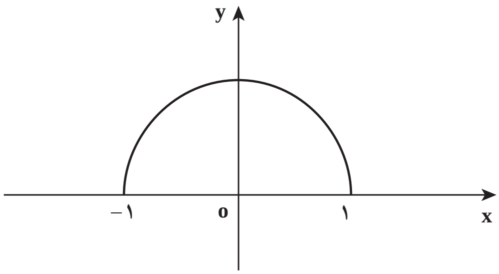




برای تشخیص بهتر شکل تابع لازم است بدانیم، نمودار تابع با چه زاویه‌ای از نقطهٔ ۱− خارج و به نقطهٔ ۱ وارد می‌شود (زاویه خط مماس با محور xها) و جهت تقعر منحنی چگونه است. y' در ۱± تعریف نشده است ولی حد y' در ۱± مقادیر ∞± دارد که نشان می‌دهد خط مماس بر نمودار تابع در این نقاط عمودی است. پس نمودار تابع به‌طور عمودی از این نقاط خارج یا به آن داخل می‌شود. همچنین

$$y''=\frac{-1\times\sqrt{1-x^2}+x\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}=\frac{-1}{(\sqrt{1-x^2})^3}$$

یعنی y'' همواره منفی است و جهت تقعر روبه پایین است. بنابراین شکل صحیح به صورت زیر باید باشد.



به آسانی می‌توانید تحقیق کنید که نمودار این تابع دقیقاً یک نیم‌دایره به شعاع ۱ است. فاصله نقاط نمودار این تابع را تا مبدأ حساب کنید.

با توجه به این مثال‌ها، می‌توان روش رسم نمودار یک تابع را به شکل زیر خلاصه کرد:

۱) دامنه تابع را مشخص کنید.

۲) اگر حد تابع در ∞± معنا دارد، آن را حساب کنید تا رفتار تابع در ∞+ و ∞− مشخص شود و (در صورت وجود) مجانب‌های افقی و مایل تعیین شوند.

۳) در صورت وجود، نقاطی که حد چپ یا راست تابع در این نقاط ∞+ یا ∞− است مشخص شوند، تا مجانب‌های قائم نمودار تابع تعیین شوند.

۴) نقاط برخورد نمودار تابع با محور xها و محور yها تعیین شوند.

۵) y' در نقاط مشتق‌پذیری محاسبه شود و تعیین علامت شود و نقاط ماکزیمم و می‌نیمم تعیین شوند.

۶) y'' در صورت امکان محاسبه شود و تعیین علامت شود و نقاط عطف در صورت وجود

تعیین شوند.

۷) اطلاعات به‌دست آمده از بندهای قبل را در جدول تغییرات تابع وارد می‌کنیم تا بازه‌هایی که تابع صعودی یا نزولی است مشخص شود و معلوم شود تابع از چه نقاطی به چه نقاطی صعود یا نزول می‌کند و در چه نقاط ماکزیمم یا می‌نیمم می‌شود.

۸) نمودار تابع طبق جدول رسم شود و در نقاطی که ابهام دارد که با چه زاویه‌ای وارد یا خارج می‌شود، مقدار y' در این نقاط محاسبه شوند.

به چند مثال زیر توجّه کنید :

مثال ۱ : نمودار نمایش تغییرات تابع $y=\dfrac{x}{x^{۲}-۱}$ را رسم کنید.

حل : خطوط مستقیم به معادلات $x=۱$ ، $x=-۱$ و $y=۰$ مجانب‌های منحنی نمایش این تابع هستند. (چرا؟) حال با مشتق‌گیری از تابع $y=\dfrac{x}{x^{۲}-۱}$ داریم $y'=\dfrac{x^{۲}-۱-۲x^{۲}}{(x^{۲}-۱)^{۲}}$ و از آنجا $y'=\dfrac{-x^{۲}-۱}{(x^{۲}-۱)^{۲}}$ بنابراین، همواره $y'<۰$ و درنتیجه تابع همواره نزولی است. برای به‌دست آوردن تقعر منحنی y'' را محاسبه می‌کنیم، با مشتق‌گیری از طرفین رابطهٔ

$$y'=\frac{-x^{۲}-۱}{(x^{۲}-۱)^{۲}}$$

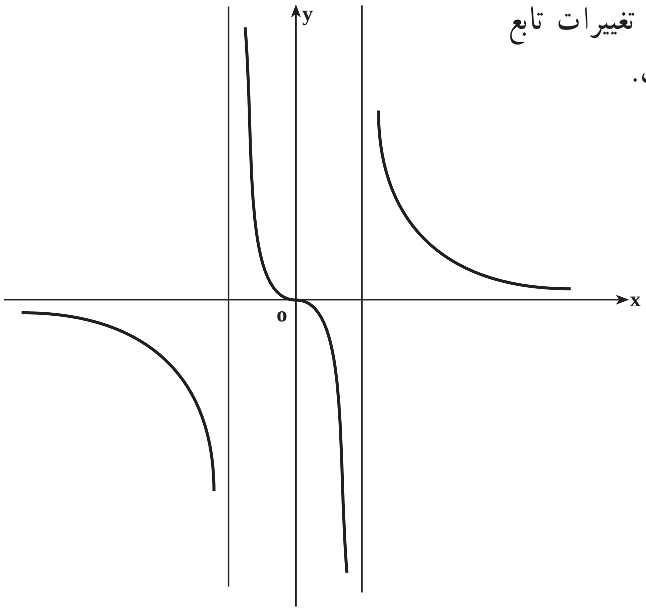
داریم

$$y''=\frac{۲x(x^{۲}-۱)(x^{۲}+۳)}{(x^{۲}-۱)^{۴}}$$

چون $\dfrac{۲(x^{۲}+۳)}{(x^{۲}-۱)^{۴}}>۰$ ، y'' با $x(x^{۲}-۱)$ هم علامت است. جدول تغییرات تابع را به شکل زیر تنظیم می‌کنیم :

x	$-\infty$		-۱		۰		۱		$+\infty$
y'		$-$		$-$		$-$		$-$	
y	۰	↘ $-\infty$		$+\infty$ ↘ ۰		↘ $-\infty$		$+\infty$ ↘ ۰	
y''		$-$		$+$		$-$		$+$	
		تقعر رو به پایین		تقعر رو به بالا		تقعر رو به پایین		تقعر رو به بالا	

بنابراین، منحنی نمایش تغییرات تابع $y=\dfrac{x}{x^{۲}-۱}$ به شکل مقابل است.



با تبدیل $x \to -x$ و $y \to -y$ معادلهٔ $y=\dfrac{x}{x^{۲}-۱}$ تغییر نمی‌کند، پس مبدأ مختصات مرکز تقارن آن است.

مثال ۲ : منحنی نمایش تغییرات تابع $y=\dfrac{۱}{۱+x^{۲}}$ را رسم کنید.

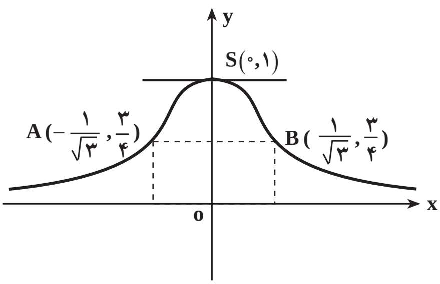
حل : ملاحظه می‌کنیم که $\dfrac{۱}{۱+x^{۲}}>۰$ در نتیجه $y>۰$ بنابراین، همه نقاط منحنی در بالای محور xها واقع هستند. با مشتق‌گیری از طرفین رابطهٔ $y=\dfrac{۱}{۱+x^{۲}}$ داریم $y'=\dfrac{-۲x}{(۱+x^{۲})^{۲}}$ ، $y'=۰$ نتیجه می‌دهد $x=۰$. با تبدیل $x \to -x$ معادلهٔ $y=\dfrac{۱}{۱+x^{۲}}$ تغییر نمی‌کند و محور yها محور تقارن منحنی نمایش آن است. ملاحظه می‌کنیم $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{۱}{۱+x^{۲}}=۰$ بنابراین، خط $y=۰$ (محور xها) مجانب افقی منحنی است. چون $x^{۲}\geq ۰$ ، $y=\dfrac{۱}{۱+x^{۲}}\leq ۱$ در نتیجه $۰<y\leq ۱$، بنابراین، منحنی نمایش تابع بین دو خطّ $y=۰$ و $y=۱$ واقع است. با مشتق‌گیری از طرفین رابطهٔ $y'=\dfrac{-۲x}{(x^{۲}-۱)^{۲}}$ داریم

$$y''=\frac{(۱+x^{۲})(-۲x^{۲}-۲+۸x^{۲})}{(۱+x^{۲})^{۴}}$$

درنتیجه $y''=\dfrac{۶x^۲-۲}{(۱+x^۲)^۳}$ ، $y''=۰$ نتیجه می‌دهد $۶x^۲-۲=۰$ و از آنجا $x=\pm\dfrac{۱}{\sqrt{۳}}$ ، چون $(۱+x^۲)^۳>۰$ ، y'' با $۶x^۲-۲$ هم علامت است. جدول تغییرات تابع به شکل زیر است :

x	$-\infty$		$-\frac{۱}{\sqrt{۳}}$		۰		$\frac{۱}{\sqrt{۳}}$		$+\infty$
y'		+		+		−		−	
y	۰	↗	$\frac{۳}{۴}$	↗	۱	↘	$\frac{۳}{۴}$	↘	۰
y''		+		−		−		+	
		تقعر رو به بالا			تقعر رو به پایین			تقعر رو به بالا	

بنابراین، منحنی نمایش تغییرات تابع $y=\dfrac{۱}{۱+x^۲}$ به شکل زیر است.



در $x=۰$ ، y' تغییر علامت می‌دهد و از مثبت به منفی می‌رود بنابراین، $S(۰,۱)$ نقطهٔ ماکزیمم مطلق تابع است. ملاحظه می‌کنیم که به ازای $x=\dfrac{۱}{\sqrt{۳}}$ و $x=-\dfrac{۱}{\sqrt{۳}}$ ، $y''=۰$ و در این نقاط y'' تغییر علامت می‌دهد، بنابراین، $A(-\dfrac{۱}{\sqrt{۳}},\dfrac{۳}{۴})$ و $B(\dfrac{۱}{\sqrt{۳}},\dfrac{۳}{۴})$ نقاط عطف منحنی هستند.

مثال ۳ : منحنی نمایش تابع $y=\dfrac{۲x+۳}{۳x+۵}$ را رسم کنید.

حل : ابتدا مجانب‌های این منحنی را به دست می‌آوریم، توجّه داریم که

$$\lim_{x\to\pm\infty} y=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۲x+۳}{۳x+۵}=\frac{۲}{۳}$$

بنابراین، خط $y=\dfrac{۲}{۳}$ مجانب افقی است. ریشه مخرج کسر عبارت است از $x=-\dfrac{۵}{۳}$

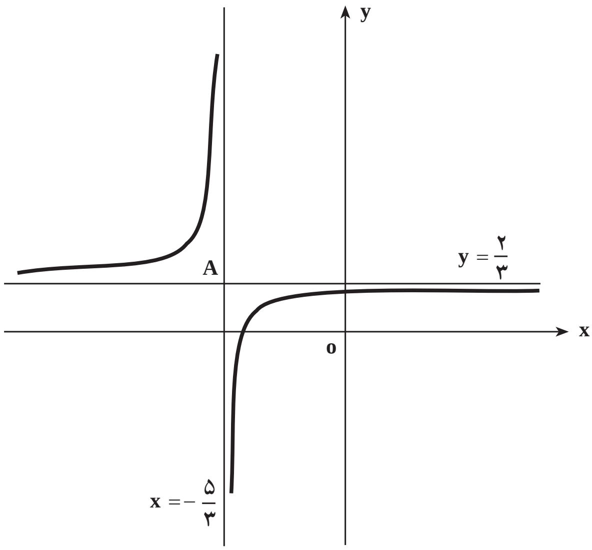
بنابراین،

$$\lim_{x\to -\frac{۵}{۳}} \frac{۲x+۳}{۳x+۵} = \pm\infty$$

درنتیجه خط $x=-\frac{۵}{۳}$ مجانب قائم است. حال از طرفین $y=\frac{۲x+۳}{۳x+۵}$ نسبت به x مشتق می‌گیریم و از آنجا $y'=\frac{۱}{(۳x+۵)^{۲}}$ بنابراین، $y'>۰$ درنتیجه تابع صعودی است. با توجّه به $y'=\frac{۱}{(۳x+۵)^{۲}}$ ملاحظه می‌شود که $y''=\frac{-۶(۳x+۵)}{(۳x+۵)^{۴}}$ چون مخرج این کسر $(۳x+۵)^{۴}>۰$، y'' با $-۶(۳x+۵)$ هم علامت است. حال جدول تغییرات این تابع را به شکل زیر تنظیم می‌کنیم :

x	$-\infty$		$-\frac{۵}{۳}$		$+\infty$
y'		+	‖	+	
y	$\frac{۲}{۳}$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$\frac{۲}{۳}$
y''	+	+	‖	−	−
		تقعر رو به بالا		تقعر رو به پایین	

بنابراین، منحنی نمایش تغییرات تابع $y=\frac{۲x+۳}{۳x+۵}$ به شکل زیر است :



در این شکل $A(-\frac{۵}{۳},\frac{۲}{۳})$ محل تلاقی مجانب‌های منحنی می‌باشد. چنان که مبدأ مختصات را به نقطهٔ $A(-\frac{۵}{۳},\frac{۲}{۳})$ انتقال دهیم به‌سادگی می‌توان تحقیق نمود که محل تلاقی دو مجانب یعنی همان نقطهٔ $A(-\frac{۵}{۳},\frac{۲}{۳})$ مرکز تقارن منحنی است.

تابع $y=\frac{۲x+۳}{۳x+۵}$ را یک تابع هموگرافیک می‌نامند. صورت کلی توابع هموگرافیک به شکل $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ می‌باشد که در آن ضرایب a،b، c و d اعداد ثابت هستند و a و c توأماً صفر نیستند.

مسائل

منحنی نمایش توابع زیر را رسم کنید.

۱ـ $y=x^{۳}+۴x^{۲}-۳x+۱۰$

۲ـ $y=x^{۴}+x^{۲}+۱$

۳ـ $y=\frac{۲x-۳}{۳x-۵}$

۴ـ $y=\frac{x}{x^{۲}+۱}$

۵ـ $y=\frac{x^{۲}}{x-۱}$

۶ـ $y=\sqrt{x^{۲}-۱}$

۷ـ $y=\frac{x^{۲}}{\sqrt{x-۱}}$

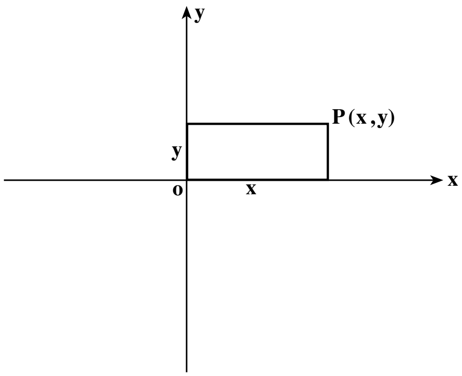
فصل ۵

هندسه مختصاتی و منحنی‌های درجه دوم

۱ــ هندسه مختصاتی

یادآوری و تکمیل

برای تعیین یک نقطه در صفحه از دستگاه‌های مختصات استفاده می‌کنند. یکی از این دستگاه‌ها دستگاه مختصات دکارتی است.



در این دستگاه به هر نقطهٔ P از صفحه یک زوج مرتب (x,y) از اعداد حقیقی متناظر می‌شود، x را طول نقطه و y را عرض آن می‌نامند. محورهای مختصات x و y بر هم عمودند؛ این محورها صفحه را به چهار ناحیه تقسیم می‌کنند که هرکدام از آن‌ها را یک ربع می‌نامند، ربع اوّل ناحیه‌ایست که در آن x و y نقاط هر دو مثبت هستند، در ربع دوم x نقاط منفی است و y نقاط مثبت، در ربع سوم x و y نقاط هر دو منفی هستند، بالاخره ربع چهارم متشکل است از نقاطی است که x آنها مثبت و y شان منفی است.

معادله خطّ

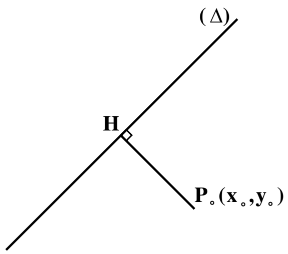
معادله یک خط در دستگاه مختصات دکارتی به شکل $ax + by + c = 0$ است که در آن a و b همزمان صفر نیستند یعنی $a^2+b^2 \neq 0$. اگر $b \neq 0$ با تقسیم طرفین معادلهٔ $ax + by + c = 0$ بر b داریم

$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$ ، زاویهٔ $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$ را چنان انتخاب می‌کنیم که $\tan\alpha=-\frac{a}{b}$ ، α زاویه‌ایست که خطّ به معادلهٔ $ax+by+c=0$ با جهت مثبت محور xها می‌سازد. $-\frac{a}{b}$ را **شیب یا ضریب زاویه** خطّ $ax+by+c=0$ می‌نامند. اگر معادله خط به‌صورت $y=mx+h$ داده شده باشد، m همان شیب خط می‌باشد.

معادلهٔ خطّی که از نقطه $P_0(x_0,y_0)$ می‌گذرد و شیب آن m است عبارتست از: $y-y_0=m(x-x_0)$. شیب خط مستقیمی که از نقاط $A(a_1,b_1)$ و $B(a_2,b_2)$ می‌گذرد برابر است با $m=\frac{b_2-b_1}{a_2-a_1}$. بنابراین، معادله خطی که از این دو نقطه می‌گذرد عبارتست از:

$$y-b_2=\frac{b_2-b_1}{a_2-a_1}(x-a_2)$$

فاصله یک نقطه از یک خط



فرض می‌کنیم (Δ) یک خطّ مستقیم باشد که معادله آن $ax+by+c=0$ است، نقطهٔ $P_0(x_0,y_0)$ را خارج از خطّ (Δ) درنظر می‌گیریم، از این نقطه خطّی بر (Δ) عمود می‌کنیم، شیب خطّ (Δ) برابر است با $-\frac{a}{b}$ بنابراین، شیب این خط عمود برابر است با $\frac{b}{a}$ درنتیجه معادله این یک عمود عبارتست از:

$$y-y_0=\frac{b}{a}(x-x_0)$$

حال مختصات نقطه H محل برخورد این دو خط را تعیین می‌کنیم، برای این کار باید دستگاه دو معادله دو مجهولی $\begin{cases}ax+by+c=0\\ y-y_0=\frac{b}{a}(x-x_0)\end{cases}$ را حل کنیم. از معادله دوم این دستگاه نتیجه می‌شود

$$y = y_0 + \frac{b}{a}(x - x_0)$$

با قرار دادن در معادله اول دستگاه

$$ax + b(y_0 + \frac{b}{a}(x - x_0)) + c = 0$$

و از آنجا

$$(a + \frac{b^2}{a})x = -by_0 + \frac{b^2}{a}x_0 - c$$

درنتیجه

$$x = \frac{b^2 x_0 - aby_0 - ca}{a^2 + b^2}$$

با قرار دادن در معادله اول دستگاه داریم :

$$a(\frac{b^2 x_0 - aby_0 - ca}{a^2 + b^2}) + by + c = 0$$

و از آنجا

$$y = \frac{-abx_0 - a^2 y_0 - bc}{a^2 + b^2}$$

بنابراین،

$$H = (\frac{b^2 x_0 - aby_0 - ac}{a^2 + b^2}, \frac{-abx_0 + a^2 y_0 - bc}{a^2 + b^2})$$

حال باید فاصله بین دو نقطه $P_0(x_0, y_0)$ و

$$H = (\frac{b^2 x_0 - aby_0 - ac}{a^2 + b^2}, \frac{-abx_0 + a^2 y_0 - bc}{a^2 + b^2})$$

را بدست بیاوریم، این فاصله برابر است با؛

$$\boxed{d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

یادآوری می‌کنیم که اگر دو خط (Δ) و (Δ') به معادلات $y = mx + a$ و $y = m'x + a'$ بر هم عمود باشند آنگاه $mm' = -1$. اگر دو خطّ مستقیم به معادلات $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ و $a_2x + b_2y + c_2 = 0$

متعامد باشند آنگاه $a_۱a_۲ + b_۱b_۲ = ۰$.

مثال : اگر $A(-۱,۲)$ و $B(۳,۰)$ و $C(۱,-۲)$ سه رأس مثلث ABC باشند، معادلهٔ ارتفاع AH و طول آن را بدست آورید.

حل : ارتفاع AH بر ضلع BC عمود است. ابتدا شیب BC را به‌دست می‌آوریم.

$$m_{BC} = \frac{-۲-۰}{۱-۳} = ۱$$

$$m_{AH} \cdot m_{BC} = -۱ \Rightarrow m_{AH} \times ۱ = -۱ \Rightarrow m_{AH} = -۱$$

معادلهٔ ارتفاع AH : $y - ۲ = -۱\,(x + ۱)$

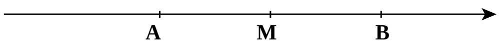
$$y = -x + ۱$$

برای محاسبهٔ طول ارتفاع AH معادلهٔ ضلع BC را به‌دست آورده و فاصلهٔ نقطه A از این خط را محاسبه می‌کنیم.

معادلهٔ ضلع BC : $y - ۰ = ۱\,(x - ۳) \Rightarrow y = x - ۳ \Rightarrow x - y - ۳ = ۰$

$$AH = \frac{|-۱-۲-۳|}{\sqrt{۱+۱}} = \frac{۶}{\sqrt{۲}} = ۳\sqrt{۲}$$

نقطهٔ وسط یک پاره‌خط : اگر روی محور طول‌ها نقطهٔ M وسط پاره‌خط AB باشد خواهیم داشت :



$$AM = MB$$

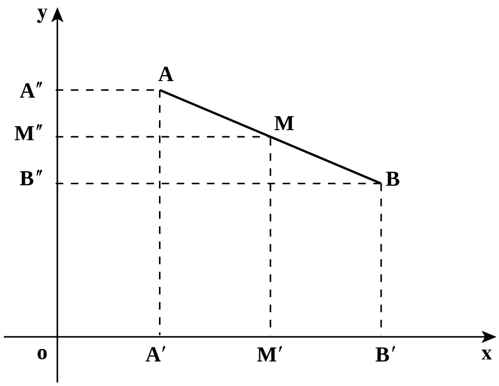
و از آنجا

$$x_M - x_A = x_B - x_M$$

$$۲x_M = x_A + x_B$$

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{۲}$$

بنابراین، طول مختصات وسط یک پاره‌خط برابر است با میانگین مجموع طول‌های ابتدا و انتهای پاره‌خط. همچنین اگر پاره‌خط AB در صفحهٔ مختصات داده شده باشد مطابق شکل صفحهٔ بعد می‌توان نشان داد :



$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_B}{۲} \\ y_M = \dfrac{y_A + y_B}{۲} \end{cases}$$

مثال : اگر $A(-۲,۳)$ و $B(۲,۰)$ و $C(۰,-۲)$ سه رأس مثلث ABC باشند، طول میانهٔ AM را به‌دست آورید.

حل : ابتدا نقطهٔ M وسط ضلع BC را به‌دست می‌آوریم

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_B + x_C}{۲} = \dfrac{۲+۰}{۲} = ۱ \\ y_M = \dfrac{۰+(-۲)}{۲} = -۱ \end{cases} \Rightarrow M(۱,-۱)$$

$$AM = \sqrt{(x_M - x_A)^۲ + (y_M - y_A)^۲} = \sqrt{(۱+۲)^۲ + (-۱-۳)^۲}$$

$$= \sqrt{۹+۱۶} = ۵$$

خطوط موازی

دو خط مستقیم به معادلات $a_۱x + b_۱y + c_۱ = ۰$ و $a_۲x + b_۲y + c_۲ = ۰$ موازی هستند اگر و فقط اگر شیبشان یکی باشد و از آنجا $-\dfrac{a_۱}{b_۱} = -\dfrac{a_۲}{b_۲}$ درنتیجه $\dfrac{a_۱}{a_۲} = \dfrac{b_۱}{b_۲}$. به عبارت دیگر $a_۱b_۲ = a_۲b_۱$ بدیهی است که اگر $b_۱ = b_۲ = ۰$ در این‌صورت هر دو خط بر محور xها عمود بوده و با هم موازی خواهند بود.

فاصلهٔ بین دو خط موازی

فرض کنیم دو خطّ موازی $(\Delta_۱)$ و $(\Delta_۲)$ به‌ترتیب به معادلهٔ $ax + by + c = ۰$ و $ax + by + c' = ۰$

باشند، $P_0(x_0,y_0)$ را نقطه‌ای واقع بر خطّ (Δ_1) می‌گیریم بنابراین، $ax_0 + by_0 + c = 0$، چنان‌که قبلاً ملاحظه کردیم، فاصلهٔ این نقطه از خطّ (Δ_2) از دستور زیر بدست می‌آید :

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

در بالا داشتیم $ax_0 + by_0 + c = 0$ و از آنجا $ax_0 + by_0 = -c$؛ با قرار دادن این مقدار در رابطه بالا داریم :

$$d = \frac{|c' - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

این دستور فاصله بین دو خط موازی به معادلات $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$ را به‌دست می‌دهد.

دستگاه معادلات خطی

در کتاب ریاضی (۱) با حل دستگاه دو معادله دومجهولی آشنا شده‌ایم. هرگاه

$$\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 5x + y = 4 \end{cases}$$

یک دستگاه دو معادله دومجهولی باشد، با روش حذفی، یعنی مثلاً ضرب معادله دوم در عدد ۳ و جمع آن با معادله اول، یک معادله یک مجهولی، یعنی

$$17x = 17$$

را به‌دست می‌آوریم که از حل آن $x = 1$ حاصل می‌شود. وقتی این مقدار x را در یکی از معادلات دستگاه اولیه‌مان قرار دهیم $y = -1$ به‌دست می‌آید.

به‌طور کلی هر معادله به‌صورت :

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b \qquad (1)$$

را، که در آن a_1، a_2، ...، a_n و b اعدادی ثابت و x_1، x_2، ...، x_n متغیرهایی باشند، یک معادله خطی نامیده می‌شود. x_1، x_2، ...، x_nها را مجهول‌های معادله نیز می‌نامند، درحالت $n = 2$، مجموعه (x_1,x_2)هایی که در معادله

$$a_1x_1 + a_2x_2 = b$$

صدق می‌کند یک خط راست در صفحه مختصات تشکیل می‌دهد و دلیل نامگذاری معادلهٔ خطی

روشن می‌شود.

یک جواب معادلهٔ خطی (۱) دنباله‌ای است از n عددی مانند $s_1, s_2, \ldots, s_n$ به‌طوری که وقتی در (۱) قرار دهیم

$$x_1 = s_1, x_2 = s_2, \ldots, x_n = s_n$$

معادله برقرار باشند. مثلاً $x_1 = 2$، $x_2 = 3$، $x_3 = -4$ یک جواب معادلهٔ خطی

$$6x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -13$$

است، زیرا

$$6(2) - 3(3) + 4(-4) = -13$$

به‌طور کلی، یک دستگاه m معادله خطی و n مجهول، یا یک دستگاه خطی مجموعه‌ای است از m معادله خطی n مجهولی. هر دستگاه خطی را می‌توانیم به‌صورت کلی

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{2}$$

بنویسیم معادلهٔ

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i$$

را معادله iام دستگاه می‌نامیم $(1 \le i \le m)$. a_{ij}ها و نیز b_1، b_2، ...، b_m ثابت‌های معلومی هستند. منظور از حل دستگاه فوق یافتن x_1، x_2، ...، x_nهایی است که در هر معادله دستگاه صدق کنند. یک **جواب** دستگاه (۲) دنباله‌ای است از n عدد مانند $s_1, s_2, \ldots, s_n$ با این ویژگی که وقتی در هر معادله (۲) قرار دهیم $x_1 = s_1$، $x_2 = s_2$، ... $x_n = s_n$ آن معادله برقرار شود (به یک تساوی عددی تبدیل شود).

اگر دستگاه خطی (۲) جواب نداشته باشد می‌گوییم **ناسازگار** است؛ چنانچه جواب داشته باشد، آن را **سازگار** خوانیم. هرگاه $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$ دستگاه را یک دستگاه **همگن** می‌نامیم.

دستگاه r معادله خطی و n مجهول دیگر

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n = d_1 \\ c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \ldots + c_{2n}x_n = d_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ c_{r1}x_1 + c_{r2}x_2 + \ldots + c_{rn}x_n = d_r \end{cases} \tag{3}$$

را **هم‌ارز** دستگاه (۲) می‌نامیم هرگاه جواب‌های هر دو دستگاه یکسان باشند.

مثال : دستگاه خطی

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 = -7 \\ 2x_1 + x_2 = 7 \end{cases}$$

(۴)

فقط جواب $x_1 = 2$ ، $x_2 = 3$ را دارد. دستگاه خطی

$$\begin{cases} 8x_1 - 3x_2 = 7 \\ 3x_1 - 2x_2 = 0 \\ 10x_1 - 2x_2 = 14 \end{cases} \qquad (۵)$$

نیز فقط جواب $x_1 = 2$ ، $x_2 = 3$ را دارد. پس (۴) و (۵) هم‌ارز هستند.

یکی از رایج‌ترین مسائل عملی تقریباً تمام شاخه علوم، نظیر ریاضیات، فیزیک، زیست‌شناسی، شیمی، اقتصاد، جغرافیا، رشته‌های مختلف مهندسی، تحقیق در عملیات، و علوم اجتماعی حل دستگاه‌های معادلات خطی است.

شما در سال اول با حل دستگاه دو معادله دو مجهولی خطی آشنا شده‌اید. با ذکر مثال‌هایی مروری بر روش حل این نوع دستگاه‌ها می‌کنیم.

مثال : دستگاه خطی

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 = -3 \\ 2x_1 + x_2 = 8 \end{cases} \qquad (۶)$$

را درنظر می‌گیریم. برای حذف x_2 اگر دو برابر معادله اول را از دوم کم کنیم داریم

$$7x_2 = 14$$

که معادله‌ای است بدون جمله شامل x_1. پس مجهول x_1 را حذف کرده‌ایم. حال با حل این معادله نسبت به x_2 داریم :

$$x_2 = 2$$

و با گذاشتن این مقدار در معادله اول (۶) خواهیم داشت

$$x_1 = 3$$

پس $x_1 = 3$ ، $x_2 = 2$ تنها جواب دستگاه خطی فوق است.

مثال : دستگاه خطی

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 = 7 \\ 2x_1 - 6x_2 = 7 \end{cases} \qquad (۷)$$

را درنظر می‌گیریم. باز تصمیم می‌گیریم x_1 را حذف کنیم. برای این کار اگر دو برابر معادله اول را از معادله دوم کم کنیم داریم

$$0 = 7$$

که به روشنی برقرار نیست. پس دستگاه (۷) جواب ندارد و ناسازگار است.

مثال : دستگاه خطی

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 14 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = -2 \end{cases} \qquad (8)$$

را درنظر می‌گیریم. برای حذف x_1 اگر دو برابر معادلهٔ اول را از معادله دوم و سه برابر معادله اول را از معادله سوم کم کنیم، خواهیم داشت

$$\begin{cases} -7x_2 - 4x_3 = 2 \\ -5x_2 - 10x_3 = -20 \end{cases} \qquad (9)$$

این یک دستگاه دو معادله و دو مجهول است، با تقسیم معادله دوم (۹) بر ۵- داریم

$$\begin{cases} -7x_2 - 4x_3 = 2 \\ x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$$

که آن را با تعویض جای معادلات، به شکل

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 = 4 \\ -7x_2 - 4x_3 = 2 \end{cases} \qquad (10)$$

می‌نویسیم. حال برای حذف x_2 در (۱۰) اگر ۷ برابر معادله اول را به معادله دوم بیافزاییم داریم

$$10x_3 = 30$$

یا

$$x_3 = 3 \qquad (11)$$

با گذاردن مقدار x_3 در معادله اول (۱۰) معلوم می‌شود که $x_2 = -2$، و با گذاردن مقادیر x_2 و x_3 در معادله اول (۸) خواهیم داشت $x_1 = 1$، ملاحظه می‌کنیم که روش حذف در عمل دستگاه خطی

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ x_2 + 2x_3 = 4 \\ x_3 = 3 \end{cases} \qquad (12)$$

را، که از معادله‌های اول (۸) و (۱۰)، معادله (۱۱) تشکیل شده است، ایجاد می کند.

اهمیت این روش در آن است که علاوه بر اینکه دستگاه‌های خطی (۸) و (۱۲) هم‌ارز هستند، (۱۲) این مزیّت را دارد که ساده‌تر حل می‌شود.

مثال : دستگاه خطی

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -4 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 4 \end{cases} \qquad (13)$$

را درنظر می گیریم. برای حذف x_1 اگر دو برابر معادله اول را از معادله دوم کم کنیم داریم

$$-3x_2 + 3x_3 = 12 \qquad (14)$$

حال باید معادله (۱۴) را برای x_2 و x_3 حل کنیم. یک جواب

$$x_2 = x_3 - 4$$

است، که در آن x_3 می‌تواند هر عدد حقیقی باشد. پس از معادله اول (۱۳) داریم

$$\begin{aligned} x_1 &= -4 - 2x_2 + 3x_3 \\ &= -4 - 2(x_3 - 4) + 3x_3 \\ &= x_3 + 4 \end{aligned}$$

بنابراین، یک جواب دستگاه (۱۳) عبارت است از

$x_1 = x_3 + 4$

$x_2 = x_3 - 4$

$x_3 =$ یک عدد حقیقی دلخواه

این به معنی آن است که دستگاه خطی (۱۳) بینهایت جواب دارد. زیرا هر بار که به x_3 مقدار بدهیم جوابی مشخص (عددی) از (۱۳) را به‌دست می‌آوریم. مثلاً اگر $x_3 = 1$،

$$x_1 = 5 \,,\, x_2 = -3 \,,\, x_3 = 1$$

یک جواب دستگاه است. حال آنکه اگر $x_3 = -2$،

$$x_1 = 2 \,,\, x_2 = -6 \,,\, x_3 = -2$$

جوابی دیگر از دستگاه خواهد بود. سه جواب دیگر این دستگاه را با مقدار دادن به x_3 حساب کنید.

نتیجه می گیریم که :

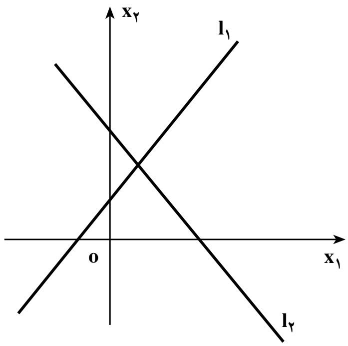
یک دستگاه خطی ممکن است جوابش منحصر به‌فرد باشد (فقط یک جواب داشته باشد) یا آنکه بدون جواب باشد، یا بینهایت جواب داشته باشد.

حل دستگاه دو معادله با دو مجهول از راه هندسی

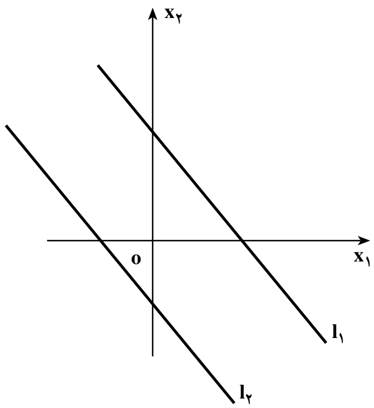
دستگاه خطی دو معادله و دو مجهول x_1 و x_2 به‌صورت کلی

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 = c_1 \\ b_1x_1 + b_2x_2 = c_2 \end{cases} \tag{15}$$

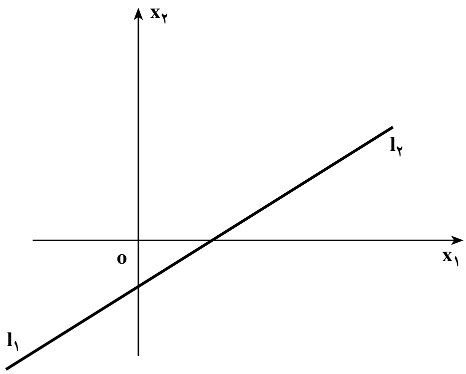
را درنظر می‌گیریم. وقتی در هریک از این معادله‌ها x_1 را مختص اول یعنی طول و x_2 را مختص دوم یعنی عرض یک نقطه در صفحه مختصات تلقی کنیم، نمودار هریک از این معادله‌ها خطی راست است، که به‌ترتیب آن‌ها را با l_1 و l_2 نشان می‌دهیم. اگر نقطه به مختصات (s_1,s_2) محل تلاقی دو خط l_1 و l_2 باشد آنگاه $x_2 = s_2$ و $x_1 = s_1$ یک جواب دستگاه (۱۵) خواهد بود.



(الف) جواب منحصر به فرد است. مختصات نقطه تقاطع جواب دستگاه است.



(ب) دستگاه بدون جواب است.



(پ) دو خط بر هم منطبق و دستگاه بینهایت جواب دارد.

هرگاه دو خط l_1 و l_2 بر هم منطبق باشند دستگاه بینهایت جواب دارد، درحالی که اگر این دو خطی موازی باشند دستگاه بدون جواب است. از راه هندسی نیز به همان سه حالت فوق خواهیم رسید.

مسائل

۱ــ مثلث ABC با سه رأس $A(1,4)$ و $B(-2,-2)$ و $C(4,2)$ مفروض است.

الف) معادلهٔ میانهٔ وارد بر ضلع BC را به‌دست آورید.

ب) طول میانهٔ AM را محاسبه کنید.

ج) معادلهٔ ارتفاع BH را محاسبه کنید.

د) نقطه تلاقی میانهٔ AM و ارتفاع BH را به‌دست آورید.

۲ــ طول قطر مربعی که یک ضلع آن واقع بر خط $x + y = 5$ و مختصات یک رأس آن $A(-2,1)$ باشد را به‌دست آورید.

۳ــ نقاط $A(4,2)$ و $B(1,-1)$ و $C(6,-1)$ سه رأس مثلث ABC هستند. اگر H و M به‌ترتیب پای ارتفاع AH و میانهٔ AM باشند طول MH را به‌دست آورید.

۴ــ دستگاه‌های خطی زیر را حل کنید.

ب) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 = -12 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -5 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$

الف) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 = 10 \end{cases}$

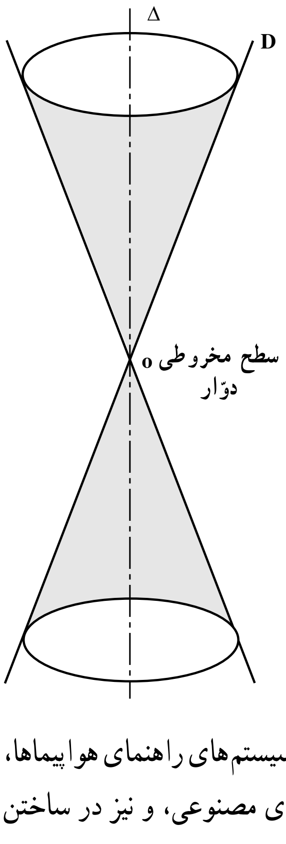
د) $\begin{cases} x + 4y - z = 12 \\ 3x + 8y - 2z = 4 \\ x + y + 3z = 12 \end{cases}$

ج) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 8 \\ 6x_1 + 8x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}$

۲ــ منحنی‌های درجه دوم

نمودار معادلات درجه دوم از x و y را منحنی‌های درجه دوم می‌نامند. این منحنی‌ها از برخورد یک صفحه با یک مخروط دوار نیز قابل به‌دست آوردن هستند، و به همین علت آن‌ها را مقاطع مخروطی نیز می‌نامند.

وجه نامگذاری مقاطع مخروطی به زمان کشف تاریخی آن‌ها به‌عنوان محل تقاطع یک صفحه با یک مخروط قائم دوار برمی‌گردد (شکل زیر). هر صفحه که عمود بر محور مخروط باشد مقطعی پدید می‌آورد که **دایره** نامیده می‌شود. صفحه را کمی مایل می‌کنیم، مقطع حاصل یک **بیضی** است. صفحه را باز هم بیشتر کج می‌کنیم تا موازی یکی از یال‌های مخروط شود، مقطع تشکیل شده یک **سهمی** است.

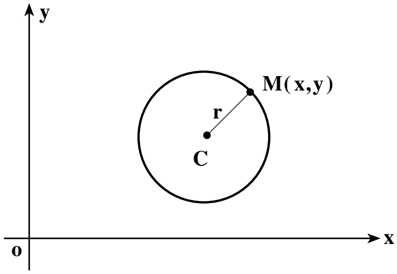


به کج کردن صفحه ادامه می‌دهیم تا آنکه صفحه قاطع سطح مخروطی دوار را در دو طرف رأس قطع کند. مقطع حاصل یک **هذلولی** است؛ هذلولی یک منحنی با دو شاخه است.

دایره، بیضی، سهمی و هذلولی از قرن چهارم قبل از میلاد (مسیح) توسط هندسه‌دان یونانی به نام آپولونیوس مورد بررسی و مطالعه قرار گرفته‌اند. آپولونیوس به‌طور کامل این منحنی‌ها را مورد تحقیق قرار داد و حاصل کارهای خود را در مجموعه‌ای متشکل از هشت کتاب ارائه کرد. کاربردهای عملی مقاطع مخروطی توسط ریاضیدان و دانشمند آلمانی یوهانز کپلر شروع شده است. کپلر فرضیه‌ای ارائه کرد که بیان می‌داشت که سیاره‌ها در مدارهایی بیضی شکل به دورخورشید می‌چرخند که خورشید در یکی از کانون‌های این بیضی‌ها قرار دارد. امروزه تئوری مقاطع مخروطی در مطالعه مـدار سیاره‌ها، ستاره‌های دنباله‌دار، و قمرهای مصنوعی کاربردهای فراوانی دارند. مدارهای بسته شامل دایره و بیضی‌اند، درحالی که مدارهای باز (یا مدارهای فرّار) شامل سهمی‌ها و هذلولی‌ها می‌باشند. مقاطع مخروطی در مطالعه ساختار اتم‌ها، سیستم‌های راهنمای هواپیماها، ساختن عدسی‌ها، وسایل نوری و وسایل پیش‌بینی هوا، ارتباطات قمرهای مصنوعی، و نیز در ساختن پل‌ها به‌کار می‌روند. سطوحی که از دوران مقاطع مخروطی تشکیل می‌شوند نیز دارای کاربردهایی در شاخه‌هایی از علوم هستند که با نور، صدا و امواج رادیویی سروکار دارند.

در این بخش از دستگاه مختصات دکارتی به‌عنوان چارچوبی برای مطالعه سهمی، دایره، بیضی و هذلولی استفاده می‌کنیم. معادله این منحنی‌ها به‌صورت عبارت درجه دومی از x و y هستند.

دایره



دایره مکان هندسی نقاطی از صفحه است که فاصله آن‌ها از یک نقطه ثابت مفروض در صفحه، مقداری ثابت باشد.

نقطه ثابت را مرکز و مقدار ثابت فاصله را شعاع دایره می‌نامند.

معادله دایره : فرض کنیم نقطه ثابت C(h,k) مرکز دایره و فاصله ثابت r شعاع دایره باشد. همچنین فرض کنیم M(x,y) یکی از نقاط دایره باشد. در این صورت

$$CM = r$$

یا

$$\sqrt{(x-h)^{۲}+(y-k)^{۲}}=r$$

بنابراین

(۱)
$$(x-h)^{۲}+(y-k)^{۲}=r^{۲}$$

(۱) معادله دایره با ویژگی‌های داده شده می‌باشد.

نامعادله

(۲)
$$(x-h)^{۲}+(y-k)^{۲}<r^{۲}$$

نقاطی از صفحه را مشخص می‌کند که فاصله آن‌ها تا نقطه C(h,k) کوچکتر از r است. بنابراین (۲) قسمت درونی دایره به مرکز C(h,k) و شعاع r را توصیف می‌کند. به عبارت دیگر، مختصات مجموعه نقاط درون دایره در رابطه (۲) صدق می‌کنند.

مثال : معادله دایره‌ای را بنویسید که از نقطه O(۰,۰) گذشته و C(۲,−۱) مرکز آن باشد.

حل : با محاسبه CO شعاع دایره را حساب می‌کنیم.

$$CO=\sqrt{(۲)^{۲}+(-۱)^{۲}}=\sqrt{۵}$$

بنابراین معادله دایره عبارت است از :

$$(x-۲)^{۲}+\left[y-(-۱)\right]^{۲}=(\sqrt{۵})^{۲}$$

یا

$$(x-۲)^۲+(y+۱)^۲=۵$$

نکته : معادله (۱) را به صورت زیر می‌نویسیم :

$$x^۲+y^۲-۲hx-۲ky+h^۲+k^۲-r^۲=۰$$

هرگاه قرار دهیم $-۲h=D$، $-۲k=E$ و $h^۲+k^۲-r^۲=F$، معادله دایره را به‌صورت

$$x^۲+y^۲+Dx+Ey+F=۰ \qquad (۳)$$

نیز می‌توانیم بیان کنیم. هرگاه معادله دایره به صورت (۳) عرضه شده باشد، مرکز آن نقطهٔ $C(\frac{-D}{۲}, \frac{-E}{۲})$ و شعاع آن از دستور $r=\frac{۱}{۲}\sqrt{D^۲+E^۲-۴F}$ به‌دست می‌آید.

مثال : مقدار F را طوری تعیین کنید که معادله $x^۲+y^۲-۲x-۶y+F=۰$ دایره‌ای به شعاع ۲ را مشخص کند.

داریم $r=۲$. پس

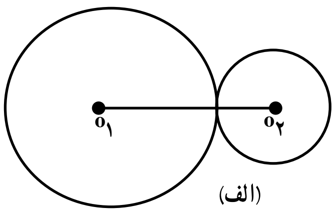
$$۲=\frac{۱}{۲}\sqrt{۴+۳۶-۴F}$$

$$۴۰-۴F=۱۶$$

$$F=۶$$

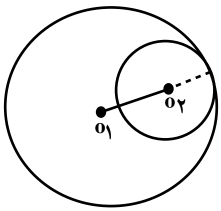
وضع دو دایره نسبت به‌هم : می‌دانیم هر دایره با مرکز و شعاع آن مشخص می‌شود. فرض کنیم $(C_۱)$ دایره‌ای به مرکز $O_۱$ و شعاع $r_۱$، و $(C_۲)$ دایره‌ای به مرکز $O_۲$ و شعاع $r_۲$ باشد.

هرگاه $O_۱O_۲=r_۲+r_۱$، یعنی فاصله مراکز دو دایره برابر حاصل‌جمع شعاع‌های آن‌ها باشند، این دو دایره **مماس خارج** هستند (شکل الف).



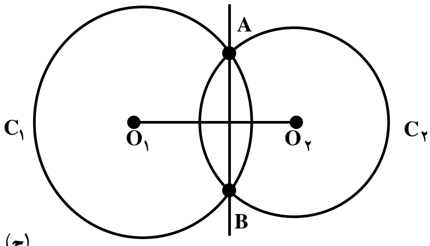
(الف)

هرگاه $r_۱>r_۲$ و $O_۱O_۲=r_۲-r_۱$، یعنی فاصله مراکز دو دایره برابر تفاضل شعاع‌های آن‌ها باشند، این دو دایره بر هم **مماس داخل** هستند (شکل ب).



(ب)

هرگاه $|r_۱-r_۲|<O_۱O_۲<r_۱+r_۲$ دو دایره **متقاطع**اند. دو دایره متقاطع یکدیگر را در دو نقطه قطع می‌کنند. خط گذرنده



(ج)

$|r_1 - r_2| < O_1O_2 < r_1 + r_2$

بر این دو نقطه را **وتر مشترک** دو دایره می‌نامیم (شکل ج).

هرگاه $O_1O_2 > r_1 + r_2$ دو دایره را **متخارج** و درحالتی $O_1O_2 < |r_1 - r_2|$ دو دایره را **متداخل** می‌گویند.

سؤال : اکنون این سؤال پیش می‌آید که با معلوم بودن مشخصات جبری دو دایره (مختصات مرکز و شعاع، یا معادله دایره) چگونه می‌توانیم معادله وتر مشترک را به‌دست آوریم.

فرض کنیم $x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + d_1 = 0$ معادله دایره (C_1) و $x^2 + y^2 + a_2x + b_2y + d_2 = 0$ معادله دایره (C_2) باشد. همچنین فرض کنیم این دو دایره متقاطع باشند. چون نقاط A و B (شکل ج) روی هر دو دایره هستند، مختصات این نقاط در معادله هر دو دایره صدق می‌کند. درنتیجه مختصات نقاط A و B در دستگاه معادلات

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + d_1 = 0 \\ x^2 + y^2 + a_2x + b_2y + d_2 = 0 \end{cases}$$

صدق می‌کنند. پس مختصات A وB در معادلهٔ

$$(x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + d_1) - (x^2 + y^2 + a_2x + b_2y + d_2) = 0$$

نیز صدق می‌کند. بنابراین مختصات این نقاط در معادله

$$(a_1 - a_2)\, x + (b_1 - b_2)\, y + d_1 - d_2 = 0$$

صدق می‌کند. امّا این معادله نسبت به x و y از درجه اول است، و معادله یک خط مستقیم است. پس این معادله، معادله وتر مشترک دو دایره است. چون از نقاط A وB فقط یک خط مستقیم می‌گذرد، که وتر مشترک می‌باشد،

معادله

$$\boxed{(a_1 - a_2)x + (b_1 - b_2)y + d_1 - d_2 = 0} \qquad (*)$$

معادله وتر مشترک دو دایره به معادله‌های زیر می‌باشد.

$$x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + d_1 = 0$$

$$x^2 + y^2 + a_2x + b_2y + d_2 = 0$$

مثال : معادلهٔ وتر مشترک دو دایره به معادله‌های صفحهٔ بعد را به‌دست آورید.

$$x^۲ + y^۲ + ۶x + ۸y = ۰ \quad و \quad x^۲ + y^۲ - ۴x - ۶y - ۱۴ = ۰$$

حل : مطابق دستور (*) داریم

$$(۶ - (-۴))\, x + (۸ - (-۶))\, y + ۰ - (-۱۴) = ۰$$

که پس از ساده کردن می‌توانیم آن را به‌صورت زیر بنویسیم

$$۵x + ۷y + ۷ = ۰$$

این معادله وتر مشترک دو دایره مفروض می‌باشد.

مسائل

۱ــ مرکز و شعاع دایره‌های زیر را پیدا کنید. سپس دایره را در صفحه مختصات رسم کنید.

(الف) $x^۲ + y^۲ + ۲x + ۲y - ۱ = ۰$ (ب) $۳x^۲ + ۳y^۲ + ۶x - ۱ = ۰$

(ج) $x^۲ + y^۲ - ۶x + ۲y + ۱ = ۰$ (د) $۷x^۲ + ۷y^۲ + ۱۴۳y = ۰$

۲ــ چه نقاطی در نابرابری‌های زیر صدق می‌کنند؟

(الف) $x^۲ + ۴x + y^۲ - ۱۲ \leq ۰$ (ب) $۲x^۲ + ۲y^۲ + x + y > ۰$

۳ــ معادله دایره‌ای را بنویسید که از نقاط $(۱,۰)$ و $(۶,۰)$ گذشته و برخط $y = ۱$ مماس باشد.

۴ــ اگر فاصله نقطه $M(x,y)$ تا نقطه $A(۶,۰)$ دو برابر فاصله‌اش تا نقطه $B(۰,۳)$ باشد، نشان دهید که مکان M یک دایره خواهد بود. مرکز و شعاع این دایره را تعیین کنید.

۵ــ معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکزش $C(۱,۲)$ و بر خط به معادله $۳x + ۴y + ۱ = ۰$ مماس باشد.

۶ــ معادله دایره‌ای را بنویسید که از نقاط $(۰,۰)$ و $(۱۷,۷)$ گذشته و مرکزش بر خط $۶x - ۵y = ۰$ واقع باشد.

۷ــ معادله دایره‌ای را بنویسید که از نقاط $(۷,۱)$ و $(۰,۰)$ و $(-۱,۶)$ بگذرد. مرکز و شعاع این دایره را بیابید.

۸ــ معادله وتر مشترک دو دایره به معادله زیر را به‌دست آورید :

$$x^۲ + y^۲ + ۸x + ۲y - ۸۲ = ۰ \quad و \quad x^۲ + y^۲ + ۴x + ۶y + ۱۰ = ۰$$

۹ــ ابتدا معادله وتر مشترک دو دایره به معادله‌های زیر را به‌دست آورید.

$$x^۲ + y^۲ + ۴x + ۲y - ۱۰ = ۰ \quad و \quad x^۲ + y^۲ + ۲x + ۲y - ۲۴ = ۰$$

سپس با استفاده از معادله وتر مشترک مختصات نقاط تقاطع دو دایره را به‌دست آورید.

۱۰ــ برای هر دسته از معادله دایره‌های زیر مشخص کنید که آیا این دایره‌ها بر هم مماس داخل، مماس خارج، یا متقاطع‌اند؟

(الف) $x^۲ + y^۲ + ۲x - ۴y = ۰$ و $x^۲ + y^۲ - ۲x + ۴y = ۴۰$

(ب) $x^۲ + y^۲ + ۲x - ۴y = ۰$ و $x^۲ + y^۲ - ۲x + ۴y = ۰$

(ج) $x^۲ + y^۲ + ۲x - ۴y = ۹$ و $x^۲ + y^۲ - ۲x + ۴y = ۴$

(د) $x^۲ + (y - ۵)^۲ = ۵$ و $(x - ۲)^۲ + (y + ۳)^۲ = ۷$

۱۱ــ معادله دو دایره را بنویسید که برای آن‌ها یکی از حالت‌های زیر برقرار باشد.

(الف) $O_۱O_۲ = ۰$ (دو دایره هم‌مرکز)

(ب) $O_۱O_۲ > r_۱ + r_۲$ (دو دایره متخارج)

سهمی

در طبیعت تعداد زیادی از توابع خطی و درجه دوم مشاهده می‌شود. شیئی که به‌طور مستقیم به‌سوی بالا پرتاب می‌شود چنانچه دارای سرعت اوّلیه‌ای برابر ۱۲۸ متر بر ثانیه باشد، فاصله آن پس از t ثانیه از مدل $d = -۱۶t^۲ + ۱۲۸t$ (یا آنکه چنانچه ثانیه را به x و مسافت را به y نشان دهیم $y = -۱۶x^۲ + ۱۲۸x$ خواهد بود) به‌دست می‌آید. همچنین فرمول $C = ۲۰t^۲ - ۲۰۰t + ۶۴۰$ نشان‌دهنده تعداد باکتری‌های یک جمعیّت در یک سانتیمتر مکعب آب پس از t روز از کنترل رشد باکتری‌ها می‌باشد. ما با معادله درجه دوم به اختصار در فصل دوم آشنا شدیم. نمودار هر معادله به‌صورت $y = ax^۲ + bx + c$ را **سهمی** می‌نامیم. ابتدا با پیدا کردن نقاطی خاصّ از نمودار چنین توابعی سعی می‌کنیم طریقه رسم نمودار آن‌ها را به روشی سریعتر توضیح دهیم.

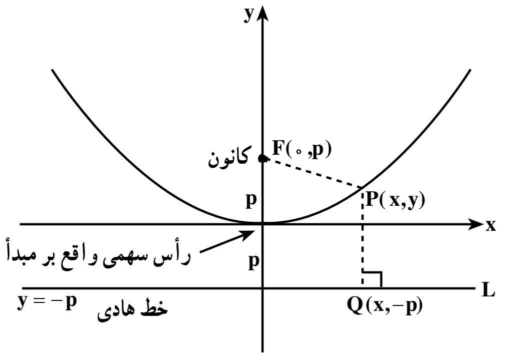
> مجموعهٔ تمام نقاطی از صفحه که فاصلهٔ آن‌ها از یک نقطهٔ ثابت داده شده و یک خط ثابت داده شده یکسان می‌باشد، سهمی نامیده می‌شود. نقطهٔ ثابت، **کانون سهمی** و خط ثابت، **خط هادی سهمی** نامیده می‌شود.

در شکل صفحهٔبعد سهمی به کانون $F(۰ , p)$ و خط هادی L به معادله $y = -p$ رسم شده است. طبق تعریف، نقطهٔ $P(x,y)$ واقع بر سهمی است اگر و فقط اگر $PF = PQ$. با محاسبه پاره‌خط‌های

$$PF = \sqrt{(x - ۰)^۲ + (y - p)^۲} = \sqrt{x^۲ + (y - p)^۲}$$

و

$$PQ = \sqrt{(x-x)^۲ + (y-(-p))^۲} = \sqrt{(y+p)^۲}$$



سهمی به معادلهٔ $x^۲ = ۴py$

و با توجه به تساوی $PF = PQ$ داریم :

$$\sqrt{(y+p)^۲} = \sqrt{x^۲ + (y-p)^۲}$$

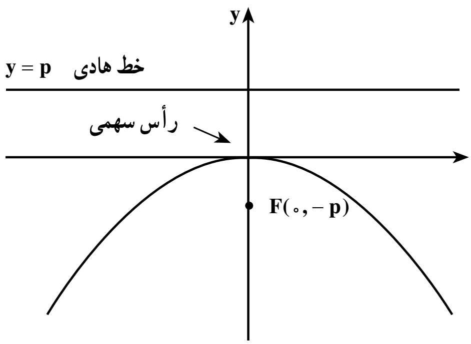
طرفین رابطه بالا را به توان ۲ می‌رسانیم و پس از ساده کردن داریم :

معادلهٔ (۱) $\quad x^۲ = ۴py$ و یا $y = \frac{x^۲}{۴p}$

این معادله‌ها نشان می‌دهند که سهمی نسبت به محور y تقارن دارد. محور y **محور سهمی** یا **محور تقارن** سهمی نامیده می‌شود.

نقطه تلاقی سهمی و محور تقارن را **رأس سهمی** می‌نامیم. عدد مثبت P را **فاصلهٔ کانونی سهمی** می‌نامند.

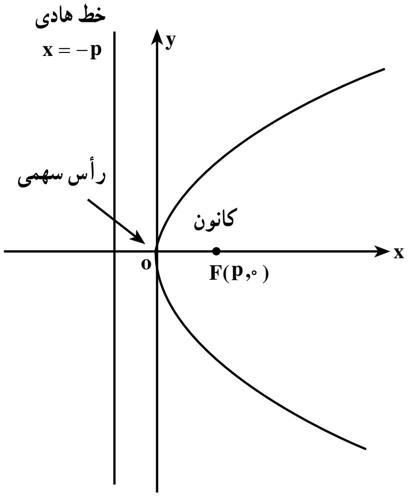
رأس سهمی $x^۲ = ۴py$ (در شکل فوق) بر مبدأ مختصات واقع است. در حالتی که رأس سهمی بر مبدأ مختصات واقع باشد، سهمی ساده‌ترین معادلهٔ خود را دارد. اگر سهمی رو به پایین باز شود و کانون $(۰ , -p)$ و خط هادی به معادلهٔ $y = p$ باشد، معادلهٔ ۱ به شکل زیر خواهد بود :



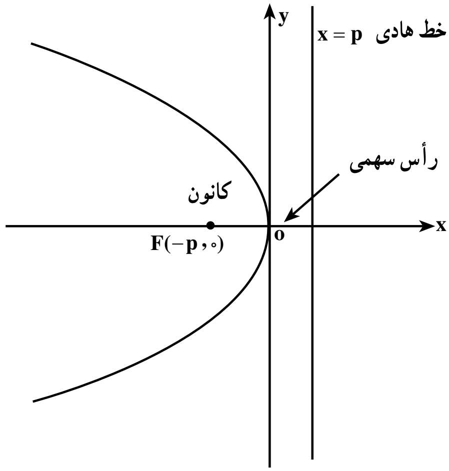
سهمی به معادلهٔ $x^۲ = -۴py$

معادله (۲) $x^{۲} = -۴py$ یا $y = -\frac{x^{۲}}{۴p}$

می‌توان معادله‌های مشابهی برای سهمی‌هایی که رو به راست، یا رو به چپ باز می‌شوند، به‌دست آورد.



سهمی به معادلهٔ $y^{۲} = ۴px$



سهمی به معادلهٔ $y^{۲} = -۴px$

فرم‌های استاندارد معادلهٔ سهمی با رأس واقع در مبدأ ($p > ۰$)

دهانهٔ سهمی	محور سهمی	خط هادی	کانون	معادله
رو به بالا	محور y	$y = -p$	$(۰, p)$	$x^{۲} = ۴py$
رو به پایین	محور y	$y = p$	$(۰, -p)$	$x^{۲} = -۴py$
رو به راست	محور x	$x = -p$	$(p, ۰)$	$y^{۲} = ۴px$
رو به چپ	محور x	$x = p$	$(-p, ۰)$	$y^{۲} = -۴px$

مثال: کانون و خط هادی سهمی به معادلهٔ $y^{۲} = ۱۰x$ را پیدا کنید.

حل: ابتدا مقدار p را از معادلهٔ استاندارد $y^{۲} = ۴px$ پیدا می‌کنیم.

$$۴p = ۱۰ \Rightarrow p = \frac{۱۰}{۴} = \frac{۵}{۲}$$

در نتیجه کانون و خط هادی به صورت زیر به دست می‌آید :

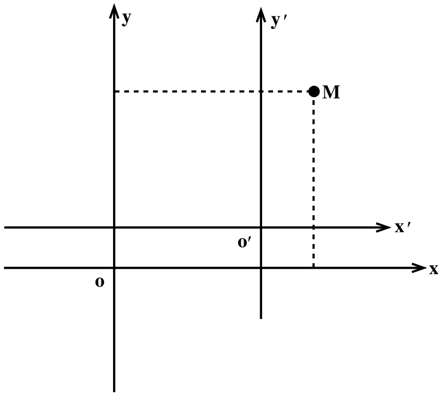
$$(p,0)=(\frac{5}{2},0)\ :\ \text{کانون}$$

$$x=\frac{-5}{2}\ \text{یا}\ x=-p\ :\ \text{خط هادی}$$

انتقال محورها

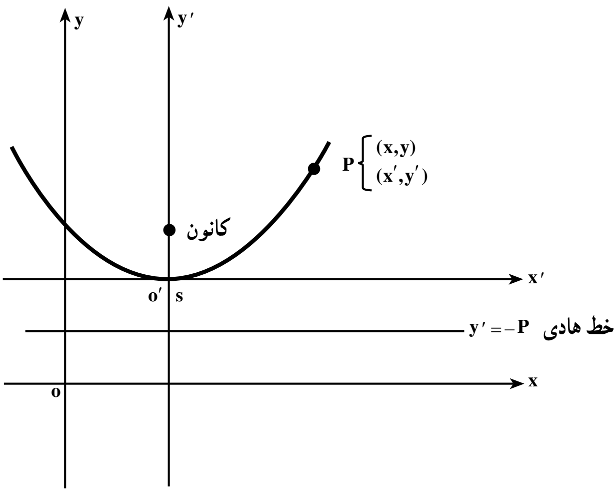
در دستگاه مختصات xoy نقطه $M(x,y)$ را در نظر می‌گیریم، اگر محورهای مختصات را به موازات خود انتقال داده تا مبدأ جدید $O'(h,k)$ باشد در این صورت مختصات M در دستگاه مختصات جدید می‌شود :

$$X'=x-h\ ،\ Y'=y-k$$



حال فرض کنیم یک سهمی با رأس $S(h,k)$ داده شده باشد که رو به بالا باز شود (نظیر شکل زیر)، معادله سهمی در مختصات $x'o'y'$ می‌شود :

$$X'^2=4pY'$$



بنابراین معادله اخیر در دستگاه مختصات xoy به صورت زیر در می‌آید :

$$(x-h)^{۲} = ۴p\,(y-k)$$

محور تقارن سهمی خط $x = h$ است و کانون سهمی $F(h,k+p)$ و خط هادی آن $y = k - p$.

صورت‌های دیگر معادلات سهمی (معادلات متعارف سهمی‌ها)

خط هادی		کانون		معادله سهمی
$y = k + p$	و	$F(h,k-p)$	،	۱) $(x-h)^{۲} = -۴p\,(y-k)$
$x = h - p$	و	$F(h+p\,,k)$	،	۲) $(y-k)^{۲} = ۴p\,(x-h)$
$x = h + p$	و	$F(h-p\,,k)$	،	۳) $(y-k)^{۲} = -۴p\,(x-h)$

مثال : معادله سهمی به رأس $S(۱,۳)$ و کانون $F(۵,۳)$ را بیابید. معادله خط هادی آن را به‌دست آورید.

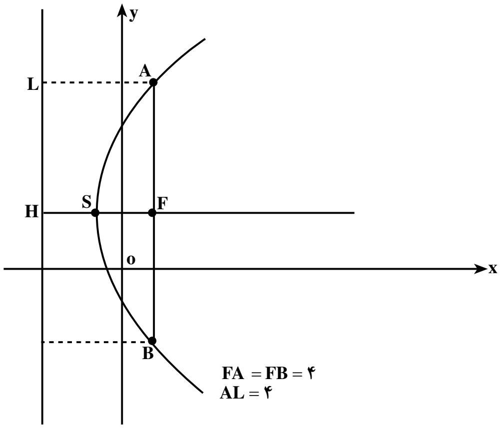
چون سهمی رو به راست باز می‌شود، (چرا؟) معادله آن می‌شود :

$$(y-۳)^{۲} = ۴p\,(x-۱)$$

عدد p فاصله بین F و S است بنابراین $p = ۴$ و معادله سهمی به‌صورت $(y-۳)^{۲} = ۱۶(x-۱)$ درمی‌آید و خط هادی آن به صورت $x = -۳$ است.

مثال : برای سهمی با رأس $S(۲,۳)$ و خط هادی $y = ۴$، معادله‌ای بیابید. مختصات کانون آن چه هستند؟

حل : سهمی رو به پایین باز می‌شود و معادله آن به صورت $(x-۲)^{۲} = -۴p(y-۳)$ می‌باشد. پس $p = ۴ - ۳ = ۱$ و معادله مطلوب چنین است $(x-۲)^{۲} = -۴(y-۳)$ و کانون به فاصله $p = ۱$ واحد در پایین رأس $(۲,۳)$، در نقطه $F(۲,۲)$ قرار دارد.



تبدیل معادله سهمی به صورت متعارف : ویژگی معادله سهمی واقع در صفحه xoy، این است که نسبت به یکی از مختص‌ها، درجه اوّل و نسبت به دیگری از درجه دوم است. هرگاه چنین معادله‌ای در دست باشد، می‌توان طی مراحلی مانند مثال صفحهٔ بعد آن

را به یکی از چهار صورت متعارف تبدیل نمود.

مثال: سهمی به معادله $y^۲ - ۴y - ۸x - ۴ = ۰$ داده شده کانون و معادله خط هادی سهمی را مشخص نمایید.

$$y^۲ - ۴y = ۸x + ۴ \Rightarrow (y - ۲)^۲ = ۸(x + ۱)$$

$$۴p = ۸ \Rightarrow p = ۲$$

بنابراین $S(-۱,۲)$ رأس سهمی و معادله خط هادی $x = -۳$ می‌باشد.

رسم سهمی: برای رسم سهمی ابتدا معادلهٔ آن را به‌صورت استاندارد نوشته و کانون، رأس و خط هادی آن را به‌دست می‌آوریم. و برحسب نوع سهمی (قائم یا افقی) محور کانونی، کانون و رأس سهمی و خط هادی را رسم می‌کنیم سپس در طرفین محور کانونی و از نقطهٔ کانون F به اندازهٔ $۲p$ واحد به سمت چپ و راست (بالا و پایین) جدا کرده A و B می‌نامیم در صورت امکان محل تلاقی نمودار با محورهای مختصات را هم به‌دست آورده و نقاط به‌دست آمده را با توجه به نوع سهمی به هم وصل کرده و شکل را کامل می‌کنیم.

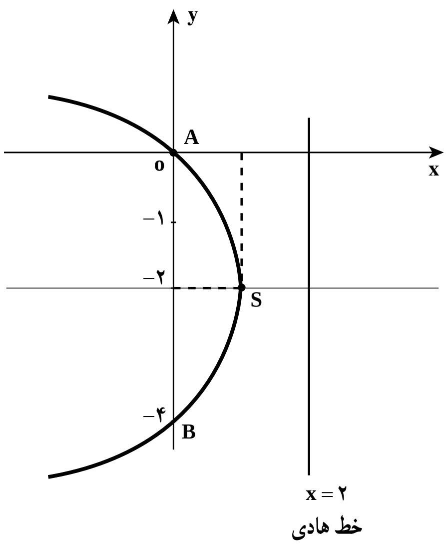
مثال: نمودار سهمی $y^۲ + ۴y + ۴x = ۰$ را رسم کنید.

حل: ابتدا معادلهٔ سهمی را به‌صورت استاندارد می‌نویسیم

$$(y + ۲)^۲ = -۴x + ۴ \Rightarrow (y + ۲)^۲ = -۴\ (x - ۱)$$

رأس سهمی نقطهٔ $S(۱,-۲)$ و $p = ۱$ و نوع سهمی افقی و دهانهٔ آن به سمت چپ باز می‌شود.

کانون سهمی $F\Big|_{-۲}^{۰}$ و خط هادی $x = ۲$ است (در این‌جا نقاط A و B همان نقاط محل تلاقی محور yها و نمودار است).



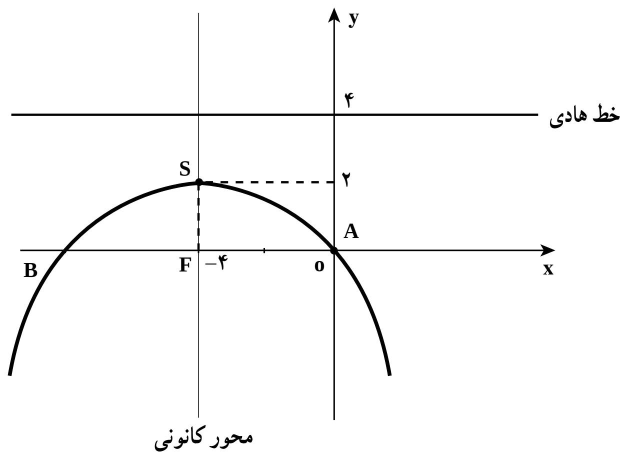
مثال : نمودار سهمی $x^۲ + ۸x + ۸y = ۰$ را رسم کنید.

حل :

$$x^۲ + ۸x + ۱۶ = -۸y + ۱۶$$

$$(x + ۴)^۲ = -۸\ (y - ۲)$$

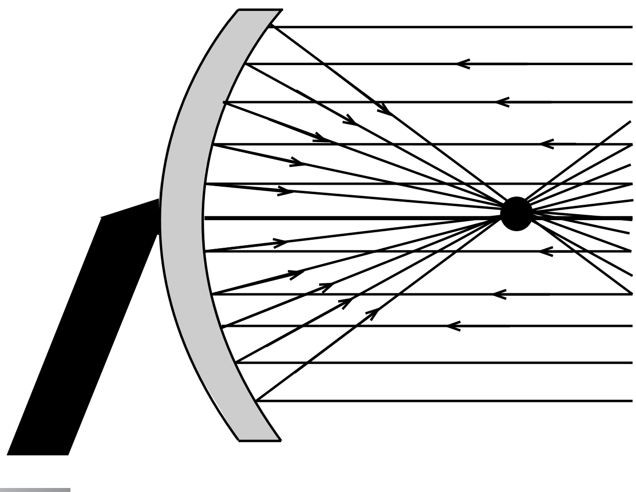
رأس سهمی $S(-۴,۲)$ و $p = ۲$ همچنین کانون $F(-۴,۰)$ و خط هادی $y = ۴$ می‌باشند.



آنتن‌های سهموی

آنتن‌های سهموی امواج رادیویی یا تلویزیونی ورودی را در کانون خود منعکس می‌کنند. با نصب دریافت‌کننده (گیرنده) در کانون امواج دریافت می‌شوند.

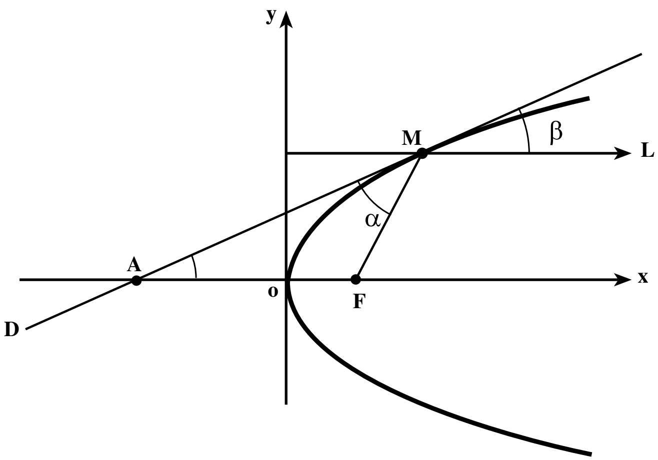
انرژی و قدرت سهموی



نقطه نشان داده شده کانون سهمی است. اشعه‌های نور که موازی محور سهمی به جسم سهموی می‌تابد پس از انعکاس در کانون سهمی متمرکز می‌شوند. از این ایده برای استفاده از انرژی خورشیدی استفاده می‌شود.

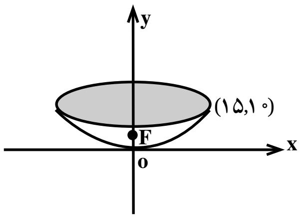
ویژگی بازتابندگی سهمی‌ها

سهمی‌ها ویژگی جالبی دارند که در ساختن انواع آینه‌های سهموی، تلسکوپ‌ها، چراغ‌های جلوی اتومبیل، آنتن‌های سهموی رادار و میکروویو و در گیرنده‌های «بشقابی» تلویزیون استفاده می‌شود و کاربرد عمدهٔ سهمی بازتاباندن نور و امواج رادیویی است. پرتوهایی که از کانون سهمی به سهمی برخورد کنند، موازی با محور از سهمی خارج می‌شوند و پرتوهایی که موازی با محور به سهمی می‌تابند در کانون سهمی جمع می‌شوند. در شکل زیر سهمی به معادله $y^۲ = ۴px$ را در نظر گرفته و خط D در نقطه $M(x_۰ , y_۰)$ بر سهمی مماس شده است ثابت می‌شود که α و β برابرند، پس هر پرتویی که از F به نقطه‌ای از سهمی مانند M بتابد در امتداد ML خارج می‌شود و به همین ترتیب، هر پرتویی که در امتداد ML به سهمی بتابد، به طرف F باز می‌تابد.



مثال : عمق یک آینه سهموی در مرکز آن ۱۰ سانتیمتر و قطر قاعده آن (در بالای آینه) ۳۰ سانتیمتر است فاصله رأس تا کانون را حساب کنید.

حل : محورهای مختصات را طوری انتخاب می‌کنیم که رأس سهمی در مبدأ و محور تقارن سهمی در امتداد محور yها، و دهانه سهمی به طرف بالا باشد. بنابراین معادله سهمی می‌شود $x^۲ = ۴py$ و از طرفی نقطه (۱۵,۱۰) متعلق به سهمی است بنابراین $۲۲۵ = ۴p \times ۱۰$ و $p = \frac{۴۵}{۸}$ بنابراین فاصله رأس تا کانون سهمی $۵\frac{۵}{۸}$ سانتیمتر است.



مسائل

۱ــ مختصات کانون و رأس و خط هادی هریک از سهمی‌های زیر را به‌دست آورده و نمودار آن‌ها را رسم کنید.

الف) $y^۲ - ۲y + x - ۱ = ۰$

ب) $۸y = ۴ + ۴x - x^۲$

پ) $y^۲ - ۸x - ۸ = ۰$

ت) $۳y^۲ + ۶x - ۴y = ۰$

۲ــ معادله یک سهمی را بنویسید که $x = ۴$ خط هادی و $y = ۴$ محور تقارن آن و از نقطه $A(۹,۷)$ بگذرد.

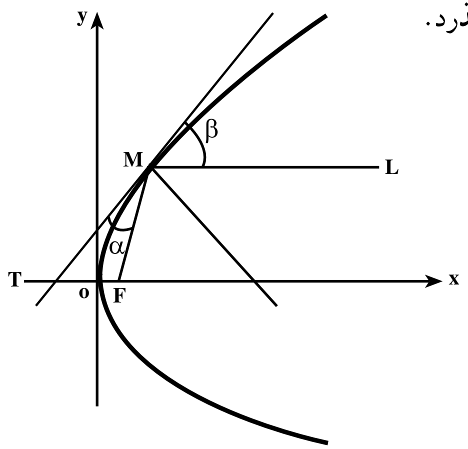
۳ــ معادله سهمی را بنویسید که کانون آن $F(۳,۵)$ و معادلهٔ خط هادی آن $x = -۳$ باشد.

۴ــ معادلهٔ سهمی قائم مماس بر محور xها که دارای کانون $F(۳,۱)$ باشد را بنویسید. سپس نمودار آن را رسم کنید.

۵ــ چه نواحی‌ای از صفحه در نابرابری‌های $y^۲ < x$ و $y^۲ > x$ صدق می‌کنند؟ «با رسم شکل».

۶ــ ثابت کنید معادله خط مماس بر سهمی به معادله $y^۲ = ۴px$ در نقطه $M(x_۰ , y_۰)$ واقع بر آن به صورت $yy_۰ = ۲p(x + x_۰)$ می‌باشد.

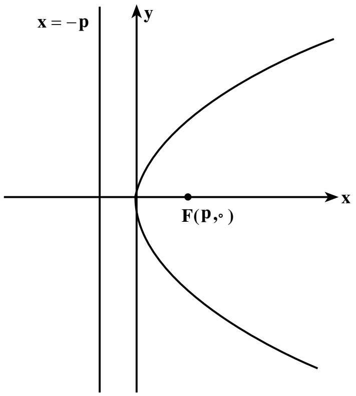
۷ــ از نقطه $M(x_۰ , y_۰)$ روی سهمی به معادله $y^۲ = ۴px$ مماس و قائم بر سهمی را رسم کرده‌ایم (شکل زیر). ثابت کنید $\alpha = \beta$. از اینجا نتیجه بگیرید که هر پرتوی که موازی محور سهمی بر سهمی بتابد از کانون سهمی می‌گذرد.



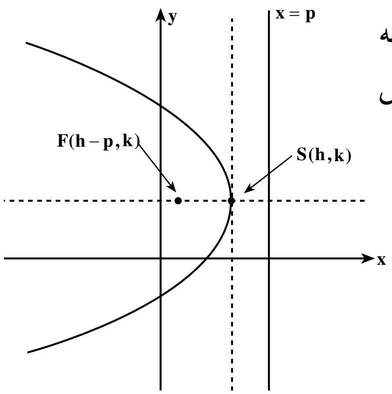
[**راهنمایی** : از مسأله ۶ و این ویژگی سهمی که فاصله هر نقطه آن تا کانون برابر فاصله آن از خط هادی است استفاده کنید.]

۸ــ یک تلسکوپ انعکاسی دارای آینه‌ای سهموی است که فاصله رأس آن تا کانونش ۷۵ سانتیمتر می‌باشد. اگر قطر قاعدهٔ آینه ۱۶۰ سانتیمتر باشد ، عمق آینه در مرکز آن چقدر است؟

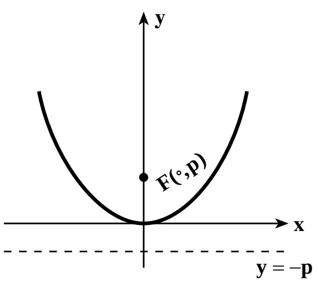
۹ــ ثابت کنید دایره‌ای که قطرش وتری از سهمی است که از کانون بر محور تقارن آن عمود است، مماس بر خط هادی این سهمی است.



۱۰ــ با توجه به شکل مقابل نشان دهید $y^2 = 4px$ معادلهٔ سهمی است که رأس آن واقع بر مبدأ مختصات است و دهانهٔ آن رو به راست باز می‌شود.



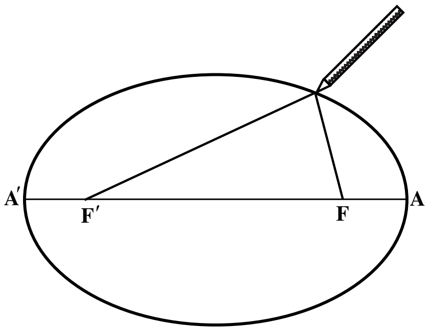
۱۱ــ با توجه به شکل مقابل نشان دهید که $(y - k)^2 = -4p(x - h)$ معادلهٔ سهمی است به رأس $S(h\ ,k)$ و دهانهٔ آن رو به چپ باز می‌شود.



۱۲ــ به شکل مقابل توجه کنید. کانون F را به خط هادی L نزدیک و نزدیکتر می‌کنیم. در حالتی که F بر خط L منطبق شود، شکل سهمی چگونه تغییر می‌یابد؟

بیضی

تعریف : بیضی مکان هندسی نقاطی از صفحه است که مجموع فواصل آن نقطه از دو نقطه ثابت واقع در صفحه مقدار ثابتی باشد. دو نقطه ثابت را کانون‌های بیضی می‌نامند.



رسم بیضی : اگر نقاط F و F' کانون‌های بیضی اختیار شوند، دو سر نخی را به دو سنجاق می‌بندیم و دو سنجاق را در نقاط F و F' نصب می‌کنیم (شکل‌مقابل) نوک مدادی را به نخی متکی کرده و آن را طوری حرکت می‌دهیم که نخ همواره کشیده باشد، از حرکت نوک مداد بر روی کاغذ، بیضی رسم می‌شود، زیرا نوک مداد در هر وضعی مانند M باشد، همواره $MF + MF'$ برابر طول نخ یعنی مساوی مقدار ثابتی است. واضح است که باید طول نخ، از فاصلهٔ دو کانون بیضی بیشتر باشد.

معادله بیضی : اگر کانون‌های بیضی نقاط $F(c,0)$ و $F'(-c,0)$ باشند و مجموع فواصل نقطه M متعلق به بیضی از دو کانون با $2a$ نمایش داده شود؛ داریم :

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

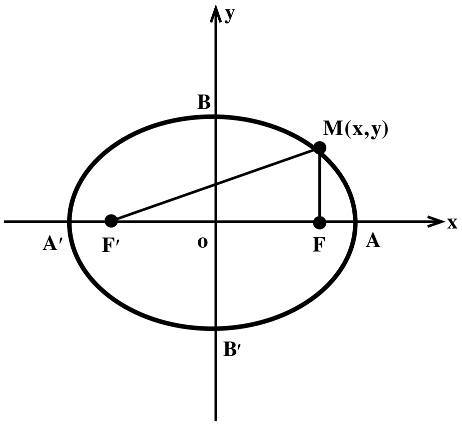
پس از دو بار به توان دو رسانیدن و خلاصه کردن نتیجه می‌گیریم :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

چون در مثلث MFF' ، $MF + MF' = 2a$ از $FF' = 2c$ بزرگتر است عبارت $a^2 - c^2$ مثبت است و قرار می‌دهیم $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ ، بنابراین :

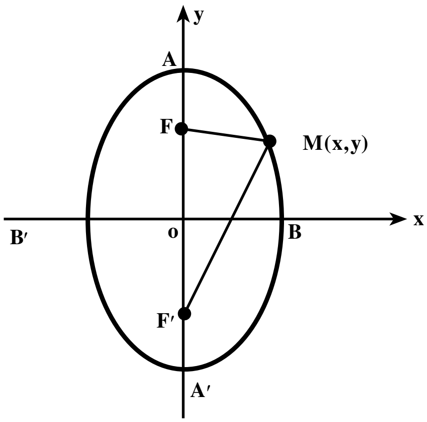
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (1)$$

معادله (۱) نشان می‌دهد که این منحنی نسبت به هر دو محور مختصات متقارن است و داخل مستطیلی محصور به خطوط $x = a$ و $x = -a$ و $y = b$ و $y = -b$ قرار دارد.



نقاط تقاطع بیضی با محور xها $(\pm a, ۰)$ و با محور yها $(۰, \pm b)$ است $AA' = ۲a$ قطر بزرگ بیضی و $BB' = ۲b$ قطر کوچک بیضی است.

نکته : اگر در معادله بیضی افقی یعنی $\frac{x^۲}{a^۲} + \frac{y^۲}{b^۲} = ۱$ جای x و y را با هم عوض کنیم، معادله یک بیضی به دست می‌آید که مرکزش همان مبدأ مختصات و قطر بزرگش (AA') بر محور عرض‌ها منطبق خواهد بود (بیضی قائم).



با توجه به $b = \sqrt{a^۲ - c^۲}$ همواره رابطه $a^۲ = b^۲ + c^۲$ برقرار است نظیر سهمی اگر مرکز بیضی نقطه (h,k) و اقطارش با محورهای مختصات موازی باشند با استفاده از انتقال محورهای مختصات معادلات متعارف بیضی به صورت زیرند.

۱ــ بیضی افقی

$$\frac{(x-h)^۲}{a^۲} + \frac{(y-k)^۲}{b^۲} = ۱$$

کانون‌ها $(h \pm c , k)$، رأس‌های A و A' $(h \pm a, k)$

۲ــ بیضی قائم

$$\frac{(x-h)^۲}{b^۲}+\frac{(y-k)^۲}{a^۲}=۱$$

کانون‌ها $(h\,,k\pm c)$، رأس‌های A و A' $(h,k\pm a)$

مثال : معادله یک بیضی به صورت زیر نوشته شده است. مرکز، رأس‌های A و ´A و کانون‌های بیضی را بیابید و سپس نمودار بیضی را رسم کنید.

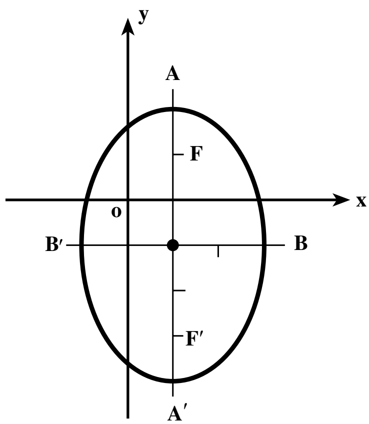
حل :

$$۹x^۲+۴y^۲-۱۸x+۸y-۲۳=۰$$

$$۹(x^۲-۲x+۱)+۴(y^۲+۲y+۱)=+۹+۴+۲۳$$

$$\frac{(x-۱)^۲}{۴}+\frac{(y+۱)^۲}{۹}=۱$$

مرکز بیضی نقطه $(۱,-۱)$ و $a^۲=۹$ و $b^۲=۴$ بنابراین بیضی قائم است و رأس‌ها $A(۱,۲)$ و $A'(۱,-۴)$ و $c=\sqrt{a^۲-b^۲}$ در نتیجه $c=\sqrt{۵}$ و کانون‌ها، $(۱,-۱\pm\sqrt{۵})$. نمودار این بیضی در شکل زیر رسم شده است :



خروج از مرکز بیضی : با توجه به معادله بیضی نسبت $(a>b>۰)e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^۲-b^۲}}{a}$ را خروج از مرکز بیضی می‌نامند، این عدد بین صفر و یک تغییر می‌کند و میزان اختلاف شکل بیضی با دایره را نشان می‌دهد، حال اگر a را ثابت نگه داریم و c را در بازهٔ $(۰\,,a)$ تغییر دهیم، شکل بیضی‌های حاصل تغییر خواهد کرد. وقتی c به صفر نزدیک می‌شود بیضی بیشتر شبیه دایره است و وقتی به مقدار

c افزوده شود، بیضی کشیده‌تر می‌شود.

سیارات منظومهٔ شمسی در مدارهایی بیضوی که خورشید در یکی از کانون‌های آن‌ها واقع است، حول خورشید می‌گردند. خروج از مرکز بیشتر سیارات منظومه شمسی به قدری کوچک است که مدار آن‌ها را می‌توان به طور تقریبی دایره تصور کرد. برای نمونه خروج از مرکز زمین برابر ۰/۰۲ است.

مثال : خروج از مرکز یک بیضی $\frac{۴}{۵}$ و مرکزش $(-۴ , -۱)$ و طول نقطه A رأس کانونی آن برابر یک است و قطر بزرگ بیضی موازی محور xها است، معادله بیضی را به‌دست آورید.

$$\frac{(x+۴)^۲}{a^۲}+\frac{(y+۱)^۲}{b^۲}=۱$$

$$A\,(h+a\,,k)\Rightarrow h+a=۱\Rightarrow a=۵$$

$$\frac{c}{a}=\frac{۴}{۵}\Rightarrow \boxed{c=۴}\,c^۲=a^۲-b^۲\Rightarrow b^۲=۹$$

معادله بیضی $$\boxed{\frac{(x+۴)^۲}{۲۵}+\frac{(y+۱)^۲}{۹}=۱}$$

معادلات مماس و قائم بر بیضی

$$\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}=۱\Rightarrow b^۲x^۲+a^۲y^۲-a^۲b^۲=۰$$

شیب مماس : $$\cancel{۲}b^۲x+\cancel{۲}a^۲y'y=۰\Rightarrow y'=\frac{-b^۲x}{a^۲y}\Rightarrow m=\frac{-b^۲x_۰}{a^۲y_۰}$$

$$y-y_۰=\frac{-b^۲x_۰}{a^۲y_۰}(x-x_۰) \qquad (۱)$$

با توجه به تساوی $b^۲x_۰^۲+a^۲y_۰^۲=a^۲b^۲$ از (۱) به معادله زیر می‌رسیم.

معادله مماس در بیضی $$\boxed{\frac{x_۰x}{a^۲}+\frac{y_۰y}{b^۲}=۱}$$

و معادله قائم بر بیضی می‌شود $$\boxed{\frac{a^۲x}{x_۰}-\frac{b^۲y}{y_۰}=c^۲}$$

مسائل

۱ــ معادله یک بیضی را بنویسید که نقاط $F(2, -2)$ و $F'(-4, -2)$ کانون‌های آن و خروج از مرکز آن $e = \frac{3}{5}$ باشد.

۲ــ بیضی به معادله $4x^2 + y^2 + 8x - 2y + 1 = 0$ مفروض است. مختصات مرکز، طول اقطار، فاصله کانونی و مختصات دو کانون این بیضی را حساب کنید.

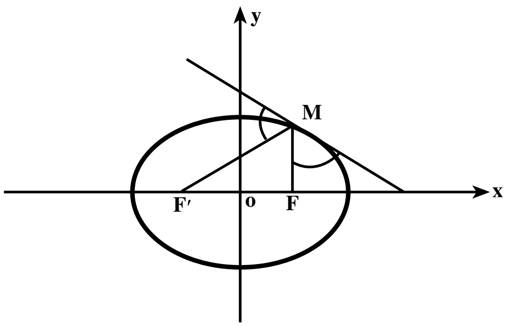
۳ــ نقطه $M\left|\begin{array}{l} x = 1 + 3\sin t \\ y = 2\cos t \end{array}\right.$ مفروض است اوّلاً: ثابت کنید مکان هندسی نقطه M وقتی t تغییر کند، بیضی‌است. ثانیاً: نقطه‌ای از بیضی را که به ازای $t = \frac{\pi}{4}$ به دست می‌آید،N می‌نامیم معادلهٔ خط مماس بر بیضی را در نقطه N بنویسید.

۴ــ شکل ناحیه‌ای را رسم کنید که مختصات نقاطش در نابرابری زیر صدق می‌کند.

$$4x^2 + 9y^2 \leq 36$$

۵ــ به ازای چه مقادیر ثابت a و b و c، بیضی $4x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ در مبدأ مختصات بر محور x مماس است و از نقطه $(-1,2)$ می‌گذرد؟

۶ــ **ویژگی بازتابندگی بیضی**: بیضی‌وار از دوران بیضی حول قطر بزرگش پدید می‌آید. آینه را با نقره اندود کردنِ درون رویهٔ بیضی‌وار می‌سازند. نشان دهید پرتویی از نور که از یکی از کانون‌ها ساطع شود به کانون دیگر باز می‌تابد. امواج صوتی هم این مسیر را طی می‌کنند و از این ویژگی بیضی‌وار برای ساختن برخی از تالارهای هنری استفاده می‌کنند. مطابق شکل مقابل نشان دهید که خطوط گذرنده از نقطه M واقع بر بیضی و دو کانون آن با خط مماس بر بیضی در M زوایای برابر تشکیل می‌دهند.



۷ــ معادله مکان هندسی نقاطی را تعیین کنید که عرض نقطه‌های واقع بر دایرهٔ $x^2 + y^2 = 16$ را به نسبت $\frac{3}{4}$ تقسیم کنند.

هذلولی

تعریف : هذلولی مکان هندسی نقاطی از صفحه است که قدر مطلق تفاضل فواصل آن نقطه از دو نقطه ثابت عدد ثابتی باشد. دو نقطه ثابت F و F' کانون‌های هذلولی می‌نامند و قرار می‌دهیم $FF' = ۲c$ و مقدار ثابت را با $۲a$ نشان می‌دهیم و داریم $c > a$.

معادله هذلولی : اگر $M(x,y)$ بر هذلولی واقع باشد و کانون‌های هذلولی $F(c,۰)$ و $F'(-c,۰)$ و مقدار ثابت $۲a$ باشد. آنگاه نقطه $M(x,y)$ بر هذلولی واقع است اگر و فقط اگر

$$\left|\sqrt{(x+c)^۲+y^۲}-\sqrt{(x-c)^۲+y^۲}\right|=۲a$$

$$\sqrt{(x+c)^۲+y^۲}-\sqrt{(x-c)^۲+y^۲}=\pm ۲a$$

یکی از رادیکال‌ها را به طرف راست معادله منتقل، دو طرف را مجذور، و نتیجه را ساده کرده، سپس یک رادیکال باقی‌مانده را در یک طرف نگه می‌داریم و نتیجه را باز هم مجذور می‌کنیم و به معادله زیر می‌رسیم :

$$\frac{x^۲}{a^۲}-\frac{y^۲}{c^۲-a^۲}=۱$$

با فرض $c^۲-a^۲=b^۲$ معادله هذلولی به صورت $\boxed{\frac{x^۲}{a^۲}-\frac{y^۲}{b^۲}=۱}$ می‌باشد.

هذلولی هم مانند بیضی نسبت به هر دو محور و نسبت به مبدأ متقارن است امّا با محور yها تقاطعی ندارد و هیچ قسمتی از نمودار هذلولی بین خطوط $x=a$ و $x=-a$ قرار نمی‌گیرد. در هذلولی یک نامساوی کلی شامل a و b وجود ندارد که متناظر با نامساوی $a > b$ در مورد بیضی باشد. یعنی در یک هذلولی ممکن است $a < b$ یا $a > b$ باشد. اگر در یک هذلولی $a = b$، آن هذلولی را متساوی الساقین گویند.

مجانب‌های هذلولی : نشان می‌دهیم هذلولی به معادلهٔ $\frac{x^۲}{a^۲}-\frac{y^۲}{b^۲}=۱$ دارای مجانب‌هایی به‌صورت $y=\frac{\pm b}{a}x$ است.

معادلهٔ هذلولی را بر حسب x مرتب می‌کنیم :

$$y^۲=\frac{b^۲}{a^۲}x^۲-b^۲$$

در این صورت f(x) به یکی از صورت‌های زیر است :

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{x^۲-a^۲}\ ,\ y=-\frac{b}{a}\sqrt{x^۲-a^۲}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\frac{b}{a}x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{b}{a}\sqrt{x^۲-a^۲}-\frac{b}{a}x\right]$$

$$=\frac{b}{a}\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^۲-a^۲}-x)(\sqrt{x^۲-a^۲}+x)}{\sqrt{x^۲-a^۲}+x}=\frac{b}{a}\lim_{x\to+\infty}\frac{-a^۲}{\sqrt{x^۲-a^۲}+x}=۰$$

پس بنا به تعریف مجانب، خط $y=\frac{b}{a}x$ مجانب نمودار $y=\frac{b}{a}\sqrt{x^۲-a^۲}$ است. به طور مشابه، می‌توان نشان داد که خط $y=\frac{b}{a}x$ نیز مجانب نمودار $y=-\frac{b}{a}\sqrt{x^۲-a^۲}$ است در نتیجه خط $y=\frac{b}{a}x$ مجانب هذلولی $\frac{x^۲}{a^۲}-\frac{y^۲}{b^۲}=۱$ خواهد بود و با همین روش می‌توان ثابت کرد خط $y=\frac{-b}{a}x$ نیز مجانب همین هذلولی است. برای به یاد سپردن معادلات مجانب‌های هذلولی به صورت زیر عمل می‌کنیم :

$$\frac{x^۲}{a^۲}-\frac{y^۲}{b^۲}=۱\Rightarrow(\frac{x}{a}-\frac{y}{b})(\frac{x}{a}+\frac{y}{b})=۰\Rightarrow\begin{cases}\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=۰\\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=۰\end{cases}$$ مجانب‌ها

طریقه رسم هذلولی : ابتدا مستطیلی‌به رئوس (a,b) و (a,–b) و (–a,b) و (–a,–b) رسم می‌کنیم قطرهای مستطیل خطوط مجانب هذلولی‌اند و رئوس هذلولی نقاط تقاطع محور اصلی و مستطیل رسم شده‌اند و هر شاخه هذلولی از رأس مربوطه و مماس بر ضلع مستطیل رسم شده به طوری که امتداد شاخه هذلولی به طور مجانبی به خطی که قطر مستطیل روی آن قرار دارد نزدیک می‌شود.

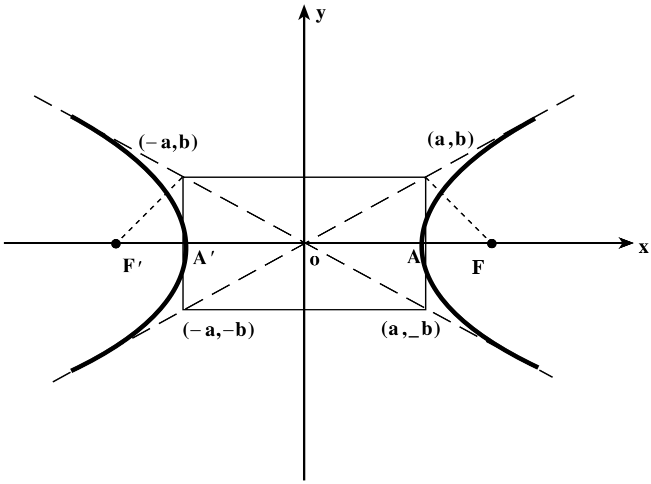
مثال : هذلولی به معادله $\frac{x^۲}{۹}-\frac{y^۲}{۴}=۱$ را رسم کنید.

$a^۲=۹$ و $b^۴=۲$

$c^۲=a^۲+b^۲=۱۳$

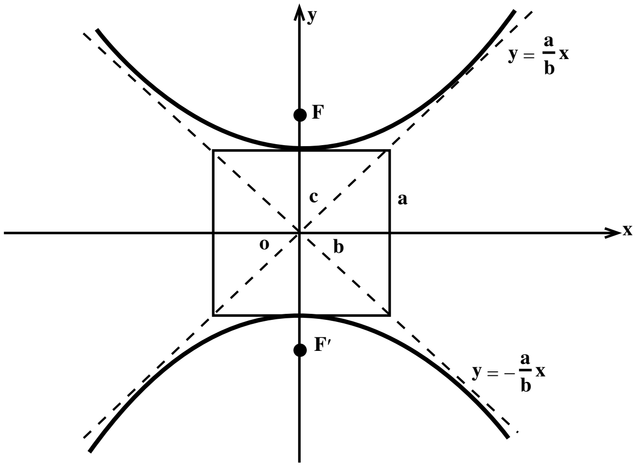
$F(\sqrt{۱۳},۰)$

$F'=(-\sqrt{۱۳},۰)$



اگر به مرکز O و به شعاع $c=\sqrt{a^2+b^2}$ دایره رسم کنیم **محور تقارن هذلولی (محور xها)** را در کانون‌ها، F و F′ قطع می‌کند.

اگر در معادله $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ جای x و y را عوض کنیم، معادله جدید $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ یک هذلولی را نشان می‌دهد که کانون‌هایش بر محور yها واقع‌اند (مانند شکل زیر).



وقتی مرکز هذلولی مبدأ مختصات نباشد : مرکز یک هذلولی محل تقاطع محورهای تقارن آن است. فهرست زیر معادلات هذلولی‌هایی را نشان می‌دهد که محورهایشان با محورهای مختصات موازی‌اند، و مرکزشان در نقطه (h,k) واقع است.

۱ــ هذلولی افقی (خط گذرنده از کانون‌ها موازی با محور xها)

$$\frac{(x-h)^۲}{a^۲}-\frac{(y-k)^۲}{b^۲}=۱$$

رأس‌ها $(h \pm a\,,k)$ و کانون‌ها $(h \pm c\,,k)$:

مجانب‌ها $\frac{x-h}{a}\pm\frac{y-k}{b}=۰$

۲ــ هذلولی قائم (خط گذرنده از کانون‌ها موازی با محور yها)

$$\frac{(y-k)^۲}{a^۲}-\frac{(x-h)^۲}{b^۲}=۱$$

رأس‌ها $(h\,,k\pm a)$ و کانون‌ها $(h\,,k\pm c)$:

مجانب‌ها $\frac{y-k}{a}\pm\frac{x-h}{b}=۰$

مثال : مرکز، رأس‌ها، کانون‌ها و مجانب‌های هذلولی زیر را به دست آورید.

$$x^۲-۴y^۲-۲x+۸y-۷=۰$$

حل : داریم

$$(x^۲-۲x+۱-۱)-۴(y^۲-۲y+۱-۱)-۷=۰$$

$$(x-۱)^۲-۱-۴\,(y-۱)^۲+۴-۷=۰$$

$$(x-۱)^۲-۴\,(y-۱)^۲=۴$$

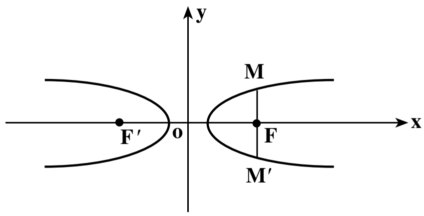
$$\frac{(x-۱)^۲}{۴}-(y-۱)^۲=۱$$

پس مختصات مرکز (۱،۱) و چون $a=۲$ و $b=۱$ پس $c=\sqrt{a^۲+b^۲}=\sqrt{۵}$. پس رأس‌ها نقاط (۳،۱) و (۱،۱−) و کانون‌ها $(۱+\sqrt{۵},۱)$ و $(۱-\sqrt{۵},۱)$ و مجانب‌ها عبارتند از :

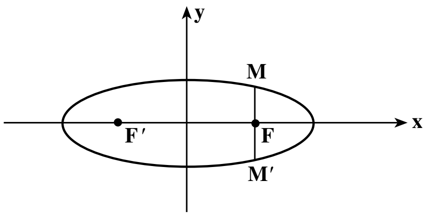
$$\frac{x-۱}{۲}\pm(y-۱)=۰$$

خروج از مرکز هذلولی : نظیر خروج از مرکز بیضی، $e=\frac{c}{a}$ را خروج از مرکز هذلولی می‌نامند و چون در هذلولی $c>a$. خروج از مرکز هر هذلولی همیشه عددی بزرگتر از یک می‌باشد.

وتر کانونی : وتری که از کانون هذلولی (یا بیضی) می‌گذرد و بر محور کانونی عمود است وتر کانونی هذلولی (بیضی) نامیده می‌شود (شکل زیر). ثابت می‌شود که طول چنین وتری برابر $\frac{۲b^۲}{a}$ می‌باشد.



MM' یک وتر کانونی هذلولی است.



MM' یک وتر کانونی بیضی است.

مثال : معادله یک هذلولی را بنویسید که مرکزش مبدأ مختصات و محور کانونی آن منطبق بر محور xها و خروج از مرکزش $\frac{\sqrt{۵}}{۲}$ و وتر کانونی آن به طول ۴ باشد.

حل : فرض کنیم هذلولی مانند شکل قبل باشد. بنابراین داریم

$$MM' = \frac{۲b^۲}{a} = ۴ \quad \text{و} \quad e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{۵}}{۲}$$

از این دو رابطه خواهیم داشت :

$$b^۲ = ۲a \quad \text{و} \quad e^۲ = \frac{c^۲}{a^۲} = \frac{۵}{۴}$$

لذا

$$\frac{a^۲ + ۲a}{a^۲} = \frac{۵}{۴} \Rightarrow \frac{a^۲}{a^۲} + \frac{۲a}{a^۲} = \frac{۵}{۴} \Rightarrow ۱ + \frac{۲}{a} = \frac{۵}{۴}$$

پس $a = ۸$ اکنون با توجه به رابطه $b^۲ = ۲a$ داریم $b = ۴$ در نتیجه معادله هذلولی به صورت زیر است :

$$\frac{x^۲}{۶۴} - \frac{y^۲}{۱۶} = ۱$$

مثال : معادله یک هذلولی را بنویسید که خطوط $۳x + ۲y + ۱ = ۰$ و $۳x - ۲y - ۷ = ۰$ مجانب‌های آن بوده و از نقطه $M(۱+۲\sqrt{۳}, ۴)$ بگذرد.

حل : مجانب‌ها را در یک دستگاه قطع می‌دهیم.

$$\begin{cases} ۳x + ۲y + ۱ = ۰ \\ ۳x - ۲y - ۷ = ۰ \end{cases} \Rightarrow O'(۱, -۲)$$

O' مرکز این هذلولی است (چرا؟) با رسم خطوط مجانب و انتخاب نقطه M در صفحه مختصات معلوم می‌شود که محور کانونی این هذلولی موازی محور yها است. بنابراین معادله هذلولی

به صورت :

$$\frac{(y+۲)^۲}{a^۲}-\frac{(x-۱)^۲}{b^۲}=۱$$

می‌باشد. چون ضریب زاویه مجانب‌ها از دستور $m=\pm\frac{a}{b}$ به دست می‌آید، پس

$$m=\pm\frac{۳}{۲}\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow ۲a=۳b$$

از طرف دیگر مختصات M در معادله هذلولی صدق می‌کند، پس

$$\frac{۳۶}{a^۲}-\frac{۱۲}{b^۲}=۱\Rightarrow a=۳,b=۲$$

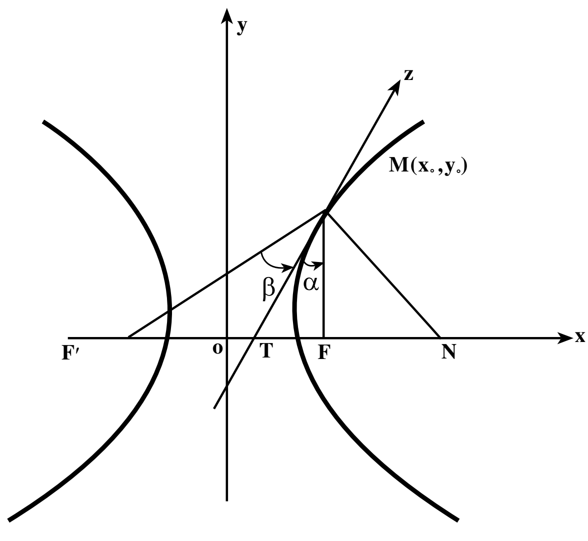
بنابراین معادله هذلولی می‌شود :

$$\frac{(y+۲)^۲}{۹}-\frac{(x-۱)^۲}{۴}=۱$$

معادلات مماس و قائم بر هذلولی

هذلولی به معادله $\frac{x^۲}{a^۲}-\frac{y^۲}{b^۲}=۱$ و نقطه $M(x_۰\ ,y_۰)$ متعلق به آن را در نظر می‌گیریم :

$$b^۲x^۲-a^۲y^۲=a^۲b^۲\Rightarrow y'=\frac{b^۲x}{a^۲y}$$



$$\text{شیب مماس } m=\frac{b^2x_0}{a^2y_0}\Rightarrow y-y_0=\frac{b^2x_0}{a^2y_0}(x-x_0)\Rightarrow \boxed{\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1}$$

معادله مماس بر هذلولی

$$\text{شیب قائم } m'=\frac{-a^2y_0}{b^2x_0}\Rightarrow y-y_0=\frac{-a^2y_0}{b^2x_0}(x-x_0)\Rightarrow \boxed{\frac{a^2x}{x_0}+\frac{b^2y}{y_0}=c^2}$$

معادله قائم بر هذلولی

مثال : بدون استفاده از مشتق، ضریب زاویه خطوطی را به دست آورید که از نقطهٔ $A(3,4)$ بگذرند و بر هذلولی به معادلهٔ $x^2-y^2=1$ مماس باشند.

حل : معادله خطی را می‌نویسیم که از نقطه $A(3,4)$ بگذرد و شیب آن m باشد؛ می‌دانیم معادلهٔ این خط $y-4=m(x-3)$ است. لذا $y=mx-3m+4$.

مختصات نقاط تلاقی این خط با هذلولی مفروض از حل دستگاه

$$\begin{cases}x^2-y^2=1\\ y=mx-3m+4\end{cases}$$

به‌دست می‌آید. با حذف y در این معادلات به‌دست می‌آوریم

$$(1-m^2)x^2-2m(-3m+4)x-9m^2+24m-17=0$$

این معادله در واقع طول‌های نقاط تقاطع خطوطی را به‌دست می‌دهد که از نقطه $A(3,4)$ می‌گذرند و هذلولی $x^2-y^2=1$ را قطع می‌کنند. برای آنکه یکی از این خطوط بر هذلولی مماس شود باید معادلهٔ درجه دوم اخیر فقط یک جواب (یک نقطه تقاطع) داشته باشد. از اینجا نتیجه می‌گیریم که

$$\frac{1}{4}\Delta=(3m^2-4m)^2-(1-m^2)(-9m^2+24m-17)=0$$

پس از ساده کردن به‌صورت زیر درمی‌آید

$$8m^2-24m+17=0$$

و این معادله دارای دو جواب $m=\frac{6+\sqrt{2}}{4}$ و $m=\frac{6-\sqrt{2}}{4}$ است. یعنی از نقطه $A(3,4)$ دو خط مستقیم می‌توان بر هذلولی $x^2-y^2=1$ مماس رسم کرد. ضریب زاویه این دو خط به‌ترتیب برابر $\frac{6+\sqrt{2}}{4}$ و $\frac{6-\sqrt{2}}{4}$ است.

مسائل

۱ــ هذلولی‌های زیر را رسم کنید :

(الف) $\frac{x^{۲}}{۹}-\frac{y^{۲}}{۱۶}=۱$ (ب) $\frac{x^{۲}}{۱۶}-\frac{y^{۲}}{۹}=۱$

(ج) $\frac{y^{۲}}{۹}-\frac{x^{۲}}{۱۶}=۱$ (د) $\frac{x^{۲}}{۹}-\frac{y^{۲}}{۱۶}=-۱$

در تمرین‌های ۲ تا ۸، مرکز، رئوس، کانون‌ها و ثابت‌های هذلولی به معادله مفروض را پیدا کنید. سپس شکل منحنی را در کاغذ شطرنجی رسم کنید.

۲ــ $۹(x-۲)^{۲}-۴(y+۳)^{۲}=۳۶$

۳ــ $۴(x-۲)^{۲}-۹(y+۳)^{۲}=۳۶$

۴ــ $۴(y+۳)^{۲}-۹(x-۲)^{۲}=۱$

۵ــ $۵x^{۲}-۴y^{۲}+۲۰x+۸y=۲$

۶ــ $۴x^{۲}=y^{۲}-۴y+۸$

۷ــ $۴y^{۲}=x^{۲}-۴x$

۸ــ $۴x^{۲}-۵y^{۲}-۱۶x+۱۰y+۳۱=۰$

۹ــ بر نقطه A واقع بر هذلولی به معادله $xy=a^{۲}$ ($a\neq۰$ و ثابت است) مماسی رسم کرده‌ایم. این مماس محورهای مختصات را در نقاط B و C قطع می‌کند. ثابت کنید نقطه A وسط پاره‌خط BC است.

۱۰ــ بر نقطهٔ A واقع بر هذلولی به معادلهٔ $x^{۲}-y^{۲}=۱$ قائمی رسم کرده‌ایم. این قائم محورهای مختصات را در نقاط B و C قطع می‌کند. ثابت کنید نقطه A وسط پاره‌خط BC است.

۱۱ــ خطوط موازی با شیب m وترهایی بر هذلولی به معادله $x^{۲}-y^{۲}=۱$ ایجاد می‌کنند، ثابت کنید اوساط این وترها بر یک خط واقع‌اند.

مسائل دوره‌ای فصل

۱ــ سهمی به معادله $y=x^{۲}$ مفروض است. فرض کنیم A نقطه‌ای واقع بر این سهمی غیر از مبدأ مختصات باشد. مماس بر سهمی در نقطه A محورهای x و y را به ترتیب در نقاط B و C قطع می‌کند. ثابت کنید نقطه B وسط پاره‌خط AC است.

۲ــ مماس بر هذلولی به معادلهٔ $xy=a^{۲}$ ($a\neq۰$ عددی است ثابت) در یک نقطه واقع بر آن محورهای مختصات را در نقاط B و C قطع می‌کند؛ ثابت کنید مساحت مثلث OBC عددی است ثابت

(O مبدأ مختصات است).

۳ــ در چه نقاطی از سهمی به معادلهٔ $y = x^{۲}$ قائم بر سهمی از نقطه $A(۰,a)$ می‌گذرد؟ $a > \frac{۱}{۲}$.

۴ــ ثابت کنید هذلولی $x^{۲} - y^{۲} = ۲$ و دایره $x^{۲} + y^{۲} - ۲y - \frac{۳}{۲} = ۰$ در نقاط $A(\frac{۳}{۲},\frac{۱}{۲})$ و $B(-\frac{۳}{۲},\frac{۱}{۲})$ بر هم مماس هستند.

۵ــ بر سهمی به معادله $y = x^{۲} + ۵x + ۱۰$ نقطه‌ای به‌دست آورید که مماس بر منحنی در آن نقطه موازی خط $y = ۶x + ۷$ باشد.

۶ــ بر بیضی به معادلهٔ

$$\frac{x^{۲}}{۹} + \frac{y^{۲}}{۱۶} = ۱$$

نقاطی را به‌دست آورید که مماس بر منحنی در آن نقاط موازی خطّ $y = ۴x + ۷$ باشد.

۷ــ نقطه $A(x,y)$ با مختصات پارامتری

$$x = \frac{e^{t} + e^{-t}}{۲} \quad و \quad y = \frac{e^{t} - e^{-t}}{۲}$$

مفروض است که در آن $t \in IR$. به‌ازای بعضی از مقادیر t چند نقطه را در یک کاغذ شطرنجی مشخص کنید. (الف) تعداد نقاط به‌دست آمده را آنقدر انتخاب کنید (با اختیار کردن مقادیر t) تا بتوانید حدس بزنید که این نقاط تشکیل چه نوع منحنی‌ای در صفحه می‌دهند.

(ب) ثابت کنید وقتی t در IR تغییر می‌کند نقطه A بر یک هذلولی حرکت می‌کند. معادله این هذلولی را به‌دست آورید.

۸ــ ثابت کنید به‌ازای هر عدد حقیقی a، خط مستقیم به معادله $y = ax + \sqrt{۴a^{۲} + ۹}$ بر بیضی به معادلهٔ

$$\frac{x^{۲}}{۴} + \frac{y^{۲}}{۹} = ۱$$

مماس است.

۹ــ ثابت کنید دایره به معادله $x^{۲} + y^{۲} - ۹y + ۱۶ = ۰$ و سهمی $y = x^{۲}$ در دو نقطهٔ $A(۲,۴)$ و $A(-۲,۴)$ بر هم مماس هستند.

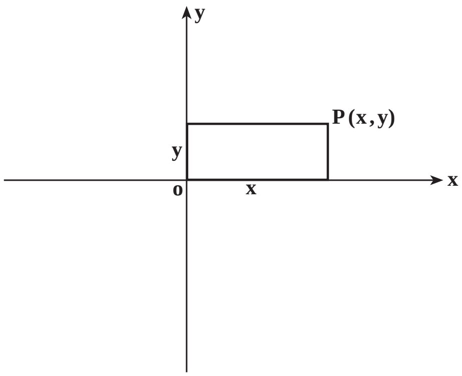
فصل ۵

هندسه مختصاتی و منحنی‌های درجه دوم

۱ـ هندسه مختصاتی

یادآوری و تکمیل

برای تعیین یک نقطه در صفحه از دستگاه‌های مختصات استفاده می‌کنند. یکی از این دستگاه‌ها دستگاه مختصات دکارتی است.



در این دستگاه به هر نقطهٔ P از صفحه یک زوج مرتب (x,y) از اعداد حقیقی متناظر می‌شود، x را طول نقطه و y را عرض آن می‌نامند. محورهای مختصات x و y بر هم عمودند؛ این محورها صفحه را به چهار ناحیه تقسیم می‌کنند که هرکدام از آن‌ها را یک ربع می‌نامند، ربع اوّل ناحیه‌ایست که در آن x و y نقاط هر دو مثبت هستند، در ربع دوم x نقاط منفی است و y نقاط مثبت، در ربع سوم x و y نقاط هر دو منفی هستند، بالاخره ربع چهارم متشکل است از نقاطی است که x آنها مثبت و y شان منفی است.

معادله خطّ

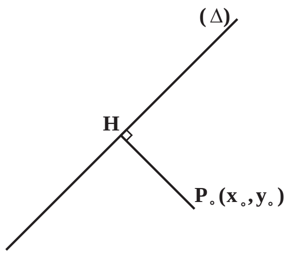
معادله یک خط در دستگاه مختصات دکارتی به شکل $ax + by + c = 0$ است که در آن a و b همزمان صفر نیستند یعنی $a^2+b^2 \neq 0$. اگر $b \neq 0$ با تقسیم طرفین معادلهٔ $ax + by + c = 0$ بر b داریم

$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$ ، زاویهٔ $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$ را چنان انتخاب می‌کنیم که $\tan\alpha=-\frac{a}{b}$ ، α زاویه‌ایست که خطّ به معادلهٔ $ax+by+c=0$ با جهت مثبت محور xها می‌سازد. $-\frac{a}{b}$ را **شیب یا ضریب زاویه** خطّ $ax+by+c=0$ می‌نامند. اگر معادله خط به‌صورت $y=mx+h$ داده شده باشد، m همان شیب خط می‌باشد.

معادلهٔ خطّی که از نقطه $P_0(x_0,y_0)$ می‌گذرد و شیب آن m است عبارتست از : $y-y_0=m(x-x_0)$. شیب خط مستقیمی که از نقاط $A(a_1,b_1)$ و $B(a_2,b_2)$ می‌گذرد برابر است با $m=\frac{b_2-b_1}{a_2-a_1}$. بنابراین، معادله خطی که از این دو نقطه می‌گذرد عبارتست از :

$$y-b_2=\frac{b_2-b_1}{a_2-a_1}(x-a_2)$$

فاصله یک نقطه از یک خط



فرض می‌کنیم (Δ) یک خطّ مستقیم باشد که معادله آن $ax+by+c=0$ است، نقطهٔ $P_0(x_0,y_0)$ را خارج از خطّ (Δ) درنظر می‌گیریم، از این نقطه خطّی بر (Δ) عمود می‌کنیم، شیب خطّ (Δ) برابر است با $-\frac{a}{b}$ بنابراین، شیب این خط عمود برابر است با $\frac{b}{a}$ درنتیجه معادله این یک عمود عبارتست از :

$$y-y_0=\frac{b}{a}(x-x_0)$$

حال مختصات نقطه H محل برخورد این دو خط را تعیین می‌کنیم، برای این کار باید دستگاه دو معادله دو مجهولی $\begin{cases}ax+by+c=0\\ y-y_0=\frac{b}{a}(x-x_0)\end{cases}$ را حل کنیم. از معادله دوم این دستگاه نتیجه می‌شود

$$y = y_0 + \frac{b}{a}(x - x_0)$$

با قرار دادن در معادله اول دستگاه

$$ax + b(y_0 + \frac{b}{a}(x - x_0)) + c = 0$$

و از آنجا

$$(a + \frac{b^2}{a})x = -by_0 + \frac{b^2}{a}x_0 - c$$

درنتیجه

$$x = \frac{b^2x_0 - aby_0 - ca}{a^2 + b^2}$$

با قرار دادن در معادله اول دستگاه داریم :

$$a(\frac{b^2x_0 - aby_0 - ca}{a^2 + b^2}) + by + c = 0$$

و از آنجا

$$y = \frac{-abx_0 - a^2y_0 - bc}{a^2 + b^2}$$

بنابراین،

$$H = (\frac{b^2x_0 - aby_0 - ac}{a^2 + b^2}, \frac{-abx_0 + a^2y_0 - bc}{a^2 + b^2})$$

حال باید فاصله بین دو نقطه $P_0(x_0,y_0)$ و

$$H = (\frac{b^2x_0 - aby_0 - ac}{a^2 + b^2}, \frac{-abx_0 + a^2y_0 - bc}{a^2 + b^2})$$

را بدست بیاوریم، این فاصله برابر است با؛

$$\boxed{d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

یادآوری می‌کنیم که اگر دو خط (Δ) و (Δ') به معادلات $y = mx + a$ و $y = m'x + a'$ بر هم عمود باشند آنگاه $mm' = -1$. اگر دو خطّ مستقیم به معادلات $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ و $a_2x + b_2y + c_2 = 0$

متعامد باشند آنگاه $a_۱a_۲ + b_۱b_۲ = ۰$.

مثال : اگر $A(-۱,۲)$ و $B(۳,۰)$ و $C(۱,-۲)$ سه رأس مثلث ABC باشند، معادلهٔ ارتفاع AH و طول آن را بدست آورید.

حل : ارتفاع AH بر ضلع BC عمود است. ابتدا شیب BC را به‌دست می‌آوریم.

$$m_{BC} = \frac{-۲-۰}{۱-۳} = ۱$$

$$m_{AH} . m_{BC} = -۱ \Rightarrow m_{AH} \times ۱ = -۱ \Rightarrow m_{AH} = -۱$$

معادلهٔ ارتفاع AH : $y - ۲ = -۱\ (x + ۱)$

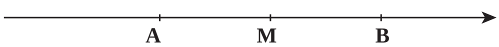
$$y = -x + ۱$$

برای محاسبهٔ طول ارتفاع AH معادلهٔ ضلع BC را به‌دست آورده و فاصلهٔ نقطه A از این خط را محاسبه می‌کنیم.

معادلهٔ ضلع BC : $y - ۰ = ۱\ (x - ۳) \Rightarrow y = x - ۳ \Rightarrow x - y - ۳ = ۰$

$$AH = \frac{|-۱-۲-۳|}{\sqrt{۱+۱}} = \frac{۶}{\sqrt{۲}} = ۳\sqrt{۲}$$

نقطهٔ وسط یک پاره‌خط : اگر روی محور طول‌ها نقطهٔ M وسط پاره‌خط AB باشد خواهیم داشت :



$$AM = MB$$

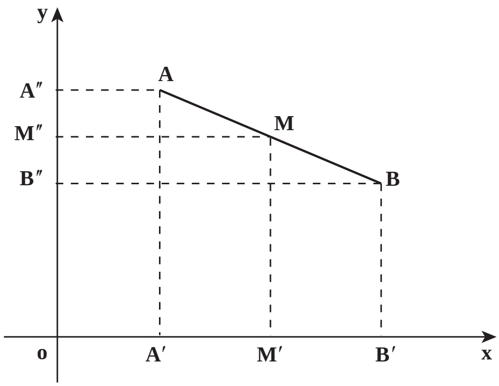
و از آنجا

$$x_M - x_A = x_B - x_M$$

$$۲x_M = x_A + x_B$$

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{۲}$$

بنابراین، طول مختصات وسط یک پاره‌خط برابر است با میانگین مجموع طول‌های ابتدا و انتهای پاره‌خط. همچنین اگر پاره‌خط AB در صفحهٔ مختصات داده شده باشد مطابق شکل صفحهٔ بعد می‌توان نشان داد :



$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_B}{۲} \\ y_M = \dfrac{y_A + y_B}{۲} \end{cases}$$

مثال : اگر $A(-۲,۳)$ و $B(۲,۰)$ و $C(۰,-۲)$ سه رأس مثلث ABC باشند، طول میانهٔ AM را به‌دست آورید.

حل : ابتدا نقطهٔ M وسط ضلع BC را به‌دست می‌آوریم

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_B + x_C}{۲} = \dfrac{۲+۰}{۲} = ۱ \\ y_M = \dfrac{۰+(-۲)}{۲} = -۱ \end{cases} \Rightarrow M(۱,-۱)$$

$$AM = \sqrt{(x_M - x_A)^۲ + (y_M - y_A)^۲} = \sqrt{(۱+۲)^۲ + (-۱-۳)^۲}$$

$$= \sqrt{۹+۱۶} = ۵$$

خطوط موازی

دو خط مستقیم به معادلات $a_۱x + b_۱y + c_۱ = ۰$ و $a_۲x + b_۲y + c_۲ = ۰$ موازی هستند اگر و فقط اگر شیبشان یکی باشد و از آنجا $-\dfrac{a_۲}{b_۲} = -\dfrac{a_۱}{b_۱}$ درنتیجه $\dfrac{a_۱}{a_۲} = \dfrac{b_۱}{b_۲}$. به عبارت دیگر $a_۱b_۲ = a_۲b_۱$ بدیهی است که اگر $b_۱ = b_۲ = ۰$ در این‌صورت هر دو خط بر محور xها عمود بوده و با هم موازی خواهند بود.

فاصلهٔ بین دو خط موازی

فرض کنیم دو خطّ موازی $(\Delta_۱)$ و $(\Delta_۲)$ به‌ترتیب به معادلهٔ $ax + by + c = ۰$ و $ax + by + c' = ۰$

باشند، $P_0(x_0,y_0)$ را نقطه‌ای واقع بر خطّ (Δ_1) می‌گیریم بنابراین، $ax_0 + by_0 + c = 0$، چنان‌که قبلاً ملاحظه کردیم، فاصلهٔ این نقطه از خطّ (Δ_2) از دستور زیر بدست می‌آید :

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

در بالا داشتیم $ax_0 + by_0 + c = 0$ و از آنجا $ax_0 + by_0 = -c$؛ با قرار دادن این مقدار در رابطه بالا داریم :

$$d = \frac{|c' - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

این دستور فاصله بین دو خط موازی به معادلات $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$ را به‌دست می‌دهد.

دستگاه معادلات خطی

در کتاب ریاضی (۱) با حل دستگاه دو معادله دومجهولی آشنا شده‌ایم. هرگاه

$$\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 5x + y = 4 \end{cases}$$

یک دستگاه دو معادله دومجهولی باشد، با روش حذفی، یعنی مثلاً ضرب معادله دوم در عدد ۳ و جمع آن با معادله اول، یک معادله یک مجهولی، یعنی

$$17x = 17$$

را به‌دست می‌آوریم که از حل آن $x = 1$ حاصل می‌شود. وقتی این مقدار x را در یکی از معادلات دستگاه اولیه‌مان قرار دهیم $y = -1$ به‌دست می‌آید.

به‌طور کلی هر معادله به‌صورت :

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b \qquad (1)$$

را، که در آن a_1، a_2، ...، a_n و b اعدادی ثابت و x_1، x_2، ...، x_n متغیرهایی باشند، یک معادله خطی نامیده می‌شود. x_1، x_2، ...، x_nها را مجهول‌های معادله نیز می‌نامند، درحالت $n = 2$، مجموعه (x_1,x_2)هایی که در معادله

$$a_1x_1 + a_2x_2 = b$$

صدق می‌کند یک خط راست در صفحه مختصات تشکیل می‌دهد و دلیل نامگذاری معادلهٔ خطی

روشن می‌شود.

یک جواب معادلهٔ خطی (۱) دنباله‌ای است از n عددی مانند $s_۱,s_۲,\ldots,s_n$ به‌طوری که وقتی در (۱) قرار دهیم

$$x_۱ = s_۱, x_۲ = s_۲, \ldots, x_n = s_n$$

معادله برقرار باشند. مثلاً $x_۳ = -۴$، $x_۲ = ۳$، $x_۱ = ۲$ یک جواب معادلهٔ خطی

$$۶x_۱ - ۳x_۲ + ۴x_۳ = -۱۳$$

است، زیرا

$$۶(۲) - ۳(۳) + ۴(-۴) = -۱۳$$

به‌طور کلی، یک دستگاه m معادله خطی و n مجهول، یا یک دستگاه خطی مجموعه‌ای است از m معادله خطی n مجهولی. هر دستگاه خطی را می‌توانیم به‌صورت کلی

$$\begin{cases} a_{۱۱}x_۱ + a_{۱۲}x_۲ + \ldots + a_{۱n}x_n = b_۱ \\ a_{۲۱}x_۲ + a_{۲۲}x_۲ + \ldots + a_{۲n}x_n = b_۲ \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m۱}x_۱ + a_{m۲}x_۲ + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (۲)$$

بنویسیم معادلهٔ

$$a_{i۱}x_۱ + a_{i۲}x_۲ + \ldots + a_{in}x_n = b_i$$

را معادله iام دستگاه می‌نامیم $(۱ \le i \le m)$. a_{ij}ها و نیز $b_۱$، $b_۲$،...، b_m ثابت‌های معلومی هستند. منظور از حل دستگاه فوق یافتن $x_۱$، $x_۲$، ...، x_nهایی است که در هر معادله دستگاه صدق کنند. یک **جواب** دستگاه (۲) دنباله‌ای است از n عدد مانند $s_۱,s_۲,\ldots,s_n$ با این ویژگی که وقتی در هر معادله (۲) قرار دهیم $x_۱ = s_۱$، $x_۲ = s_۲$، ... $x_n = s_n$ آن معادله برقرار شود (به یک تساوی عددی تبدیل شود).

اگر دستگاه خطی (۲) جواب نداشته باشد می‌گوییم **ناسازگار** است؛ چنانچه جواب داشته باشد، آن را **سازگار** خوانیم. هرگاه $b_۱ = b_۲ = \ldots = b_m = ۰$ دستگاه را یک دستگاه **همگن** می‌نامیم.

دستگاه r معادله خطی و n مجهول دیگر

$$\begin{cases} c_{۱۱}x_۱ + c_{۱۲}x_۲ + \ldots + c_{۱n}x_n = d_۱ \\ c_{۲۱}x_۱ + c_{۲۲}x_۲ + \ldots + c_{۲n}x_n = d_۲ \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ c_{r۱}x_۱ + c_{r۲}x_۲ + \ldots + c_{rn}x_n = d_r \end{cases} \qquad (۳)$$

را **هم ارز** دستگاه (۲) می‌نامیم هرگاه جواب‌های هر دو دستگاه یکسان باشند.

مثال : دستگاه خطی

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 = -7 \\ 2x_1 + x_2 = 7 \end{cases}$$

(۴)

فقط جواب $x_2 = 3$، $x_1 = 2$ را دارد. دستگاه خطی

$$\begin{cases} 8x_1 - 3x_2 = 7 \\ 3x_1 - 2x_2 = 0 \\ 10x_1 - 2x_2 = 14 \end{cases} \qquad (5)$$

نیز فقط جواب $x_2 = 3$، $x_1 = 2$ را دارد. پس (۴) و (۵) هم‌ارز هستند.

یکی از رایج‌ترین مسائل عملی تقریباً تمام شاخه علوم، نظیر ریاضیات، فیزیک، زیست‌شناسی، شیمی، اقتصاد، جغرافیا، رشته‌های مختلف مهندسی، تحقیق در عملیات، و علوم اجتماعی حل دستگاه‌های معادلات خطی است.

شما در سال اول با حل دستگاه دو معادله دو مجهولی خطی آشنا شده‌اید. با ذکر مثال‌هایی مروری بر روش حل این نوع دستگاه‌ها می‌کنیم.

مثال : دستگاه خطی

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 = -3 \\ 2x_1 + x_2 = 8 \end{cases} \qquad (6)$$

را درنظر می‌گیریم. برای حذف x_2 اگر دو برابر معادله اول را از دوم کم کنیم داریم

$$7x_2 = 14$$

که معادله‌ای است بدون جمله شامل x_1. پس مجهول x_1 را حذف کرده‌ایم. حال با حل این معادله نسبت به x_2 داریم :

$$x_2 = 2$$

و با گذاشتن این مقدار در معادله اول (۶) خواهیم داشت

$$x_1 = 3$$

پس $x_2 = 2$، $x_1 = 3$ تنها جواب دستگاه خطی فوق است.

مثال : دستگاه خطی

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 = 7 \\ 2x_1 - 6x_2 = 7 \end{cases} \qquad (7)$$

را درنظر می‌گیریم. باز تصمیم می‌گیریم x_1 را حذف کنیم. برای این کار اگر دو برابر معادله اول را از معادله دوم کم کنیم داریم

$$0 = 7$$

که به روشنی برقرار نیست. پس دستگاه (۷) جواب ندارد و ناسازگار است.

مثال : دستگاه خطی

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 14 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = -2 \end{cases} \qquad (8)$$

را درنظر می‌گیریم. برای حذف x_1 اگر دو برابر معادلهٔ اول را از معادله دوم و سه برابر معادله اول را از معادله سوم کم کنیم، خواهیم داشت

$$\begin{cases} -7x_2 - 4x_3 = 2 \\ -5x_2 - 10x_3 = -20 \end{cases} \qquad (9)$$

این یک دستگاه دو معادله و دو مجهول است، با تقسیم معادله دوم (۹) بر ۵− داریم

$$\begin{cases} -7x_2 - 4x_3 = 2 \\ x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$$

که آن را با تعویض جای معادلات، به شکل

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 = 4 \\ -7x_2 - 4x_3 = 2 \end{cases} \qquad (10)$$

می‌نویسیم. حال برای حذف x_2 در (۱۰) اگر ۷ برابر معادله اول را به معادله دوم بیافزاییم داریم

$$10x_3 = 30$$

یا

$$x_3 = 3 \qquad (11)$$

با گذاردن مقدار x_3 در معادله اول (۱۰) معلوم می‌شود که $x_2 = -2$، و با گذاردن مقادیر x_2 و x_3 در معادله اول (۸) خواهیم داشت $x_1 = 1$، ملاحظه می‌کنیم که روش حذف در عمل دستگاه خطی

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ x_2 + 2x_3 = 4 \\ x_3 = 3 \end{cases} \qquad (12)$$

را، که از معادله‌های اول (۸) و (۱۰)، معادله (۱۱) تشکیل شده است، ایجاد می‌کند.

اهمیت این روش در آن است که علاوه بر اینکه دستگاه‌های خطی (۸) و (۱۲) هم‌ارز هستند، (۱۲) این مزیّت را دارد که ساده‌تر حل می‌شود.

مثال : دستگاه خطی

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -4 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 4 \end{cases} \qquad (13)$$

را درنظر می‌گیریم. برای حذف x_1 اگر دو برابر معادله اول را از معادله دوم کم کنیم داریم

$$-3x_2 + 3x_3 = 12 \qquad (14)$$

حال باید معادله (۱۴) را برای x_2 و x_3 حل کنیم. یک جواب

$$x_2 = x_3 - 4$$

است، که در آن x_3 می‌تواند هر عدد حقیقی باشد. پس از معادله اول (۱۳) داریم

$$\begin{aligned} x_1 &= -4 - 2x_2 + 3x_3 \\ &= -4 - 2(x_3 - 4) + 3x_3 \\ &= x_3 + 4 \end{aligned}$$

بنابراین، یک جواب دستگاه (۱۳) عبارت است از

$$\begin{aligned} x_1 &= x_3 + 4 \\ x_2 &= x_3 - 4 \\ x_3 &= \text{یک عدد حقیقی دلخواه} \end{aligned}$$

این به معنی آن است که دستگاه خطی (۱۳) بینهایت جواب دارد. زیرا هر بار که به x_3 مقدار بدهیم جوابی مشخص (عددی) از (۱۳) را به‌دست می‌آوریم. مثلاً اگر $x_3 = 1$،

$$x_1 = 5 , x_2 = -3 , x_3 = 1$$

یک جواب دستگاه است. حال آنکه اگر $x_3 = -2$،

$$x_1 = 2 , x_2 = -6 , x_3 = -2$$

جوابی دیگر از دستگاه خواهد بود. سه جواب دیگر این دستگاه را با مقدار دادن به x_3 حساب کنید.

نتیجه می‌گیریم که :

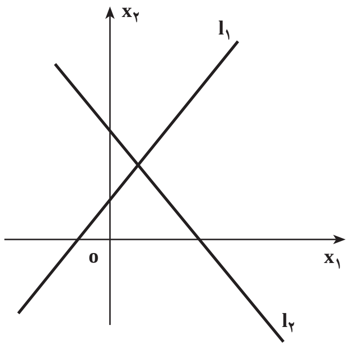
یک دستگاه خطی ممکن است جوابش منحصر به‌فرد باشد (فقط یک جواب داشته باشد) یا آنکه بدون جواب باشد، یا بینهایت جواب داشته باشد.

حل دستگاه دو معادله با دو مجهول از راه هندسی

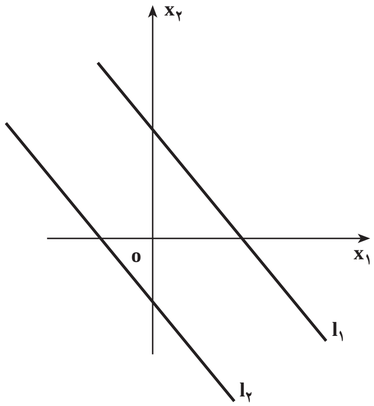
دستگاه خطی دو معادله و دو مجهول x_1 و x_2 به‌صورت کلی

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 = c_1 \\ b_1x_1 + b_2x_2 = c_2 \end{cases} \qquad (15)$$

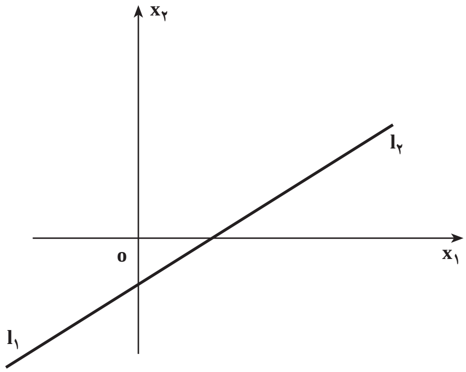
را درنظر می‌گیریم. وقتی در هریک از این معادله‌ها x_1 را مختص اول یعنی طول و x_2 را مختص دوم یعنی عرض یک نقطه در صفحه مختصات تلقی کنیم، نمودار هریک از این معادله‌ها خطی راست است، که به‌ترتیب آن‌ها را با l_1 و l_2 نشان می‌دهیم. اگر نقطه به مختصات (s_1,s_2) محل تلاقی دو خط l_1 و l_2 باشد آنگاه $x_2 = s_2$ و $x_1 = s_1$ یک جواب دستگاه (۱۵) خواهد بود.



(الف) جواب منحصر به فرد است. مختصات نقطه تقاطع جواب دستگاه است.



(ب) دستگاه بدون جواب است.



(پ) دو خط بر هم منطبق و دستگاه بینهایت جواب دارد.

هرگاه دو خط l_1 و l_2 بر هم منطبق باشند دستگاه بینهایت جواب دارد، درحالی که اگر این دو خطی موازی باشند دستگاه بدون جواب است. از راه هندسی نیز به همان سه حالت فوق خواهیم رسید.

مسائل

۱ــ مثلث ABC با سه رأس $A(۱,۴)$ و $B(-۲,-۲)$ و $C(۴,۲)$ مفروض است.

الف) معادلهٔ میانهٔ وارد بر ضلع BC را به‌دست آورید.

ب) طول میانهٔ AM را محاسبه کنید.

ج) معادلهٔ ارتفاع BH را محاسبه کنید.

د) نقطه تلاقی میانهٔ AM و ارتفاع BH را به‌دست آورید.

۲ــ طول قطر مربعی که یک ضلع آن واقع بر خط $x + y = ۵$ و مختصات یک رأس آن $A(-۲,۱)$ باشد را به‌دست آورید.

۳ــ نقاط $A(۴,۲)$ و $B(۱,-۱)$ و $C(۶,-۱)$ سه رأس مثلث ABC هستند. اگر H و M به‌ترتیب پای ارتفاع AH و میانهٔ AM باشند طول MH را به‌دست آورید.

۴ــ دستگاه‌های خطی زیر را حل کنید.

الف) $\begin{cases} x_۱ + x_۲ = ۵ \\ ۲x_۱ + ۳x_۲ = ۱۰ \end{cases}$

ب) $\begin{cases} ۲x_۱ - ۳x_۲ - ۴x_۳ = -۱۲ \\ x_۱ - ۲x_۲ + x_۳ = -۵ \\ ۳x_۱ + x_۲ + ۲x_۳ = ۱ \end{cases}$

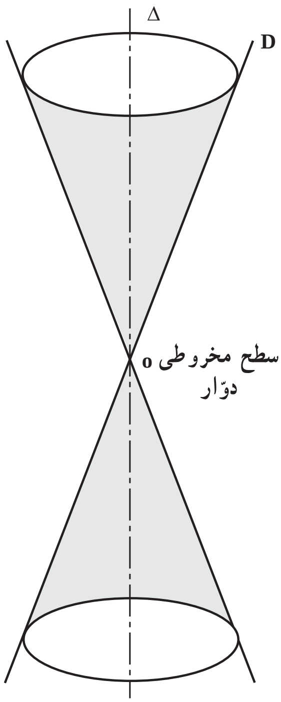
ج) $\begin{cases} ۳x_۱ + ۴x_۲ - x_۳ = ۸ \\ ۶x_۱ + ۸x_۲ - ۲x_۳ = ۳ \end{cases}$

د) $\begin{cases} x + ۴y - z = ۱۲ \\ ۳x + ۸y - ۲z = ۴ \\ x + y + ۳z = ۱۲ \end{cases}$

۲ــ منحنی‌های درجه دوم

نمودار معادلات درجه دوم از x و y را منحنی‌های درجه دوم می‌نامند. این منحنی‌ها از برخورد یک صفحه با یک مخروط دوار نیز قابل به‌دست آوردن هستند، و به همین علت آن‌ها را مقاطع مخروطی نیز می‌نامند.

وجه نامگذاری مقاطع مخروطی به زمان کشف تاریخی آن‌ها به‌عنوان محل تقاطع یک صفحه با یک مخروط قائم دوار برمی‌گردد (شکل زیر). هر صفحه که عمود بر محور مخروط باشد مقطعی پدید می‌آورد که **دایره** نامیده می‌شود. صفحه را کمی مایل می‌کنیم، مقطع حاصل یک **بیضی** است. صفحه را باز هم بیشتر کج می‌کنیم تا موازی یکی از یال‌های مخروط شود، مقطع تشکیل شده یک **سهمی** است.

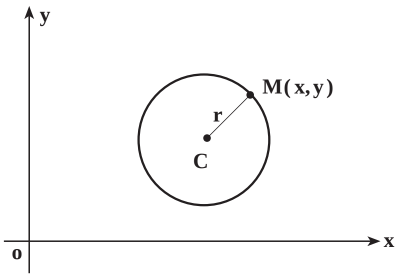


به کج کردن صفحه ادامه می‌دهیم تا آنکه صفحه قاطع سطح مخروطی دوار را در دو طرف رأس قطع کند. مقطع حاصل یک **هذلولی** است؛ هذلولی یک منحنی با دو شاخه است.

دایره، بیضی، سهمی و هذلولی از قرن چهارم قبل از میلاد (مسیح) توسط هندسه‌دان یونانی به نام آپولونیوس مورد بررسی و مطالعه قرار گرفته‌اند. آپولونیوس به‌طور کامل این منحنی‌ها را مورد تحقیق قرار داد و حاصل کارهای خود را در مجموعه‌ای متشکل از هشت کتاب ارائه کرد. کاربردهای عملی مقاطع مخروطی توسط ریاضیدان و دانشمند آلمانی یوهانز کپلر شروع شده است. کپلر فرضیه‌ای ارائه کرد که بیان می‌داشت که سیاره‌ها در مدارهایی بیضی شکل به دورخورشید می‌چرخند که خورشید در یکی از کانون‌های این بیضی‌ها قرار دارد. امروزه تئوری مقاطع مخروطی در مطالعه مدار سیاره‌ها، ستاره‌های دنباله‌دار، و قمرهای مصنوعی کاربردهای فراوانی دارند. مدارهای بسته شامل دایره و بیضی‌اند، درحالی که مدارهای باز (یا مدارهای فرّار) شامل سهمی‌ها و هذلولی‌ها می‌باشند. مقاطع مخروطی در مطالعه ساختار اتم‌ها، سیستم‌های راهنمای هواپیماها، ساختن عدسی‌ها، وسایل نوری و وسایل پیش‌بینی هوا، ارتباطات قمرهای مصنوعی، و نیز در ساختن پل‌ها به‌کار می‌روند. سطوحی که از دوران مقاطع مخروطی تشکیل می‌شوند نیز دارای کاربردهایی در شاخه‌هایی از علوم هستند که با نور، صدا و امواج رادیویی سروکار دارند.

در این بخش از دستگاه مختصات دکارتی به‌عنوان چارچوبی برای مطالعه سهمی، دایره، بیضی و هذلولی استفاده می‌کنیم. معادله این منحنی‌ها به‌صورت عبارت درجه دومی از x و y هستند.

دایره



دایره مکان هندسی نقاطی از صفحه است که فاصله آن‌ها از یک نقطه ثابت مفروض در صفحه، مقداری ثابت باشد.

نقطه ثابت را مرکز و مقدار ثابت فاصله را شعاع دایره می‌نامند.

معادله دایره : فرض کنیم نقطه ثابت $C(h,k)$ مرکز دایره و فاصله ثابت r شعاع دایره باشد. همچنین فرض کنیم $M(x,y)$ یکی از نقاط دایره باشد. در این صورت

$$CM = r$$

یا

$$\sqrt{(x-h)^{۲}+(y-k)^{۲}} = r$$

بنابراین

(۱) $$(x-h)^{۲}+(y-k)^{۲} = r^{۲}$$

(۱) معادله دایره با ویژگی‌های داده شده می‌باشد.

نامعادله

(۲) $$(x-h)^{۲}+(y-k)^{۲} < r^{۲}$$

نقاطی از صفحه را مشخص می‌کند که فاصله آن‌ها تا نقطه $C(h,k)$ کوچکتر از r است. بنابراین (۲) قسمت درونی دایره به مرکز $C(h,k)$ و شعاع r را توصیف می‌کند. به عبارت دیگر، مختصات مجموعه نقاط درون دایره در رابطه (۲) صدق می‌کنند.

مثال : معادله دایره‌ای را بنویسید که از نقطه $O(۰,۰)$ گذشته و $C(۲,-۱)$ مرکز آن باشد.

حل : با محاسبه CO شعاع دایره را حساب می‌کنیم.

$$CO = \sqrt{(۲)^{۲}+(-۱)^{۲}} = \sqrt{۵}$$

بنابراین معادله دایره عبارت است از :

$$(x-۲)^{۲}+[y-(-۱)]^{۲} = (\sqrt{۵})^{۲}$$

یا

$$(x-۲)^۲+(y+۱)^۲=۵$$

نکته : معادله (۱) را به صورت زیر می‌نویسیم :

$$x^۲+y^۲-۲hx-۲ky+h^۲+k^۲-r^۲=۰$$

هرگاه قرار دهیم $-۲h=D$، $-۲k=E$ و $h^۲+k^۲-r^۲=F$، معادله دایره را به‌صورت

$$x^۲+y^۲+Dx+Ey+F=۰ \qquad (۳)$$

نیز می‌توانیم بیان کنیم. هرگاه معادله دایره به صورت (۳) عرضه شده باشد، مرکز آن نقطهٔ $C(\frac{-D}{۲}, \frac{-E}{۲})$ و شعاع آن از دستور $r=\frac{۱}{۲}\sqrt{D^۲+E^۲-۴F}$ به‌دست می‌آید.

مثال : مقدار F را طوری تعیین کنید که معادله $x^۲+y^۲-۲x-۶y+F=۰$ دایره‌ای به شعاع ۲ را مشخص کند.

داریم $r=۲$. پس

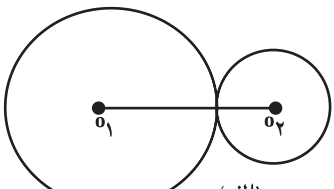
$$۲=\frac{۱}{۲}\sqrt{۴+۳۶-۴F}$$

$$۴۰-۴F=۱۶$$

$$F=۶$$

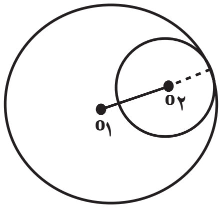
وضع دو دایره نسبت به‌هم : می‌دانیم هر دایره با مرکز و شعاع آن مشخص می‌شود. فرض کنیم $(C_۱)$ دایره‌ای به مرکز $O_۱$ و شعاع $r_۱$، و $(C_۲)$ دایره‌ای به مرکز $O_۲$ و شعاع $r_۲$ باشد.

هرگاه $O_۱O_۲=r_۲+r_۱$، یعنی فاصله مراکز دو دایره برابر حاصل‌جمع شعاع‌های آن‌ها باشند، این دو دایره **مماس خارج** هستند (شکل الف).



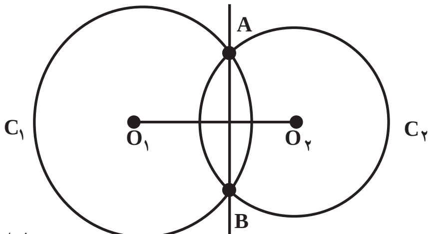
(الف)

هرگاه $r_۲>r_۱$ و $O_۱O_۲=r_۲-r_۱$، یعنی فاصله مراکز دو دایره برابر تفاضل شعاع‌های آن‌ها باشند، این دو دایره بر هم **مماس داخل** هستند (شکل ب).



(ب)

هرگاه $|r_۱-r_۲|<O_۱O_۲<r_۱+r_۲$ دو دایره **متقاطع**‌اند. دو دایره متقاطع یکدیگر را در دو نقطه قطع می‌کنند. خط گذرنده



(ج)
$|r_1 - r_2| < o_1o_2 < r_1 + r_2$

بر این دو نقطه را **وتر مشترک** دو دایره می‌نامیم (شکل ج).

هرگاه $O_1O_2 > r_1 + r_2$ دو دایره را متخارج و درحالتی $O_1O_2 < |r_1 - r_2|$ دو دایره را متداخل می‌گویند.

سؤال : اکنون این سؤال پیش می‌آید که با معلوم بودن مشخصات جبری دو دایره (مختصات مرکز و شعاع، یا معادله دایره) چگونه می‌توانیم معادله وتر مشترک را به‌دست آوریم.

فرض کنیم $x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + d_1 = 0$ معادله دایره (C_1) و $x^2 + y^2 + a_2x + b_2y + d_2 = 0$ معادله دایره (C_2) باشد. همچنین فرض کنیم این دو دایره متقاطع باشند. چون نقاط A و B (شکل ج) روی هر دو دایره هستند، مختصات این نقاط در معادله هر دو دایره صدق می‌کند. درنتیجه مختصات نقاط A و B در دستگاه معادلات

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + d_1 = 0 \\ x^2 + y^2 + a_2x + b_2y + d_2 = 0 \end{cases}$$

صدق می‌کنند. پس مختصات A وB در معادلهٔ

$$(x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + d_1) - (x^2 + y^2 + a_2x + b_2y + d_2) = 0$$

نیز صدق می‌کند. بنابراین مختصات این نقاط در معادله

$$(a_1 - a_2)\,x + (b_1 - b_2)\,y + d_1 - d_2 = 0$$

صدق می‌کند. امّا این معادله نسبت به x و y از درجه اول است، و معادله یک خط مستقیم است. پس این معادله، معادله وتر مشترک دو دایره است. چون از نقاط A وB فقط یک خط مستقیم می‌گذرد، که وتر مشترک می‌باشد،

معادله

$$\boxed{(a_1 - a_2)x + (b_1 - b_2)y + d_1 - d_2 = 0}$$

(*)

معادله وتر مشترک دو دایره به معادله‌های زیر می‌باشد.

$$x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + d_1 = 0$$
$$x^2 + y^2 + a_2x + b_2y + d_2 = 0$$

مثال : معادلهٔ وتر مشترک دو دایره به معادله‌های صفحهٔ بعد را به‌دست آورید.

$$x^2 + y^2 + 6x + 8y = 0 \quad \text{و} \quad x^2 + y^2 - 4x - 6y - 14 = 0$$

حل : مطابق دستور (*) داریم

$$(6 - (-4))\,x + (8 - (-6))\,y + 0 - (-14) = 0$$

که پس از ساده کردن می‌توانیم آن را به‌صورت زیر بنویسیم

$$5x + 7y + 7 = 0$$

این معادله وتر مشترک دو دایره مفروض می‌باشد.

مسائل

۱ــ مرکز و شعاع دایره‌های زیر را پیدا کنید. سپس دایره را در صفحه مختصات رسم کنید.

(الف) $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 1 = 0$ (ب) $3x^2 + 3y^2 + 6x - 1 = 0$

(ج) $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 1 = 0$ (د) $7x^2 + 7y^2 + 143y = 0$

۲ــ چه نقاطی در نابرابری‌های زیر صدق می‌کنند؟

(الف) $x^2 + 4x + y^2 - 12 \leq 0$ (ب) $2x^2 + 2y^2 + x + y > 0$

۳ــ معادله دایره‌ای را بنویسید که از نقاط $(1,0)$ و $(6,0)$ گذشته و برخط $y = 1$ مماس باشد.

۴ــ اگر فاصله نقطه $M(x,y)$ تا نقطه $A(6,0)$ دو برابر فاصله‌اش تا نقطه $B(0,3)$ باشد، نشان دهید که مکان M یک دایره خواهد بود. مرکز و شعاع این دایره را تعیین کنید.

۵ــ معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکزش $C(1,2)$ و بر خط به معادله $3x + 4y + 1 = 0$ مماس باشد.

۶ــ معادله دایره‌ای را بنویسید که از نقاط $(0,0)$ و $(17,7)$ گذشته و مرکزش بر خط $6x - 5y = 0$ واقع باشد.

۷ــ معادله دایره‌ای را بنویسید که از نقاط $(7,1)$ و $(0,0)$ و $(-1,6)$ بگذرد. مرکز و شعاع این دایره را بیابید.

۸ــ معادله وتر مشترک دو دایره به معادله زیر را به‌دست آورید :

$$x^2 + y^2 + 8x + 2y - 82 = 0 \quad \text{و} \quad x^2 + y^2 + 4x + 6y + 10 = 0$$

۹ــ ابتدا معادله وتر مشترک دو دایره به معادله‌های زیر را به‌دست آورید.

$$x^2 + y^2 + 4x + 2y - 10 = 0 \quad \text{و} \quad x^2 + y^2 + 2x + 2y - 24 = 0$$

سپس با استفاده از معادله وتر مشترک مختصات نقاط تقاطع دو دایره را به‌دست آورید.

۱۰ــ برای هر دسته از معادله دایره‌های زیر مشخص کنید که آیا این دایره‌ها بر هم مماس داخل، مماس خارج، یا متقاطع‌اند؟

(الف) $x^۲ + y^۲ + ۲x - ۴y = ۰$ و $x^۲ + y^۲ - ۲x + ۴y = ۴۰$

(ب) $x^۲ + y^۲ + ۲x - ۴y = ۰$ و $x^۲ + y^۲ - ۲x + ۴y = ۰$

(ج) $x^۲ + y^۲ + ۲x - ۴y = ۹$ و $x^۲ + y^۲ - ۲x + ۴y = ۴$

(د) $x^۲ + (y - ۵)^۲ = ۵$ و $(x - ۲)^۲ + (y + ۳)^۲ = ۷$

۱۱ــ معادله دو دایره را بنویسید که برای آن‌ها یکی از حالت‌های زیر برقرار باشد.

(الف) $O_۱O_۲ = ۰$ (دو دایره هم‌مرکز)

(ب) $O_۱O_۲ > r_۱ + r_۲$ (دو دایره متخارج)

سهمی

در طبیعت تعداد زیادی از توابع خطی و درجه دوم مشاهده می‌شود. شیئی که به‌طور مستقیم به‌سوی بالا پرتاب می‌شود چنانچه دارای سرعت اوّلیه‌ای برابر ۱۲۸ متر بر ثانیه باشد، فاصله آن پس از t ثانیه از مدل $d = -۱۶t^۲ + ۱۲۸t$ (یا آنکه چنانچه ثانیه را به x و مسافت را به y نشان دهیم $y = -۱۶x^۲ + ۱۲۸x$ خواهد بود) به‌دست می‌آید. همچنین فرمول $C = ۲۰t^۲ - ۲۰۰t + ۶۴۰$ نشان‌دهنده تعداد باکتری‌های یک جمعیّت در یک سانتیمتر مکعب آب پس از t روز از کنترل رشد باکتری‌ها می‌باشد. ما با معادله درجه دوم به اختصار در فصل دوم آشنا شدیم. نمودار هر معادله به‌صورت $y = ax^۲ + bx + c$ را **سهمی** می‌نامیم. ابتدا با پیدا کردن نقاطی خاصّ از نمودار چنین توابعی سعی می‌کنیم طریقه رسم نمودار آن‌ها را به روشی سریعتر توضیح دهیم.

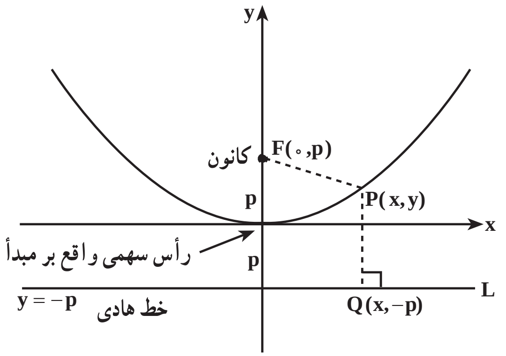
> مجموعهٔ تمام نقاطی از صفحه که فاصلهٔ آن‌ها از یک نقطهٔ ثابت داده شده و یک خط ثابت داده شده یکسان می‌باشد، سهمی نامیده می‌شود. نقطهٔ ثابت، **کانون سهمی** و خط ثابت، **خط هادی سهمی** نامیده می‌شود.

در شکل صفحهٔبعد سهمی به کانون $F(۰ , p)$ و خط هادی L به معادله $y = -p$ رسم شده است. طبق تعریف، نقطهٔ $P(x,y)$ واقع بر سهمی است اگر و فقط اگر $PF = PQ$. با محاسبه پاره‌خط‌های

$$PF = \sqrt{(x - ۰)^۲ + (y - p)^۲} = \sqrt{x^۲ + (y - p)^۲}$$

و

$$PQ = \sqrt{(x-x)^۲ + (y-(-p))^۲} = \sqrt{(y+p)^۲}$$



سهمی به معادلهٔ $x^۲ = ۴py$

و با توجه به تساوی $PF = PQ$ داریم :

$$\sqrt{(y+p)^۲} = \sqrt{x^۲ + (y-p)^۲}$$

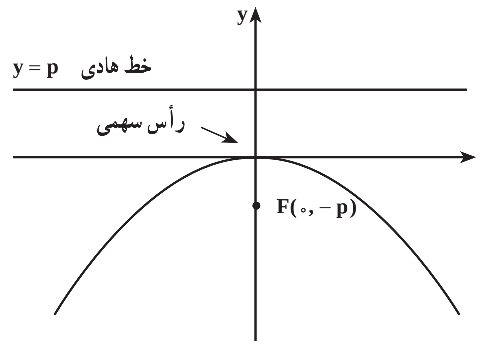
طرفین رابطه بالا را به توان **۲** می‌رسانیم و پس از ساده کردن داریم :

معادلهٔ (۱) $\qquad x^۲ = ۴py$ و یا $y = \frac{x^۲}{۴p}$

این معادله‌ها نشان می‌دهند که سهمی نسبت به محور y تقارن دارد. محور y **محور سهمی** یا **محور تقارن** سهمی نامیده می‌شود.

نقطه تلاقی سهمی و محور تقارن را **رأس سهمی** می‌نامیم. عدد مثبت P را **فاصلهٔ کانونی سهمی** می‌نامند.

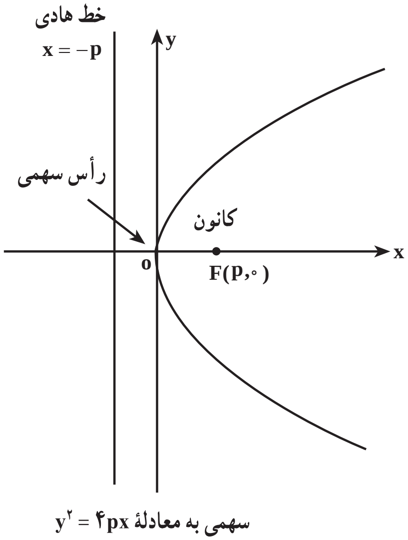
رأس سهمی $x^۲ = ۴py$ (در شکل فوق) بر مبدأ مختصات واقع است. در حالتی که رأس سهمی بر مبدأ مختصات واقع باشد، سهمی ساده‌ترین معادلهٔ خود را دارد. اگر سهمی رو به پایین باز شود و کانون $(۰ , -p)$ و خط هادی به معادلهٔ $y = p$ باشد، معادلهٔ ۱ به شکل زیر خواهد بود :

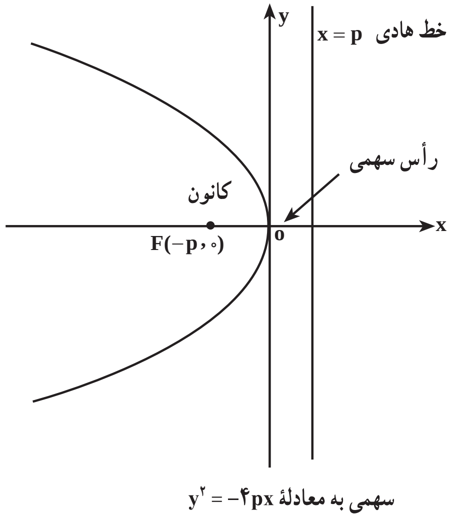


سهمی به معادلهٔ $x^۲ = -۴py$

معادله (۲) $x^{۲} = -۴py$ یا $y = -\frac{x^{۲}}{۴p}$

می‌توان معادله‌های مشابهی برای سهمی‌هایی که رو به راست، یا رو به چپ باز می‌شوند، به‌دست آورد.





فرم‌های استاندارد معادلهٔ سهمی با رأس واقع در مبدأ ($p > ۰$)

دهانهٔ سهمی	محور سهمی	خط هادی	کانون	معادله
رو به بالا	محور y	$y = -p$	$(۰, p)$	$x^{۲} = ۴py$
رو به پایین	محور y	$y = p$	$(۰, -p)$	$x^{۲} = -۴py$
رو به راست	محور x	$x = -p$	$(p, ۰)$	$y^{۲} = ۴px$
رو به چپ	محور x	$x = p$	$(-p, ۰)$	$y^{۲} = -۴px$

مثال : کانون و خط هادی سهمی به معادلهٔ $y^{۲} = ۱۰x$ را پیدا کنید.

حل : ابتدا مقدار p را از معادلهٔ استاندارد $y^{۲} = ۴px$ پیدا می‌کنیم.

$$۴p = ۱۰ \Rightarrow p = \frac{۱۰}{۴} = \frac{۵}{۲}$$

در نتیجه کانون و خط هادی به صورت زیر به دست می‌آید :

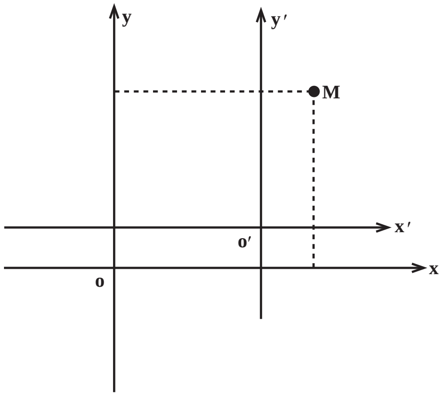
کانون : $(p,0) = (\frac{5}{2},0)$

خط هادی : $x = -p$ یا $x = \frac{-5}{2}$

انتقال محورها

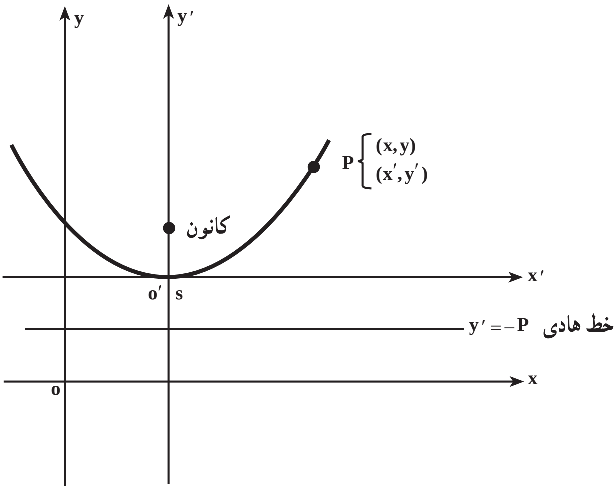
در دستگاه مختصات xoy نقطه $M(x,y)$ را در نظر می‌گیریم، اگر محورهای مختصات را به موازات خود انتقال داده تا مبدأ جدید $O'(h,k)$ باشد در این صورت مختصات M در دستگاه مختصات جدید می‌شود :

$$X' = x - h \quad ، \quad Y' = y - k$$



حال فرض کنیم یک سهمی با رأس $S(h,k)$ داده شده باشد که رو به بالا باز شود (نظیر شکل زیر)، معادله سهمی در مختصات $x'o'y'$ می‌شود :

$$X'^2 = 4pY'$$



بنابراین معادله اخیر در دستگاه مختصات xoy به صورت زیر در می‌آید :

$$(x-h)^۲ = ۴p\,(y-k)$$

محور تقارن سهمی خط $x = h$ است و کانون سهمی $F(h,k+p)$ و خط هادی آن $y = k - p$.

صورت‌های دیگر معادلات سهمی (معادلات متعارف سهمی‌ها)

خط هادی		کانون		معادله سهمی
$y = k + p$	و	$F(h,k-p)$	،	۱) $(x-h)^۲ = -۴p\,(y-k)$
$x = h - p$	و	$F(h+p\,,k)$	،	۲) $(y-k)^۲ = ۴p\,(x-h)$
$x = h + p$	و	$F(h-p\,,k)$	،	۳) $(y-k)^۲ = -۴p\,(x-h)$

مثال : معادله سهمی به رأس $S(۱,۳)$ و کانون $F(۵,۳)$ را بیابید. معادله خط هادی آن را به‌دست آورید.

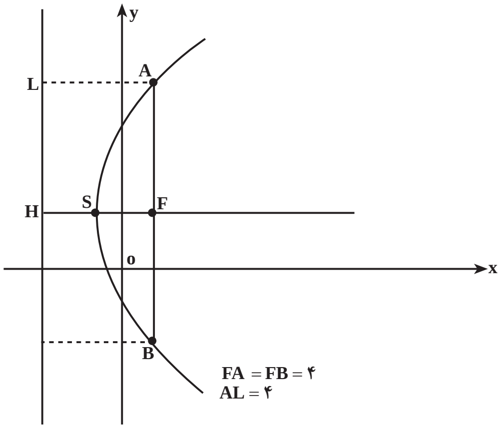
چون سهمی رو به راست باز می‌شود، (چرا؟) معادله آن می‌شود :

$$(y-۳)^۲ = ۴p\,(x-۱)$$

عدد p فاصله بین F و S است بنابراین $p = ۴$ و معادله سهمی به‌صورت $(y-۳)^۲ = ۱۶(x-۱)$درمی‌آید و خط هادی آن به صورت $x = -۳$ است.

مثال : برای سهمی با رأس $S(۲,۳)$ و خط هادی $y = ۴$، معادله‌ای بیابید. مختصات کانون آن چه هستند؟

حل : سهمی رو به پایین باز می‌شود و معادله آن به صورت $(x-۲)^۲ = -۴p(y-۳)$ می‌باشد. پس $p = ۴ - ۳ = ۱$ و معادله مطلوب چنین است $(x-۲)^۲ = -۴(y-۳)$ و کانون به فاصله $p = ۱$ واحد در پایین رأس $(۲,۳)$، در نقطه $F(۲,۲)$ قرار دارد.



تبدیل معادله سهمی به صورت متعارف

متعارف : ویژگی معادله سهمی واقع در صفحه xoy، این است که نسبت به یکی از مختص‌ها، درجه اوّل و نسبت به دیگری از درجه دوم است. هرگاه چنین معادله‌ای در دست باشد، می‌توان طی مراحلی مانند مثال صفحهٔ بعد آن

را به یکی از چهار صورت متعارف تبدیل نمود.

مثال : سهمی به معادله $y^۲ - ۴y - ۸x - ۴ = ۰$ داده شده کانون و معادله خط هادی سهمی را مشخص نمایید.

$$y^۲ - ۴y = ۸x + ۴ \Rightarrow (y - ۲)^۲ = ۸(x + ۱)$$

$$۴p = ۸ \Rightarrow p = ۲$$

بنابراین $S(-۱,۲)$ رأس سهمی و معادله خط هادی $x = -۳$ می‌باشد.

رسم سهمی : برای رسم سهمی ابتدا معادلهٔ آن را به‌صورت استاندارد نوشته و کانون، رأس و خط هادی آن را به‌دست می‌آوریم. و برحسب نوع سهمی (قائم یا افقی) محور کانونی، کانون و رأس سهمی و خط هادی را رسم می‌کنیم سپس در طرفین محور کانونی و از نقطهٔ کانون F به اندازهٔ ۲p واحد به سمت چپ و راست (بالا و پایین) جدا کرده A و B می‌نامیم در صورت امکان محل تلاقی نمودار با محورهای مختصات را هم به‌دست آورده و نقاط به‌دست آمده را با توجه به نوع سهمی به هم وصل کرده و شکل را کامل می‌کنیم.

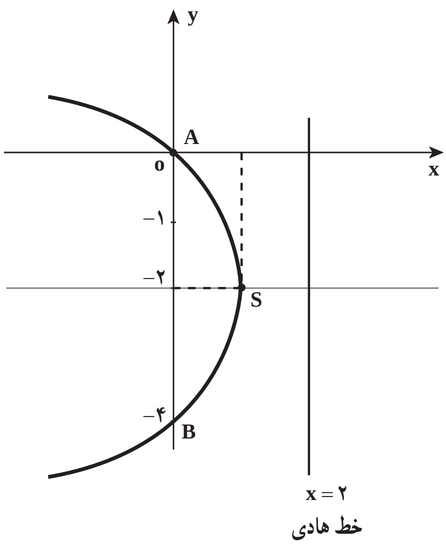
مثال : نمودار سهمی $y^۲ + ۴y + ۴x = ۰$ را رسم کنید.

حل : ابتدا معادلهٔ سهمی را به‌صورت استاندارد می‌نویسیم

$$(y + ۲)^۲ = -۴x + ۴ \Rightarrow (y + ۲)^۲ = -۴ (x - ۱)$$

رأس سهمی نقطهٔ $S(۱,-۲)$ و $p = ۱$ و نوع سهمی افقی و دهانهٔ آن به سمت چپ باز می‌شود.

کانون سهمی $F\left|\begin{matrix}۰\\-۲\end{matrix}\right.$ و خط هادی $x = ۲$ است (در این‌جا نقاط A و B همان نقاط محل تلاقی محور yها و نمودار است).



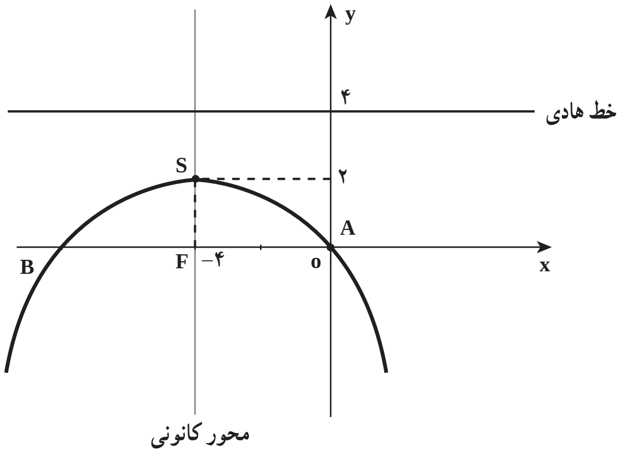
مثال : نمودار سهمی $x^۲ + ۸x + ۸y = ۰$ را رسم کنید.

حل :

$$x^۲ + ۸x + ۱۶ = -۸y + ۱۶$$

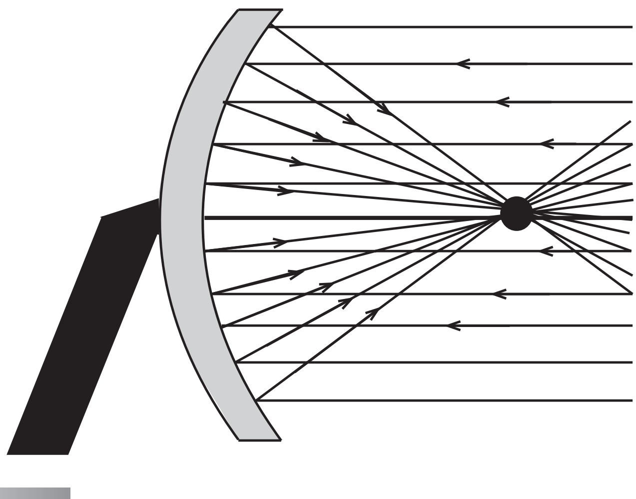
$$(x + ۴)^۲ = -۸\,(y - ۲)$$

رأس سهمی $S(-۴,۲)$ و $p = ۲$ همچنین کانون $F(-۴,۰)$ و خط هادی $y = ۴$ می‌باشند.



آنتن‌های سهموی

آنتن‌های سهموی امواج رادیویی یا تلویزیونی ورودی را در کانون خود منعکس می‌کنند. با نصب دریافت‌کننده (گیرنده) در کانون امواج دریافت می‌شوند.

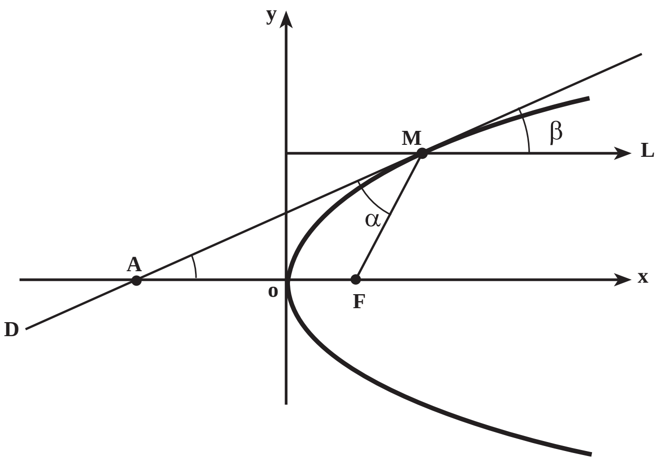


انرژی و قدرت سهموی

نقطه نشان داده شده کانون سهمی است. اشعه‌های نور که موازی محور سهمی به جسم سهموی می‌تابد پس از انعکاس در کانون سهمی متمرکز می‌شوند. از این ایده برای استفاده از انرژی خورشیدی استفاده می‌شود.

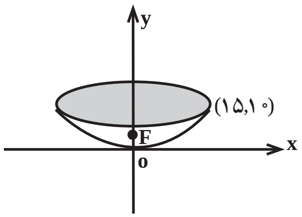
ویژگی بازتابندگی سهمی‌ها

سهمی‌ها ویژگی جالبی دارند که در ساختن انواع آینه‌های سهموی، تلسکوپ‌ها، چراغ‌های جلوی اتومبیل، آنتن‌های سهموی رادار و میکروویو و در گیرنده‌های «بشقابی» تلویزیون استفاده می‌شود و کاربرد عمدهٔ سهمی بازتاباندن نور و امواج رادیویی است. پرتوهایی که از کانون سهمی به سهمی برخورد کنند، موازی با محور از سهمی خارج می‌شوند و پرتوهایی که موازی با محور به سهمی می‌تابند در کانون سهمی جمع می‌شوند. در شکل زیر سهمی به معادله $y^۲ = ۴px$ را در نظر گرفته و خط D در نقطه $M(x_۰ , y_۰)$ بر سهمی مماس شده است ثابت می‌شود که α و β برابرند، پس هر پرتویی که از F به نقطه‌ای از سهمی مانند M بتابد در امتداد ML خارج می‌شود و به همین ترتیب، هر پرتویی که در امتداد ML به سهمی بتابد، به طرف F باز می‌تابد.



مثال : عمق یک آینه سهموی در مرکز آن ۱۰ سانتیمتر و قطر قاعده آن (در بالای آینه) ۳۰ سانتیمتر است فاصله رأس تا کانون را حساب کنید.

حل : محورهای مختصات را طوری انتخاب می‌کنیم که رأس سهمی در مبدأ و محور تقارن سهمی در امتداد محور yها، و دهانه سهمی به طرف بالا باشد. بنابراین معادله سهمی می‌شود $x^۲ = ۴py$ و از طرفی نقطه (۱۵,۱۰) متعلق به سهمی است بنابراین $۲۲۵ = ۴p \times ۱۰$ و $p = \frac{۴۵}{۸}$ بنابراین فاصله رأس تا کانون سهمی $۵\frac{۵}{۸}$ سانتیمتر است.



مسائل

۱ــ مختصات کانون و رأس و خط هادی هریک از سهمی‌های زیر را به‌دست آورده و نمودار آن‌ها را رسم کنید.

الف) $y^۲ - ۲y + x - ۱ = ۰$

ب) $۸y = ۴ + ۴x - x^۲$

پ) $y^۲ - ۸x - ۸ = ۰$

ت) $۳y^۲ + ۶x - ۴y = ۰$

۲ــ معادله یک سهمی را بنویسید که $x = ۴$ خط هادی و $y = ۴$ محور تقارن آن واز نقطه $A(۹,۷)$ بگذرد.

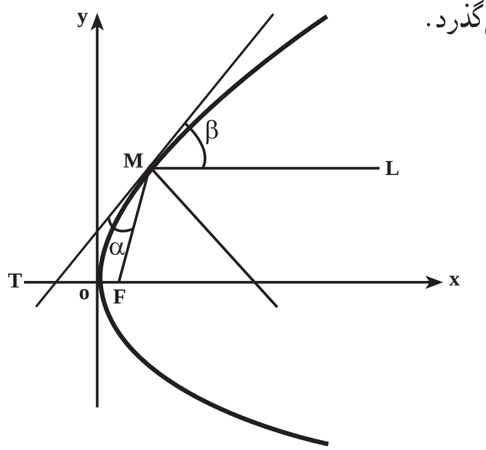
۳ــ معادله سهمی را بنویسید که کانون آن $F(۳,۵)$ و معادلهٔ خط هادی آن $x = -۳$ باشد.

۴ــ معادلهٔ سهمی قائم مماس بر محور xها که دارای کانون $F(۳,۱)$ باشد را بنویسید. سپس نمودار آن را رسم کنید.

۵ــ چه نواحی‌ای از صفحه در نابرابری‌های $y^۲ < x$ و $y^۲ > x$ صدق می‌کنند؟ «با رسم شکل».

۶ــ ثابت کنید معادله خط مماس بر سهمی به معادله $y^۲ = ۴px$ در نقطه $M(x_۰ , y_۰)$ واقع بر آن به صورت $yy_۰ = ۲p(x + x_۰)$ می‌باشد.

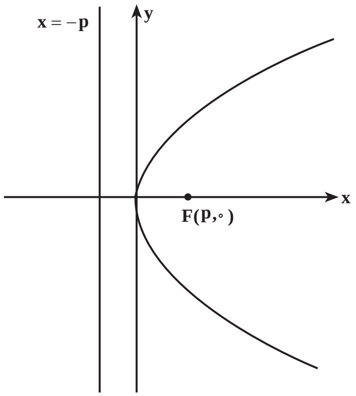
۷ــ از نقطه $M(x_۰ , y_۰)$ روی سهمی به معادله $y^۲ = ۴px$ مماس و قائم بر سهمی را رسم کرده‌ایم (شکل زیر). ثابت کنید $\alpha = \beta$. از اینجا نتیجه بگیرید که هر پرتوی که موازی محور سهمی بر سهمی بتابد از کانون سهمی می‌گذرد.



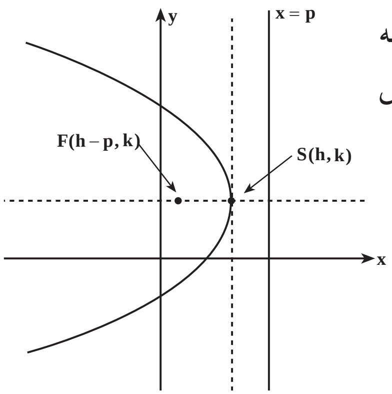
[**راهنمایی** : از مسأله ۶ و این ویژگی سهمی که فاصله هر نقطه آن تا کانون برابر فاصله آن از خط هادی است استفاده کنید.]

۸ــ یک تلسکوپ انعکاسی دارای آینه‌ای سهموی است که فاصله رأس آن تا کانونش ۷۵ سانتیمتر می‌باشد. اگر قطر قاعدهٔ آینه ۱۶۰ سانتیمتر باشد، عمق آینه در مرکز آن چقدر است؟

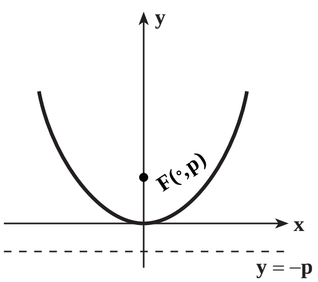
۹ــ ثابت کنید دایره‌ای که قطرش وتری از سهمی است که از کانون بر محور تقارن آن عمود است، مماس بر خط هادی این سهمی است.



۱۰ــ با توجه به شکل مقابل نشان دهید $y^۲ = ۴px$ معادلهٔ سهمی است که رأس آن واقع بر مبدأ مختصات است و دهانهٔ آن رو به راست باز می‌شود.



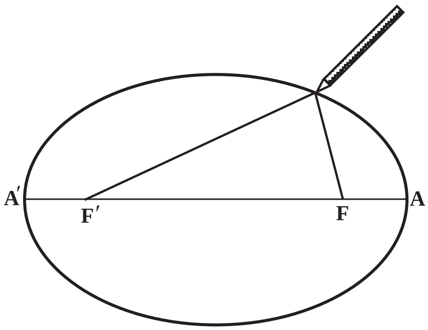
۱۱ــ با توجه به شکل مقابل نشان دهید که $(y - k)^۲ = -۴p(x - h)$ معادلهٔ سهمی است به رأس $S(h , k)$ و دهانهٔ آن رو به چپ باز می‌شود.



۱۲ــ به شکل مقابل توجه کنید. کانون F را به خط هادی L نزدیک و نزدیکتر می‌کنیم. در حالتی که F بر خط L منطبق شود، شکل سهمی چگونه تغییر می‌یابد؟

بیضی

تعریف : بیضی مکان هندسی نقاطی از صفحه است که مجموع فواصل آن نقطه از دو نقطه ثابت واقع در صفحه مقدار ثابتی باشد. دو نقطه ثابت را کانون‌های بیضی می‌نامند.



رسم بیضی : اگر نقاط F و F' کانون‌های بیضی اختیار شوند، دو سر نخی را به دو سنجاق می‌بندیم و دو سنجاق را در نقاط F و F' نصب می‌کنیم (شکل‌مقابل) نوک مدادی را به نخی متکی کرده و آن را طوری حرکت می‌دهیم که نخ همواره کشیده باشد، از حرکت نوک مداد بر روی کاغذ، بیضی رسم می‌شود، زیرا نوک مداد در هر وضعی مانند M باشد، همواره $MF+MF'$ برابر طول نخ یعنی مساوی مقدار ثابتی است. واضح است که باید طول نخ، از فاصلهٔ دو کانون بیضی بیشتر باشد.

معادله بیضی : اگر کانون‌های بیضی نقاط $F(c,0)$ و $F'(-c,0)$ باشند و مجموع فواصل نقطه M متعلق به بیضی از دو کانون با $2a$ نمایش داده شود؛ داریم :

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

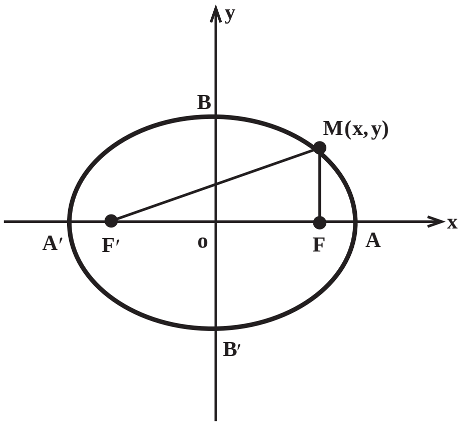
پس از دو بار به توان دو رسانیدن و خلاصه کردن نتیجه می‌گیریم :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1$$

چون در مثلث MFF' ، $MF+MF'=2a$ از $FF'=2c$ بزرگتر است عبارت a^2-c^2 مثبت است و قرار می‌دهیم $b=\sqrt{a^2-c^2}$ ، بنابراین :

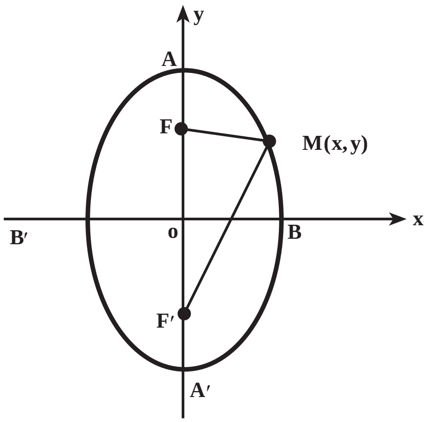
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (1)$$

معادله (۱) نشان می‌دهد که این منحنی نسبت به هر دو محور مختصات متقارن است و داخل مستطیلی محصور به خطوط $x=a$ و $x=-a$ و $y=b$ و $y=-b$ قرار دارد.



نقاط تقاطع بیضی با محور xها $(\pm a, ۰)$ و با محور yها $(۰, \pm b)$ است $AA' = ۲a$ قطر بزرگ بیضی و $BB' = ۲b$ قطر کوچک بیضی است.

نکته : اگر در معادله بیضی افقی یعنی $\frac{x^۲}{a^۲} + \frac{y^۲}{b^۲} = ۱$ جای x و y را با هم عوض کنیم، معادله یک بیضی به دست می‌آید که مرکزش همان مبدأ مختصات و قطر بزرگش (AA') بر محور عرض‌ها منطبق خواهد بود (بیضی قائم).



با توجه به $b = \sqrt{a^۲ - c^۲}$ همواره رابطه $a^۲ = b^۲ + c^۲$ برقرار است نظیر سهمی اگر مرکز بیضی نقطه (h,k) و اقطارش با محورهای مختصات موازی باشند با استفاده از انتقال محورهای مختصات معادلات متعارف بیضی به صورت زیرند.

۱ــ بیضی افقی

$$\frac{(x-h)^۲}{a^۲} + \frac{(y-k)^۲}{b^۲} = ۱$$

کانون‌ها $(h \pm c , k)$، رأس‌های A و A′ $(h \pm a, k)$

۲ــ بیضی قائم

$$\frac{(x-h)^{۲}}{b^{۲}}+\frac{(y-k)^{۲}}{a^{۲}}=۱$$

کانون‌ها $(h\,,k\pm c)$، رأس‌های A و A' $(h,k\pm a)$

مثال : معادله یک بیضی به صورت زیر نوشته شده است. مرکز، رأس‌های A و ´A و کانون‌های بیضی را بیابید و سپس نمودار بیضی را رسم کنید.

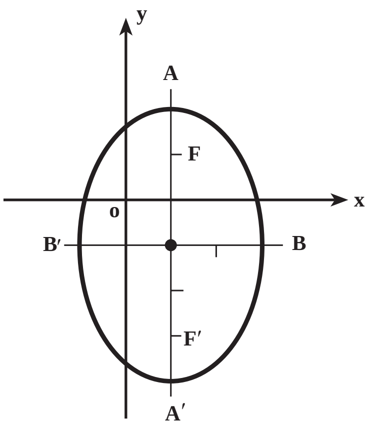
حل :

$$۹x^{۲}+۴y^{۲}-۱۸x+۸y-۲۳=\circ$$

$$۹(x^{۲}-۲x+۱)+۴(y^{۲}+۲y+۱)=+۹+۴+۲۳$$

$$\frac{(x-۱)^{۲}}{۴}+\frac{(y+۱)^{۲}}{۹}=۱$$

مرکز بیضی نقطه $(۱,-۱)$ و $a^{۲}=۹$ و $b^{۲}=۴$ بنابراین بیضی قائم است و رأس‌ها $A(۱,۲)$ و $A'(۱,-۴)$ و $c=\sqrt{a^{۲}-b^{۲}}$ در نتیجه $c=\sqrt{۵}$ و کانون‌ها، $(۱,-۱\pm\sqrt{۵})$. نمودار این بیضی در شکل زیر رسم شده است :



خروج از مرکز بیضی : با توجه به معادله بیضی نسبت $(a>b>\circ)\,e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^{۲}-b^{۲}}}{a}$ را خروج از مرکز بیضی می‌نامند، این عدد بین صفر و یک تغییر می‌کند و میزان اختلاف شکل بیضی با دایره را نشان می‌دهد، حال اگر a را ثابت نگه داریم و c را در بازهٔ $(\circ\,,a)$ تغییر دهیم، شکل بیضی‌های حاصل تغییر خواهد کرد. وقتی c به صفر نزدیک می‌شود بیضی بیشتر شبیه دایره است و وقتی به مقدار

c افزوده شود، بیضی کشیده‌تر می‌شود.

سیارات منظومهٔ شمسی در مدارهایی بیضوی که خورشید در یکی از کانون‌های آن‌ها واقع است، حول خورشید می‌گردند. خروج از مرکز بیشتر سیارات منظومه شمسی به قدری کوچک است که مدار آن‌ها را می‌توان به طور تقریبی دایره تصور کرد. برای نمونه خروج از مرکز زمین برابر ۰/۰۲ است.

مثال: خروج از مرکز یک بیضی $\frac{۴}{۵}$ و مرکزش $(-۴ , -۱)$ و طول نقطه A رأس کانونی آن برابر یک است و قطر بزرگ بیضی موازی محور xها است، معادله بیضی را به‌دست آورید.

$$\frac{(x+۴)^۲}{a^۲}+\frac{(y+۱)^۲}{b^۲}=۱$$

$$A\,(h+a\,,k)\Rightarrow h+a=۱\Rightarrow a=۵$$

$$\frac{c}{a}=\frac{۴}{۵}\Rightarrow \boxed{c=۴}\,c^۲=a^۲-b^۲\Rightarrow b^۲=۹$$

معادله بیضی
$$\boxed{\frac{(x+۴)^۲}{۲۵}+\frac{(y+۱)^۲}{۹}=۱}$$

معادلات مماس و قائم بر بیضی

$$\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}=۱\Rightarrow b^۲x^۲+a^۲y^۲-a^۲b^۲=۰$$

شیب مماس:
$$\cancel{۲}b^۲x+\cancel{۲}a^۲y'y=۰\Rightarrow y'=\frac{-b^۲x}{a^۲y}\Rightarrow m=\frac{-b^۲x_۰}{a^۲y_۰}$$

$$y-y_۰=\frac{-b^۲x_۰}{a^۲y_۰}(x-x_۰) \qquad (۱)$$

با توجه به تساوی $b^۲x_۰^۲+a^۲y_۰^۲=a^۲b^۲$ از (۱) به معادله زیر می‌رسیم.

معادله مماس در بیضی
$$\boxed{\frac{x_۰x}{a^۲}+\frac{y_۰y}{b^۲}=۱}$$

و معادله قائم بر بیضی می‌شود
$$\boxed{\frac{a^۲x}{x_۰}-\frac{b^۲y}{y_۰}=c^۲}$$

مسائل

۱ــ معادله یک بیضی را بنویسید که نقاط $F(۲ , -۲)$ و $F'(-۴ , -۲)$ کانون‌های آن و خروج از مرکز آن $e=\frac{۳}{۵}$ باشد.

۲ــ بیضی به معادله $۴x^۲ + y^۲ + ۸x - ۲y + ۱ = ۰$ مفروض است. مختصات مرکز، طول اقطار، فاصله کانونی و مختصات دو کانون این بیضی را حساب کنید.

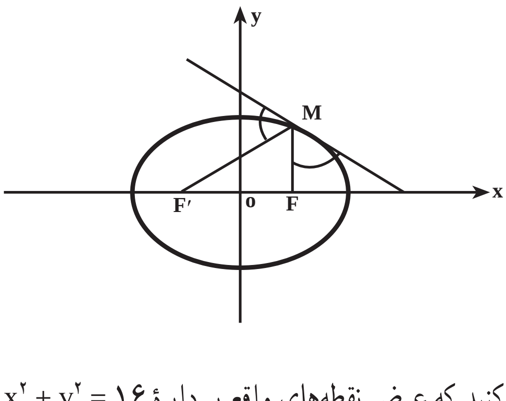
۳ــ نقطه $M\left|\begin{array}{l} x = ۱ + ۳\sin t \\ y = ۲\cos t \end{array}\right.$ مفروض است اوّلاً: ثابت کنید مکان هندسی نقطه M وقتی t تغییر کند، بیضی‌است. ثانیاً: نقطه‌ای از بیضی را که به ازای $t=\frac{\pi}{۴}$ به دست می‌آید، N می‌نامیم معادلهٔ خط مماس بر بیضی را در نقطه N بنویسید.

۴ــ شکل ناحیه‌ای را رسم کنید که مختصات نقاطش در نابرابری زیر صدق می‌کند.

$$۴x^۲ + ۹y^۲ \leq ۳۶$$

۵ــ به ازای چه مقادیر ثابت a و b و c، بیضی $۴x^۲ + y^۲ + ax + by + c = ۰$ در مبدأ مختصات بر محور x مماس است و از نقطه $(-۱,۲)$ می‌گذرد؟

۶ــ **ویژگی بازتابندگی بیضی**: بیضی‌وار از دوران بیضی حول قطر بزرگش پدید می‌آید. آینه را با نقره اندود کردنِ درون رویهٔ بیضی‌وار می‌سازند. نشان دهید پرتویی از نور که از یکی از کانون‌ها ساطع شود به کانون دیگر باز می‌تابد. امواج صوتی هم این مسیر را طی می‌کنند و از این ویژگی بیضی‌وار برای ساختن برخی از تالارهای هنری استفاده می‌کنند. مطابق شکل مقابل نشان دهید که خطوط گذرنده از نقطه M واقع بر بیضی و دو کانون آن با خط مماس بر بیضی در M زوایای برابر تشکیل می‌دهند.



۷ــ معادله مکان هندسی نقاطی را تعیین کنید که عرض نقطه‌های واقع بر دایرهٔ $x^۲ + y^۲ = ۱۶$ را به نسبت $\frac{۳}{۴}$ تقسیم کنند.

هذلولی

تعریف : هذلولی مکان هندسی نقاطی از صفحه است که قدر مطلق تفاضل فواصل آن نقطه از دو نقطه ثابت عدد ثابتی باشد. دو نقطه ثابت F و F' کانون‌های هذلولی می‌نامند و قرار می‌دهیم $FF' = ۲c$ و مقدار ثابت را با $۲a$ نشان می‌دهیم و داریم $c > a$.

معادله هذلولی : اگر $M(x,y)$ بر هذلولی واقع باشد و کانون‌های هذلولی $F(c,۰)$ و $F'(-c,۰)$ و مقدار ثابت $۲a$ باشد. آنگاه نقطه $M(x,y)$ بر هذلولی واقع است اگر و فقط اگر

$$\left|\sqrt{(x+c)^۲+y^۲}-\sqrt{(x-c)^۲+y^۲}\right| = ۲a$$

$$\sqrt{(x+c)^۲+y^۲}-\sqrt{(x-c)^۲+y^۲} = \pm ۲a$$

یکی از رادیکال‌ها را به طرف راست معادله منتقل، دو طرف را مجذور، و نتیجه را ساده کرده، سپس یک رادیکال باقی‌مانده را در یک طرف نگه می‌داریم و نتیجه را باز هم مجذور می‌کنیم و به معادله زیر می‌رسیم :

$$\frac{x^۲}{a^۲}-\frac{y^۲}{c^۲-a^۲} = ۱$$

با فرض $c^۲ - a^۲ = b^۲$ معادله هذلولی به صورت $\boxed{\frac{x^۲}{a^۲}-\frac{y^۲}{b^۲} = ۱}$ می‌باشد.

هذلولی هم مانند بیضی نسبت به هر دو محور و نسبت به مبدأ متقارن است امّا با محور yها تقاطعی ندارد و هیچ قسمتی از نمودار هذلولی بین خطوط $x = a$ و $x = -a$ قرار نمی‌گیرد. در هذلولی یک نامساوی کلی شامل a و b وجود ندارد که متناظر با نامساوی $a > b$ در مورد بیضی باشد. یعنی در یک هذلولی ممکن است $a < b$ یا $a > b$ باشد. اگر در یک هذلولی $a = b$، آن هذلولی را متساوی الساقین گویند.

مجانب‌های هذلولی : نشان می‌دهیم هذلولی به معادلهٔ $\frac{x^۲}{a^۲}-\frac{y^۲}{b^۲} = ۱$ دارای مجانب‌هایی به‌صورت $y = \frac{\pm b}{a}x$ است.

معادلهٔ هذلولی را بر حسب x مرتب می‌کنیم :

$$y^۲ = \frac{b^۲}{a^۲}x^۲ - b^۲$$

در این صورت f(x) به یکی از صورت‌های زیر است :

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{x^۲-a^۲}\ ,\ y=-\frac{b}{a}\sqrt{x^۲-a^۲}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\frac{b}{a}x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{b}{a}\sqrt{x^۲-a^۲}-\frac{b}{a}x\right]$$

$$=\frac{b}{a}\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^۲-a^۲}-x)(\sqrt{x^۲-a^۲}+x)}{\sqrt{x^۲-a^۲}+x}=\frac{b}{a}\lim_{x\to+\infty}\frac{-a^۲}{\sqrt{x^۲-a^۲}+x}=۰$$

پس بنا به تعریف مجانب، خط $y=\frac{b}{a}x$ مجانب نمودار $y=\frac{b}{a}\sqrt{x^۲-a^۲}$ است. به طور مشابه، می‌توان نشان داد که خط $y=\frac{b}{a}x$ نیز مجانب نمودار $y=-\frac{b}{a}\sqrt{x^۲-a^۲}$ است در نتیجه خط $y=\frac{b}{a}x$ مجانب هذلولی $\frac{x^۲}{a^۲}-\frac{y^۲}{b^۲}=۱$ خواهد بود و با همین روش می‌توان ثابت کرد خط $y=\frac{-b}{a}x$ نیز مجانب همین هذلولی است. برای به یاد سپردن معادلات مجانب‌های هذلولی به صورت زیر عمل می‌کنیم :

مجانب‌ها

$$\frac{x^۲}{a^۲}-\frac{y^۲}{b^۲}=۱\Rightarrow(\frac{x}{a}-\frac{y}{b})(\frac{x}{a}+\frac{y}{b})=۰\Rightarrow\begin{cases}\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=۰\\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=۰\end{cases}$$

طریقه رسم هذلولی : ابتدا مستطیلی‌به رئوس (a,b) و (a,–b) و (–a,b) و (–a,–b) رسم می‌کنیم قطرهای مستطیل خطوط مجانب هذلولی‌اند و رئوس هذلولی نقاط تقاطع محور اصلی و مستطیل رسم شده‌اند و هر شاخه هذلولی از رأس مربوطه و مماس بر ضلع مستطیل رسم شده به طوری که امتداد شاخه هذلولی به طور مجانبی به خطی که قطر مستطیل روی آن قرار دارد نزدیک می‌شود.

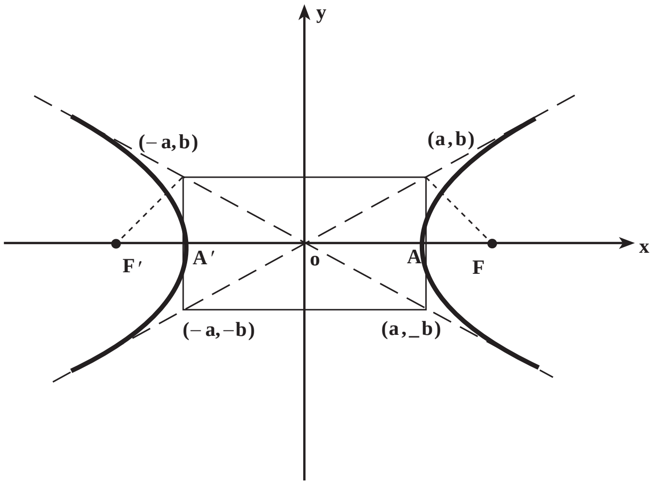
مثال : هذلولی به معادله $\frac{x^۲}{۹}-\frac{y^۲}{۴}=۱$ را رسم کنید.

$a^۲=۹$ و $b^۴=۲$

$c^۲=a^۲+b^۲=۱۳$

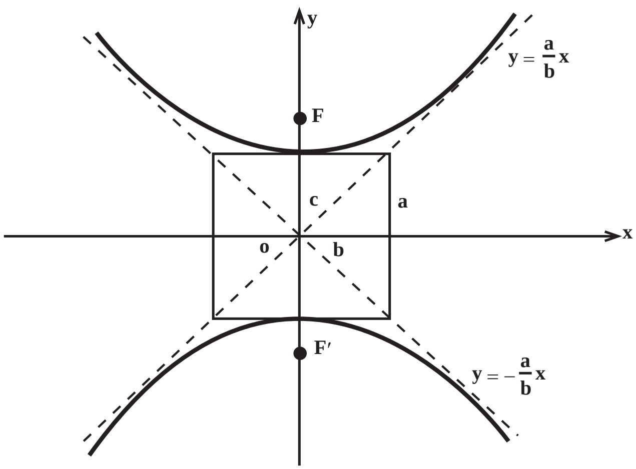
$F(\sqrt{۱۳},۰)$

$F'=(-\sqrt{۱۳},۰)$



اگر به مرکز O و به شعاع $c=\sqrt{a^۲+b^۲}$ دایره رسم کنیم محور تقارن هذلولی (محور xها) را در کانون‌ها، F و F′ قطع می‌کند.

اگر در معادله $\frac{x^۲}{a^۲}-\frac{y^۲}{b^۲}=۱$ جای x و y را عوض کنیم، معادله جدید $\frac{y^۲}{a^۲}-\frac{x^۲}{b^۲}=۱$ یک هذلولی را نشان می‌دهد که کانون‌هایش بر محور yها واقع‌اند (مانند شکل زیر).



وقتی مرکز هذلولی مبدأ مختصات نباشد : مرکز یک هذلولی محل تقاطع محورهای تقارن آن است. فهرست زیر معادلات هذلولی‌هایی را نشان می‌دهد که محورهایشان با محورهای مختصات موازی‌اند، و مرکزشان در نقطه (h,k) واقع است.

۱ــ هذلولی افقی (خط گذرنده از کانون‌ها موازی با محور xها)

$$\frac{(x-h)^۲}{a^۲}-\frac{(y-k)^۲}{b^۲}=۱$$

رأس‌ها $(h \pm a , k)$ و کانون‌ها $(h \pm c , k)$:

مجانب‌ها $$\frac{x-h}{a}\pm\frac{y-k}{b}=۰$$

۲ــ هذلولی قائم (خط گذرنده از کانون‌ها موازی با محور yها)

$$\frac{(y-k)^۲}{a^۲}-\frac{(x-h)^۲}{b^۲}=۱$$

رأس‌ها $(h , k\pm a)$ و کانون‌ها $(h , k\pm c)$:

مجانب‌ها $$\frac{y-k}{a}\pm\frac{x-h}{b}=۰$$

مثال : مرکز، رأس‌ها، کانون‌ها و مجانب‌های هذلولی زیر را به دست آورید.

$$x^۲-۴y^۲-۲x+۸y-۷=۰$$

حل : داریم

$$(x^۲-۲x+۱-۱)-۴(y^۲-۲y+۱-۱)-۷=۰$$

$$(x-۱)^۲-۱-۴(y-۱)^۲+۴-۷=۰$$

$$(x-۱)^۲-۴(y-۱)^۲=۴$$

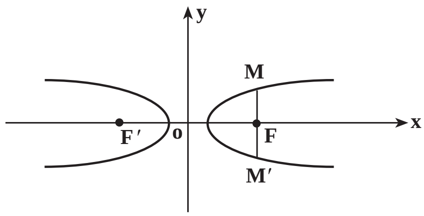
$$\frac{(x-۱)^۲}{۴}-(y-۱)^۲=۱$$

پس مختصات مرکز (۱,۱) و چون $a=۲$ و $b=۱$ پس $c=\sqrt{a^۲+b^۲}=\sqrt{۵}$. پس رأس‌ها نقاط (۳,۱) و (۱,۱−) و کانون‌ها $(۱+\sqrt{۵},۱)$ و $(۱-\sqrt{۵},۱)$ و مجانب‌ها عبارتند از :

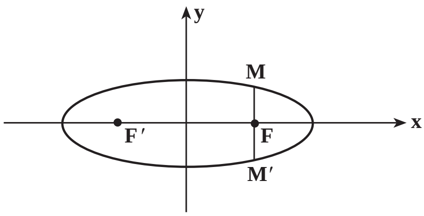
$$\frac{x-۱}{۲}\pm(y-۱)=۰$$

خروج از مرکز هذلولی : نظیر خروج از مرکز بیضی، $e=\frac{c}{a}$ را خروج از مرکز هذلولی می‌نامند و چون درهذلولی $c>a$. خروج از مرکز هر هذلولی همیشه عددی بزرگتر از یک می‌باشد.

وتر کانونی : وتری که از کانون هذلولی (یا بیضی) می‌گذرد و بر محور کانونی عمود است وتر کانونی هذلولی (بیضی) نامیده می‌شود (شکل زیر). ثابت می‌شود که طول چنین وتری برابر $\frac{۲b^۲}{a}$ می‌باشد.



MM´ یک وتر کانونی هذلولی است.



MM´ یک وتر کانونی بیضی است.

مثال : معادله یک هذلولی را بنویسید که مرکزش مبدأ مختصات و محور کانونی آن منطبق بر محور xها و خروج از مرکزش $\frac{\sqrt{۵}}{۲}$ و وتر کانونی آن به طول ۴ باشد.

حل : فرض کنیم هذلولی مانند شکل قبل باشد. بنابراین داریم

$$MM' = \frac{۲b^۲}{a} = ۴ \quad \text{و} \quad e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{۵}}{۲}$$

از این دو رابطه خواهیم داشت :

$$b^۲ = ۲a \quad \text{و} \quad e^۲ = \frac{c^۲}{a^۲} = \frac{۵}{۴}$$

لذا

$$\frac{a^۲ + ۲a}{a^۲} = \frac{۵}{۴} \Rightarrow \frac{a^۲}{a^۲} + \frac{۲a}{a^۲} = \frac{۵}{۴} \Rightarrow ۱ + \frac{۲}{a} = \frac{۵}{۴}$$

پس $a = ۸$ اکنون با توجه به رابطه $b^۲ = ۲a$ داریم $b = ۴$ در نتیجه معادله هذلولی به صورت زیر است :

$$\frac{x^۲}{۶۴} - \frac{y^۲}{۱۶} = ۱$$

مثال : معادله یک هذلولی را بنویسید که خطوط $۳x + ۲y + ۱ = ۰$ و $۳x - ۲y - ۷ = ۰$ مجانب‌های آن بوده و از نقطه $M(۱+۲\sqrt{۳},۴)$ بگذرد.

حل : مجانب‌ها را در یک دستگاه قطع می‌دهیم.

$$\begin{cases} ۳x + ۲y + ۱ = ۰ \\ ۳x - ۲y - ۷ = ۰ \end{cases} \Rightarrow O'(۱,-۲)$$

O' مرکز این هذلولی است (چرا؟) با رسم خطوط مجانب و انتخاب نقطه M در صفحه مختصات معلوم می‌شود که محور کانونی این هذلولی موازی محور yها است. بنابراین معادله هذلولی

به صورت :

$$\frac{(y+۲)^۲}{a^۲}-\frac{(x-۱)^۲}{b^۲}=۱$$

می‌باشد. چون ضریب زاویه مجانب‌ها از دستور $m=\pm\frac{a}{b}$ به دست می‌آید، پس

$$m=\pm\frac{۳}{۲}\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow ۲a=۳b$$

از طرف دیگر مختصات M در معادله هذلولی صدق می‌کند، پس

$$\frac{۳۶}{a^۲}-\frac{۱۲}{b^۲}=۱\Rightarrow a=۳,b=۲$$

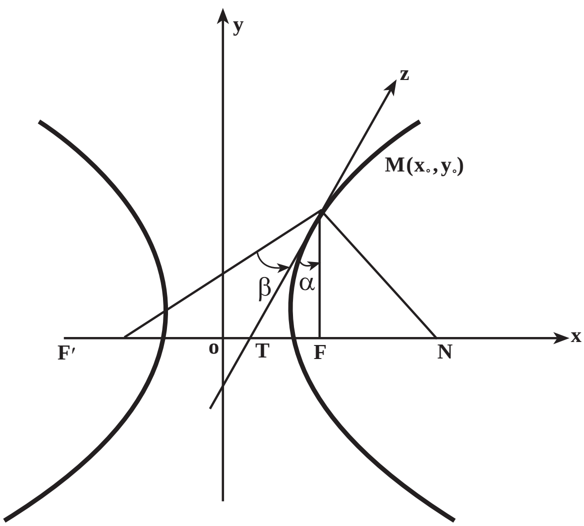
بنابراین معادله هذلولی می‌شود :

$$\frac{(y+۲)^۲}{۹}-\frac{(x-۱)^۲}{۴}=۱$$

معادلات مماس و قائم بر هذلولی

هذلولی به معادله $\frac{x^۲}{a^۲}-\frac{y^۲}{b^۲}=۱$ و نقطه $M(x_۰\ ,y_۰)$ متعلق به آن را در نظر می‌گیریم :

$$b^۲x^۲-a^۲y^۲=a^۲b^۲\Rightarrow y'=\frac{b^۲x}{a^۲y}$$



$$\text{شیب مماس } m=\frac{b^{۲}x_{۰}}{a^{۲}y_{۰}} \Rightarrow y-y_{۰}=\frac{b^{۲}x_{۰}}{a^{۲}y_{۰}}(x-x_{۰}) \Rightarrow \boxed{\frac{xx_{۰}}{a^{۲}}-\frac{yy_{۰}}{b^{۲}}=۱}$$

معادله مماس بر هذلولی

$$\text{شیب قائم } m'=\frac{-a^{۲}y_{۰}}{b^{۲}x_{۰}} \Rightarrow y-y_{۰}=\frac{-a^{۲}y_{۰}}{b^{۲}x_{۰}}(x-x_{۰}) \Rightarrow \boxed{\frac{a^{۲}x}{x_{۰}}+\frac{b^{۲}y}{y_{۰}}=c^{۲}}$$

معادله قائم بر هذلولی

مثال : بدون استفاده از مشتق، ضریب زاویه خطوطی را به دست آورید که از نقطهٔ $A(۳,۴)$ بگذرند و بر هذلولی به معادلهٔ $x^{۲}-y^{۲}=۱$ مماس باشند.

حل : معادله خطی را می‌نویسیم که از نقطه $A(۳,۴)$ بگذرد و شیب آن m باشد؛ می‌دانیم معادلهٔ این خط $y-۴=m(x-۳)$ است. لذا $y=mx-۳m+۴$.

مختصات نقاط تلاقی این خط با هذلولی مفروض از حل دستگاه

$$\begin{cases} x^{۲}-y^{۲}=۱ \\ y=mx-۳m+۴ \end{cases}$$

به‌دست می‌آید. با حذف y در این معادلات به‌دست می‌آوریم

$$(۱-m^{۲})x^{۲}-۲m(-۳m+۴)x-۹m^{۲}+۲۴m-۱۷=۰$$

این معادله در واقع طول‌های نقاط تقاطع خطوطی را به‌دست می‌دهد که از نقطه $A(۳,۴)$ می‌گذرند و هذلولی $x^{۲}-y^{۲}=۱$ را قطع می‌کنند. برای آنکه یکی از این خطوط بر هذلولی مماس شود باید معادلهٔ درجه دوم اخیر فقط یک جواب (یک نقطه تقاطع) داشته باشد. از اینجا نتیجه می‌گیریم که

$$\frac{۱}{۴}\Delta=(۳m^{۲}-۴m)^{۲}-(۱-m^{۲})(-۹m^{۲}+۲۴m-۱۷)=۰$$

پس از ساده کردن به‌صورت زیر درمی‌آید

$$۸m^{۲}-۲۴m+۱۷=۰$$

و این معادله دارای دو جواب $m=\frac{۶+\sqrt{۲}}{۴}$ و $m=\frac{۶-\sqrt{۲}}{۴}$ است. یعنی از نقطه $A(۳،۴)$ دو خط مستقیم می‌توان بر هذلولی $x^{۲}-y^{۲}=۱$ مماس رسم کرد. ضریب زاویه این دو خط به‌ترتیب برابر $\frac{۶+\sqrt{۲}}{۴}$ و $\frac{۶-\sqrt{۲}}{۴}$ است.

مسائل

۱ــ هذلولی‌های زیر را رسم کنید :

(الف) $\frac{x^۲}{۹}-\frac{y^۲}{۱۶}=۱$ (ب) $\frac{x^۲}{۱۶}-\frac{y^۲}{۹}=۱$

(ج) $\frac{y^۲}{۹}-\frac{x^۲}{۱۶}=۱$ (د) $\frac{x^۲}{۹}-\frac{y^۲}{۱۶}=-۱$

در تمرین‌های ۲ تا ۸، مرکز، رئوس، کانون‌ها و ثابت‌های هذلولی به معادله مفروض را پیدا کنید. سپس شکل منحنی را در کاغذ شطرنجی رسم کنید.

۲ــ $۹(x-۲)^۲-۴(y+۳)^۲=۳۶$

۳ــ $۴(x-۲)^۲-۹(y+۳)^۲=۳۶$

۴ــ $۴(y+۳)^۲-۹(x-۲)^۲=۱$

۵ــ $۵x^۲-۴y^۲+۲۰x+۸y=۲$

۶ــ $۴x^۲=y^۲-۴y+۸$

۷ــ $۴y^۲=x^۲-۴x$

۸ــ $۴x^۲-۵y^۲-۱۶x+۱۰y+۳۱=۰$

۹ــ بر نقطه A واقع بر هذلولی به معادله $xy=a^۲$ ($a\neq ۰$ و ثابت است) مماسی رسم کرده‌ایم. این مماس محورهای مختصات را در نقاط B و C قطع می‌کند. ثابت کنید نقطه A وسط پاره‌خط BC است.

۱۰ــ بر نقطهٔ A واقع بر هذلولی به معادلهٔ $x^۲-y^۲=۱$ قائمی رسم کرده‌ایم. این قائم محورهای مختصات را در نقاط B و C قطع می‌کند. ثابت کنید نقطه A وسط پاره‌خط BC است.

۱۱ــ خطوط موازی با شیب m وترهایی بر هذلولی به معادله $x^۲-y^۲=۱$ ایجاد می‌کنند، ثابت کنید اوساط این وترها بر یک خط واقع‌اند.

مسائل دوره‌ای فصل

۱ــ سهمی به معادله $y=x^۲$ مفروض است. فرض کنیم A نقطه‌ای واقع بر این سهمی غیر از مبدأ مختصات باشد. مماس بر سهمی در نقطه A محورهای x و y را به ترتیب در نقاط B و C قطع می‌کند. ثابت کنید نقطه B وسط پاره‌خط AC است.

۲ــ مماس بر هذلولی به معادلهٔ $xy=a^۲$ ($a\neq ۰$ عددی است ثابت) در یک نقطه واقع بر آن محورهای مختصات را در نقاط B و C قطع می‌کند؛ ثابت کنید مساحت مثلث OBC عددی است ثابت

(O مبدأ مختصات است).

۳ــ در چه نقاطی از سهمی به معادلهٔ $y = x^۲$ قائم بر سهمی از نقطه $A(۰,a)$ می‌گذرد؟ $a > \frac{۱}{۲}$.

۴ــ ثابت کنید هذلولی $x^۲ - y^۲ = ۲$ و دایره $x^۲ + y^۲ - ۲y - \frac{۳}{۲} = ۰$ در نقاط $A(\frac{۳}{۲},\frac{۱}{۲})$ و $B(-\frac{۳}{۲},\frac{۱}{۲})$ بر هم مماس هستند.

۵ــ بر سهمی به معادله $y = x^۲ + ۵x + ۱۰$ نقطه‌ای به‌دست آورید که مماس بر منحنی در آن نقطه موازی خط $y = ۶x + ۷$ باشد.

۶ــ بر بیضی به معادلهٔ

$$\frac{x^۲}{۹} + \frac{y^۲}{۱۶} = ۱$$

نقاطی را به‌دست آورید که مماس بر منحنی در آن نقاط موازی خطّ $y = ۴x + ۷$ باشد.

۷ــ نقطه $A(x,y)$ با مختصات پارامتری

$$x = \frac{e^t + e^{-t}}{۲} \quad و \quad y = \frac{e^t - e^{-t}}{۲}$$

مفروض است که در آن $t \in IR$. به‌ازای بعضی از مقادیر t چند نقطه را در یک کاغذ شطرنجی مشخص کنید. (الف) تعداد نقاط به‌دست آمده را آنقدر انتخاب کنید (با اختیار کردن مقادیر t) تا بتوانید حدس بزنید که این نقاط تشکیل چه نوع منحنی‌ای در صفحه می‌دهند.

(ب) ثابت کنید وقتی t در IR تغییر می‌کند نقطه A بر یک هذلولی حرکت می‌کند. معادله این هذلولی را به‌دست آورید.

۸ــ ثابت کنید به‌ازای هر عدد حقیقی a، خط مستقیم به معادله $y = ax + \sqrt{۴a^۲ + ۹}$ بر بیضی به معادلهٔ

$$\frac{x^۲}{۴} + \frac{y^۲}{۹} = ۱$$

مماس است.

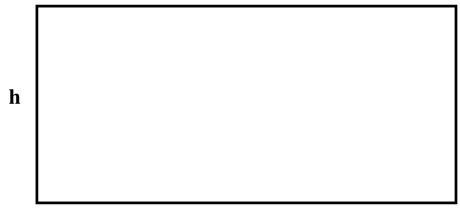
۹ــ ثابت کنید دایره به معادله $x^۲ + y^۲ - ۹y + ۱۶ = ۰$ و سهمی $y = x^۲$ در دو نقطهٔ $A(۲,۴)$ و $A(-۲,۴)$ بر هم مماس هستند.

فصل ۶

انتگرال

مساحت

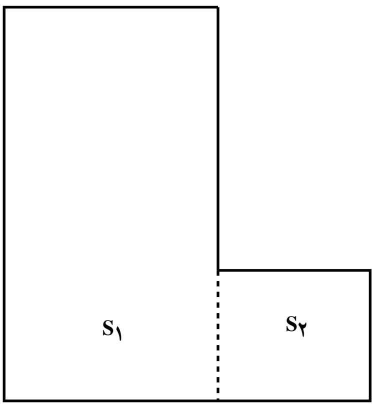
می‌دانیم مساحت یک مستطیل برابر است با حاصل‌ضرب طول و عرض آن؛



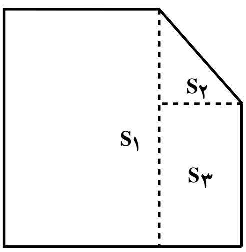
$S = ah$

هرگاه شکلی از مستطیل‌ها یا اشکال دیگری تشکیل شده باشد، مساحت شکل اصلی برابر است با حاصل‌جمع مساحت اجزای تشکیل دهندهٔ آن شکل.

در این شکل‌ها، S مساحت کل شکل و هریک از $S_۱$، $S_۲$ مطابق شکل مساحت یک ناحیه کوچکتر از شکل اصلی است. این ویژگی مساحت را که «مساحت یک شکل نامنظم برابر است با حاصل‌جمع مساحتهای اجزای تشکیل دهنده آن»، ویژگی **جمع‌پذیری** مساحت می‌نامند.

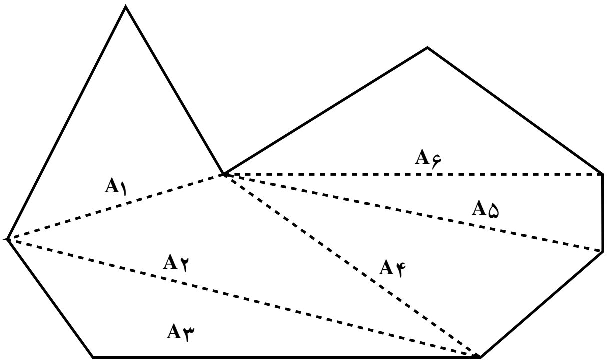


$S = S_۱ + S_۲$



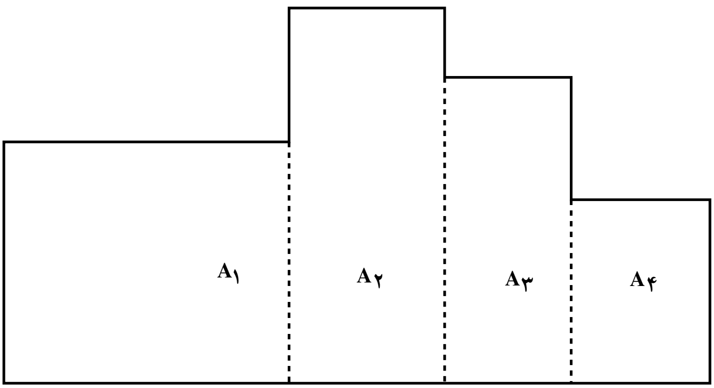
$S = S_۱ + S_۲ + S_۳$

از این ویژگی برای محاسبه مساحت چند ضلعی‌های غیرمنتظم نیز استفاده می‌کنیم :



$$A = A_۱ + A_۲ + A_۳ + A_۴ + A_۵ + A_۶$$

گاهی مناسب‌تر آن است که شکل مورد نظر را به مستطیل‌های کوچکتر تقسیم کرده و مساحت این مستطیل‌ها را محاسبه و سپس با هم جمع کنیم.



$$A = A_۱ + A_۲ + A_۳ + A_۴$$

یونانیان باستان، این روش را حتی برای محاسبه مساحت شکل‌هایی که محیط آن‌ها از خط مستقیم شکسته تشکیل نمی‌شد به کار می‌بردند. ارشمیدس برای محاسبه مساحت دایره از چندضلعی هایی استفاده کرد که برخی از آن‌ها دایره را در برمی‌گرفت (چند ضلعی‌های محیطی) و بعضی از آن‌ها در درون دایره قرار می‌گرفتند. (چند ضلعی‌های محاطی) طبیعی است که مساحت دایره کوچکتر از مساحت چندضلعی‌های محیطی و بزرگتر از مساحت چندضلعی‌های محاطی است و وقتی تعداد اضلاع چنین

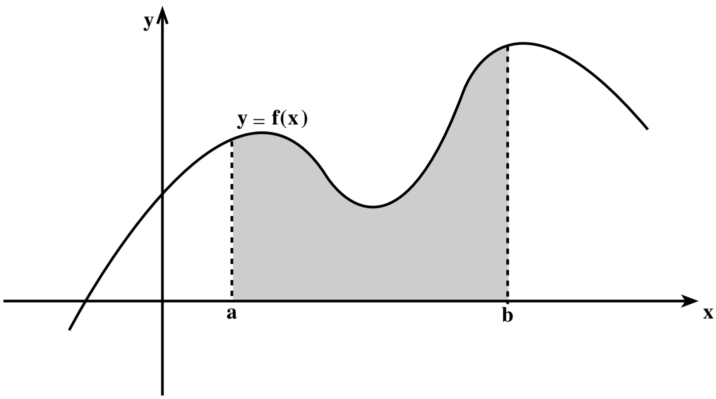
چندضلعی‌هایی را بیشتر و بیشتر می‌کنیم مساحت دایره با تقریب دلخواه به مساحت این چندضلعی‌ها نزدیک می‌شود. به زبان فنی‌تر، مساحت دایره حد مساحت‌های چندضلعی‌های محاطی (یا محیطی) است وقتی که تعداد اضلاع را بزرگ می‌کنیم و چندضلعی‌ها را منتظم اختیار کنیم. ارشمیدس با این روش توانست مقدار π را تا چند رقم اعشار محاسبه کرده و برای اولین بار فرمول مساحت دایره $S = \pi r^2$ را برحسب شعاع آن به‌دست آورد.

انتگرال معین

روشی که ارشمیدس برای محاسبه مساحت دایره به‌کار برده است اساس تعریف انتگرال معین است. انتگرال معین را می‌توانیم مساحت زیر نمودار یک تابع تعریف کنیم. البته بعد از فرمول‌بندی این مفهوم مایلیم که برای هر تابع که بر یک بازه از اعداد حقیقی تعریف شده باشد انتگرال معین آن را محاسبه کنیم. برای شروع تعریف انتگرال معین، توابعی را مورد نظر قرار می‌دهیم که بر یک بازه تعریف شده و نمودار آن‌ها بالای محور x قرار دارد.

در واقع روشی که در این کتاب برای تعریف انتگرال‌های معین اعمال می‌کنیم در سه مرحله متوالی و مشخص و به طریقه زیر ارائه می‌گردد.

تعریف: فرض کنیم تابع f در بازۀ بسته [a,b] پیوسته و برای هر $x \in [a, b]$ ، $f(x) \geq 0$. در این صورت منظور از نِماد $\int_a^b f(x)dx$ (بخوانید انتگرال تابع f (x) از a تا b) مساحت ناحیه زیر نمودار $y = f(x)$ است که بالای محور x و بین خطوط $x = a$ و $x = b$ قرار دارد (شکل الف). مقادیر a و b را **حدود انتگرال‌گیری** می‌نامیم. dx نمایش این است که متغیر انتگرال‌گیری x است.

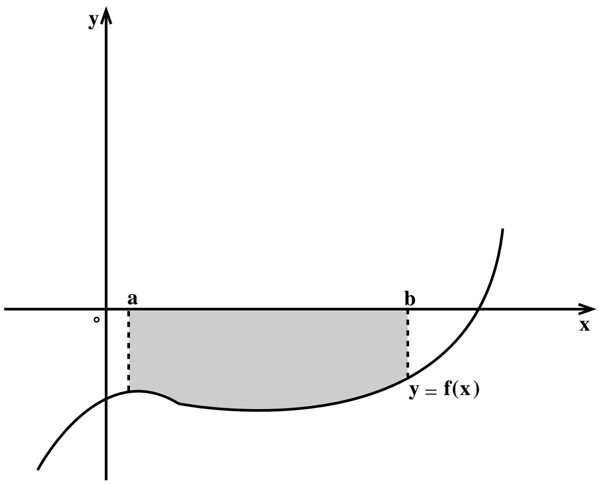


شکل الف) $\int_a^b f(x)dx$ مساحت ناحیه سایه زده شده می‌باشد و عددی است مثبت.

بنابراین

انتگرال توابع نامنفی (یعنی توابعی که فقط مقادیر مثبت یا صفر اختیار می‌کنند) همیشه عددی مثبت (یا صفر) است و برابر مساحت ناحیه زیر نمودار و محدود به محور xها و حدود انتگرال‌گیری است.

تعریف : فرض کنیم تابع f در بازهٔ بسته [a,b] پیوسته و برای هر $x \in [a, b]$ ، $f(x) \leq 0$. در این صورت منظور از نماد $\int_a^b f(x)dx$
قرینه مساحت ناحیه بالای نمودار $y = f(x)$ است که به محور x و خطوط $x = a$ و $x = b$ محدود شده باشد (شکل ب).

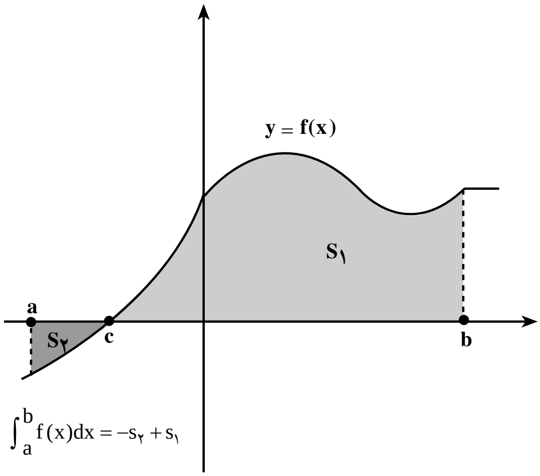


شکل ب) $\int_a^b f(x)dx$ برابر قرینه مساحت ناحیه سایه زده شده می‌باشد و عددی است منفی.

بنابراین

انتگرال توابعی که فقط مقادیر منفی (یا صفر) اختیار می‌کنند، یعنی توابعی که نمودار آن‌ها زیر محور x قرار دارد برابر قرینه مساحت ناحیه بالای نمودار و محدود به محورx و حدود انتگرال‌گیری است. پس انتگرال اینگونه توابع همیشه عددی منفی یا صفر است.

تعریف : فرض کنیم f تابعی پیوسته بربازهٔ $[a, b]$, $a < c < b$ و برای هر x که $f(x)\ , x \in [a,c]$ همواره مثبت (منفی) و برای هر x که $f(x)\ , x \in [c, b]$ همواره منفی (مثبت) باشد. در این صورت قرار می‌دهیم.
$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$



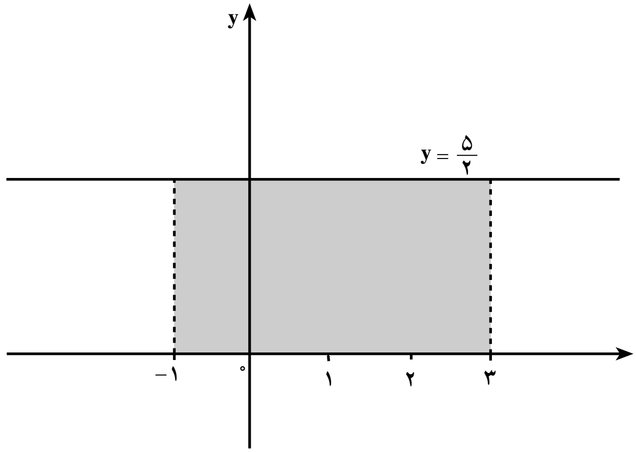
شکل ج) برای توابعی که نمودار آن‌ها در قسمتی از دامنه‌شان پایین محور x و در قسمت دیگری از دامنه بالای محور xها قرار دارد، $\int_a^b f(x)dx$ به عنوان جمع جبری مساحت‌های بالای محور xها و پایین محور xها تعریف می‌گردد. مساحت بالای محور x با همان مقدار (مثبت) و مساحت پایین محور xها با علامت منفی (قرینه مساحت) در محاسبه انتگرال مطابق تعریف‌های قبلی محاسبه می‌گردند.

تعریف اخیر در واقع انتگرال معین هر تابع پیوسته را در حالت کلی ارائه می‌دهد. هرگاه در بیش از دو بازه تابع مورد نظر تغییر علامت دهد باز به همین روش عمل می‌کنیم. با این تعریف هر جا نمودار بالای محور xها است اندازه مساحت و هرجا که نمودار پایین محور xها است قرینه مساحت مربوطه را در محاسبه آورده می‌شوند. باید به خاطر داشته باشیم که مساحت همیشه کمیتی است مثبت ولی انتگرال معین می‌تواند مثبت، منفی یا صفر باشد.

اکنون با ذکر مثال‌هایی به محاسبه بعضی انتگرال‌های ساده خطی می‌پردازیم.

مثال‌هایی از انتگرال معین

۱ ــ فرض کنیم $c > ۰$ و $f(x) = c$ تابع ثابت با مقدار ثابت c باشد. سطح زیر نمودار این تابع در بازه $[a, b]$ مستطیلی است به ارتفاع c و قاعده $b - a$ که همان طول فاصله انتگرال‌گیری است.
$\int_a^b cdx = c(b-a)$



مساحتی که با $\int_{-1}^{3} \frac{5}{2} dx$ نشان داده شده است.

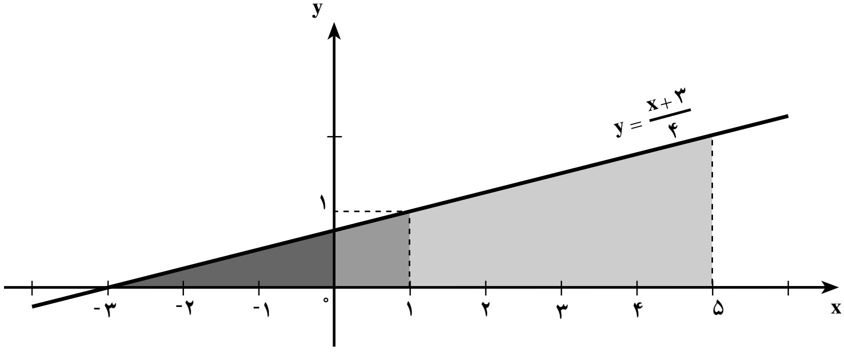
برای مثال

$$\int_{-1}^{3} \frac{5}{2} dx = \frac{5}{2}(3-(-1)) = 10$$

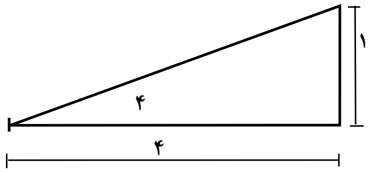
مثال ۱ : مقادیر انتگرال‌های معین زیر را پیدا کنید.

$$\int_{-3}^{1} \frac{x+3}{4} dx \quad , \quad \int_{0}^{5} \frac{x+3}{4} dx$$

حل : برای محاسبه انتگرال‌ها نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{x+3}{4}$ را در بازه‌های مربوطه رسم می‌کنیم :

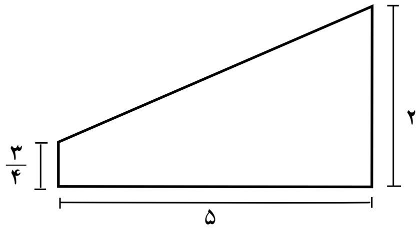


لذا انتگرال معین $\int_{-۳}^{۱} \frac{x+۳}{۴}dx$ برابر است با مساحت مثلث زیر



مساحت $= (\frac{۱}{۲}) \times ۴ \times ۱ = ۲$

و انتگرال معین $\int_{۰}^{۵} \frac{x+۳}{۴}dx$ برابر است با مساحت ذوزنقه زیر



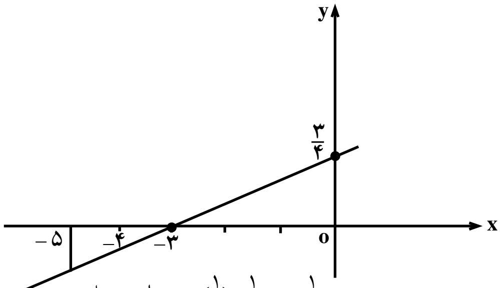
مساحت $= \frac{۱}{۲}(\frac{۳}{۴}+۲) \times ۵ = \frac{۵۵}{۸}$

بنابراین داریم

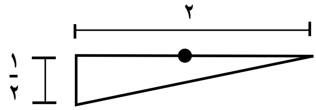
$$\int_{-۳}^{۱} \frac{x+۳}{۴}dx = ۲ \quad , \quad \int_{۰}^{۵} \frac{x+۳}{۴}dx = ۶\frac{۷}{۸}$$

مثال ۲ : انتگرال معین $\int_{-۵}^{-۳} \frac{x+۳}{۴}dx$ را محاسبه کنید.

حل : در اینجا نمودار تابع را در بازهٔ [۳- , ۵-] درنظر می‌گیریم.



مساحت مثلث $= (\frac{۱}{۲}) \times \frac{۱}{۲} \times ۲ = \frac{۱}{۲}$



چون مساحت زیر محور x است، انتگرال برابر است با

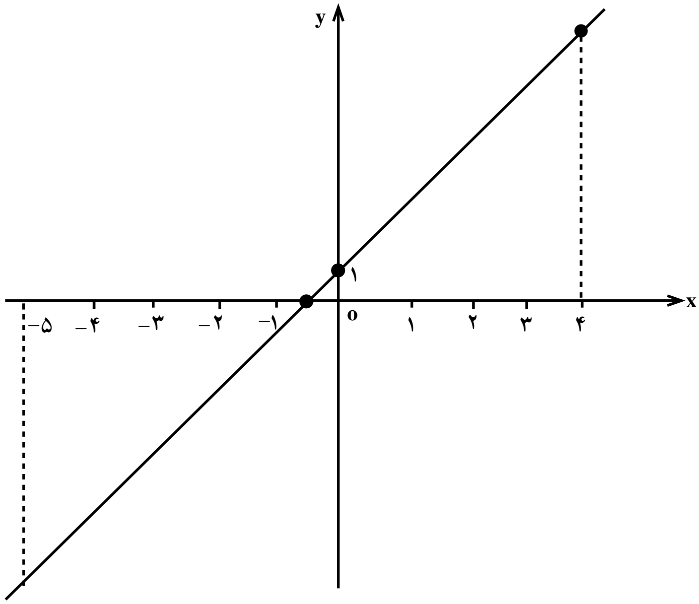
$$\int_{-۵}^{-۳} \frac{x+۳}{۴}dx = -\frac{۱}{۲}$$

مثال ۳ : مقدار $\int_{-۵}^{۴} (۲x+۱)dx$ را محاسبه کنید.

حل : این تابع در قسمتی از بازهٔ انتگرال‌گیری مقادیر مثبت و در قسمت دیگری از آن مقادیر منفی به خود می‌گیرد. و می‌بایست انتگرال مورد نظر را طبق تعریف به مؤلفه‌های مثبت و منفی آن تجزیه کرده و نتایج حاصله را جمع (**جمع جبری**) کنیم.

داریم $۲x+۱=۰ \Rightarrow x=-\frac{۱}{۲}$

این تابع در بازه $\left[-۵,-\frac{۱}{۲}\right]$ منفی و در بازهٔ $\left[-\frac{۱}{۲},۴\right]$ مثبت می‌باشد.



$$\int_{-۵}^{۴}(۲x+۱)dx=\int_{-۵}^{-\frac{۱}{۲}}(۲x+۱)dx+\int_{-\frac{۱}{۲}}^{۴}(۲x+۱)dx$$

$$\int_{-۵}^{-\frac{۱}{۲}}(۲x+۱)dx=-\left[(\frac{۱}{۲})(\frac{۹}{۲})(۹)\right]=-\frac{۸۱}{۴}$$

$$\int_{-\frac{۱}{۲}}^{۴}(۲x+۱)dx=(\frac{۱}{۲})(\frac{۹}{۲})\times ۹=\frac{۸۱}{۴}$$

بنابراین $$\int_{-۵}^{۴}(۲x+۱)dx=\frac{۸۱}{۴}+\frac{۸۱}{۴}=۰$$

نکته : اگر $a = b$ سطح زیر (بالای) نمودار تابع تبدیل به یک پاره‌خط می‌گردد. لذا در این حالت انتگرال معین را به‌عنوان ابزاری که مساحت چنین پاره‌خطی را اندازه می‌گیرد تلقی می‌کنیم که البته این مساحت برابر صفر است. به‌عبارت دیگر، برای هر تابع f که در $x = a$ تعریف شده باشد، قرار می‌دهیم

$$\int_a^a f(x) = ۰$$

برای کلیّت بخشیدن به مفهوم انتگرال، برای وقتی که $b < a$ نیز چنین عمل می‌کنیم :

تعریف : بر طبق قرارداد، توافق می‌کنیم که

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

مثلاً برای محاسبه انتگرال‌های $\int_۴^{-۵}(۲x+۱)dx$ ، $\int_{-۳}^{-۵}\frac{x+۳}{۴}dx$ ، $\int_۱^{-۳}\frac{x+۳}{۴}dx$ داریم

$$\int_۴^{-۵}(۲x+۱)dx = -\int_{-۵}^{۴}(۲x+۱)dx = ۰$$

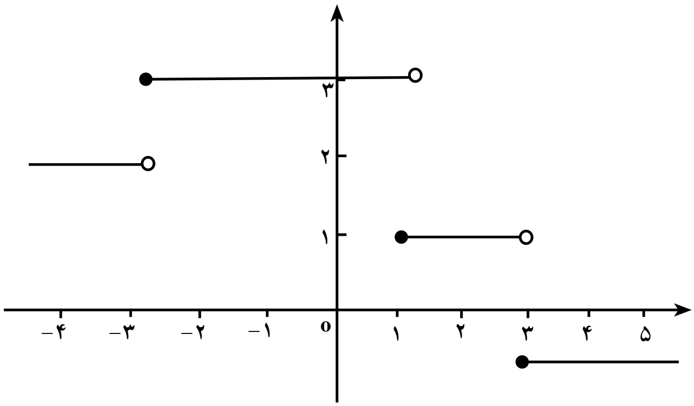
$$\int_{-۳}^{-۵}\frac{x+۳}{۴}dx = -\int_{-۵}^{-۳}\frac{x+۳}{۴}dx = -(-\frac{۱}{۲}) = \frac{۱}{۲}$$

$$\int_۱^{-۳}\frac{x+۳}{۴}dx = -\int_{-۳}^{۱}\frac{x+۳}{۴}dx = -(۲) = -۲$$

این سؤال قابل طرح است که چنانچه تابع مورد نظر در بازه انتگرال‌گیری پیوسته نباشد آیا می‌توانیم باز هم برای آن انتگرال معین تعریف کنیم؟

توابعی که پیوسته نیستند اصطلاحاً توابعی بدرفتار تلقی می‌شوند؛ امّا در میان اینگونه توابع بعضی‌ها کمتر بدرفتار هستند. برای نمونه یک تابع پله‌ای گرچه در بعضی نقاط دامنه‌اش پیوسته نیست، چندان هم بدرفتار نمی‌باشد. در این موارد بازه انتگرال‌گیری را در نقاطی از قلمرو که تابع در آنجا پیوسته نیست تجزیه کرده و بازه‌های کوچکتری به‌دست آوریم که تابع مفروض در هریک از این بازه‌ها پیوسته باشد.

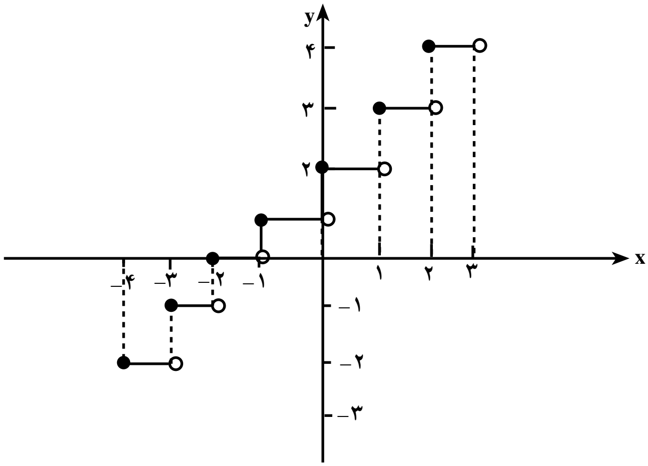
در شکل صفحه بعد نمودار یک تابع پله‌ای نشان داده شده است. همچنان‌که ملاحظه می‌شود این تابع در نقاط $x = -۳$ ، $x = ۱$ و $x = ۳$ پیوسته نیست. ولی جز این نقاط در سایر نقاط تابع پیوسته است. در واقع تعداد اندکی از نقاط دامنه (یا حتی در نقاط یک دنباله نامتناهی) که تابع در آنجا پیوسته نباشد در وجود انتگرال تأثیری ندارد.



مثالی از یک تابع پله‌ای

مثال : انتگرال معین $\int_{-۴}^{۳}([x]+۲)dx$ را محاسبه کنید.

حل : نمودار تابع $f(x) = [x] + ۲$ در بازه $[-۴, ۳]$ در شکل زیر رسم شده است.



این تابع در نقاط صحیح $x = -۳$ ، $x = -۲$ ، $x = -۱$ ، $x = ۰$ ، $x = ۱$ و $x = ۲$ ناپیوسته است.

$$\int_{-۴}^{۳}([x]+۲)dx = \int_{-۴}^{-۳}([x]+۲)dx + \int_{-۳}^{-۲}([x]+۲)dx + \int_{-۲}^{-۱}([x]+۲)dx$$

$$+\int_{-۱}^{۰}([x]+۲)dx + \int_{۰}^{۱}([x]+۲)dx + \int_{۱}^{۲}([x]+۲)dx + \int_{۲}^{۳}([x]+۲)dx$$

$$= (-۲) + (-۱) + ۰ + (+۱) + (+۲) + (+۳) + (+۴) = +۷$$

مسائل

مقدار انتگرال‌های معین ۱ تا ۱۰ را محاسبه کنید.

۱ـ $\int_{۱}^{۴}(۳x+۲)dx$

۲ـ $\int_{۱}^{۴}(۱-x)dx$

۳ـ $\int_{-۳}^{۲} xdx$

۴ـ $\int_{-۳}^{۳}|x|dx$

۵ـ $\int_{۰}^{۳}|۲x+۱|dx$

۶ـ $\int_{-۲}^{۳}|۲-x|dx$

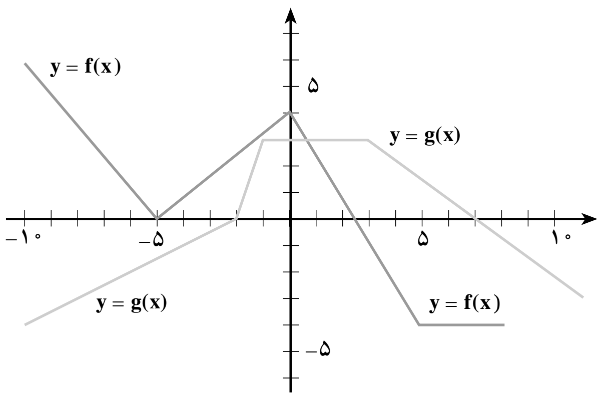
۷ـ $\int_{-۲}^{۴}۲[x]dx$

۸ـ $\int_{-۴}^{۳}([x]-۱)dx$

۹ـ $\int_{-۷}^{-۳}(-\frac{۵}{۲})dx$

۱۰ـ $\int_{۶}^{۲}(-۳)dx$

با استفاده از نمودار توابع f و g نشان داده شده در زیر، انتگرال‌های معین تمرین‌های ۱۱ تا ۲۰ را پیدا کنید.



۱۱ـ $\int_{-۶}^{۰} f(x)dx$

۱۲ـ $\int_{۶}^{۱۰} f(x)dx$

۱۳ـ $\int_{-۸}^{۲} g(x)dx$

۱۴ـ $\int_{-۱}^{۸} g(x)dx$

۱۵ـ $\int_{۰}^{۶} f(x)dx$

۱۶ـ $\int_{۲}^{-۲} f(x)dx$

۱۷ـ $\int_{-۵}^{۱۰} g(x)dx$

۱۸ـ $\int_{۶}^{-۲} f(x)dx$

۱۹ـ $\int_{-۶}^{۶} f(x)dx$

۲۰ـ $\int_{-۵}^{۵} g(x)dx$

انتگرال توابع غیرخطی

همچنان‌که ملاحظه کردیم، در این بخش انتگرال توابع ساده‌ای را که نمودار آن‌ها خطی یا قطعه‌ای خطی است، محاسبه کردیم.

اکنون این سؤال پیش می‌آید که هرگاه نمودار تابع مورد نظر یک منحنی (غیر خطی) باشد، انتگرال آن چگونه محاسبه می‌گردد؟ در این حالت مساحت مورد نظر یک شکل ساده هندسی متشکل از چند مثلث و مستطیل نمی‌باشد تا بتوانیم به آسانی انتگرال معین را محاسبه کنیم.

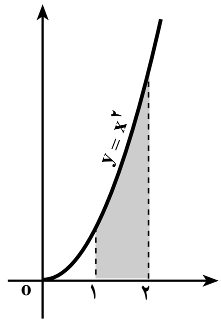
مثلاً $\int_1^4 x^2dx$ چقدر است؟

همچنان‌که در دو شکل«ب» و «ج» نشان داده شده است $\int_1^2 x^2dx$ را می‌توانیم با انتخاب نقاطی در بازهٔ $[1,2]$ و با استفاده از مساحت مستطیل‌های به‌دست آمده با تقریب محاسبه کنیم. در شکل (الف)، بخشی از مساحت مستطیل‌ها زیر نمودار بوده و در مجموع مساحت مستطیل‌ها از مساحت زیر نمودار کمتر است. پس در این حالت انتگرال با تقریب نقصانی محاسبه می‌شود. در شکل (ج)، بخش مساحت مستطیل‌ها بالای نمودار تابع بوده و حاصل‌جمع مساحت مستطیل‌ها افزون بر مساحت زیر منحنی است. در این حالت گوییم انتگرال با تقریب اضافی محاسبه شده است.

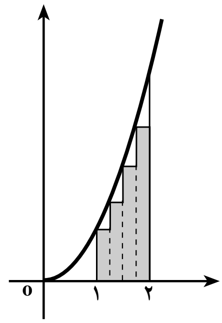
واضح است که هر چقدر تعداد نقاط انتخاب شده در بازه را زیاد کنیم و طول بازه‌های جزء را کوچکتر کنیم مقدار انتگرال محاسبه شده با تقریب‌های بهتری انتگرال واقعی (مساحت زیر نمودار) را به‌دست می‌دهد.

این روش اساس محاسبه انتگرال‌ها با روش‌های تقریبی است که معمولاً در دوره‌های عالی‌تر دروس ریاضیات مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

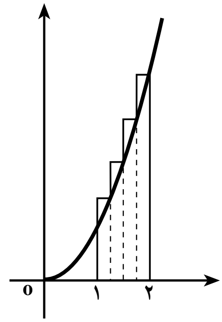
ما در مبحث بعدی با ارائه ارتباط بین مفهوم مشتق و مفهوم انتگرال، روش محاسبه انتگرال‌هایی نظیر توابع فوق را تشریح می‌کنیم. این ارتباط به نام قضیه اساسی حساب دیفرانسیل (حساب مشتق‌ها) و انتگرال شهرت دارد.



شکل الف) از نظر تعریف $\int_1^2 x^2dx$ برابر مساحت زیر نمودار است.



شکل ب) حاصل جمع مساحت چهار مستطیل زیر نمودار انتگرال $\int_1^2 x^2dx$ را با تقریب نقصانی به دست می‌دهد.



شکل ج) حاصل‌جمع مساحت مستطیل‌های بالای نمودار، انتگرال $\int_1^2 x^2dx$ را با تقریب اضافی به دست می‌دهد.

اولین قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال

فرض کنیم f تابعی باشد که در هر نقطهٔ بازه $[a , b]$ مشتق‌پذیر باشد. در این صورت تابع f ، یعنی **تابع مشتق** را در این بازه در دست داریم که مقدار آن در نقطه x، برابر شیب نمودار تابع f در x است :

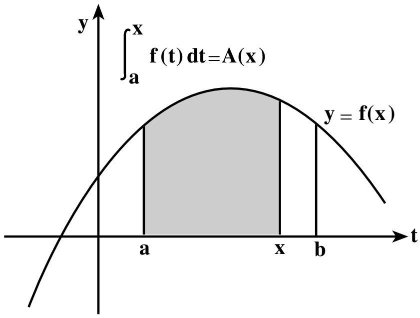
شیب نمودار تابع f در x = (x) f

اکنون با استفاده از مفهوم انتگرال معین یک تابع جدید از طریق نمودار f می‌سازیم.

فرض کنیم $[a , b]$ یک بازه و f تابعی پیوسته بر این بازه باشد. برای هر x که $a \le x \le b$، مقدار انتگرال معین $\int_a^x f(t)dt$ به x بستگی دارد و در نتیجه تابعی از x است. باید توجه داشت که x به‌عنوان حد بالای انتگرال و t متغیر انتگرال‌گیری است. همچنین در اینجا a را ثابت نگه‌داشته‌ایم. به‌عبارت دیگر، ما به این عبارت انتگرال، به‌عنوان تابعی از x می‌نگریم. هرگاه این تابع را A بنامیم، ضابطهٔ تعریف A چنین است :

$$A(x) = \int_a^x f(t)dt$$

این تابع را **تابع مساحت** می‌نامیم (شکل زیر).



ضابطه تابع مساحت با $\int_a^x f(t)dt$ نشان داده شده است.

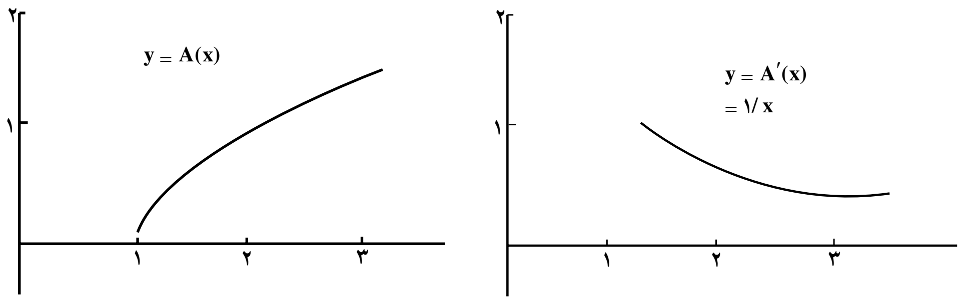
مثال : ضابطهٔ تعریف تابع مساحت را برای تابع $۱ \le t \le ۳, f(t) = \frac{۱}{t}$ تعریف کرده و نمودار آن را رسم کنید.

حل : تابع مساحت در این مثال دارای ضابطهٔ $A(x) = \int_۱^x \frac{۱}{t}dt$ است که $۱ \le x \le ۳$. با استفاده از یک ماشین حساب که قادر به محاسبه انتگرال معین باشد، یا با استفاده از کاغذ شطرنجی، می‌توانیم برای چندین مقدار از x , A(x) را حساب کنیم.

در جدول زیر بعضی از مقادیر تابع درج شده و سپس نمودار آن نیز رسم شده است.

x	A(x)	x	A(x)
۱/۰	۰/۰۰۰	۲/۱	۰/۷۴۲
۱/۱	۰/۰۹۵	۲/۲	۰/۷۸۸
۱/۲	۰/۱۸۲	۲/۳	۰/۸۳۳
۱/۳	۰/۲۶۲	۲/۴	۰/۸۷۵
۱/۴	۰/۳۳۶	۲/۵	۰/۹۱۶
۱/۵	۰/۴۰۵	۲/۶	۰/۹۵۵
۱/۶	۰/۴۷۰	۲/۷	۰/۹۳۳
۱/۷	۰/۵۳۱	۲/۸	۱/۰۳۰
۱/۸	۰/۵۸۸	۲/۹	۱/۰۶۵
۱/۹	۰/۶۴۲	۳/۰	۱/۰۹۹
۲/۰	۰/۶۹۳		

سؤال : نرخ تغییرات تابع مساحت چیست؟ به‌عبارت دیگر $A\ \ (x)$ کدام است؟ هرگاه با استفاده از نمودار $y = A(x)$ نمودار مشتق A را رسم کنیم، تصویری به دست می‌آوریم که بسیار شبیه نمودار $y = \frac{۱}{x}$ بر بازهٔ [۱,۳] می‌باشد.



نمودار تابع‌های $y = A(x)$ و $y = A'(x)$ نشان داده شده است.

سؤال : آیا این امر حقیقت دارد که ما به همان تابع $f(x) = \frac{۱}{x}$ بازگشته‌ایم؟ در واقع، اولین قضیهٔ بنیادی حساب انتگرال نشان‌دهنده آن است که این امر همیشه واقعیت دارد. که به‌صورت زیر بیان می‌شود.

قضیه :

فرض کنیم f تابعی پیوسته بر فاصله $[a,b]$ و برای هر x که $a \le x \le b$

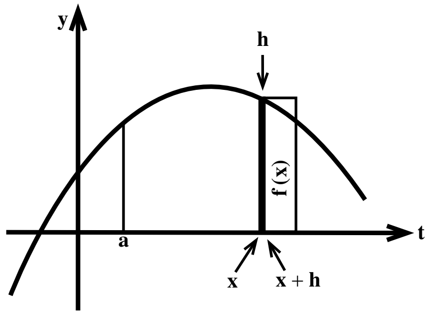
$$A(x) = \int_a^x f(t)dt$$

در این‌صورت برای هر x که $a < x < b$، داریم : $A \quad (x) = f(x)$

برای اثبات قضیه فوق ابتدا محاسبه مشتق $A \quad (x)$ نسبت نموهای $\dfrac{A(x+h)-A(x)}{h}$

را برای مقادیر کوچک h بررسی می‌کنیم. صورت این کسر متناظر مساحت نوار سیاه شده در شکل زیر بوده و برابر انتگرال معین زیر می‌باشد.

$$\int_x^{x+h} f(t)dt$$



$$A(x+h) - A(x) = \int_x^{x+h} f(t)dt = f(x)h$$

مساحت این ناحیه تقریباً برابر است با مساحت مستطیل باریک و بلندی به عرض h و طول $f(x)$.

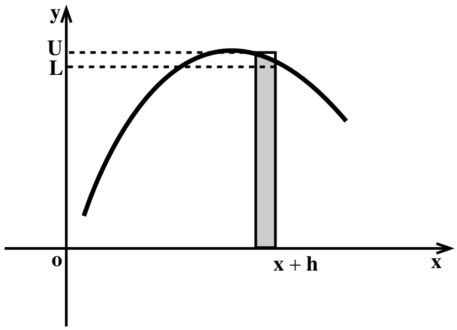
بنابراین :

$$A'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{A(x+h)-A(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x)h}{h} = f(x)$$

این تقریب وقتی که h کوچکتر می‌شود به مقدار واقعی آن نزدیکتر می‌شود. می‌توانیم نرخ تغییرات واقعی $A(x)$ را به گونه دیگری نیز حساب کنیم. نمو A بین مساحت‌های مستطیل‌های پایینی و

بالایی(شکل زیر) به عرض h قرار دارد.



هر گاه L ارتفاع مستطیل پایینی و U ارتفاع مستطیل بالایی باشد، آنگاه $A(x+h)-A(x)$ بین Lh و Uh قرار دارد. پس :

$$L \le \frac{A(x+h)-A(x)}{h} \le U$$

وقتی h به صفر نزدیک می‌شود، فاصله مورد نظر یعنی $[x, x+h]$ به نقطهٔ تنهای x تبدیل می‌گردد. چون g پیوسته است، هم مقدار ماکزیمم تابع (U) و هم مقدار می‌نیمم تابع (L) در این فاصله به $f(x)$ نزدیک می‌شود و باید داشته باشیم :

$$\lim_{h\to ۰} \frac{A(x+h)-A(x)}{h} = f(x)$$

یعنی $A\ \ (x)=f(x)$.

مثال ۱ : اگر $F(x)=\int_{۰}^{x} t^{۲}e^{t}dt$ باشد، $F\ \ (x)$ را محاسبه کنید.

حل : توجّه داریم که تابع $t^{۲}e^{t}$ بر روی IR پیوسته است. بنابراین، با توجه به اولین قضیه اساسی حساب انتگرال خواهیم داشت :

$$F\ \ (x)=x^{۲}e^{x}$$

مثال ۲ : اگر $F(x)=\int_{۰}^{x}\frac{\sin t dt}{t^{۲}+۱}$ باشد، $F\ \ (x)$ را محاسبه کنید.

حل : در اینجا تابع زیر علامت انتگرال $\frac{\sin t}{t^{۲}+۱}$ می‌باشد، این تابع بر روی IR پیوسته است. بنابراین، با توجه به اولین قضیه اساسی حساب انتگرال داریم $F'(x)=\frac{\sin x}{x^{۲}+۱}$ که در آن $x \in IR$.

تعریف : تابع مساحت $A(x)$ را که برای آن داریم :

$$A\ \ (x)=f(x)$$

یک تابع اوّلیه $f(x)$ نیز می‌نامند.

اولین قضیه اساسی نشان‌دهنده این واقعیت است که هر تابع پیوسته دارای یک تابع اولیه است که همان تابع مساحت می‌باشد. البته هرگاه C مقدار ثابت دلخواهی باشد، $A(x) + C$ نیز یک تابع اولیه دیگر تابع $f(x)$ می‌باشد. زیرا :

$$(A(x) + C) \quad = A \quad (x) = f(x)$$

بنابراین اگر یک تابع دارای تابع اولیه باشد، دارای توابع اوّلیه بی‌شماری است که از افزودن مقادیر ثابت به هر تابع اوّلیه دیگر به دست می‌آیند. عمل تابع اوّلیه‌گیری در واقع عمل معکوس مشتق‌گیری است.

قضیه : (دومین قضیه اساسی حساب انتگرال)
اگر F یک تابع اوّلیه دلخواه تابع پیوسته f باشد، آنگاه.

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

مثال : انتگرال $\int_۱^۲ x^۲dx$ را حساب کنید.
حل : یک تابع اولیه از $f(x) = x^۲$ تابع $F(x) = \frac{۱}{۳}x^۳$ است.
بنابر دومین قضیه اساسی

$$\int_۱^۲ x^۲dx = F(۲) - F(۱) = \frac{۲^۳}{۳} - \frac{۱^۳}{۳} = \frac{۸}{۳} - \frac{۱}{۳} = \frac{۷}{۳}$$

متذکر می‌شویم که هر تابع اولیه دیگر f نیز همان مقدار را برای انتگرال معین به دست خواهد داد. برای نمونه، $G(x) = \frac{x^۳}{۳} + ۴۷$ یک تابع اولیه دیگر $f(x) = x^۲$ است و

$$G(۲) - G(۱) = (\frac{۲^۳}{۳} + ۴۷) - (\frac{۱^۳}{۳} + ۴۷)$$

$$= \frac{۸}{۳} + ۴۷ - \frac{۱}{۳} + ۴۷ = \frac{۷}{۳}$$

چون مقدار ثابت ۴۷ به عنوان یک جمله هم در محاسبه $G(۲)$ و هم در محاسبه $G(۱)$ ظاهر می‌شود وقتی که تفاضل این دو مقدار را محاسبه می‌کنیم حذف می‌گردد. هرگاه ۴۷ را با هر مقدار ثابت و دلخواه دیگر C تعویض کنیم باز همان نتیجه به‌دست می‌آید.

نمادی که غالباً برای $F(b) - F(a)$ مورد استفاده قرار می‌گیرد عبارت است از :

$$F(x)]_a^b \quad \text{و یا} \quad F(x)]_{x=a}^{x=b}$$

معمولاً تابع اولیه تابع $f(x)$ را با نماد $\int f(x)dx$

نیز نشان می‌دهند، دومین قضیه اساسی را می‌توانیم چنین بنویسیم

$$\int_a^b f(x)dx = \int f(x)dx]_a^b$$

$\int f(x)dx$ را **انتگرال نامعین** تابع $f(x)$ نیز می‌نامند.

مثال : مساحت زیر نمودار تابع $y=\frac{۱}{x^۲}$ از $x=۱$ تا $x=۴$ را حساب کنید.

حل : چون تابع $\frac{۱}{x^۲}$ در بازه $[۱,۴]$ مثبت و پیوسته است و $-\frac{۱}{x}$ یک تابع اوّلیه تابع $\frac{۱}{x^۲}$ می‌باشد

با توجه به دومین قضیه اساسی حساب انتگرال S مساحت موردنظر از رابطه زیر بدست می‌آید

$$S=\int_۱^۴ \frac{dx}{x^۲}=\left[-\frac{۱}{x}\right]_۱^۴=-\frac{۱}{۴}+۱=\frac{۳}{۴}$$

اکنون ببینیم چگونه دومین قضیه اساسی را می‌توانیم از اولین قضیه اساسی نتیجه‌گیری کنیم.

استدلال : فرض کنیم f تابعی پیوسته و F یک تابع اولیه آن باشد.

تابع مساحت :

$$A(x)=\int_a^x f(t)dt$$

را در نظر می‌گیریم.

از اینجا نتیجه می‌شود که $A(a)=۰$ و

$$(۱)\quad A(b)=\int_a^b f(t)dt$$

به استناد اولین قضیه اساسی می‌دانیم که A نیز یک تابع اولیه g می‌باشد. چون تفاضل دو تابع اولیه از یک تابع پیوسته مقدار ثابتی است (چرا؟) عدد ثابتی چون C هست به قسمی که

$$(۲)\quad A(x)=f(x)+C$$

اکنون مقدار C را پیدا می‌کنیم. با جایگزینی $x=a$ داریم :

$$A(a)=۰=F(a)+C$$

پس

$$(۳)\quad C=-F(a)$$

اکنون با جایگزینی $x=b$ در روابط (۱) و (۲) به دست می‌آوریم :

$$A(b)=\int_a^b f(x)dx \quad , \quad A(b)=F(b)+C$$

از این دو رابطه و رابطه (۳) خواهیم داشت :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

نکته : اهمیت دومین قضیه اساسی در این است که کافی است برای یافتن مقادیر انتگرال‌های معین توجه‌مان را به محاسبه توابع اولیه معطوف بکنیم. بنابراین لازم است روش‌های محاسبه توابع اولیه (انتگرال‌های نامعین) را قبلاً در دست داشته باشیم.

محاسبه تابع اولیه

همانگونه که قبلاً گفتیم تابع اولیه عکس مشتق‌گیری است. عمل محاسبه تابع اولیه تابعی مانند f به منزلهٔ یافتن تابعی مانند g است که :

$$g \quad (x) = f(x)$$

به عبارت دیگر مشتق تابعی در دست است می‌خواهیم خود تابع را پیدا کنیم. به ذکر چند مثال می‌پردازیم.

مثال ۱ : یک تابع اولیه تابع $f(x) = ۲x$ را پیدا کنید.

حل : چون $(x^۲) \quad = ۲x$ بنابراین تابع $F(x) = x^۲$ یک تابع اولیه تابع $f(x) = ۲x$ است.

مثال ۲ : یک تابع اولیه تابع $g(x) = \cos x$ را پیدا کنید.

حل : چون $(\sin x) \quad = \cos x$، ملاحظه می‌کنیم که $G(x) = \sin x$ یک تابع اولیه f می‌باشد.

متذکر می‌شویم که ما صحبت از «یک تابع اولیه» می‌کنیم نه «تابع اولیه»، زیرا هر تابع می‌تواند تعداد بی‌شماری تابع اولیه داشته باشد. برای مثال، هر یک از توابع

$f_۱(x) = x^۲$ و $f_۲(x) = x^۲+۳$ و $f_۳(x) = x^۲ + \sqrt{۳}$

و $f_۴(x) = x^۲+\pi$ تابع اولیهٔ تابع $f(x)=۲x$ می‌باشند. زیرا مشتق هریک از آن‌ها برابر $۲x$ می‌باشد.

ولی همه این توابع در یک چیز مشترک‌اند. همگی به صورت $f(x) = ۲x + C$ می‌باشند که در آن C مقدار ثابتی است (در مثال‌های فوق به ترتیب $C = ۰$، $C = ۳$، $C = \sqrt{۳}$ و $C = \pi$). یقیناً برای هر مقدار عددی دلخواه که به C نسبت دهیم یک تابع اولیه دیگر از تابع $x \mapsto ۲x$ حاصل خواهد شد.

نماد انتگرال $\int$ وقتی بدون حدود انتگرال‌گیری به کار می‌رود منظور یک تابع اولیه عمومی است. به همین خاطر

$$\int f(x)\,dx$$

را **انتگرال نامعین یا تابع اولیه عمومی** f می‌نامیم.

وقتی تابع پیوسته f و یک تابع اولیه مشخص و بخصوص آن، مثل F در دست باشد (F = f) تابع اولیه عمومی f را می‌توانیم به صورت

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

بنویسیم. این فرمول همهٔ توابع اولیه‌های ممکن تابع f را به دست می‌دهد. به عبارت دیگر، وقتی یک تابع اولیه f را پیدا بکنیم، اساساً همهٔ توابع اولیه f نیز مشخص شده‌اند. به عنوان مثال

$$\int ۲x\,dx = x^{۲} + C$$

که در آن C مقدار ثابتی است. بعد از این، در محاسبات توابع اولیه از ذکر این که C مقدار ثابتی است خودداری می‌کنیم.

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

نکته : در مسائل کاربردی که غالباً در علوم دیگر (فیزیک، شیمی، مکانیک و کلیه علوم وابسته به ریاضیات) با آن سروکار داریم، معمولاً یک تابع اولیه با شرایط ویژه‌ای موردنظر می‌باشد. این شرایط ویژه را شرایط اولیه (یا داده‌های اولیه) می‌نامند. به ذکر مثالی در این مورد می‌پردازیم.

مثال : تابع اولیه F از تابع f با ضابطهٔ $f(x) = ۳x^{۲}$ را که در شرط اولیه $F(-۲) = ۵$ صدق کند، به دست آورید.

حل : چون $(x^{۳}) = ۳x^{۲}$، تابع اولیه F باید به صورت :

$$F(x) = x^{۳} + C$$

باشد که C مقدار ثابتی است. شرط اولیه مشخص می‌کند که

$$۵ = F(-۲) = (-۲)^{۳} + C = (-۸) + C$$

و از این‌جا $C = ۱۳$ به‌دست می‌آید. بنابراین

$$F(x) = x^{۳} + ۱۳$$

تابع اولیه مورد نظر است.

چکیده

استفاده‌های مختلف از نماد $\int$ نتیجه‌های بسیار مختلفی به دست می‌دهد. وقتی این نماد بدون حدود انتگرال‌گیری باشد، انتگرال نامعین زیر

$$\int f(x)\,dx$$

همان تابع اولیه عمومی f می‌باشد، و این نمایشگر خانواده کاملی از توابع می‌باشد.

از طرف دیگر، وقتی حدود انتگرال‌گیری موجود باشد، انتگرال معین

$\int_a^b f(x)dx$

یک عدد حقیقی مشخص A است که با مساحت علامت‌دار (مثبت یا منفی) تحت نمودار $y = f(x)$ بر فاصله $[a, b]$ متناظر می‌گردد.

مثال : $\int (۴x - ۳)\, dx$ و $\int_۱^۲ (۴x - ۳)dx$ را حساب کنید.

حل : چون $(۲x^۲ - ۳x) \quad = ۴x - ۳$، انتگرال نامعین عبارت است از :

$$\int (۴x - ۳)\, dx = ۲x^۲ - ۳x + C$$

که در آن C مقدار ثابتی است. از سوی دیگر، انتگرال معین

$$\int_۱^۲ (۴x - ۳)dx = ۳$$

و این برابر مساحت ناحیه ذوزنقه‌ای شکل تحت نمودار $y = ۴x - ۳$ بر فاصله $[۱,۲]$ می‌باشد.

فرمول‌ها و ویژگی‌های تابع اولیه

هر فرمول مشتق برای هر تابع مشتق‌پذیر به طور خودکار یک فرمول تابع اولیه نظیر فراهم می‌کند.

مثال : $\int x^r dx$ را که در آن r ثابت و $r \neq -۱$ پیدا کنید.

حل : می‌دانیم که برای هر r ,$(x^{r+۱}) \quad = (r + ۱)x^r$. چون مشتقات دارای ویژگی

$$(cf) \quad = cf$$

هستند، ملاحظه می‌کنیم که :

$$(\frac{x^{r+۱}}{r+۱})' = x^r$$

در اینجا ذکر این نکته مهم است که به منظور احتراز از تقسیم بر صفر لازم است که : $r \neq -۱$ نتیجه می‌گیریم که

$$\int x^r dx = \frac{x^{r+۱}}{r+۱} + C \qquad (r \neq -۱)$$

که در آن C ثابت دلخواهی است.

فرمول‌های خطی : ویژگی‌های خطی مشتق طبیعتاً ویژگی‌های خطی توابع اولیه را سبب می‌گردند. به عبارت دیگر، برای هر مقدار ثابت c،

$$\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$$

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

ویژگی‌های خطی انتگرال‌گیری به ضمیمه فرمولی که در مثال قبل ارائه گردید به ما این امکان را می‌دهد تا بتوانیم تابع اولیه هر تابع چند جمله‌ای را محاسبه کنیم.

مثال : $\int(5x^4-3x^3+7x^2+x-8)dx$ را حساب کنید.

حل : جمله به جمله انتگرال‌گیری کرده، ضرایب را بیرون برده و از فرمول $\int x^r dx=\frac{x^{r+1}}{r+1}+C$ استفاده می‌کنیم.

$$\int(5x^4-3x^3+7x^2+x-8)dx$$

$$=5\int x^4dx-3\int x^3dx+7\int x^2dx+\int xdx-8\int dx$$

$$=5\frac{x^5}{5}-3\frac{x^4}{4}+7\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-8x+C$$

$$=x^5-\frac{3x^4}{4}+\frac{7x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-8x+C$$

می‌توانیم پاسخ خود را با مشتق‌گیری کنترل و آزمایش کنیم :

$$(x^5-\frac{3x^4}{4}+\frac{7x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-8x+C)'$$

$$=5x^4-3x^3+7x^2+x-8$$

این یک راه مطمئن برای آزمون درستی تابع اولیه است. **از جواب مشتق گرفته و آن را با تابع نخستین مقایسه کنید.**

مثال : $\int(\frac{4x^{\frac{2}{3}}}{7}-5\sqrt{x}+\frac{\pi}{3x^2})dx$ را حساب کنید.

حل : به منظور آسانی در عمل از نماهای کسری برای هر جمله استفاده می‌کنیم

$$\int(\frac{4x^{\frac{2}{3}}}{7}-5\sqrt{x}+\frac{\pi}{3x^2})dx$$

$$=\int(\frac{4}{7}x^{\frac{2}{3}}-5x^{\frac{1}{2}}+\frac{\pi}{3}x^{-2})dx$$

$$=(\frac{4}{7}\frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}-5\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+\frac{\pi}{3}\frac{x^{-1}}{-1})+C$$

$$= \frac{12x^{\frac{5}{3}}}{35} - \frac{10x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{\pi}{3x} + C$$

دیگر فرمول‌های تابع اولیه‌گیری را می‌توان با معکوس کردن عمل مشتق‌گیری به دست آورد.
برخی فرمول‌های اساسی تابع اولیه‌گیری (انتگرال‌گیری) در زیر آمده است.
(k مقدار ثابت)

۱ـ $\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$

۲ـ $\int du = u + C$

۳ـ $\int \frac{du}{u} = \mathrm{Ln}|u| + C$

۴ـ $\int \sin u\,du = -\cos u + C$

۵ـ $\int \cos u\,du = \sin u + C$

۶ـ $\int [f(u) \pm g(u)]du = \int f(u)du \pm \int g(u)\,du$

۷ـ $\int u^p du = \frac{1}{p+1}u^{p+1} + C \quad , \quad (p \neq -1) \quad , \quad (p \in IR)$

مسائل

فرمولی به صورت $F(x) + C$، که در آن F یک تابع اولیه برای تابع زیر انتگرال است، برای هر یک از انتگرال‌های نامعین زیر بیابید.

۱ـ $\int (x^2 + x + 1)dx$

۲ـ $\int (3x^2 + 2x + 1)dx$

۳ـ $\int \frac{x^4}{2}dx$

۴ـ $\int \sqrt{17}dx$

۵ـ $\int \sqrt{x}dx$

۶ـ $\int \frac{2}{x^4}dx$

۷ـ $\int (5\sin(x) - 3\cos(x))dx$

۸ـ $\int \sqrt[5]{x}dx$

۹ـ $\int x^{\frac{7}{3}}dx$

۱۰ـ $\int \frac{x^3 - x^{-3}}{3}dx$

۱۱ـ $\int \pi x^{100}dx$

۱۲ـ $\int (\sin^2(x) + \cos^2(x))dx$

فرض کنیم G تابع مساحت با ضابطه تعریف $G(x) = \int_1^x \frac{\sin(2t)}{1+t^2}dt$ باشد در هریک از تمرین‌های

زیر y را پیدا کنید.

۱۳ـ $y = G(x^{۲})$ ۱۴ـ $y = G\,(x)$

۱۵ ـ $y = (G(x))^{۲}$ ۱۶ـ $y = x^{۲}G\,(x)$

۱۷ـ $y = G\quad(x)$ ۱۸ ـ $y = \frac{G(x)}{x^{۲}}$

با استفاده از دومین قضیه اساسی، انتگرال‌های معین مفروض در تمرین‌های **۱۹** تا **۲۴** را محاسبه کنید :

۱۹ــ $\int_{-۱}^{۳}(x^{۲} + x + ۱)dx$

۲۰ــ $\int_{۱}^{۲/۵}(۳x^{۲} + ۲x + ۱)dx$

۲۱ــ $\int_{۴}^{۹}\sqrt{x}dx$

۲۲ــ $\int_{\frac{\pi}{۲}}^{\pi}(۵\sin x - ۳\cos x)dx$

۲۳ ــ $\int_{۱}^{۳}(\sin^{۲} x + \cos^{۲} x)dx$

۲۴ــ $\int_{-۴}^{-۱}\frac{۱}{x^{۲}}dx$

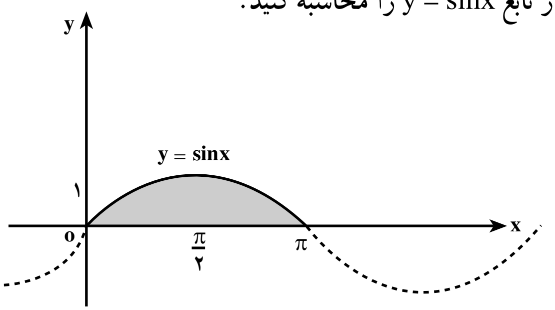
۲۵ــ دانش‌آموزی از دومین قضیه اساسی استفاده کرده و انتگرال زیر را محاسبه کرده است :

$$\int_{-۱}^{۱}\frac{۱}{x^{۲}}dx = -\frac{۱}{x}\Big]_{-۱}^{۱} = -۱-۱ = -۲$$

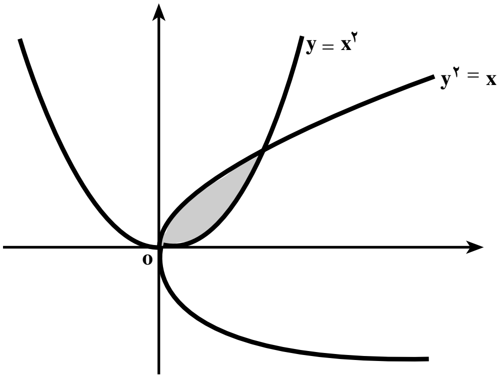
آیا این جواب قابل قبول است؟

نمودار $y = \frac{۱}{x^{۲}}$ را رسم کنید و بگویید که چرا جواب فوق قابل قبول نیست. اشتباه دانش‌آموز در کجاست؟

۲۶ــ مساحت یک طاق تحت نمودار تابع $y = \sin x$ را محاسبه کنید.



۲۷ــ مساحت ناحیه هاشور زده در شکل زیر را محاسبه کنید.



۲۸ــ $\int_{۰}^{۱} e^{۲x}dx$ را محاسبه کنید.

۲۹ــ $\int_{۱}^{۵} \frac{dx}{x}$ را محاسبه کنید.

۳۰ــ $\int_{۱}^{۵} \frac{xdx}{x^{۲}+۱}$ را محاسبه کنید.

۳۱ــ $\int_{۰}^{۲} e^{۵x}dx$ را محاسبه کنید.

نیوتن و لایبنیتز

بسیاری از مورخین علوم را باور بر این است که اسحاق نیوتن بزرگترین متفکر ریاضی همه قرون و اعصار بوده است. نیوتن در بین سال‌های ۱۶۴۲ و ۱۷۲۷ می‌زیسته است. کتاب **اصول ریاضیات** نیوتن که در سه مجلد به رشته تحریر درآمده است به عنوان مؤثرترین اثر علمی تاریخ علم شناخته شده است. مشهور است که نیوتن با افتادن سیبی از درخت، که به سر وی اصابت کرد، موفق شد که قانون جاذبه عمومی را کشف کند. البته از سال‌ها قبل فیزیکدان‌هایی نظیر گالیله و کپلر در پی آن بودند تا علت گردش سیاره‌ها را به دور خورشید توجیه کنند. به هر تقدیر صرف‌نظر از این‌که چنین روایتی در مورد نیوتن درست باشد یا نه، نیوتن و ریاضیدان آلمانی گاتفریدلایبنیتز (متولد به سال ۱۶۴۶ و متوفی به سال ۱۷۱۶ میلادی)، قطعاً اولین کسانی بودند که به اهمیت رابطه اساسی بین شیب یک نمودار و مساحت تحت آن پی‌بردند. شواهد نسبتاً قوی در دست است که نیوتن و لایبنیتز تفکر یکسانی در این مورد داشتند، لکن مستقل از یکدیگر عمل می‌کردند. تفکر این دو ریاضیدان به سرعت به عنوان انقلابی در علوم ریاضی تلقی گردید. متأسفانه مشاجره‌های تلخی نیز بین این دو برسر کشف حساب دیفرانسیل و انتگرال پدید آمد و اتهاماتی به یکدیگر نسبت دادند. معهذا با آن که نیوتن و لایبنیتز تحولات شگرفی در ریاضیات قرن هفدهم پدید آوردند، ما می‌توانیم سابقه بسیاری از پایه‌های فکری مفاهیم دیفرانسیل و انتگرال را به روزگاران بسیار گذشته و ارشمیدس نسبت دهیم. نظریه‌های نیوتن و لایبنیتز در مورد حساب دیفرانسیل و انتگرال در واقع، باروری و بهره‌وری قرن‌ها توسعه و تصفیه افکار کسانی چون ارشمیدس می‌باشد.

خود نیوتن، دینی را که به ارشمیدس داشته است چنین بیان می‌دارد : «اگر من توانسته‌ام بیشتر از دیگران چیزها را ببینم (کشف کنم) به واسطه آن است که بر شاخ‌های غول‌هایی چون ارشمیدس ایستاده‌ام».

آری به درستی که کار مستمر و تلاش گروهیِ نسل‌های انسانی است که در برهه‌هایی از زمان به‌ثمر می‌رسد و شکوفا می‌گردد، نه تلاش‌های فردی که در لحظاتی از زمان چون موجی عظیم بروز می‌کند ولی دیری نمی‌پاید که فروکش کرده و محو می‌گردد.

منابع

فارسی

۱ ــ غلامحسین مصاحب، آنالیز حقیقی، انتشارات جیبی ۱۳۴۵

۲ ــ دکتر محمدحسن بیژن‌زاده، غلامعلی فرشادی، یدالله ایلخانی‌پور، حساب‌ان ۱ و ۲، وزارت آموزش و پرورش چاپ ۱۳۷۶

۳ ــ حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی، ریچارد. ا. سیلورمن ترجمه دکتر علی‌اکبر عالم‌زاده

انگلیسی

4 ـ Calculus, Larson and others, 4 th Edition, Heath & Compang, 1990.

5 ـ Calculus and analytic geometry, Pre-University Level, Leithold.

6 ـ Intermediate Algebra for colledge Students, Allen R. Angel, Prentice Hall, New Jersey.

همکاران محترم، صاحب‌نظران، دانش‌آموزان عزیز و اولیای آنان می‌توانند نظر اصلاحی خود را درباره‌ی مطالب این کتاب از طریق نامه به نشانی تهران – صندوق پستی ۴۸۷۴/۱۵۸۷۵ – گروه درسی مربوط و یا پیام‌نگار (Email) talif@talif.sch.ir ارسال نمایند.

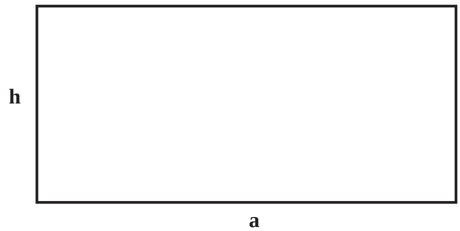
دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتب درسی

فصل ۶

انتگرال

مساحت

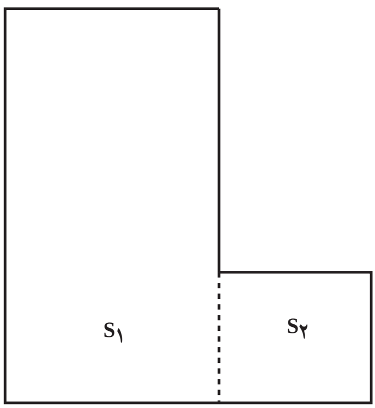
می‌دانیم مساحت یک مستطیل برابر است با حاصل‌ضرب طول و عرض آن؛



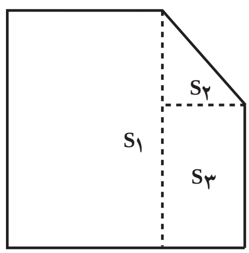
$S = ah$

هرگاه شکلی از مستطیل‌ها یا اشکال دیگری تشکیل شده باشد، مساحت شکل اصلی برابر است با حاصل‌جمع مساحت اجزای تشکیل دهندهٔ آن شکل.

در این شکل‌ها، S مساحت کل شکل و هریک از S_1، S_2 مطابق شکل مساحت یک ناحیه کوچکتر از شکل اصلی است. این ویژگی مساحت را که «مساحت یک شکل نامنظم برابر است با حاصل‌جمع مساحتهای اجزای تشکیل دهنده آن»، ویژگی **جمع‌پذیری** مساحت می‌نامند.

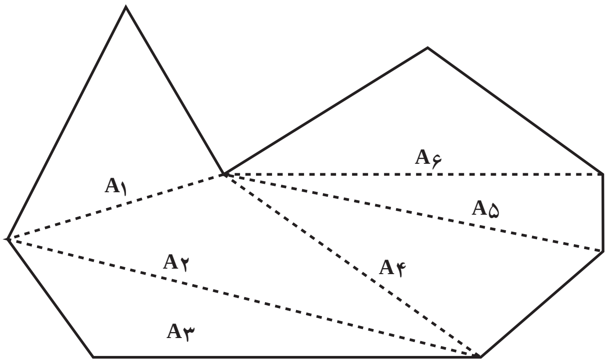


$S = S_1+S_2$



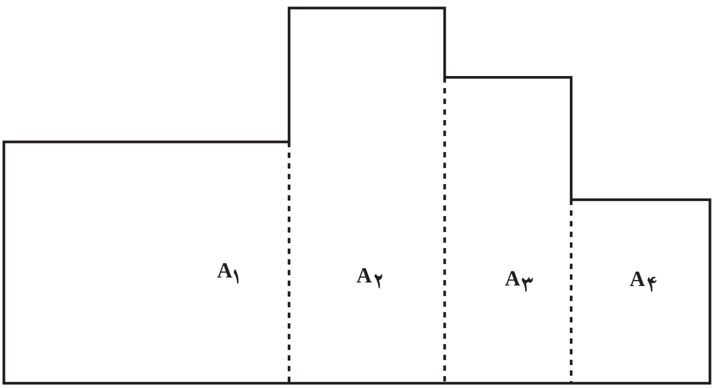
$S = S_1+S_2+S_3$

از این ویژگی برای محاسبه مساحت چند ضلعی‌های غیرمنتظم نیز استفاده می‌کنیم :



$$A = A_{۱} + A_{۲} + A_{۳} + A_{۴} + A_{۵} + A_{۶}$$

گاهی مناسب‌تر آن است که شکل مورد نظر را به مستطیل‌های کوچکتر تقسیم کرده و مساحت این مستطیل‌ها را محاسبه و سپس با هم جمع کنیم.



$$A = A_{۱} + A_{۲} + A_{۳} + A_{۴}$$

یونانیان باستان، این روش را حتی برای محاسبه مساحت شکل‌هایی که محیط آن‌ها از خط مستقیم شکسته تشکیل نمی‌شد به کار می‌بردند. ارشمیدس برای محاسبه مساحت دایره از چندضلعی‌هایی استفاده کرد که برخی از آن‌ها دایره را در برمی‌گرفت (چند ضلعی‌های محیطی) و بعضی از آن‌ها در درون دایره قرار می‌گرفتند. (چند ضلعی‌های محاطی) طبیعی است که مساحت دایره کوچکتر از مساحت چندضلعی‌های محیطی و بزرگتر از مساحت چندضلعی‌های محاطی است و وقتی تعداد اضلاع چنین

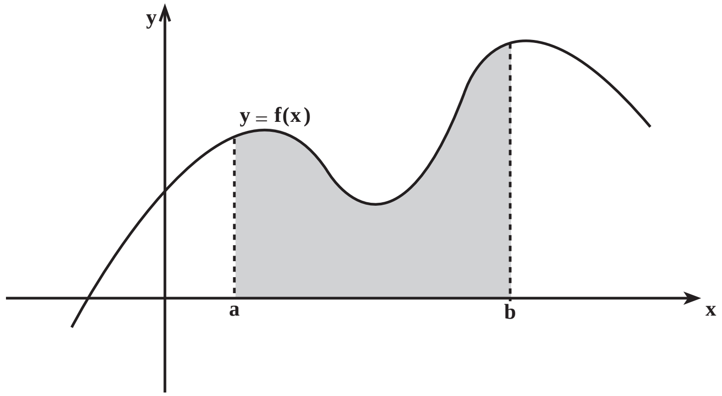
چندضلعی‌هایی را بیشتر و بیشتر می‌کنیم مساحت دایره با تقریب دلخواه به مساحت این چندضلعی‌ها نزدیک می‌شود. به زبان فنی‌تر، مساحت دایره حد مساحت‌های چندضلعی‌های محاطی (یا محیطی) است وقتی که تعداد اضلاع را بزرگ می‌کنیم و چندضلعی‌ها را منتظم اختیار کنیم. ارشمیدس با این روش توانست مقدار π را تا چند رقم اعشار محاسبه کرده و برای اولین بار فرمول مساحت دایره $S = \pi r^{2}$ را برحسب شعاع آن به‌دست آورد.

انتگرال معین

روشی که ارشمیدس برای محاسبه مساحت دایره به‌کار برده است اساس تعریف انتگرال معین است. انتگرال معین را می‌توانیم مساحت زیر نمودار یک تابع تعریف کنیم. البته بعد از فرمول‌بندی این مفهوم مایلیم که برای هر تابع که بر یک بازه از اعداد حقیقی تعریف شده باشد انتگرال معین آن را محاسبه کنیم. برای شروع تعریف انتگرال معین، توابعی را مورد نظر قرار می‌دهیم که بر یک بازه تعریف شده و نمودار آن‌ها بالای محور x قرار دارد.

در واقع روشی که در این کتاب برای تعریف انتگرال‌های معین اعمال می‌کنیم در سه مرحله متوالی و مشخص و به طریقه زیر ارائه می‌گردد.

تعریف : فرض کنیم تابع f در بازۀ بسته [a,b] پیوسته و برای هر $f(x) \geq 0, x \in [a, b]$. در این صورت منظور از نِماد $\int_a^b f(x)dx$
(بخوانید انتگرال تابع $f(x)$ از a تا b) مساحت ناحیه زیر نمودار $y = f(x)$ است که بالای محور x و بین خطوط $x = a$ و $x = b$ قرار دارد (شکل الف). مقادیر a و b را **حدود انتگرال‌گیری** می‌نامیم. dx نمایش این است که متغیر انتگرال‌گیری x است.

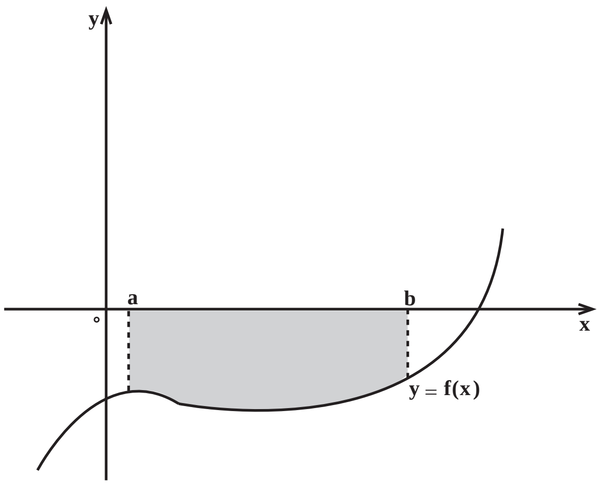


شکل الف) $\int_a^b f(x)dx$ **مساحت ناحیه سایه زده شده می‌باشد و عددی است مثبت.**

بنابراین

انتگرال توابع نامنفی (یعنی توابعی که فقط مقادیر مثبت یا صفر اختیار می‌کنند) همیشه عددی مثبت (یا صفر) است و برابر مساحت ناحیه زیر نمودار و محدود به محور xها و حدود انتگرال‌گیری است.

تعریف : فرض کنیم تابع f در بازهٔ بسته [a,b] پیوسته و برای هر $x \in [a, b]$ ، $f(x) \leq 0$. در این صورت منظور از نماد $\int_a^b f(x)dx$
قرینه مساحت ناحیه بالای نمودار $y = f(x)$ است که به محور x و خطوط $x = a$ و $x = b$ محدود شده باشد (شکل ب).

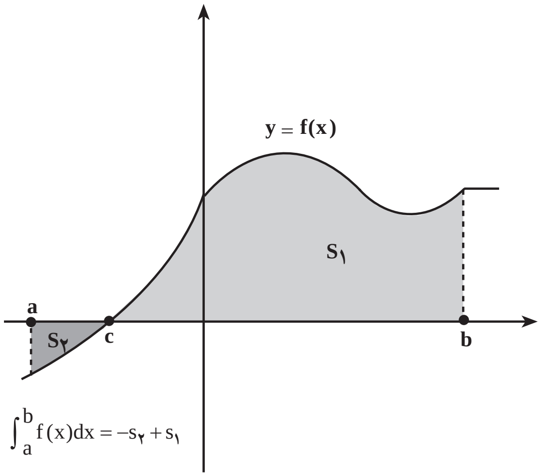


شکل ب) $\int_a^b f(x)dx$ برابر قرینه مساحت ناحیه سایه زده شده می‌باشد و عددی است منفی.

بنابراین

انتگرال توابعی که فقط مقادیر منفی (یا صفر) اختیار می‌کنند، یعنی توابعی که نمودار آن‌ها زیر محور x قرار دارد برابر قرینه مساحت ناحیه بالای نمودار و محدود به محور x و حدود انتگرال‌گیری است. پس انتگرال اینگونه توابع همیشه عددی منفی یا صفر است.

تعریف : فرض کنیم f تابعی پیوسته بربازۀ $[a,b]$, $a<c<b$ و برای هر x که $x \in [a,c]$, $f(x)$ همواره مثبت (منفی) و برای هر x که $x \in [c,b]$, $f(x)$ همواره منفی (مثبت) باشد. در این صورت قرار می‌دهیم.
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$



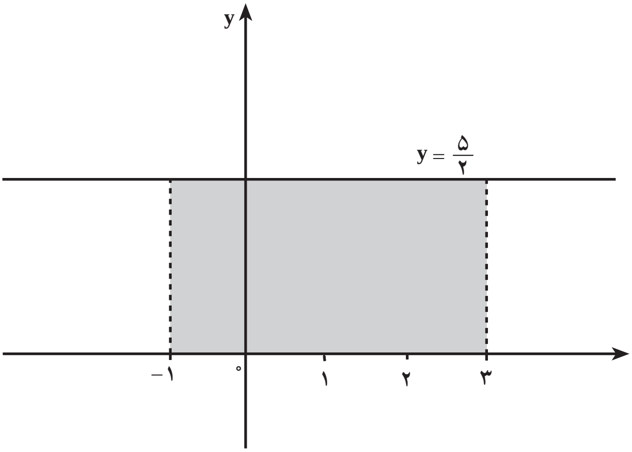
شکل ج) برای توابعی که نمودار آن‌ها در قسمتی از دامنه‌شان پایین محور x و در قسمت دیگری از دامنه بالای محور xها قرار دارد، $\int_a^b f(x)dx$ به عنوان جمع جبری مساحت‌های بالای محور xها و پایین محور xها تعریف می‌گردد. مساحت بالای محور x با همان مقدار (مثبت) و مساحت پایین محور xها با علامت منفی (قرینه مساحت) در محاسبه انتگرال مطابق تعریف‌های قبلی محاسبه می‌گردند.

تعریف اخیر در واقع انتگرال معین هر تابع پیوسته را در حالت کلی ارائه می‌دهد. هرگاه در بیش از دو بازه تابع مورد نظر تغییر علامت دهد باز به همین روش عمل می‌کنیم. با این تعریف هر جا نمودار بالای محور xها است اندازه مساحت و هرجا که نمودار پایین محور xها است قرینه مساحت مربوطه را در محاسبه آورده می‌شوند. باید به خاطر داشته باشیم که مساحت همیشه کمیتی است مثبت ولی انتگرال معین می‌تواند مثبت، منفی یا صفر باشد.

اکنون با ذکر مثال‌هایی به محاسبه بعضی انتگرال‌های ساده خطی می‌پردازیم.

مثال‌هایی از انتگرال معین

۱ــ فرض کنیم $c>0$ و $f(x)=c$ تابع ثابت با مقدار ثابت c باشد. سطح زیر نمودار این تابع در بازه $[a,b]$ مستطیلی است به ارتفاع c و قاعده $b-a$ که همان طول فاصله انتگرال‌گیری است.
$$\int_a^b c\,dx = c(b-a)$$



مساحتی که با $\int_{-۱}^{۳}\frac{۵}{۲}dx$ نشان داده شده است.

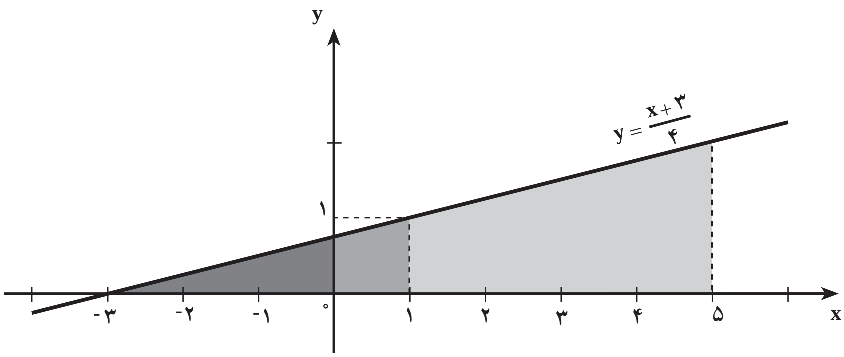
برای مثال

$$\int_{-۱}^{۳}\frac{۵}{۲}dx=\frac{۵}{۲}(۳-(-۱))=۱۰$$

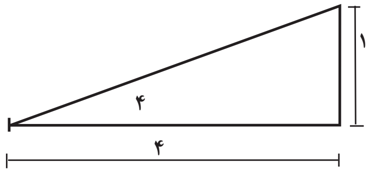
مثال ۱ : مقادیر انتگرال‌های معین زیر را پیدا کنید.

$$\int_{-۳}^{۱}\frac{x+۳}{۴}dx \quad , \quad \int_{۰}^{۵}\frac{x+۳}{۴}dx$$

حل : برای محاسبه انتگرال‌ها نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x+۳}{۴}$ را در بازه‌های مربوطه رسم می‌کنیم :

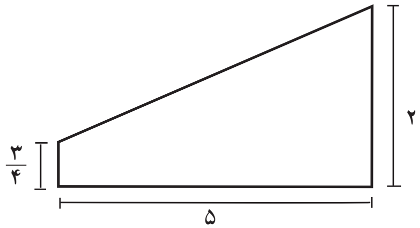


لذا انتگرال معین $\int_{-۳}^{۱}\frac{x+۳}{۴}dx$ برابر است با مساحت مثلث زیر



$$\text{مساحت} = (\frac{۱}{۲})\times ۴\times ۱ = ۲$$

و انتگرال معین $\int_{۰}^{۵}\frac{x+۳}{۴}dx$ برابر است با مساحت ذوزنقه زیر



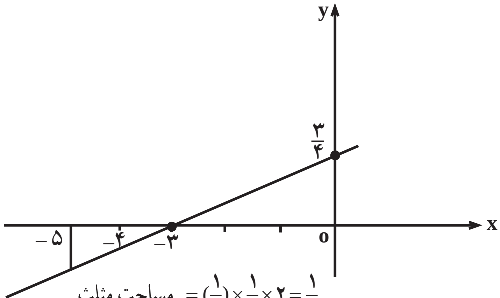
$$\text{مساحت} = \frac{۱}{۲}(\frac{۳}{۴}+۲)\times ۵ = \frac{۵۵}{۸}$$

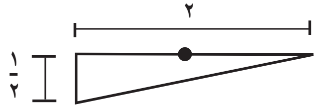
بنابراین داریم

$$\int_{۰}^{۵}\frac{x+۳}{۴}dx = ۶\frac{۷}{۸} \quad , \quad \int_{-۳}^{۱}\frac{x+۳}{۴}dx = ۲$$

مثال ۲ : انتگرال معین $\int_{-۵}^{-۳}\frac{x+۳}{۴}dx$ را محاسبه کنید.

حل : در اینجا نمودار تابع را در بازهٔ $[-۵ , -۳]$ درنظر می‌گیریم.





چون مساحت زیر محور x است، انتگرال برابر است با

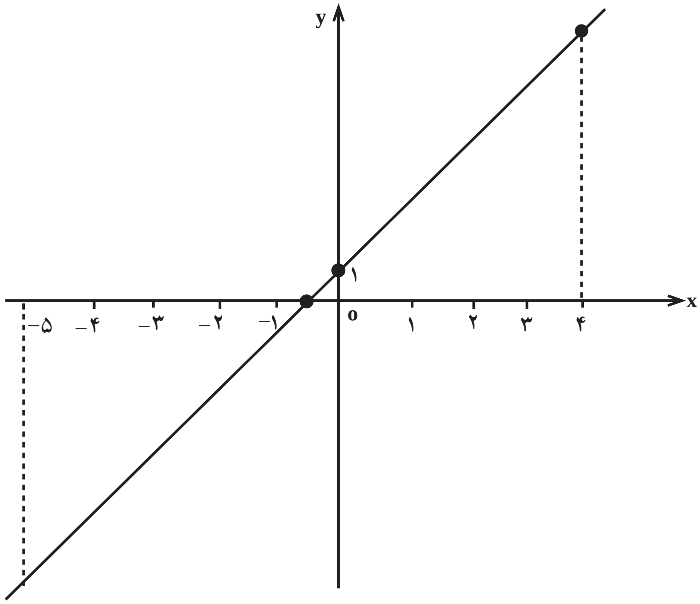
$$\int_{-۵}^{-۳}\frac{x+۳}{۴}dx = -\frac{۱}{۲}$$

مثال ۳ : مقدار $\int_{-۵}^{۴}(۲x+۱)dx$ را محاسبه کنید.

حل : این تابع در قسمتی از بازهٔ انتگرال‌گیری مقادیر مثبت و در قسمت دیگری از آن مقادیر منفی به خود می‌گیرد. و می‌بایست انتگرال مورد نظر را طبق تعریف به مؤلفه‌های مثبت و منفی آن تجزیه کرده و نتایج حاصله را جمع (**جمع جبری**) کنیم.

داریم
$$۲x+۱=۰ \Rightarrow x=-\frac{۱}{۲}$$

این تابع در بازه $\left[-۵,-\frac{۱}{۲}\right]$ منفی و در بازهٔ $\left[-\frac{۱}{۲},۴\right]$ مثبت می‌باشد.



$$\int_{-۵}^{۴}(۲x+۱)dx=\int_{-۵}^{-\frac{۱}{۲}}(۲x+۱)dx+\int_{-\frac{۱}{۲}}^{۴}(۲x+۱)dx$$

$$\int_{-۵}^{-\frac{۱}{۲}}(۲x+۱)dx=-\left[(\frac{۱}{۲})(\frac{۹}{۲})(۹)\right]=-\frac{۸۱}{۴}$$

$$\int_{-\frac{۱}{۲}}^{۴}(۲x+۱)dx=(\frac{۱}{۲})(\frac{۹}{۲})\times ۹=\frac{۸۱}{۴}$$

بنابراین
$$\int_{-۵}^{۴}(۲x+۱)dx=\frac{۸۱}{۴}+\frac{۸۱}{۴}=۰$$

نکته : اگر $a=b$ سطح زیر (بالای) نمودار تابع تبدیل به یک پاره‌خط می‌گردد. لذا در این حالت انتگرال معین را به‌عنوان ابزاری که مساحت چنین پاره‌خطی را اندازه می‌گیرد تلقی می‌کنیم که البته این مساحت برابر صفر است. به‌عبارت دیگر، برای هر تابع f که در $x=a$ تعریف شده باشد، قرار می‌دهیم

$$\int_a^a f(x) = ۰$$

برای کلیّت بخشیدن به مفهوم انتگرال، برای وقتی که $b<a$ نیز چنین عمل می‌کنیم :

تعریف : بر طبق قرارداد، توافق می‌کنیم که

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

مثلاً برای محاسبه انتگرال‌های $\int_{۴}^{-۵}(۲x+۱)dx$ ، $\int_{-۳}^{-۵}\frac{x+۳}{۴}dx$ ، $\int_{۱}^{-۳}\frac{x+۳}{۴}dx$ داریم

$$\int_{۴}^{-۵}(۲x+۱)dx = -\int_{-۵}^{۴}(۲x+۱)dx = ۰$$

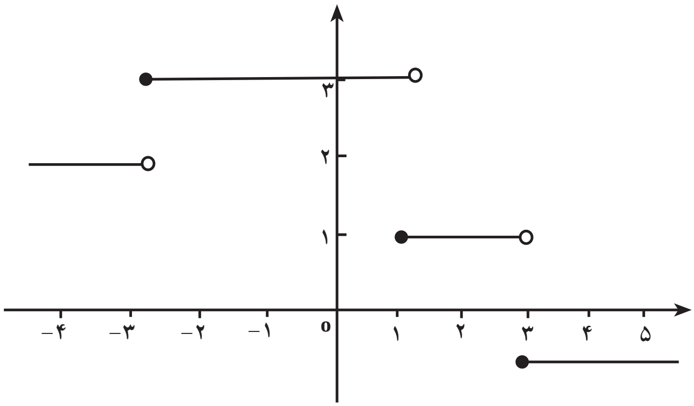
$$\int_{-۳}^{-۵}\frac{x+۳}{۴}dx = -\int_{-۵}^{-۳}\frac{x+۳}{۴}dx = -(-\frac{۱}{۲}) = \frac{۱}{۲}$$

$$\int_{۱}^{-۳}\frac{x+۳}{۴}dx = -\int_{-۳}^{۱}\frac{x+۳}{۴}dx = -(۲) = -۲$$

این سؤال قابل طرح است که چنانچه تابع مورد نظر در بازه انتگرال‌گیری پیوسته نباشد آیا می‌توانیم باز هم برای آن انتگرال معین تعریف کنیم؟

توابعی که پیوسته نیستند اصطلاحاً توابعی بدرفتار تلقی می‌شوند؛ امّا در میان اینگونه توابع بعضی‌ها کمتر بدرفتار هستند. برای نمونه یک تابع پله‌ای گرچه در بعضی نقاط دامنه‌اش پیوسته نیست، چندان هم بدرفتار نمی‌باشد. در این موارد بازه انتگرال‌گیری را در نقاطی از قلمرو که تابع در آنجا پیوسته نیست تجزیه کرده و بازه‌های کوچکتری به‌دست آوریم که تابع مفروض در هریک از این بازه‌ها پیوسته باشد.

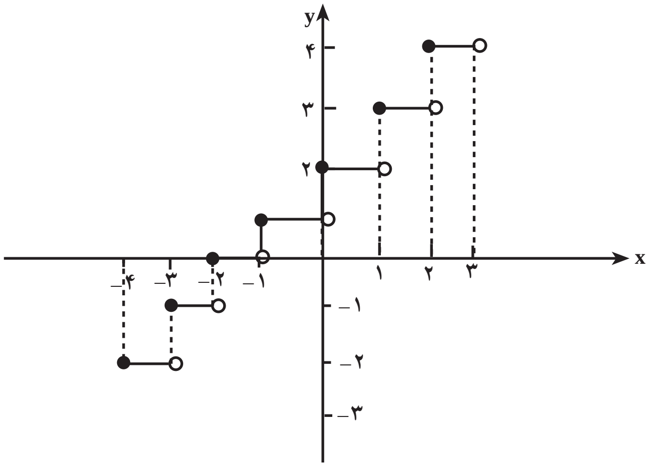
در شکل صفحه بعد نمودار یک تابع پله‌ای نشان داده شده است. همچنان‌که ملاحظه می‌شود این تابع در نقاط $x=-۳$ ، $x=۱$ و $x=۳$ پیوسته نیست. ولی جز این نقاط در سایر نقاط تابع پیوسته است. در واقع تعداد اندکی از نقاط دامنه (یا حتی در نقاط یک دنباله نامتناهی) که تابع در آنجا پیوسته نباشد در وجود انتگرال تأثیری ندارد.



مثالی از یک تابع پله‌ای

مثال : انتگرال معین $\int_{-۴}^{۳}([x]+۲)dx$ را محاسبه کنید.

حل : نمودار تابع $f(x)=[x]+۲$ در بازه $[-۴, ۳]$ در شکل زیر رسم شده است.



این تابع در نقاط صحیح $x=-۳$ ، $x=-۲$ ، $x=-۱$ ، $x=۰$ ، $x=۱$ و $x=۲$ ناپیوسته است.

$$\int_{-۴}^{۳}([x]+۲)dx=\int_{-۴}^{-۳}([x]+۲)dx+\int_{-۳}^{-۲}([x]+۲)dx+\int_{-۲}^{-۱}([x]+۲)dx$$

$$+\int_{-۱}^{۰}([x]+۲)dx+\int_{۰}^{۱}([x]+۲)dx+\int_{۱}^{۲}([x]+۲)dx+\int_{۲}^{۳}([x]+۲)dx$$

$$=(-۲)+(-۱)+۰+(+۱)+(+۲)+(+۳)+(+۴)=+۷$$

مسائل

مقدار انتگرال‌های معین ۱ تا ۱۰ را محاسبه کنید.

۱ـ $\int_{۱}^{۴}(۳x+۲)dx$

۲ـ $\int_{۱}^{۴}(۱-x)dx$

۳ـ $\int_{-۳}^{۲}xdx$

۴ـ $\int_{-۳}^{۳}|x|dx$

۵ـ $\int_{۰}^{۳}|۲x+۱|dx$

۶ـ $\int_{-۲}^{۳}|۲-x|dx$

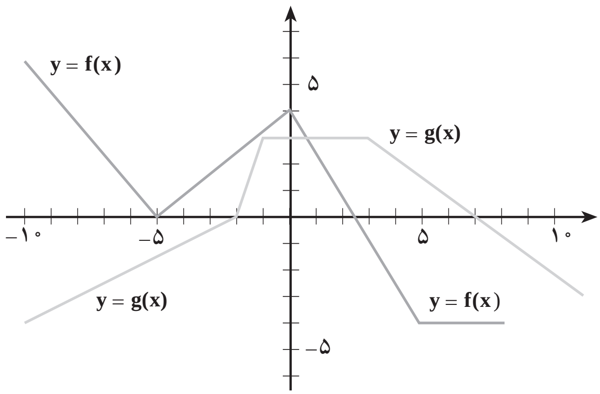
۷ـ $\int_{-۲}^{۴}۲[x]dx$

۸ـ $\int_{-۴}^{۳}([x]-۱)dx$

۹ـ $\int_{-۷}^{-۳}(-\frac{۵}{۲})dx$

۱۰ـ $\int_{۶}^{۲}(-۳)dx$

با استفاده از نمودار توابع f و g نشان داده شده در زیر، انتگرال‌های معین تمرین‌های ۱۱ تا ۲۰ را پیدا کنید.



۱۱ـ $\int_{-۶}^{۰}f(x)dx$

۱۲ـ $\int_{۶}^{۱۰}f(x)dx$

۱۳ـ $\int_{-۸}^{۲}g(x)dx$

۱۴ـ $\int_{-۱}^{۸}g(x)dx$

۱۵ـ $\int_{۰}^{۶}f(x)dx$

۱۶ـ $\int_{۲}^{-۲}f(x)dx$

۱۷ـ $\int_{-۵}^{۱۰}g(x)dx$

۱۸ـ $\int_{۶}^{-۲}f(x)dx$

۱۹ـ $\int_{-۶}^{۶}f(x)dx$

۲۰ـ $\int_{-۵}^{۵}g(x)dx$

انتگرال توابع غیرخطی

همچنان‌که ملاحظه کردیم، در این بخش انتگرال توابع ساده‌ای را که نمودار آن‌ها خطی یا قطعه‌ای خطی است، محاسبه کردیم.

اکنون این سؤال پیش می‌آید که هرگاه نمودار تابع مورد نظر یک منحنی (غیر خطی) باشد، انتگرال آن چگونه محاسبه می‌گردد؟ در این حالت مساحت مورد نظر یک شکل ساده هندسی متشکل از چند مثلث و مستطیل نمی‌باشد تا بتوانیم به آسانی انتگرال معین را محاسبه کنیم.

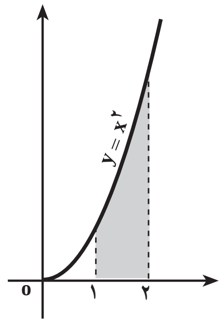
مثلاً $\int_{۱}^{۴} x^{۲}dx$ چقدر است؟

همچنان‌که در دو شکل«ب» و «ج» نشان داده شده است $\int_{۱}^{۲} x^{۲}dx$ را می‌توانیم با انتخاب نقاطی در بازهٔ $[۱,۲]$ و با استفاده از مساحت مستطیل‌های به‌دست آمده با تقریب محاسبه کنیم. در شکل (الف)، بخشی از مساحت مستطیل‌ها زیر نمودار بوده و در مجموع مساحت مستطیل‌ها از مساحت زیر نمودار کمتر است. پس در این حالت انتگرال با تقریب نقصانی محاسبه می‌شود. در شکل (ج)، بخش مساحت مستطیل‌ها بالای نمودار تابع بوده و حاصل‌جمع مساحت مستطیل‌ها افزون بر مساحت زیر منحنی است. در این حالت گوییم انتگرال با تقریب اضافی محاسبه شده است.

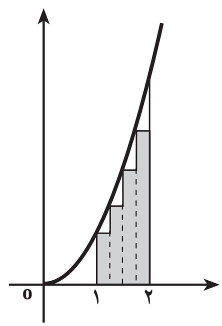
واضح است که هر چقدر تعداد نقاط انتخاب شده در بازه را زیاد کنیم و طول بازه‌های جزء را کوچکتر کنیم مقدار انتگرال محاسبه شده با تقریب‌های بهتری انتگرال واقعی (مساحت زیر نمودار) را به‌دست می‌دهد.

این روش اساس محاسبه انتگرال‌ها با روش‌های تقریبی است که معمولاً در دوره‌های عالی‌تر دروس ریاضیات مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

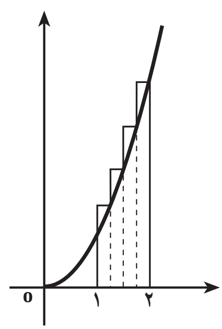
ما در مبحث بعدی با ارائه ارتباط بین مفهوم مشتق و مفهوم انتگرال، روش محاسبه انتگرال‌هایی نظیر توابع فوق را تشریح می‌کنیم. این ارتباط به نام قضیه اساسی حساب دیفرانسیل (حساب مشتق‌ها) و انتگرال شهرت دارد.



شکل الف) از نظر تعریف $\int_{۱}^{۲} x^{۲}dx$ برابر مساحت زیر نمودار است.



شکل ب) حاصل جمع مساحت چهار مستطیل زیر نمودار انتگرال $\int_{۱}^{۲} x^{۲}dx$ را با تقریب نقصانی به دست می‌دهد.



شکل ج) حاصل‌جمع مساحت مستطیل‌های بالای نمودار، انتگرال $\int_{۱}^{۲} x^{۲}dx$ را با تقریب اضافی به دست می‌دهد.

اولین قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال

فرض کنیم f تابعی باشد که در هر نقطهٔ بازه $[a\ ,\ b]$ مشتق‌پذیر باشد. در این صورت تابع f'، یعنی **تابع مشتق** را در این بازه در دست داریم که مقدار آن درنقطه x، برابر شیب نمودار تابع f در x است :

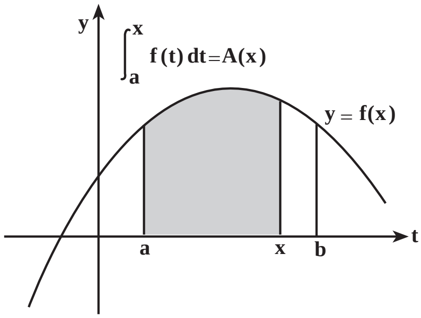
$$f'(x) = x \text{ شیب نمودار تابع } f \text{ در }$$

اکنون با استفاده از مفهوم انتگرال معین یک تابع جدید از طریق نمودار f می‌سازیم.

فرض کنیم $[a\ ,\ b]$ یک بازه و f تابعی پیوسته بر این بازه باشد. برای هر x که $a \le x \le b$، مقدار انتگرال معین $\int_a^x f(t)dt$ به x بستگی دارد و در نتیجه تابعی از x است. باید توجه داشت که x به‌عنوان حد بالای انتگرال و t متغیر انتگرال‌گیری است. همچنین در اینجا a را ثابت نگه‌داشته‌ایم. به‌عبارت دیگر، ما به این عبارت انتگرال، به‌عنوان تابعی از x می‌نگریم. هرگاه این تابع را A بنامیم، ضابطهٔ تعریف A چنین است :

$$A(x) = \int_a^x f(t)dt$$

این تابع را **تابع مساحت** می‌نامیم (شکل زیر).



ضابطه تابع مساحت با $\int_a^x f(t)dt$ نشان داده شده است.

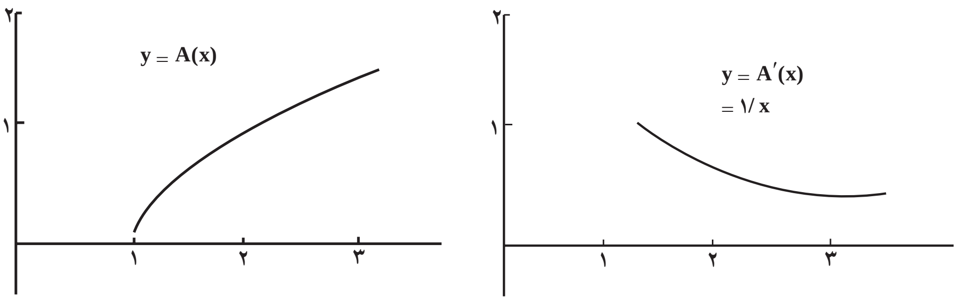
مثال : ضابطهٔ تعریف تابع مساحت را برای تابع $f(t) = \frac{۱}{t}, ۱ \le t \le ۳$ تعریف کرده و نمودار آن را رسم کنید.

حل : تابع مساحت در این مثال دارای ضابطهٔ $A(x) = \int_۱^x \frac{۱}{t}dt$ است که $۱ \le x \le ۳$. با استفاده از یک ماشین حساب که قادر به محاسبه انتگرال معین باشد، یا با استفاده از کاغذ شطرنجی، می‌توانیم برای چندین مقدار از x , $A(x)$ را حساب کنیم.

در جدول زیر بعضی از مقادیر تابع درج شده و سپس نمودار آن نیز رسم شده است.

x	A(x)	x	A(x)
۱/۰	۰/۰۰۰	۲/۱	۰/۷۴۲
۱/۱	۰/۰۹۵	۲/۲	۰/۷۸۸
۱/۲	۰/۱۸۲	۲/۳	۰/۸۳۳
۱/۳	۰/۲۶۲	۲/۴	۰/۸۷۵
۱/۴	۰/۳۳۶	۲/۵	۰/۹۱۶
۱/۵	۰/۴۰۵	۲/۶	۰/۹۵۵
۱/۶	۰/۴۷۰	۲/۷	۰/۹۳۳
۱/۷	۰/۵۳۱	۲/۸	۱/۰۳۰
۱/۸	۰/۵۸۸	۲/۹	۱/۰۶۵
۱/۹	۰/۶۴۲	۳/۰	۱/۰۹۹
۲/۰	۰/۶۹۳		

سؤال : نرخ تغییرات تابع مساحت چیست؟ به‌عبارت دیگر $A'(x)$ کدام است؟ هرگاه با استفاده از نمودار $y = A(x)$ نمودار مشتق A' را رسم کنیم، تصویری به دست می‌آوریم که بسیار شبیه نمودار $y = \frac{۱}{x}$ بر بازهٔ [۱,۳] می‌باشد.



نمودار تابع‌های $y = A(x)$ و $y = A'(x)$ نشان داده شده است.

سؤال : آیا این امر حقیقت دارد که ما به همان تابع $f(x) = \frac{۱}{x}$ بازگشته‌ایم؟ در واقع، اولین قضیهٔ بنیادی حساب انتگرال نشان‌دهنده آن است که این امر همیشه واقعیت دارد. که به‌صورت زیر بیان می‌شود.

قضیه :

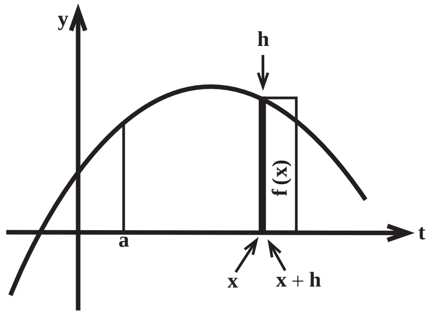
فرض کنیم f تابعی پیوسته بر فاصله $[a, b]$ و برای هر x که $a \le x \le b$

$$A(x) = \int_a^x f(t)dt$$

در این‌صورت برای هر x که $a < x < b$، داریم : $A'(x) = f(x)$

برای اثبات قضیه فوق ابتدا محاسبه مشتق $A'(x)$ نسبت نموهای $\frac{A(x+h) - A(x)}{h}$ را برای مقادیر کوچک h بررسی می‌کنیم. صورت این کسر متناظر مساحت نوار سیاه شده در شکل زیر بوده و برابر انتگرال معین زیر می‌باشد.

$$\int_x^{x+h} f(t)dt$$



$$A(x+h) - A(x) = \int_x^{x+h} f(t)dt = f(x)h$$

مساحت این ناحیه تقریباً برابر است با مساحت مستطیل باریک و بلندی به عرض h و طول $f(x)$.

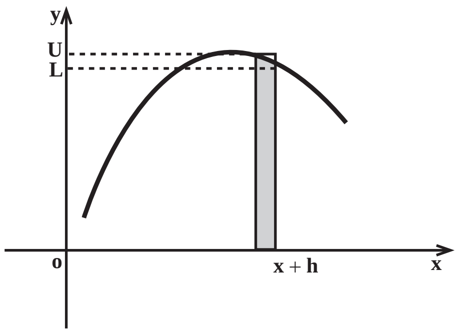
بنابراین :

$$A'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{A(x+h) - A(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x)h}{h} = f(x)$$

این تقریب وقتی که h کوچکتر می‌شود به مقدار واقعی آن نزدیکتر می‌شود. می‌توانیم نرخ تغییرات واقعی $A(x)$ را به گونه دیگری نیز حساب کنیم. نمو A بین مساحت‌های مستطیل‌های پایینی و

بالایی(شکل زیر) به عرض h قرار دارد.



هر گاه L ارتفاع مستطیل پایینی و U ارتفاع مستطیل بالایی باشد، آنگاه $A(x+h) - A(x)$ بین Lh و Uh قرار دارد. پس :

$$L \leq \frac{A(x+h)-A(x)}{h} \leq U$$

وقتی h به صفر نزدیک می‌شود، فاصله مورد نظر یعنی $[x, x+h]$ به نقطهٔ تنهای x تبدیل می‌گردد. چون g پیوسته است، هم مقدار ماکزیمم تابع (U) و هم مقدار می‌نیمم تابع (L) در این فاصله به f (x) نزدیک می‌شود و باید داشته باشیم :

$$\lim_{h \to ۰} \frac{A(x+h)-A(x)}{h} = f(x)$$

یعنی $A'(x) = f(x)$.

مثال ۱ : اگر $F(x) = \int_{۰}^{x} t^{۲} e^{t} dt$ باشد، $F'(x)$ را محاسبه کنید.

حل : توجّه داریم که تابع $t^{۲}e^{t}$ بر روی IR پیوسته است. بنابراین، با توجه به اولین قضیه اساسی حساب انتگرال خواهیم داشت :

$$F'(x) = x^{۲} e^{x}$$

مثال ۲ : اگر $F(x) = \int_{۰}^{x} \frac{\sin t dt}{t^{۲}+۱}$ باشد، $F'(x)$ را محاسبه کنید.

حل : در اینجا تابع زیر علامت انتگرال $\frac{\sin t}{t^{۲}+۱}$ می‌باشد، این تابع بر روی IR پیوسته است. بنابراین، با توجه به اولین قضیه اساسی حساب انتگرال داریم $F'(x) = \frac{\sin x}{x^{۲}+۱}$ که در آن $x \in IR$.

تعریف : تابع مساحت A (x) را که برای آن داریم :

$$A'(x) = f(x)$$

یک تابع اوّلیه f (x) نیز می‌نامند.

اولین قضیه اساسی نشان‌دهنده این واقعیت است که هر تابع پیوسته دارای یک تابع اولیه است که همان تابع مساحت می‌باشد. البته هرگاه C مقدار ثابت دلخواهی باشد، $A(x) + C$ نیز یک تابع اولیه دیگر تابع $f(x)$ می‌باشد. زیرا :

$$(A(x) + C)' = A'(x) = f(x)$$

بنابراین اگر یک تابع دارای تابع اولیه باشد، دارای توابع اوّلیه بی‌شماری است که از افزودن مقادیر ثابت به هر تابع اوّلیه دیگر به دست می‌آیند. عمل تابع اوّلیه‌گیری در واقع عمل معکوس مشتق‌گیری است.

قضیه : (دومین قضیه اساسی حساب انتگرال)
اگر F یک تابع اوّلیه دلخواه تابع پیوسته f باشد، آنگاه.

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

مثال : انتگرال $\int_۱^۲ x^۲dx$ را حساب کنید.
حل : یک تابع اولیه از $f(x) = x^۲$ تابع $F(x) = \frac{۱}{۳}x^۳$ است.
بنابر دومین قضیه اساسی

$$\int_۱^۲ x^۲dx = F(۲) - F(۱) = \frac{۲^۳}{۳} - \frac{۱^۳}{۳} = \frac{۸}{۳} - \frac{۱}{۳} = \frac{۷}{۳}$$

متذکر می‌شویم که هر تابع اولیه دیگر f نیز همان مقدار را برای انتگرال معین به دست خواهد داد. برای نمونه، $G(x) = \frac{x^۳}{۳} + ۴۷$ یک تابع اولیه دیگر $f(x) = x^۲$ است و

$$G(۲) - G(۱) = (\frac{۲^۳}{۳} + ۴۷) - (\frac{۱^۳}{۳} + ۴۷)$$

$$= \frac{۸}{۳} + ۴۷ - \frac{۱}{۳} + ۴۷ = \frac{۷}{۳}$$

چون مقدار ثابت ۴۷ به عنوان یک جمله هم در محاسبه $G(۲)$ و هم در محاسبه $G(۱)$ ظاهر می‌شود وقتی که تفاضل این دو مقدار را محاسبه می‌کنیم حذف می‌گردد. هرگاه ۴۷ را با هر مقدار ثابت و دلخواه دیگر C تعویض کنیم باز همان نتیجه به‌دست می‌آید.

نمادی که غالباً برای $F(b) - F(a)$ مورد استفاده قرار می‌گیرد عبارت است از :

$F(x)]_a^b$ و یا $F(x)]_{x=a}^{x=b}$

معمولاً تابع اولیه تابع $f(x)$ را با نماد $\int f(x)dx$

نیز نشان می‌دهند، دومین قضیه اساسی را می‌توانیم چنین بنویسیم

$$\int_a^b f(x)dx = \int f(x)dx]_a^b$$

$\int f(x)dx$ را **انتگرال نامعین** تابع $f(x)$ نیز می‌نامند.

مثال : مساحت زیر نمودار تابع $y=\frac{۱}{x^۲}$ از $x=۱$ تا $x=۴$ را حساب کنید.

حل : چون تابع $\frac{۱}{x^۲}$ در بازه $[۱,۴]$ مثبت و پیوسته است و $-\frac{۱}{x}$ یک تابع اوّلیه تابع $\frac{۱}{x^۲}$ می‌باشد

با توجه به دومین قضیه اساسی حساب انتگرال S مساحت موردنظر از رابطه زیر بدست می‌آید

$$S=\int_۱^۴ \frac{dx}{x^۲}=\left[-\frac{۱}{x}\right]_۱^۴=-\frac{۱}{۴}+۱=\frac{۳}{۴}$$

اکنون ببینیم چگونه دومین قضیه اساسی را می‌توانیم از اولین قضیه اساسی نتیجه‌گیری کنیم.

استدلال : فرض کنیم f تابعی پیوسته و F یک تابع اولیه آن باشد.

تابع مساحت :

$$A(x)=\int_a^x f(t)dt$$

را در نظر می‌گیریم.

از اینجا نتیجه می‌شود که $A(a)=۰$ و

$$(۱) \quad A(b)=\int_a^b f(t)dt$$

به استناد اولین قضیه اساسی می‌دانیم که A نیز یک تابع اولیه g می‌باشد. چون تفاضل دو تابع اولیه از یک تابع پیوسته مقدار ثابتی است (چرا؟) عدد ثابتی چون C هست به قسمی که

$$(۲) \quad A(x)=f(x)+C$$

اکنون مقدار C را پیدا می‌کنیم. با جایگزینی $x=a$ داریم :

$$A(a)=۰=F(a)+C$$

پس

$$(۳) \quad C=-F(a)$$

اکنون با جایگزینی $x=b$ در روابط (۱) و (۲) به دست می‌آوریم :

$$A(b)=\int_a^b f(x)dx \quad , \quad A(b)=F(b)+C$$

از این دو رابطه و رابطه (۳) خواهیم داشت :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

نکته : اهمیت دومین قضیه اساسی در این است که کافی است برای یافتن مقادیر انتگرال‌های معین توجه‌مان را به محاسبه توابع اولیه معطوف بکنیم. بنابراین لازم است روش‌های محاسبه توابع اولیه (انتگرال‌های نامعین) را قبلاً در دست داشته باشیم.

محاسبه تابع اولیه

همانگونه که قبلاً گفتیم تابع اولیه عکس مشتق‌گیری است. عمل محاسبه تابع اولیه تابعی مانند f به منزلهٔ یافتن تابعی مانند g است که :

$$g'(x) = f(x)$$

به عبارت دیگر مشتق تابعی در دست است می‌خواهیم خود تابع را پیدا کنیم. به ذکر چند مثال می‌پردازیم.

مثال ۱ : یک تابع اولیه تابع $f(x) = ۲x$ را پیدا کنید.

حل : چون $(x^۲)' = ۲x$ بنابراین تابع $F(x) = x^۲$ یک تابع اولیه تابع $f(x) = ۲x$ است.

مثال ۲ : یک تابع اولیه تابع $g(x) = \cos x$ را پیدا کنید.

حل : چون $(\sin x)' = \cos x$، ملاحظه می‌کنیم که $G(x) = \sin x$ یک تابع اولیه f می‌باشد.

متذکر می‌شویم که ما صحبت از «یک تابع اولیه» می‌کنیم نه «تابع اولیه»، زیرا هر تابع می‌تواند تعداد بی‌شماری تابع اولیه داشته باشد. برای مثال، هر یک از توابع

$$f_۱(x) = x^۲ \quad \text{و} \quad f_۲(x) = x^۲+۳ \quad \text{و} \quad f_۳(x) = x^۲ + \sqrt{۳}$$

و $f_۴(x) = x^۲+\pi$ تابع اولیهٔ تابع $f(x)=۲x$ می‌باشند. زیرا مشتق هریک از آن‌ها برابر $۲x$ می‌باشد.

ولی همه این توابع در یک چیز مشترک‌اند. همگی به صورت $f(x) = ۲x + C$ می‌باشند که در آن C مقدار ثابتی است (در مثال‌های فوق به ترتیب $C = ۰$، $C = ۳$، $C = \sqrt{۳}$ و $C = \pi$). یقیناً برای هر مقدار عددی دلخواه که به C نسبت دهیم یک تابع اولیه دیگر از تابع $x \mapsto ۲x$ حاصل خواهد شد.

نماد انتگرال $\int$ وقتی بدون حدود انتگرال‌گیری به کار می‌رود منظور یک تابع اولیه عمومی است. به همین خاطر

$$\int f(x)\,dx$$

را **انتگرال نامعین یا تابع اولیه** عمومی f می‌نامیم.

وقتی تابع پیوسته f و یک تابع اولیه مشخص و بخصوص آن، مثل F در دست باشد ($F' = f$) تابع اولیه عمومی f را می‌توانیم به صورت

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

بنویسیم. این فرمول همهٔ توابع اولیه‌های ممکن تابع f را به دست می‌دهد. به عبارت دیگر، وقتی یک تابع اولیه f را پیدا بکنیم، اساساً همهٔ توابع اولیه f نیز مشخص شده‌اند. به عنوان مثال

$$\int ۲x\,dx = x^۲ + C$$

که در آن C مقدار ثابتی است. بعد از این، در محاسبات توابع اولیه از ذکر این که C مقدار ثابتی است خودداری می‌کنیم.

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

نکته : در مسائل کاربردی که غالباً در علوم دیگر (فیزیک، شیمی، مکانیک و کلیه علوم وابسته به ریاضیات) با آن سروکار داریم، معمولاً یک تابع اولیه با شرایط ویژه‌ای موردنظر می‌باشد. این شرایط ویژه را شرایط اولیه (یا داده‌های اولیه) می‌نامند. به ذکر مثالی در این مورد می‌پردازیم.

مثال : تابع اولیه F از تابع f با ضابطهٔ $f(x) = ۳x^۲$ را که در شرط اولیه $F(-۲) = ۵$ صدق کند، به دست آورید.

حل : چون $(x^۳)' = ۳x^۲$، تابع اولیه F باید به صورت :

$$F(x) = x^۳ + C$$

باشد که C مقدار ثابتی است. شرط اولیه مشخص می‌کند که

$$۵ = F(-۲) = (-۲)^۳ + C = (-۸) + C$$

و از این‌جا $C = ۱۳$ به‌دست می‌آید. بنابراین

$$F(x) = x^۳ + ۱۳$$

تابع اولیه مورد نظر است.

چکیده

استفاده‌های مختلف از نماد $\int$ نتیجه‌های بسیار مختلفی به دست می‌دهد. وقتی این نماد بدون حدود انتگرال‌گیری باشد، انتگرال نامعین زیر

$$\int f(x)\,dx$$

همان تابع اولیه عمومی f می‌باشد، و این نمایشگر خانواده کاملی از توابع می‌باشد.

از طرف دیگر، وقتی حدود انتگرال‌گیری موجود باشد، انتگرال معین

$\int_a^b f(x)dx$

یک عدد حقیقی مشخص A است که با مساحت علامت‌دار (مثبت یا منفی) تحت نمودار $y = f(x)$ بر فاصله $[a, b]$ متناظر می‌گردد.

مثال : $\int (۴x - ۳)\, dx$ و $\int_۱^۲ (۴x - ۳)dx$ را حساب کنید.

حل : چون $(۲x^۲ - ۳x)' = ۴x - ۳$، انتگرال نامعین عبارت است از :

$$\int (۴x - ۳)\, dx = ۲x^۲ - ۳x + C$$

که در آن C مقدار ثابتی است. از سوی دیگر، انتگرال معین

$$\int_۱^۲ (۴x - ۳)dx = ۳$$

و این برابر مساحت ناحیه ذوزنقه‌ای شکل تحت نمودار $y = ۴x - ۳$ بر فاصله $[۱,۲]$ می‌باشد.

فرمول‌ها و ویژگی‌های تابع اولیه

هر فرمول مشتق برای هر تابع مشتق‌پذیر به طور خودکار یک فرمول تابع اولیه نظیر فراهم می‌کند.

مثال : $\int x^r dx$ را که در آن r ثابت و $r \neq -۱$ پیدا کنید.

حل : می‌دانیم که برای هر r ، $(x^{r+۱})' = (r + ۱)x^r$. چون مشتقات دارای ویژگی

$$(cf)' = cf'$$

هستند، ملاحظه می‌کنیم که :

$$\left(\frac{x^{r+۱}}{r+۱}\right)' = x^r$$

در اینجا ذکر این نکته مهم است که به منظور احتراز از تقسیم بر صفر لازم است که : $r \neq -۱$ نتیجه می‌گیریم که

$$\int x^r dx = \frac{x^{r+۱}}{r+۱} + C \qquad (r \neq -۱)$$

که در آن C ثابت دلخواهی است.

فرمول‌های خطی : ویژگی‌های خطی مشتق طبیعتاً ویژگی‌های خطی توابع اولیه را سبب می‌گردند. به عبارت دیگر، برای هر مقدار ثابت c،

$$\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$$

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

ویژگی‌های خطی انتگرال‌گیری به ضمیمه فرمولی که در مثال قبل ارائه گردید به ما این امکان را می‌دهد تا بتوانیم تابع اولیه هر تابع چند جمله‌ای را محاسبه کنیم.

مثال : $\int(5x^4-3x^3+7x^2+x-8)dx$ را حساب کنید.

حل : جمله به جمله انتگرال‌گیری کرده، ضرایب را بیرون برده و از فرمول $\int x^r dx=\frac{x^{r+1}}{r+1}+C$ استفاده می‌کنیم.

$$\int(5x^4-3x^3+7x^2+x-8)dx$$
$$=5\int x^4dx-3\int x^3dx+7\int x^2dx+\int xdx-8\int dx$$
$$=5\frac{x^5}{5}-3\frac{x^4}{4}+7\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-8x+C$$
$$=x^5-\frac{3x^4}{4}+\frac{7x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-8x+C$$

می‌توانیم پاسخ خود را با مشتق‌گیری کنترل و آزمایش کنیم :

$$(x^5-\frac{3x^4}{4}+\frac{7x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-8x+C)'$$
$$=5x^4-3x^3+7x^2+x-8$$

این یک راه مطمئن برای آزمون درستی تابع اولیه است. **از جواب مشتق گرفته و آن را با تابع نخستین مقایسه کنید.**

مثال : $\int(\frac{4x^{\frac{2}{3}}}{7}-5\sqrt{x}+\frac{\pi}{3x^2})dx$ را حساب کنید.

حل : به منظور آسانی در عمل از نماهای کسری برای هر جمله استفاده می‌کنیم

$$\int(\frac{4x^{\frac{2}{3}}}{7}-5\sqrt{x}+\frac{\pi}{3x^2})dx$$
$$=\int(\frac{4}{7}x^{\frac{2}{3}}-5x^{\frac{1}{2}}+\frac{\pi}{3}x^{-2})dx$$
$$=(\frac{4}{7}\frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}-5\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+\frac{\pi}{3}\frac{x^{-1}}{-1})+C$$

$$= \frac{۱۲x^{\frac{۵}{۳}}}{۳۵} - \frac{۱۰x^{\frac{۳}{۲}}}{۳} - \frac{\pi}{۳x} + C$$

دیگر فرمول‌های تابع اولیه‌گیری را می‌توان با معکوس کردن عمل مشتق‌گیری به دست آورد. برخی فرمول‌های اساسی تابع اولیه‌گیری (انتگرال‌گیری) در زیر آمده است.

(k مقدار ثابت)

$۱\_ \int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$

$۲\_ \int du = u + C$

$۳\_ \int \frac{du}{u} = Ln|u| + C$

$۴\_ \int \sin u du = -\cos u + C$

$۵\_ \int \cos u du = \sin u + C$

$۶\_ \int [f(u) \pm g(u)]du = \int f(u)du \pm \int g(u)\,du$

$۷\_ \int u^p du = \frac{۱}{p+۱}u^{p+۱} + C \quad , \quad (p \neq -۱) \quad , \quad (p \in IR)$

مسائل

فرمولی به صورت F(x) + C، که در آن F یک تابع اولیه برای تابع زیر انتگرال است، برای هر یک از انتگرال‌های نامعین زیر بیابید.

$۱\_ \int (x^۲ + x + ۱)dx$ $۲\_ \int (۳x^۲ + ۲x + ۱)dx$

$۳\_ \int \frac{x^۴}{۲}dx$ $۴\_ \int \sqrt{۱۷}dx$

$۵\_ \int \sqrt{x}dx$ $۶\_ \int \frac{۲}{x^۴}dx$

$۷\_ \int (۵\sin(x) - ۳\cos(x))dx$ $۸\_ \int \sqrt[۵]{x}dx$

$۹\_ \int x^{\frac{۷}{۳}}dx$ $۱۰\_ \int \frac{x^۳ - x^{-۳}}{۳}dx$

$۱۱\_ \int \pi x^{۱۰۰}dx$ $۱۲\_ \int (\sin^۲(x) + \cos^۲(x))dx$

فرض کنیم G تابع مساحت با ضابطه تعریف $G(x) = \int_۱^x \frac{\sin(۲t)}{۱+t^۲}dt$ باشد در هر یک از تمرین‌های

زیر y' را پیدا کنید.

۱۳ـ $y = G(x^۲)$ ‏ ‏ ‏ ‏ ۱۴ـ $y = G(x)$

۱۵ ـ $y = (G(x))^۲$ ‏ ‏ ‏ ‏ ۱۶ـ $y = x^۲G(x)$

۱۷ـ $y = G'(x)$ ‏ ‏ ‏ ‏ ۱۸ ـ $y = \frac{G(x)}{x^۲}$

با استفاده از دومین قضیه اساسی، انتگرال‌های معین مفروض در تمرین‌های ۱۹ تا ۲۴ را محاسبه کنید :

۱۹ـ $\int_{-۱}^{۳}(x^۲ + x + ۱)dx$

۲۰ـ $\int_{۱}^{۲/۵}(۳x^۲ + ۲x + ۱)dx$

۲۱ـ $\int_{۴}^{۹}\sqrt{x}dx$

۲۲ـ $\int_{\frac{\pi}{۲}}^{\pi}(۵\sin x - ۳\cos x)dx$

۲۳ ـ $\int_{۱}^{۳}(\sin^۲ x + \cos^۲ x)dx$

۲۴ـ $\int_{-۴}^{-۱}\frac{۱}{x^۲}dx$

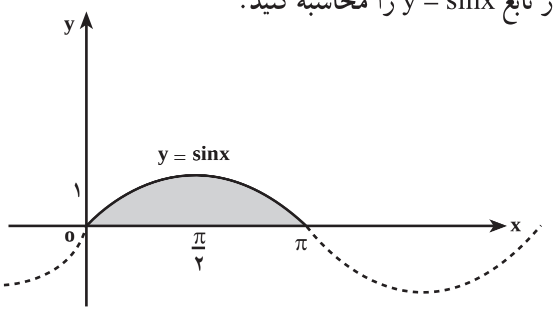
۲۵ـ دانش‌آموزی از دومین قضیه اساسی استفاده کرده و انتگرال زیر را محاسبه کرده است :

$$\int_{-۱}^{۱}\frac{۱}{x^۲}dx = -\frac{۱}{x}\Big]_{-۱}^{۱} = -۱-۱ = -۲$$

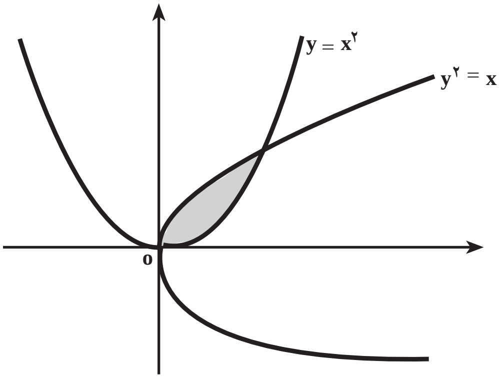
آیا این جواب قابل قبول است؟

نمودار $y = \frac{۱}{x^۲}$ را رسم کنید و بگویید که چرا جواب فوق قابل قبول نیست. اشتباه دانش‌آموز در کجاست؟

۲۶ـ مساحت یک طاق تحت نمودار تابع $y = \sin x$ را محاسبه کنید.



۲۷ــ مساحت ناحیه هاشور زده در شکل زیر را محاسبه کنید.



۲۸ــ $\int_{۰}^{۱} e^{۲x}dx$ را محاسبه کنید.

۲۹ــ $\int_{۱}^{۵} \frac{dx}{x}$ را محاسبه کنید.

۳۰ــ $\int_{۱}^{۵} \frac{xdx}{x^۲+۱}$ را محاسبه کنید.

۳۱ــ $\int_{۰}^{۲} e^{۵x}dx$ را محاسبه کنید.

نیوتن و لایبنیتز

بسیاری از مورخین علوم را باور بر این است که اسحاق نیوتن بزرگترین متفکر ریاضی همه قرون و اعصار بوده است. نیوتن در بین سال‌های ۱۶۴۲ و ۱۷۲۷ می‌زیسته است. کتاب **اصول ریاضیات** نیوتن که در سه مجلد به رشته تحریر درآمده است به عنوان مؤثرترین اثر علمی تاریخ علم شناخته شده است. مشهور است که نیوتن با افتادن سیبی از درخت، که به سر وی اصابت کرد، موفق شد که قانون جاذبه عمومی را کشف کند. البته از سال‌ها قبل فیزیکدان‌هایی نظیر گالیله و کپلر در پی آن بودند تا علت گردش سیاره‌ها را به دور خورشید توجیه کنند. به هر تقدیر صرف‌نظر از این‌که چنین روایتی در مورد نیوتن درست باشد یا نه، نیوتن و ریاضیدان آلمانی گاتفریدلایبنیتز (متولد به سال ۱۶۴۶ و متوفی به سال ۱۷۱۶ میلادی)، قطعاً اولین کسانی بودند که به اهمیت رابطه اساسی بین شیب یک نمودار و مساحت تحت آن پی‌بردند. شواهد نسبتاً قوی در دست است که نیوتن و لایبنیتز تفکر یکسانی در این مورد داشتند، لکن مستقل از یکدیگر عمل می‌کردند. تفکر این دو ریاضیدان به سرعت به عنوان انقلابی در علوم ریاضی تلقی گردید. متأسفانه مشاجره‌های تلخی نیز بین این دو برسر کشف حساب دیفرانسیل و انتگرال پدید آمد و اتهاماتی به یکدیگر نسبت دادند. معهذا با آن که نیوتن و لایبنیتز تحولات شگرفی در ریاضیات قرن هفدهم پدید آوردند، ما می‌توانیم سابقه بسیاری از پایه‌های فکری مفاهیم دیفرانسیل و انتگرال را به روزگاران بسیار گذشته و ارشمیدس نسبت دهیم. نظریه‌های نیوتن و لایبنیتز در مورد حساب دیفرانسیل و انتگرال در واقع، باروری و بهره‌وری قرن‌ها توسعه و تصفیه افکار کسانی چون ارشمیدس می‌باشد.

خود نیوتن، دینی را که به ارشمیدس داشته است چنین بیان می‌دارد: «اگر من توانسته‌ام بیشتر از دیگران چیزها را ببینم (کشف کنم) به واسطه آن است که بر شاخ‌های غول‌هایی چون ارشمیدس ایستاده‌ام».

آری به درستی که کار مستمر و تلاش گروهیِ نسل‌های انسانی است که در برهه‌هایی از زمان به‌ثمر می‌رسد و شکوفا می‌گردد، نه تلاش‌های فردی که در لحظاتی از زمان چون موجی عظیم بروز می‌کند ولی دیری نمی‌پاید که فروکش کرده و محو می‌گردد.

منابع

فارسی

۱ ــ غلامحسین مصاحب، آنالیز حقیقی، انتشارات جیبی ۱۳۴۵

۲ ــ دکتر محمدحسن بیژن‌زاده، غلامعلی فرشادی، یدالله ایلخانی‌پور، حسابان ۱ و ۲، وزارت آموزش و پرورش چاپ ۱۳۷۶

۳ ــ حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی، ریچارد. ا. سیلورمن ترجمه دکتر علی‌اکبر عالم‌زاده

انگلیسی

4 ـ Calculus, Larson and others, 4 th Edition, Heath & Compang, 1990.

5 ـ Calculus and analytic geometry, Pre-University Level, Leithold.

6 ـ Intermediate Algebra for colledge Students, Allen R. Angel, Prentice Hall, New Jersey.

معلمان محترم، صاحب‌نظران، دانش‌آموزان عزیز و اولیای آنان می‌توانند نظر اصلاحی خود را درباره‌ی مطالب این کتاب از طریق نامه به نشانی تهران - صندوق پستی ۳۶۳ / ۱۵۸۵۵ - گروه درسی مربوط و یا پیام‌نگار (Email) talif@talif.sch.ir ارسال نمایند.

دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتاب‌های درسی