بسم الله الرحمن الرحیم

حساب دیفرانسیل و انتگرال

دورهٔ پیش‌دانشگاهی

رشتهٔ ریاضی ـ فیزیک

۱۳۹۱

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

برنامه‌ریزی محتوا و نظارت بر تألیف : **دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتاب‌های درسی**

نام کتاب : **حساب دیفرانسیل و انتگرال دورهٔ پیش‌دانشگاهی ـ ۲۹۵/۱**

اعضای شورای برنامه ریزی : **بهمن اصلاح پذیر، دکتر علی ایرانمنش، امین باشی‌زاده، ناهید بریری، دکتر محمدحسن بیژن‌زاده، دکتر محسن جمالی، سید اصغر جوادی، طیبه حمزه‌بیگی، مینو رحیمی، حسین رودسری، دکتر احمد شاهورانی، سید جعفر شهاب‌زاده، دکتر وحید عالمیان، سعید قریشی، سمیه السادات میرمعینی و دکتر محمد کاظم نائینی**

مؤلفان : **محمدحسن بیژن‌زاده ، دکتر وحید عالمیان و غلامعلی فرشادی**

آماده‌سازی و نظارت برچاپ و توزیع : **ادارهٔ کلّ چاپ و توزیع کتاب‌های درسی**

تهران : خیابان ایرانشهر شمالی ـ ساختمان شمارهٔ ۴ آموزش و پرورش(شهید موسوی)

تلفن : ۹ـ ۸۸۸۳۱۱۶۱، دورنگار : ۸۸۳۰۹۲۶۶، کد پستی : ۱۵۸۴۷۴۷۳۵۹،

وب‌سایت : www.chap.sch.ir

مدیر امور فنی و چاپ : **سیّداحمد حسینی**

طراح جلد : **مریم کیوان**

صفحه‌آرا : **شهرزاد قنبری**

حروفچین : **کبری اجابتی ، سیده فاطمه محسنی**

مصحح : **شاداب ارشادی، معصومه صابری**

امور آماده‌سازی خبر : **سپیده ملک‌ایزدی**

امور فنی رایانه‌ای : **حمیدثابت کلاچاهی ، پیمان حبیب پور**

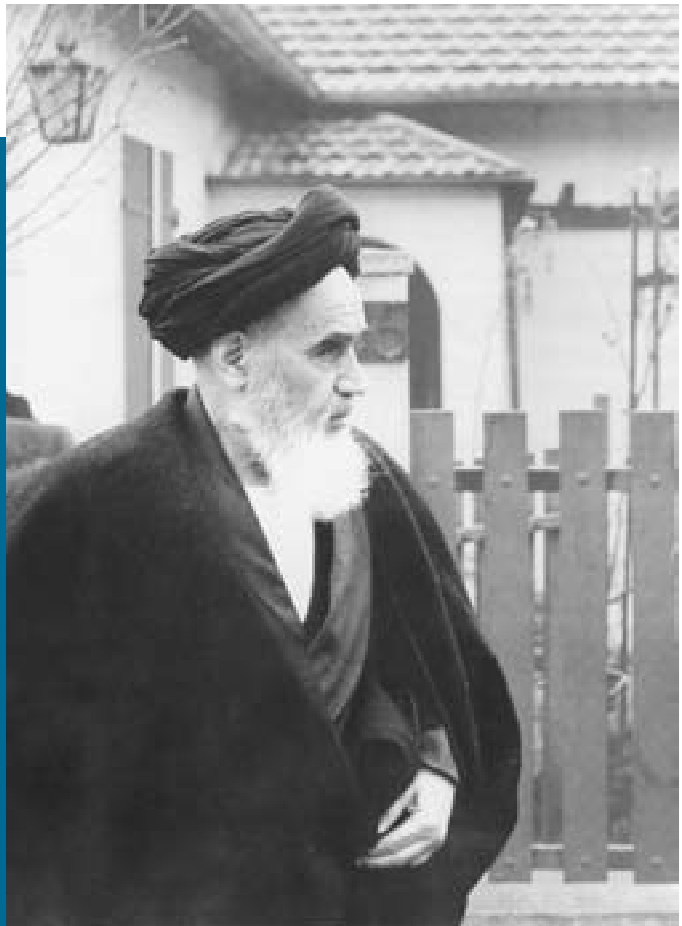
ناشر : **شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران : تهران ـ کیلومتر ۱۷ جادّهٔ مخصوص کرج ـ خیابان ۶۱ (داروپخش)**

تلفن : ۵ ـ ۴۴۹۸۵۱۶۱، دورنگار : ۴۴۹۸۵۱۶۰، صندوق پستی : ۱۳۹ـ ۳۷۵۱۵

چاپخانه : **شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران «سهامی خاص»**

سال انتشار و نوبت چاپ : **چاپ اوّل ۱۳۹۱**

شابک ۳ -۹-۲۰۰۹-۰۵-۹۶۴-۹۷۸ ISBN 978-964-05- 2009 - 3



جوان‌ها و کودکان ما در سرتاسر کشور، در هر مرکزی که اشتغال به تحصیل دارند باید توجّه داشته باشند تحصیل همراهِ تهذیب و همراهِ تعهد و همراهِ اخلاق فاضله‌ای انسانی است که می‌تواند ما را به حیات انسانی برساند و می‌تواند ما را از وابستگی نجات دهد.

امام خمینی (ره)

فهرست

پیشگفتار

واژه ریاضیات که معادل کلمه لاتین (Mathematics) است. در زبان یونانی به مجموعه‌ای از دانستنی‌های عمومی اطلاق می‌شد که کسب آن برای همه افراد تحصیل کرده لازم و ضروری تلقی شده است. افلاطون فیلسوف مشهور یونانی را باور بر این بود که مطالعه ریاضیات عالی‌ترین زمینه را برای تعلیم ذهن فراهم می‌آورد. کاوش‌های باستان‌شناسی نشانگر آن است که حتی در تمدن‌های اولیه انسان‌ها با شمارش و مقدماتی از علم حساب آشنایی داشته و از آن بهره برده‌اند. امروزه با پیشرفت تمدن صنعتی هر شهروند می‌بایست با مقدماتی از ریاضیات مشتمل بر علم حساب و هندسه مقدماتی آشنایی داشته باشد.

در سطحی پیشرفته‌تر دانش‌آموزان و دانشجویان می‌بایست با مباحث دیگری از ریاضیات آشنا شده تا درک بهتری از سایر دروس خود داشته باشند. در این میان، درس حساب دیفرانسیل و انتگرال جایگاه ویژه‌ای دارد. حساب و هندسه ابزارهای مفیدی برای توصیف روابط بین کمیت‌های ایستا و استاتیک می‌باشند؛ لکن درگیر مفاهیمی که بتواند به توصیف تغییرات کمیت‌ها کمک کند نمی‌باشند. حساب دیفرانسیل و انتگرال، در واقع اعمالی هستند که برای سنجش راه‌های مرتبط با تغییرات کمیت‌ها ابداع شده‌اند. حساب دیفرانسیل و انتگرال که تحت نام حسابان نیز از آن یاد می‌شود، ابزارهای لازم را برای مطالعه و بررسی حرکت‌ها به‌صورت کمی فراهم می‌کنند. از منظر تاریخی نیز، کشف حسابان به دنبال مطالعه رصد حرکت سیاره‌ها توسط فیزیکدانان و منجمان اتفاق افتاده است.

یوهانس کپلر[1] ریاضیدان آلمانی پژوهش‌ها و مطالعاتی را درخصوص یافته‌های فیزیکدان دانمارکی به نام تیخوبراهه[2] در قرن هفدهم میلادی انجام داد به دنبال این مطالعات، نیوتن و لایبنیتز همزمان توانستند با کشف حساب دیفرانسیل و انتگرال به تبیین حرکت سیارات نایل شوند. در واقع بخش اعظمی از ریاضیات به‌طور مستقیم یا غیرمستقیم درنتیجه مطالعه حرکت اجسام و اجرام سماوی رشد و توسعه یافته است. حرکت جزء ذاتی اشیاء به‌شمار می‌رود.

حسابان مشتمل بر دو عمل می‌باشد که یکی دیفرانسیل‌گیری (مشتق‌گیری) و دیگری

۱ــ Yohand Kepler

۲ــ Techo Brahe

انتگرال‌گیری نامیده می‌شوند. همانند جمع و تفریق که مغلوب یکدیگرند. کاری که مشتق‌گیری می‌کند انتگرال‌گیری برمی‌گرداند. مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری برحسب عمل جدیدتری به نام حد تعریف می‌شوند. این درحالی است که واضعان این علم، یعنی اسحاق نیوتن[1] و گاتفریدلایبنیتز[2] هیچ یک از آنان، از مفهوم حد در صورت بندی مشتق و انتگرال استفاده نکرده‌اند. در واقع مفهوم حد، بعد از کشف و ابداع حسابان معرفی و توسعه یافته است. این مفهوم به دنبال نابسامانی‌هایی که در برخی موارد در مسیر استفاده و توسعه حسابان پدید آمد توسط ریاضیدان آلمانی به نام کرال و ایراشتراس صورت‌بندی و تعریف گردید. وقتی وایراشتراس مفاهیم حسابان را بر پایه مفهوم حد تعریف کرد همه بی‌دقتی‌ها و به‌هم ریختگی حسابان رخت بربست.

حساب دیفرانسیل و انتگرال تا آنجا مورد نیاز دانش‌آموزان و دانشجویان است که در فهرست دروس دانشگاهی از آن به عنوان ریاضی عمومی و یا ریاضیات پایه یاد می‌کنند : ریاضیاتی که نه تنها در رشته‌های علوم محض نظیر فیزیک، شیمی، زیست‌شناسی مطالعه می‌شود بلکه تقریباً در همه حیطه‌های علمی دیگر نظیر آمار، رایانه، اقتصاد و امور مالی، کشاورزی و مهندسی پزشکی و همه رشته‌های علوم انسانی به عنوان یک درس پایه و اساسی تحصیل می‌گردد.

در کتاب حاضر مفاهیم حد، مشتق و انتگرال هسته اصلی و شالوده محتوایی این درس را تشکیل می‌دهند. محتوای درس براساس برنامه و محتوای مصوب شورای برنامه‌ریزی ریاضی دوره متوسطه تدوین گردیده است.

می‌دانیم به لحاظ روش‌شناسی و اصول تدریس فعال یادگیری بر آموزش ارجحیت دارد. بنابراین ارائه مطالب و مباحث درس به شیوه حل مسأله و با رویکرد فعالیت محور ساماندهی شده‌اند.

آموزش به صورت ضعیف و ناکارآمد آن فرایندی است که به شکل یک طرفه و تحمیلی از سوی معلم به دانش‌آموزان انتقال می‌یابد. در حالی که یادگیری فعالیت محور فرایندی است که در بستر اموری هدایت شده با مشارکت دانش‌آموزان اتفاق می‌افتد و طی آن آنها ضمن کار و فعالیت کلاسی به درک بهتر مفاهیم نایل شده و بانحوه شکل‌گیری و صورت‌بندی موضوع علمی نایل می‌شوند. از همه همکاران و دبیران محترم ریاضی انتظار می‌رود تا سعی وافر نموده تا کلاس درس آنان به کلاسی فعال تبدیل گردد و از این طریق استعدادهای خدادادی دانش آموزان رشد و تعالی یافته و در نتیجه درک درستی از ریاضیات پیدا کرده و بتوانند از آن در سایر موارد علمی و کاربردی استفاده بهتری داشته باشند.

تهران ــ شهریور ۱۳۹۰

مؤلفین

۱ــ Izak Newton　　۲ــ Gotfred Liebniz

معلمان محترم، صاحب‌نظران، دانش‌آموزان عزیز و اولیای آنان می‌توانند نظر اصلاحی خود را دربارهٔ مطالب این کتاب از طریق نامه به نشانی تهران ـ صندوق پستی ۴۸۷۴/۱۵۸۷۵ ـ گروه درسی مربوط و یا پیام‌نگار (Email) talif@talif.sch.ir ارسال نمایند.

دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتاب‌های درسی

فصل صفر

یادآوری مفاهیم پایه

جبر اعداد حقیقی

در این فصل به مرور مهمّ‌ترین مطالبی می‌پردازیم در مباحث حساب دیفرانسیل و انتگرال بدان محتاج هستیم، این مطالب مشتمل بر مروری مجدّد بر خواص اعداد حقیقی است که دانش آموزان از دوره دبستان به بعد با آن آشنا شده‌اند، چنانچه شما در مطالعه حسابان و دروس پیش از آن به اندازه کافی با این مباحث آشنا شده باشید، می‌توانید آنها را به سرعت مرور کنید، با این حال باید یادآوری کنیم که تسلط بر این مفاهیم، به‌ویژه خواص ترتیبی اعداد لازمه و پیش‌شرط درک بهتر و مؤثر مفاهیم و مباحث این درس می‌باشد.

در واقع درک علمی این درس، که خود مقدمه دروس عالی‌تر ریاضیات نظیر آنالیز ریاضی است، بر دو مؤلفه مهمّ استوار است، یکی تسلط بر خواص نابرابری‌ها و دیگری آشنا شدن با شیوه‌های این درس که مبتنی بر روش‌های تجزیه و تحلیل و ترکیب منطق‌وار داده و نتایج آنها است.

۰ـ۱ـ اعداد حقیقی و خط حقیقی

می‌دانیم که حسابان بر خواص دستگاه اعداد حقیقی استوار است. منظورمان از دستگاه اعداد حقیقی، مجموعه اعداد حقیقی، اعمال جمع و ضرب این مجموعه و خواص جبری آن است. اعداد حقیقی اعدادی هستند که بتوان آنها را به صورت اعشاری بیان کرد. برای نمونه هریک از اعداد ذیل یک عدد حقیقی است.

$$۵=۵/۰۰۰۰\cdots \qquad , \qquad \frac{-۳}{۴}=-۰/۷۵۰۰۰۰\cdots$$

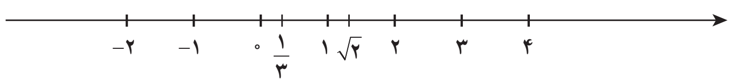
$$\frac{۱}{۳}=۰/۳۳۳۳\cdots \qquad , \qquad \sqrt{۲}=۱/۴۱۴۲\cdots \qquad \pi=۳/۱۴۱۵۹\cdots$$

در هر حالت، منظور از سه نقطه «...» آن است که دنباله ارقام همیشه ادامه دارد. البته وقتی دنباله ارقام تکراری و از جایی به بعد همیشه برابر صفر باشند از نوشتن آنها صرف نظر می‌گردد.

$$۵=۵ \qquad , \qquad \frac{۳}{۴}=۰/۷۵$$

امّا برای سه عدد بعدی چنین نیست. تفاوت اساسی در باب این اعداد وجود دارد، برای سه‌تای اولی الگوی تکرار ارقام بدیهی و روشن است و دنباله ارقام بر ما معلوم می‌باشد، لیکن برای $\sqrt{۲}$ و π هیچ الگوی شناخته شده‌ای برای روند تکرار ارقام وجود ندارد. سه عدد نخست را گویا و دوتای آخر یعنی $\sqrt{۲}$ و π را گنگ یا اصم می‌نامیم. بنابراین اعداد حقیقی به دو دسته بزرگ یعنی اعداد گویا و اعداد گنگ تقسیم می‌شوند. نکته جالب‌تر آن است که هردو دسته به گونه‌ای بسیار فشرده و در کنار هم باهم به نوعی تنیده شده‌اند.

به زبان هندسی، اعداد حقیقی را می‌توانیم به‌صورت نقاط یک خط مستقیم نشان دهیم. چنین خط مستقیمی را خط حقیقی یا محور حقیقی می‌نامیم. هر عدد حقیقی، چه گویا و چه گنگ، متناظر نقطه‌ای بر این خط است و برعکس هر نقطه این خط نظیر یک و تنها یک عدد حقیقی است. (شکل زیر)



خواص اعداد حقیقی را می‌توان در سه رده دسته‌بندی کرد، (۱) خواص جبری (۲) خواص ترتیب، (۳) خواص مربوط به پیوستاری اعداد حقیقی.

شما در طول تحصیلات خود، حتی از دوره ابتدایی با خواص جبری اعداد حقیقی آشنایی دارید. امّا باید گفت که این آشنایی شما بیشتر جنبه تجربی داشته تا صورت ریاضی! چرا؟

برای نمونه، شما می‌دانید که مثلاً جمع اعداد خاصیت جابه‌جایی دارد.

$$۲+۳=۳+۲$$

$$-۱+۴=۴+(-۱)=۴-۱$$

و یا آنکه

$$۲+(\sqrt{۳}+\frac{۱}{۲})=(۲+\sqrt{۳})+\frac{۱}{۲}$$

امّا برقراری این‌گونه تساوی‌ها از راه تجربه حاصل شده است. در واقع تساوی‌های موردی مانند تساوی‌های فوق نیاز به برهان و استدلال نداشته است. امّا وقتی این‌گونه خواص اعداد را بخواهیم در قالب یک کلیّت و به شکل یک حکم کلی ریاضی بیان کنیم دیگر با تجربه درستی آنها بر ما معلوم نخواهد شد. چرا؟

بهتر است صورت کلی چنین تساوی‌هایی را بیان داریم. به‌ناچار محتاج استفاده از حروف خواهیم شد.

همواره $a+b=b+a$

یا آنکه بگوییم

برای هر دو عدد a و b، $a+b=b+a$

به زبان عادی منظورمان این است که برای **هر دو عدد حقیقی a و b**، حاصل جمع a با b با حاصل‌جمع b با a برابر است. به عبارت «برای هر دو عدد حقیقی a و b» توجه کنید. اگر ما برای یکصد زوج از اعداد حقیقی یا یک میلیون زوج از اعداد a و b، حاصل دوطرف را حساب کرده و متوجه درستی تساوی‌ها شویم، **درستی حکم کلی را محقق نساخته‌ایم**. دلیل آن نامتناهی بودن و یا به اصطلاح عامیانه بی‌پایان بودن مجموعه اعداد حقیقی است. یکصد سال، یک میلیون سال و یا چند میلیارد سال که وقت صرف کنیم و تجربه کنیم ادعایمان محقق نمی‌شود زیرا مجموعه اعداد حقیقی بی‌پایان و نامتناهی است. زیاد ناراحت نباشید! ظاهراً راه حل ساده‌ای وجود دارد و آن وضع تئوری‌وار مجموعه اعداد حقیقی به صورت سامان‌یافته می‌باشد که آن را دستگاه اعداد حقیقی می‌نامیم. این راه حل ساده از این قرار است که وقتی برای درستی یک حکم نتوانیم دلیلی مستدل و منطقی اقامه کنیم و یا آنکه به عللی اصولاً نخواهیم دلیلی بیاوریم، آن حکم را تحت عنوان **اصل موضوع** (اصل) مطرح می‌کنیم. بنابراین اصل موضوع حکم یا گزاره‌ای است که آن را بدون دلیل و برهان **می‌پذیریم**. البته شواهد تجربی برای بسیاری از موارد الهام‌بخش ریاضیدانان و واضح‌کننده تئوری‌ها در انتخاب اصل‌های آن تئوری است. خلاصه کلام آنکه شما تاکنون با خواص جبری اعداد حقیقی به صورت تجربی آشنا شده‌اید، چنین خواصی مدعی‌اند که اعداد حقیقی را می‌توان باهم جمع کرد و حاصل عددی حقیقی خواهد بود. اعداد حقیقی را می‌توان باهم ضرب کرد و حاصل عددی حقیقی است. همچنین قواعد معمول حساب، از جمله دو قاعده فوق‌الاشاره، برقرارند. اینک برخی از این احکام را در قالب اصل موضوع (اصل) بیان می‌داریم.

مجموعه اعداد حقیقی را در مابقی این کتاب به R نشان می‌دهیم.

۰ـ۲ـ اصل‌های جمعی

(ج ۱) در R یک عمل دوتایی وجود دارد که آن را جمع می‌نامیم. این عمل که در واقع یک تابع است با نماد + نشان داده می‌شود. مقدار این تابع را به ازای زوج مرتب $(a\,,b)$ به $a+b$ نشان می‌دهیم که در آن $a\,,b$ و $a+b$ اعداد حقیقی‌اند. لذا حاصل عمل جمع بر هر زوج از اعداد حقیقی خود یک

عدد حقیقی است.

(ج۲) برای هر دو عدد حقیقی x و y داریم $x + y = y + x$

این اصل را خاصیت جابه‌جایی جمع می‌نامیم.

(ج۳) برای هر سه عدد حقیقی x و y و z داریم : $(x + y) + z = x + (y + z)$

این اصل را خاصیت شرکت‌پذیری R می‌نامیم.

(ج ۴) وجود عضو همانی جمع، R شامل عددی است به نام 0 (صفر)، به‌طوری که به ازای هر عدد حقیقی x، $x + 0 = x$

(ج ۵) وجود عضو قرینه، به ازای هر عدد حقیقی x، عضوی از R مانند y وجود دارد به‌طوری که $x + y = 0$

با استفاده از این پنج اصل، می‌توانیم خواص دیگری از مجموعه اعداد حقیقی را به‌دست آوریم، اکنون در واقع ما با یک دستگاه جبری سروکار داریم، یعنی **مجموعه اعداد حقیقی R به انضمام یک عمل دوتایی که در اصل‌های فوق صدق می‌کند**. این دستگاه جبری را همچنانکه قبلاً نیز گفته‌ایم **دستگاه اعداد حقیقی** می‌نامیم اینک به عنوان نمونه برخی نتایج منطقی را در باب R اثبات می‌کنیم.

مثال: ثابت کنید عضو صفر از R منحصر به فرد است.

حل: فرض کنیم O_1 و O_2 هردو نقش صفر یعنی عضو همانی جمع R را داشته باشند در این صورت

$$O_1 = O_1 + O_2 \quad (\text{با توجه به همانی بودن } O_2)$$
$$= O_2 + O_1 \quad (\text{با توجه به خاصیت جابه‌جایی})$$
$$= O_2 \quad (\text{با توجه به همانی بودن } O_1)$$

شما نیز می‌توانید برخی از خواص اعداد حقیقی را ثابت کنید.

مثال: ثابت کنید عضو قرینه هر عدد حقیقی منحصر به فرد است.

برهان: فرض کنیم y_1 و y_2 هردو قرینه عدد حقیقی x باشند. در این صورت

$$y_2 = y_2 + 0 \qquad (\text{با توجه به ج ۴})$$
$$= y_2 + (x + y_1) \qquad (\text{با توجه به ج ۵})$$
$$= (y_2 + x) + y_1 \qquad (\text{با توجه به ج ۳})$$
$$= 0 + y_1 \qquad (\text{با توجه به ج ۵})$$
$$= y_1 \qquad (\text{با توجه به ج ۲ و ج ۳})$$

معمولاً قرینه عدد حقیقی x را با نماد $-x$ و همچنین حاصل جمع $x + (-y)$ را به شکل ساده $x - y$ می‌نویسیم و آن را **تفاضل** x و y می‌نامیم.

به عنوان مثال دیگری از خواص اعداد حقیقی به مثال زیر توجه می‌کنیم.

مثال: برای هردو عدد حقیقی x و y ثابت کنید. $-(x + y) = -x - y$

حل: منظور از $-(x + y)$ قرینه $x + y$ است. پس باید نشان دهیم که :

$$(x + y) + (-x - y) = 0$$

داریم :

$$x + y + (-x - y) = (y + x) + (-x - y) \quad \text{(جابه‌جایی جمع)}$$

$$= y + [(x - x) - y] \quad \text{(شرکت‌پذیری)}$$

$$= y + (0 - y)$$

$$= y + (-y)$$

$$= 0$$

تمرین در کلاس

۱ــ ثابت کنید برای هر عدد حقیقی $\mathbf{x}$ ، $-(-\mathbf{x}) = \mathbf{x}$

۲ــ برای هر سه عدد حقیقی $\mathbf{x, y, z}$ اگر $\mathbf{x + z = y + z}$ آنگاه $\mathbf{x = y}$ (قانون حذف)

۰ـ۳ـ ضرب اعداد حقیقی

از تجربیاتمان می‌دانیم که ضرب دو عدد حقیقی، عددی حقیقی است. این ویژگی را به عنوان یک **اصل** می‌پذیریم، به علاوه برخی از ویژگی‌های دیگر اعداد حقیقی را در رابطه با عمل ضرب نیز به عنوان اصل می‌پذیریم از آن جمله

برای هر دو عدد حقیقی x و y، $xy = yx$

برای هر سه عدد حقیقی x و y و z ، $x(yz) = (xy)z$

عددی به نام یک (با نِماد ۱) وجود دارد به قسمی که $0 \neq 1$ و برای هر عدد حقیقی x، برای هر عدد حقیقی غیرصفر مانند x، عددی حقیقی مانند y وجود دارد به قسمی که y را وارون x می‌نامیم.

$$xy = 1$$

در رابطه با عمل جمع، خاصیت زیر، به عنوان خاصیت توزیع‌پذیری ضرب روی جمع برقرار است

$$(*) \quad x(y + z) = xy + xz$$

البته منظورمان حکم کلی است وگرنه در باب اعداد خاص، بارها درستی (*) را تجربه کرده‌ایم. به‌طور کلی وقتی حکمی مانند (*) برحسب حروف بیان می‌شود منظور حکم کلی است. در واقع (*) صورت ساده‌تر حکم زیر است.

برای هر سه عدد حقیقی x و y و z، $x(y+z)=xy+xz$

اکنون، با داشتن این احکام می‌توانیم برخی دیگر از ویژگی‌های ضرب R را ثابت کنیم.

مثال: وارون هر عدد حقیقی (غیرصفر) منحصر به فرد است.

حل: فرض کنیم y_1 و y_2 هر دو وارون x باشند، پس

$$xy_1=1 \quad , \quad xy_2=1$$

می‌نویسیم:

$$y_1=y_1\times 1=y_1(xy_2)=(y_1x)y_2=(xy_1)y_2=1y_2=y_2$$

بنابراین حق داریم وارون x را با نِماد x^{-1} نشان دهیم، گاهی وارون x را با $\frac{1}{x}$ نیز نشان می‌دهیم.

مثال: وارون وارون x برابر x است، به زبان نِمادی

$$(x^{-1})^{-1}=x$$

حل: باید نشان دهیم $(x^{-1})x=1$ تا طبق تعریف، x نقش وارون x^{-1} را داشته باشد، امّا این تساوی خود طبق تعریف وارون برقرار است.

قرارداد: حاصل‌ضرب $x.\frac{1}{y}$ را به شکل ساده‌تر $\frac{x}{y}$ می‌نویسیم، $\frac{x}{y}$ در واقع حاصل تقسیم x بر y می‌باشد.

تذکر مهمّ: باید توجه داشت که عدد ۰ وارون ندارد، بنابراین نوشتن عبارت‌هایی نظیر $\frac{1}{0}$، $\frac{2}{0}$، یا $\frac{x}{0}$ و **کلاً کسرهایی با مخرج صفر** بی‌معنی بوده و از آن باید مؤکداً احتراز گردد. تفسیرهای غلطی که درخصوص این‌گونه عبارت‌ها از قبیل اینکه $\frac{1}{0}=\infty$ می‌شود ناشی از عدم توجه کسانی است که با فرایند مفهوم‌سازی و صورت‌بندی تئوری ریاضی آشنایی کافی ندارند.

البته در بخش‌های بعد خواهید دید که مثلاً $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\infty$ (به معنی حدی)، امّا باید گفت که این تساوی تنها به مفهوم حدی برقرار است تا آنکه در حدگیری $\frac{1}{x^2}$ را با $\frac{1}{0}$ جایگزین کرده و از این غلط فاحش استفاده کنیم و آن را برابر ∞ قلمداد نماییم!

تمرین در کلاس

۱ــ ثابت کنید برای هر سه عدد حقیقی x , y و z ، $x(y-z)=xy-xz$

۲ــ ثابت کنید هرگاه $xy=۰$ آنگاه $x=۰$ یا $y=۰$ و عکس این حکم برقرار است.

۳ــ برای هر دو عدد حقیقی x و y

الف) $x(-y)=(-x)y=-(xy)$

ب) $(-x)(-y)=xy$

۰ــ۴ــ بسط اعشاری اعداد گویا

بسط اعشاری یک عدد گویا، یک عدد اعشاری پایان‌پذیر نظیر

$$\frac{۳}{۲}=۱/۵ \quad , \quad \frac{۳}{۴}=۰/۷۵$$

و یا یک بسط اعشاری پایان‌ناپذیر متناوب ساده یا مرکب است نظیر

بسط اعشاری متناوب ساده $\frac{۲}{۳}=۰/۶۶۶...=۰/\overline{۶}$

بسط اعشاری متناوب مرکب $\frac{۵}{۶}=۰/۸۳۳۳...=۰/۸\overline{۳}$

در بسط اعشاری متناوب ساده و یا مرکب، دسته ارقامی که مرتب تکرار می‌شوند را دوره گردش عدد نامند. و بالای ارقامی که دوره گردش‌اند خط کشیده شده است و تعدادی رقم که بین دوره گردش و ممیز قرار دارند ارقام غیرگردش نامیده می‌شوند.

$$\frac{۷}{۱۳}=۰/\overline{۵۳۸۴۶۱} \quad , \quad \frac{۱}{۵۶}=۰/۰۰۱۷\overline{۸۵۱۴۲}$$

نتیجه: اگر یک بسط اعشاری متناوب (ساده یا مرکب) داشته باشید، می‌توانید از فرمول زیر، کسر یا عدد گویای مساوی آن را به‌دست آورید.

فرض کنید $a_۱a_۲...a_m$ ارقام غیرگردش و $b_۱b_۲...b_n$ ارقام دورهٔ گردش عدد باشند، در این صورت

$$۰/a_۱a_۱\cdots a_m\overline{b_۱b_۲\cdots b_n}=\frac{a_۱a_۲\cdots a_mb_۱b_۲\cdots b_n-a_۱a_۲\cdots a_m}{\underbrace{۹۹...۹}_{n\text{ تا نه}}\underbrace{۰۰....۰}_{m\text{ تا صفر}}} \qquad (۱)$$

مثال‌های زیر، نحوه استفاده از فرمول (۱) را نشان می‌دهند.

$$۰/\overline{۶}=\frac{۶}{۹}=\frac{۲}{۳} \qquad ۰/۰\overline{۱۷۸۵}=\frac{۱۷۸۵-۱}{۹۹۹۰۰}=\frac{۴۴۶}{۲۴۹۷۵}$$

هر عدد حقیقی که بسط اعشاری آن، پایان‌ناپذیر ولی متناوب نباشد، گنگ یا اصم نامیده می‌شود. بنابراین اعداد گنگ، اعدادی هستند که بسط اعشاری آنها بی‌پایان است ولی متناوب نیستند مانند :

$$\sqrt{۲}=۱/۴۱۴۲۱۳۵۶۲...$$

$\pi=۳/۱۴۱۵۹۲۶۵۳...$ عدد پی

$e=۲/۷۱۸۲۸۱۸۲۸۴...$ عدد نپر

قضیه ۱: اگر a عددی گویا و غیرصفر باشد و b عددی گنگ، اعداد $a\pm b$ و ab و $\frac{a}{b}$ و $\frac{b}{a}$ گنگ هستند.

همان‌طور که می‌دانید در مجموعه اعداد گویا، هر دو عدد گویا را باهم جمع یا تفریق و یا درهم ضرب کنیم حاصل عددی است گویا (اصطلاحاً گوییم مجموعه اعداد گویا، نسبت به عمل جمع و ضرب و تفریق بسته است) و امّا مجموعهٔ اعداد گنگ نسبت به هیچ‌یک از اعمال جمع، تفریق، ضرب و تقسیم بسته نیست زیرا :

$\sqrt{۲}$ عددی گنگ است و بنابر قضیه ۱، اعداد $۳-\sqrt{۲}$ و $۳+\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۲}-۳$ و $\sqrt{۱۸}=۳\sqrt{۲}$ گنگ هستند ولی

$$(۳+\sqrt{۲})+(۳-\sqrt{۲})=۶\in Q$$

$$(۳+\sqrt{۲})(۳-\sqrt{۲})=۷\in Q$$

$$\frac{\sqrt{۱۸}}{\sqrt{۲}}=۳\in Q$$

ابوریحان بیرونی

اصم کَر بُوَد زیرا جواب ندهد، جوینده را الّا به تقریب مثل $\sqrt{۱۰}$ که برای آن هرگز نتوان عددی یافت که اگر آن را در خود زنی ۱۰ بُوَد.

۰ـ ۵ ـ تقریب اعداد گنگ

می‌دانیم که بسط اعشاری هر عدد گنگ به صورت کسری اعشاری با ارقام نامتناهی و بی‌پایان است که در آن این ارقام طبق هیچ ضابطه و نظم معینی رخ می‌دهند. به لحاظ تاریخی $\sqrt{۲}$ و π (عدد ارشمیدس) مشهورترین اعداد گنگ‌اند. $\sqrt{۲}$ در رابطه با محاسبه طول قطر یک مربع به ضلع واحد

پدیدار گشت و π توسط ارشمیدس به عنوان ثابت دایره کشف گردید. همه دوایر موجود در عالم، چه کوچک و چه بزرگ، درگیر عدد π هستند، بدین معنی که نسبت محیط هر دایره بر طول قطر آن عددی است که به π نشان داده می‌شود. قرار دادن حرف π برای چنین عددی خود مبین این واقعیت است که این عدد گویا نیست. در طول تاریخ ریاضی محاسبه جزء اعشاری π، یعنی شناخت ارقام اعشاری آن، یکی از جذاب‌ترین فعالیت‌های ریاضی به‌شمار رفته است، علت این امر را می‌توانیم درچند جهت مطرح کنیم. مثلاً استفاده از π در محاسبه مساحت و محیط دایره.

داشتن تقریبات بهتر π برای استفاده در محاسبات دقیق‌تر نجومی است، به‌هر حال ارقام اعشاری π بی‌هیچ نظمی ادامه دارد و بشر طالب آن است که تا آنجا که برایش مقدور است، این ارقام را شناسایی کند.

در ریاضیات عالی به‌صورتی تئوریک ثابت می‌شود که π گنگ است.

محاسبات ارقام اعشاری π طی چندین قرن گذشته مؤید این نتیجه مهم است و لذا می‌توان ادعا کرد که قدرت تئوری‌پردازی ریاضی مبتنی بر پیش‌بینی پدیده‌های ریاضی با تجربیات پیچیده محاسباتی سازگاری تام و تمام دارد و این یکی از زیبایی‌های علوم ریاضی است. ذیلاً به اختصار محاسبه و تولید ارقام اعشاری π را به لحاظ تاریخی **جهت آشنایی** مرور می‌کنیم: ارشمیدس، که در قرن سوم قبل از میلاد می‌زیسته، نشان داد که:

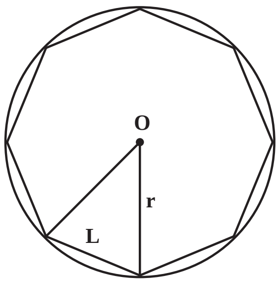
$$\frac{۲۲۳}{۷} < \pi < \frac{۲۲}{۷}$$

وی این امر را با استفاده از ۹۶ ضلعی‌های منتظم ثابت کرد که درون دایره به شعاع واحد محاط می‌شدند.

سپس پتولمی[1] در قرن سوّم بعد از میلاد، با استفاده از ۳۶۰ضلعی منتظم مقدار ...۳/۱۴۱۶۶۶ را برای π به‌دست آورد که تا سه رقم اعشار صحیح می‌باشد در سال ۲۶۳ بعد از میلاد لیوهوی[2] با استفاده از ۹۶ ضلعی منتظم و یک ۱۹۲ ضلعی منتظم و محاسبه میانگین مقادیر به‌دست آمده عدد ۳/۱۴۱۸۶۴ را برای π به‌دست آورد که خطای این تقریب کمتر از ۰/۰۱ می‌باشد.

۱ـ Ptolemy　　۲ ـ Liu Hui

غیاث‌الدین جمشید کاشانی



کاشانی ریاضیدان مسلمان ایرانی، به‌جای محاسبه π به محاسبه ۲π پرداخته است. روش کاشانی درج چندضلعی‌های منتظم و محاسبه تقریبی محیط آنها و سپس استخراج نسبت این محیط به شعاع دایره مربوطه بوده است برای مثال هرگاه یک هشت‌ضلعی منتظم را درون دایره به شعاع r محاط کنیم و طول ضلع این هشت‌ضلعی را L بنامیم، نسبت مربوطه برابر $۲\pi \approx \frac{۸L}{r}$ خواهد بود.

کاشانی ارقام ۲π را تا ۱۶ رقم دقیقاً محاسبه کرده است و این محاسبه بسیار بسیار دقیقتر از محاسبه ارقام π بوده است که قبل از او به‌دست آمده است. دقت محاسبات کاشانی به‌گونه‌ای است که تا ۲۰۰ سال بعد از او توسط هیچ‌کس از او پیشی نگرفته بود و فقط لودوف[۱] توانست ۲۰۰ سال بعد از او عدد π را تا ۲۰۰ رقم اعشار محاسبه کند. ماکزیمم خطای کاشانی در محاسبه کمتر از $\frac{۱}{۶۰^{۹}}$ است، به عبارت دیگر

$$۱۰^{-۶۶} > ۹/۹۲ \times ۱۰^{-۱۷} > \text{حداکثر خطای محاسبه } ۲\pi$$

و این بدان معنی است که کاشانی عدد ۲π را تا ۱۶ رقم اعشار بعد از ممیز دقیقاً به دست آورده است که با محاسبات رایانه‌های امروزی تطابق دارد!

کاشانی این مقدار دقت را با محاسبه محیط یک $۳\times۲\times۱۰^{۱۸}$ ضلعی منتظم به‌دست آورده است و در دوره بعد، که با پیشرفت حسابان پیشرفته (آنالیز ریاضی) اتفاق افتاد محاسبه ارقام اعشاری π با استفاده از فرمول‌های آنالیزی میسر گردید، همچنین لئونارداویلر فرمول $\pi = ۲\tan^{-۱}(\frac{۱}{۷}) + ۸\tan^{-۱}(\frac{۳}{۷۹})$ را به‌دست آورد.

روش‌های محاسبه π با استفاده از رایانه از سال ۱۹۶۱ شروع گردید. این روش‌ها مؤثرترین و کارآمدترین روش‌های محاسبه π را با استفاده از تئوری‌های ریاضی و حساب‌گرهای فوق مدرن عرضه می‌کنند.

۱ــ Ludolph van culen

در اولین پروژه تحقیقاتی تحت نام پروژه گوتنبرگ اعشار π را تا یک میلیون رقم محاسبه کردند. سپس یاساما کانادا از دانشگاه توکیو توانست تعداد ۱۲۴۱۱۰۰۰۰۰۰۰۰ رقم اعشار از π را با دقت به‌دست آورد. این محاسبه در سال ۲۰۰۲ توسط یک سوپر رایانه هیتاچی، که ۲ تریلیون عمل را در هر ثانیه انجام می‌داد، صورت پذیرفت. در دسامبر ۲۰۰۹ یک سوپر کامپیوتر ژاپنی به نام T2kopen Supercomputer ادعا کرده است که عدد π را تا ۲۶۰۰ میلیارد رقم اعشار طی ۷۳ ساعت و ۳۶ دقیقه به‌دست آورده است. باز هم در این ارقام هیچ‌گونه نظم و قاعده‌ای حاکم نیست[۱].

این نکته را باید متذکر شویم که تا هر تعداد از ارقام π که محاسبه شود و بقیه ارقام را نادیده بگیریم در واقع با تقریبی از π به شکل یک عدد گویا دست یافته‌ایم. البته با مقدار واقعی π به شکل همه ارقام اعشاری آن هرگز کار نخواهیم کرد که این امری غیرممکن است. این رویه برای کار عملی با سایر اعداد گنگ نیز مرسوم است. در واقع با تقریبات اعداد گنگ در عمل کار خواهد شد.

کاشانی معتقد بود که مقدار واقعی عدد π را فقط خدا می‌داند. در واقع کاشانی با شهودی الهام‌گونه دریافته بود که π عددی گنگ است. امّا اثبات گنگ بودن π قرن‌ها بعد انجام گرفت[۲].

غیاث‌الدین جمشید کاشانی، ریاضیدان و منجم ایرانی

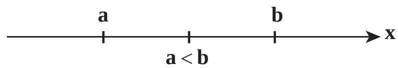
۱ــ در مدّت نگارش این کتاب ارقام اعشاری π با استفاده از سوپر رایانه‌ها تا بیش از ۳۰۰۰ میلیارد رقم توسط محققین ژاپنی محاسبه شده است.

۲ــ داستان محاسبه ارقام π را صرفاً جهت آشنایی شما آورده‌ایم تا متوجه شوید که چگونه محاسبات تکنولوژی پیشرفته با نظریه‌های ریاضی همخوانی دارد و این یکی از قوّت‌های بارز نظریه‌پردازی ریاضیات است که در حالی با استفاده از تئوری‌های جبری و آنالیز ثابت می‌کنند π گنگ است، محاسبه ارقام آن با استفاده از سوپر رایانه‌ها نیز مؤید این حقیقت ریاضی است.

۰ـ۶ـ ترتیب و نامساوی‌ها

یکی از خواص مهمّ اعداد حقیقی مرتب بودن آنها است.

تعریف ترتیب خط حقیقی : هرگاه a و b اعداد حقیقی باشند، آنگاه a کوچکتر از b است اگر $b-a$ مثبت باشد. این ترتیب را با نامساوی $a<b$ (یا $b>a$) نشان می‌دهیم. علامت $a \le b$ یعنی a کوچکتر یا مساوی b



عبارت b بزرگتر از a است. هم‌ارز a کوچکتر از b است. خواص زیرا اغلب در نامساوی‌ها به کار می‌روند. اگر $<$ را با $\le$ و $>$ را با $\ge$ عوض کنیم، خواص مشابهی به‌دست می‌آیند.

خواص نامساوی‌ها

۱) هرگاه $a<b$ و $b<c$، آنگاه $a<c$.

۲) هرگاه $a<b$ و $c<d$ ، آنگاه $a+c<b+d$.

۳) هرگاه $a<b$ و c عددی حقیقی باشد، آنگاه $a+c<b+c$.

۴) هرگاه $a<b$ و $c>۰$، آنگاه $ac<bc$.

۵) هرگاه $a<b$ و $c<۰$، آنگاه $ac>bc$.

۶) (اگر a و b مثبت باشند) $\frac{۱}{a}>\frac{۱}{b} \Leftrightarrow a<b$. [$\Leftrightarrow$ به معنی هم‌ارزی است.]

۷) (اگر a و b مثبت باشند) $a^۲<b^۲ \Leftrightarrow a<b$.

تبصره : توجه کنید که نامساوی‌ها با ضرب در عددی منفی تغییر جهت می‌دهد. مثلاً، هرگاه $x<۵$، آنگاه $-۳x>-۱۵$. این ویژگی در تقسیم بر عددی منفی نیز صادق است. مثلاً، هرگاه $-۳x>۹$، آنگاه $x<-۳$.

اگر سه عدد حقیقی a ، b، c چنان باشند که $a<b$ و $b<c$، می‌گوییم b بین a و c است و می‌نویسیم $a<b<c$.

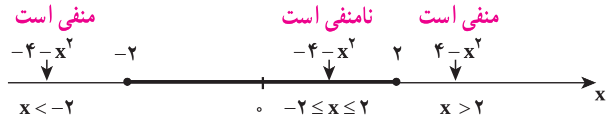
۰ـ۷ـ بازه‌های اعداد

در حساب دیفرانسیل و انتگرال اغلب تعیین مثبت، صفر یا منفی بودن عبارات اهمیت دارد مثلاً برای معادله $y=\sqrt{۴-x^۲}$ که متغیر y را برحسب متغیر x بیان می‌کند، چون جذر یک عدد منفی در $\mathbb{R}$ بی‌معنی است، باید برای حقیقی بودن y شرط ($۴-x^۲$ نامنفی است) $۴-x^۲ \ge ۰$ اعمال شود. این

شرط معادل عبارت زیر است.

$-۲ \leq x \leq ۲$ (x بین ۲- و ۲ است)

در نتیجه، مجموعهٔ اعداد نموده شده با x بازه‌ای است با نقاط انتهایی ۲± بر خط حقیقی (شکل زیر)



نظیر شکل فوق اغلب زیرمجموعه‌های خط حقیقی یعنی مجموعهٔ اعدادی که یک متغیر را نمایش می‌دهند بازه یا اجتماعی از بازه‌ها می‌باشند.

بازه‌ها چند نوع‌اند، که هریک نمادی خاص خود دارد.

مثلاً، بازهٔ باز $(a,b)=\{x:\ a<x<b\}$ مجموعهٔ تمام اعدادحقیقی بزرگتر از a و کوچکتر از b است، که در آن a و b **نقاط انتهایی** بازه نام دارند و این نقاط انتهایی در بازهٔ باز قرار ندارند.

بازه‌هایی که شامل نقاط انتهایی خود باشند بازه بسته نام داشته و با نماد $[a,b]=\{x:\ a\leq x\leq b\}$ نموده می‌شوند. در جدول (۱) نه بازهٔ اصلی روی خط حقیقی نموده شده‌اند. که چهارتای اوّل را بازه‌های کراندار و پنج‌تای دیگر را بازه‌های بی‌کران می‌نامند.

جدول (۱)

نام	نماد بازه	نماد مجموعه	نمودار روی خط
بازهٔ باز	(a, b)	$\{x:\ a<x<b\}$	
بازهٔ بسته	$[a, b]$	$\{x:\ a\leq x\leq b\}$	
بازه‌های نیم‌باز	$[a, b)$	$\{x:\ a\leq x<b$	
	$(a, b]$	$\{x:\ a<x\leq b\}$	
بازه‌های نامتناهی	$(-\infty, a]$	$\{x:\ x\leq a\}$	
	$(-\infty, a)$	$\{x:\ x<a\}$	
	$(b, +\infty)$	$\{x:\ b<x\}$	
	$[b, +\infty)$	$\{x:\ b\leq x\}$	
	$(-\infty\ , +\infty)$	{x : عددی حقیقی استx}	

تبصره: علائم $+\infty$ و $-\infty$ نمایش اعدادی حقیقی نبوده و فقط با آنها می‌توان شرایط بی‌کران را خلاصه‌تر بیان کرد.

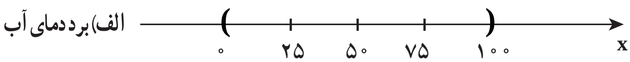
مثلاً بازه $[b, +\infty)$ از راست بی‌کران است. زیرا شامل همهٔ اعداد حقیقی بزرگتر یا مساوی b است.

مثال: با فرض اینکه فشار هوا یک آتمسفر است بازه‌هایی از خط حقیقی را توصیف کنید که نظیر بُرد دمای (به درجهٔ سلسیوس) آب در دو حالت زیر باشند.

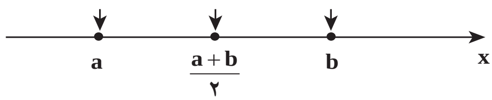
حل: الف) مایع ب) بخار

الف) چون آب در شرایط مایع دمایی بیش از ۰° و کمتر از ۱۰۰° دارد بازهٔ $\{x: ۰<x<۱۰۰\}=(۰,۱۰۰)$ را مثل شکل زیر قسمت (الف)، خواهیم داشت.

ب) چون آب در شرایط گاز (بخار) دمایی بزرگتر یا مساوی ۱۰۰° دارد بازه $\{x: ۱۰۰\leq x\}=[۱۰۰,+\infty)$ را مثل شکل زیر قسمت (ب) خواهیم داشت.

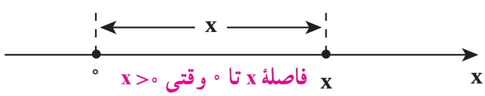


بازه متقارن: فرض کنیم (a, b) یک بازه باشد. معلوم است که عدد $\frac{a+b}{۲}$ به این بازه تعلق دارد (چرا؟) این نقطه را نقطه میانی بازه می‌نامیم زیرا فاصله آن تا نقاط انتهایی a و b یکسان است.

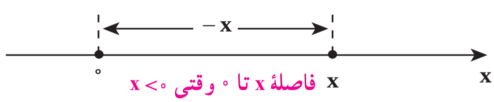


هرگاه $\delta > ۰$، بازه $(x_۰ - \delta , x_۰ + \delta)$ بازه‌ای با نقطه میانی $x_۰$ و شعاع δ است. چنین بازه‌هایی را بازه متقارن نیز می‌نامیم.

اغلب دانستن اینکه نقطهٔ x از خط حقیقی چقدر تا مبدأ فاصله دارد مهم است. همان‌طور که شکل زیر نشان داده، اوّلین حدس ممکن است x باشد.



امّا اگر $x < ۰$، فاصله x نیست بلکه $-x$ است (شکل زیر) مثلاً اگر $x = -۵$، فاصله $-x = -(-۵) = ۵$ می‌باشد. توضیح اینکه فاصله همیشه عددی نامنفی است.



برای بیان مقدار $\sqrt{x^۲}$ می‌توان برحسب حالات، چنین نوشت :

$$\sqrt{x^۲}=\begin{cases} x \quad , \quad x\geq ۰ & \text{اگر} \\ -x \quad , \quad x<۰ & \text{اگر} \end{cases}$$

علامت دیگر استفاده از $|x|$ است که در تعریف زیر دقیقاً عرضه شده است.

۰ ـ ۸ ـ قدر مطلق

هرگاه $x\in\mathbb{R}$، قدر مطلق x عبارت است از :

$$|x|=\sqrt{x^۲}=\begin{cases} x \quad , \quad x\geq ۰ & \text{اگر} \\ -x \quad , \quad x<۰ & \text{اگر} \end{cases}$$

مثال : با استفاده از دو قسمت تعریف، قدر مطلق ۵− را بیابید.

حل :

$$|-۵|=\sqrt{(-۵)^۲}=\sqrt{۲۵}=۵$$

قضایای زیر چند خاصیت مفید قدر مطلق را بیان می‌دارند.

قضیه (اَعمال با قدر مطلق) : هرگاه a و b اعداد حقیقی بوده و n عدد صحیح مثبتی باشد، آنگاه خواص زیر برقرار می‌باشند.

۱) $|a.b|=|a||b|$ ۲) $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}\ , b\neq ۰$ ۳) $|a^n|=|a|^n$

اثبات به عهده دانش‌آموز.

قضیه (نامساوی‌ها و قدرمطلق) : هرگاه a و b اعدادی حقیقی بوده و k مثبت باشد، خواص زیر برقرار می‌باشند.

۱) $-|a|\leq a\leq |a|$

۲) $|a|\leq k$ اگر و فقط اگر $-k\leq a\leq k$.

۳) $|a|\geq k$ اگر و فقط اگر $a\geq k$ یا $a\leq -k$.

۴) نامساوی مثلثی : $|a+b|\leq |a|+|b|$

خواص ۲ و ۳ در صورت تعویض $\leq$ با $<$ نیز درست‌اند. این احکام را برحسب $<$ بنویسید.

برهان : خاصیت‌های ۲ و ۴ را ثابت کرده و اثبات دو خاصیت دیگر را به عنوان تمرین به عهده دانش‌آموز می‌گذاریم.

برای برهان خاصیت ۲، فرض کنید $|a|\leq k$، چون $-|a|\leq a\leq |a|$ نتیجه می‌شود

$$-k\leq -|a|\leq a\leq |a|\leq k$$

یعنی

$$-k\leq a\leq k$$

حال فرض کنید $-k \leq a \leq k$، اگر $a \geq 0$، $|a| = a \leq a$ و اگر $a \leq 0$، $|a| = -a \leq a$ از این‌رو در هر حالت $|a| \leq k$.

اثبات ۴) چون $-|a| \leq a \leq |a|$ و $-|b| \leq b \leq |b|$ بنابراین $-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|$

و بنابر قضیه $|a + b| \leq |a| + |b|$

مثال: نشان دهید برای هر دو عدد حقیقی a و b

$$|a| - |b| \leq |a - b| \leq |a| + |b|$$

حل: طبق نامساوی مثلثی

$$|a| = |a - b + b| \leq |a - b| + |b|$$

پس

$$|a| - |b| \leq |a - b| \qquad (1)$$

از طرف دیگر طبق نامساوی مثلثی

$$|a - b| = |a + (-b)| \leq |a| + |-b| = |a| + |b| \qquad (2)$$

و از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود

$$|a| - |b| \leq |a - b| \leq |a| + |b|$$

تمرین در کلاس

نامساوی مثلثی را برای سه عدد a_1، a_2 و a_3 بیان و اثبات کنید. آیا صورت کلی‌تری (برای n عدد) از این نامساوی می‌توانید بیان کنید؟

مسائل

۱ــ نامعادله $-\frac{2}{x} < \frac{5}{x-1}$ را حل کرده و مجموعه جواب آن را روی خط حقیقی نشان دهید.

۲ــ جواب نامعادله‌های زیر را به‌صورت بازه و یا اجتماعی از بازه‌ها پیدا کنید.

الف) $3x + 5 \leq 8$ ب) $5x - 3 \leq 7 - 3x$

ج) $x^2 < 9$ د) $\frac{1}{2-x} < 3$

۳ــ هریک از نامساوی‌های زیر یک بازه را مشخص می‌سازد. این بازه را بنویسید.

الف) $|x - 2| \leq 2$ ب) $|2x + 5| < 1$ پ) $\left|2 - \frac{x}{2}\right| < \frac{1}{2}$

ت) $|3x - 7| < 2$ ث) $|2x + 5| < 1$

۴ــ جواب‌هایی از نابرابری $|x^۲-۴|<۱$ را به‌دست آورید که در بازه متقارن $(۲+\frac{۱}{۱۰}\,,\,۲-\frac{۱}{۱۰})$ قرار داشته باشند.

۵ــ جواب‌هایی از نابرابری $\left|x^۲-۹\right|<\frac{۱}{۱۰۰۰}$ را به‌دست آورید که در بازه متقارن $(۲،۴)$ قرار داشته باشند.

۶ــ جواب‌هایی از نابرابری $\frac{۱}{x^۲}<\frac{۱}{۱۰^۴}$ را به‌دست آورید که در بازه $(۳\,,\,+\infty)$ قرار دارند.

۷ــ جواب‌هایی از نابرابری $\sqrt{x^۲-۹}<\frac{۱}{۱۰۰}$ را به‌دست آورید که در بازه متقارن $(۳+\frac{۱}{۱۰},۳-\frac{۱}{۱۰})$ قرار دارند.

۸ــ فرض کنیم $a<x<b$، ثابت کنید $|x|<\mathrm{Max}\ \{|a|,|b|\}$

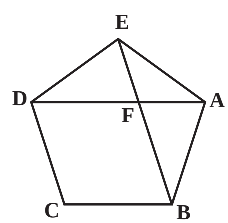
(منظور از Max، ماکسیمم مقدار مجموعه است)

آیا عکس این حکم درست است؟

۹ــ فرض کنیم برای هر عدد مثبت h ، $۰\le a<h$ ثابت کنید $a=۰$

۱۰ــ ثابت کنید در هر پنج ضلعی منتظم با طول ضلع a، نسبت طول قطر به طول ضلع، عددی گنگ است. (قضیه هیپاسوس)

راهنمایی : ابتدا نشان دهید دو مثلث ABE و FEA در شکل زیر متشابه‌اند.



۱۱ــ ثابت کنید $\sqrt{۳}$ عددی گنگ است.

۱۲ــ ثابت کنید $\log ۳$ گویا نیست.

۱۳ــ اعداد $\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۳}$ را روی محور اعداد نشان دهید (به کمک رسم مثلث قائم الزاویه).

فصل ۱

دنباله‌ها

۱ـ۱ـ مقدمه

وقتی در یک برنامه تلویزیونی به حرکات و تکاپوی انبوهی از ماهی‌ها می‌نگریم، به این فکر وادار می‌شویم که رشد جمعیت ماهی‌ها از چه مدل و رابطه‌ای پیروی می‌کند.

آیا می‌توانیم با توجه به شرایط زیست‌محیطی و تغییرات آن رشد و زوال گونه خاصی از ماهی‌ها را پیش‌بینی کنیم؟ فرض کنیم مدل جمعیتی نوع خاصی از ماهی‌ها از رابطه

$$P_{n+1} = \frac{bp_n}{a + p_n}$$

پیروی کند که در آن p_n جمعیت ماهی‌ها در سال nام، P_{n+1} جمعیت ماهی‌ها در سال n+۱ام و a و b دو عدد ثابت‌اند که به شرایط محیطی ماهی‌ها وابسته‌اند.

با استفاده از این رابطه چنان‌چه جمعیت ماهی‌ها در سال اول، یعنی P_1 معلوم باشد، جمعیت ماهی‌ها در سال دوم و سال‌های بعد به دست می‌آید. یعنی اعداد

$$P_1, P_2, P_3, \cdots, P_n, \cdots$$

حاصل می‌شوند که اصطلاحاً آن را دنباله می‌نامیم. مطالعه دنباله‌ها و خواص آنها موضوع این فصل می‌باشد.

مسأله

(الف) به نظر شما براساس مدل داده شده فوق تحت چه شرایطی جمعیت ماهی‌ها افزایش می‌یابد؟

(ب) تحت چه شرایطی جمعیت ماهی‌ها کاهش یافته و جمعیت فنا می‌شود؟

در ادامه این فصل با مطالعه مبحث دنباله‌ها و بررسی خواص آنها به این پرسش‌ها پاسخ خواهیم داد.

با استفاده از رابطه داده شده چنانچه جمعیت ماهی‌ها در سال اول، یعنی $p_۱$، معلوم باشد، جمعیت ماهی‌ها در سال دوم، یعنی $p_۲$ به‌دست می‌آید :

$$P_۲ = \frac{bp_۱}{a + p_۱} \qquad (n=۱)$$

مشابهاً با داشتن $p_۲$، و قراردادن $n=۲$ در فرمول $p_۳$ به‌دست می‌آید. با ادامه این فرآیند، اعداد

$$P_۱, P_۲, P_۳, \cdots, P_n, \cdots$$

حاصل می‌شوند که اصطلاحاً آن را یک **دنباله** می‌نامیم، مطالعه دنباله‌ها و خواص آنها موضوع این فصل می‌باشد.

۱ـ۲ـ دنباله‌های عددی

در سال‌های قبل با اعداد اعشاری و تبدیل کسرهای گویا به اعداد اعشاری آشنا شده‌اید. برای مثال برای آن‌که کسر $\frac{۱}{۳}$ را بـه کسر اعشاری تبدیل کنیم کافی است عدد ۱ در صورت کسر را به عدد ۳ مخرج تقسیم کنیم در ابتدا عدد ۰/۳ حاصل می‌شود. اگر تقسیم را ادامه دهیم اعداد ۰/۳۳، ۰/۳۳۳ و نظایر این‌ها به دست می‌آیند. چون باقیمانده هرگز صفر نمی‌شود این اعشار همچنان ادامه دارند. آیا $\frac{۱}{۳}$ با اعداد به‌دست آمده برابر است؟

هرگاه $\frac{۱}{۳}$ را برابر ۰/۳ اختیارکنیم، مقداری تقریبی برای $\frac{۱}{۳}$ به‌دست آورده‌ایم که خطای این تقریب کمتر از ۰/۱ است : زیرا

$$\frac{۱}{۳} - ۰/۳ = ۰/۰۳۳\ldots$$

و ۰/۱>...۰/۰۳۳ هرگاه $\frac{۱}{۳}$ را برابر ۰/۳۳ اختیار کنیم، خطای تقریب از ۰/۰۱ نیز کوچک‌تر است. به همین نحوه هرگاه $\frac{۱}{۳}$ را برابر ۰/۳۳۳ بگیریم، خطای تقریب از ۰/۰۰۱ کوچک‌تر است. در عمل و محاسبات کاربردی خطای تقریب را از پیش معین کرده و متناسب با آن مقدار تقریب $\frac{۱}{۳}$ را به‌صورت اعشاری، با اعشار خاتمه یافته، مشخص می‌کنند.

مسأله

ممکن است چنین به نظر رسد که برای آن‌که خطای تقریب را به صفر برسانیم بهتر است بنویسیم

$$\frac{۱}{۳} = ۰/۳۳۳۳\ \ldots$$

امّا نوشتن کسر اعشاری با نمایش ۰/۳۳۳۳۰۰۰ که در آن رقم اعشاری ۳، برای همیشه ادامه دارد، چه معنا و مفهومی می‌تواند داشته باشد؟ برخی برای آنکه ۳ صدم و ۳ هزارم و ... را تکرار نکنند

می‌نویسند.

$$\frac{۱}{۳}=۰/\overline{۳}$$

اگر منظورمان از نوشتن سه نقطه «...» به دنبال آخرین ۳ این است که این رقم تا ابد ادامه دارد چگونه می‌توانیم تساوی فوق را تفسیر کنیم؟

در واقع دنباله‌ای از اعداد اعشاری به‌صورت

$$۰/۳,۰/۳۳,۰/۳۳۳,\ldots,\overset{\text{n بار ۳}}{۰/۳۳۳\ldots۳},\ldots$$

$$a_۱ \quad a_۲ \quad a_۳,\ldots,a_n,\ldots$$

در دست داریم که در آن

$$a_n=\overset{\text{n بار ۳}}{۰/۳۳۳\ldots۳}\ ,\ \ldots\ ,\ a_۲=۰/۳۳\ ,\ a_۱=۰/۳$$

$a_۱$ را جمله اول این دنباله، $a_۲$ را جمله دوم و در حالت کلی، a_n را جمله nام این دنباله یا **جمله عمومی** دنباله می‌نامیم.

فعالیت

اکنون شما احمد بفرمایید که یک دنباله را به زبان ریاضی چگونه تعریف می‌کنید؟

احمد : یک دنباله عددی مجموعه‌ای از اعداد است که این اعداد با اعداد طبیعی شماره‌گذاری شده‌اند.

دبیر : بسیار خوب. آیا می‌توانی به زبان دقیق‌تری دنباله را تعریف کنی؟

احمد : آری، هر دنباله عددی، یا به‌اختصار دنباله، تابعی است با دامنه مجموعه اعداد طبیعی N و هم دامنه مجموعه اعداد حقیقی R.

دبیر : بسیار خوب. شما تعریف دقیق دنباله را ارایه دادید. می‌توان با علامات ریاضی توضیح بیشتری بدهی؟

احمد : فرض کنیم $\quad a: N\to R \quad (۱)$

یک تابع، یعنی یک دنباله باشد، در این صورت $a(۱)$ ، $a(۲)$،...، $a(n)$ مقادیر تابع a بوده که اعدادی حقیقی‌اند. در موقعیت کاری با دنباله‌ها، به جای $a(۱)$ می‌نویسیم $a_۱$ ، به جای $a(۲)$ می‌نویسیم $a_۲$ و به‌طور کلی به جای $a(n)$ می‌نویسیم a_n. لذا نماد تابعی نمایش داده شده در (۱) به‌صورت ساده‌تر زیر نوشته می‌شود :

$$a_۱\ ,a_۲\ ,\ldots,a_n\ ,\ldots$$

دبیر : اکنون شما حسین دو دنباله دیگر نام ببرید.

حسین : این پرسش ساده‌ای است؛ می‌توانم بنویسم :

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots, \frac{1}{n}, \dots \qquad (1)$$

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots \qquad (2)$$

دبیر : اکنون این دنباله را در نظر بگیرید :

$$7, -8, 9, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \frac{8}{9}, \dots \qquad (3)$$

آیا می‌توانی جمله عمومی این دنباله و یا شکل تابعی آن را بیان کنی؟

حسین : آری، ۷ اولین جمله این دنباله است، همین ۸− دومین و ۹ سومین و $\frac{5}{6}$ چهارمین جمله آن است. اگر نام این دنباله را b بنامیم، داریم

$$b_1 = 7,\ b_2 = -8\ ,\ b_3 = 9\ ,\ b_4 = \frac{5}{6}\ ,\ b_5 = \frac{6}{7}\ ,\ \dots$$

اما از شماره ۴ به بعد جملات دنباله، که همان مقادیر تابع‌اند، منظم هستند، پس می‌نویسیم

$$b_1 = 7,\ b_2 = -8\ ,\ b_3 = 9\ ,\ b_n = \frac{n}{n+1}\ ,\ n \geq 4 \qquad (4)$$

دبیر : فرق این دنباله یا دنباله نموده شده در (۲) چیست؟

حسین : دنباله‌های (۳) و (۲) فقط در سه جمله نخست با هم متفاوت‌اند. از شماره ۴ به بعد دو دنباله متحدند.

دبیر : آیا می‌توانیم بگوییم این دو دنباله یکی‌اند؟

حسین : خیر؛ امّا تفاوت در سه جمله تأثیری کلی در اعداد دو دنباله ندارد.

دبیر : ازدنباله‌های آشنای دیگر خاطرتان هستد؟ تصاعد هندسی را به خاطر دارید؟

احمد : آری، می‌توانم چند مثال بزنم، برای نمونه یک تصاعد هندسی می‌سازم :

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots, \frac{1}{2^{n-1}}, \dots$$

دبیر : درست است. این دنباله یک دنباله تصاعد هندسی است که قدر نسبت آن

است. $q=\frac{۱}{۲}$ جملات آن مرتب کوچک و کوچکتر می‌شوند زیرا قدر نسبت آن کوچکتر از واحد است.

حسین : منظورتان از کوچکتر شدن چیست؟

دبیر : منظورمان این است که جملات دنباله به عدد صفر گرایش دارند، اصطلاحاً گوییم حد دنباله برابر صفر است.

حسین : اما هر کسر به شکل $\frac{۱}{۲^{n-۱}}$ ولو n خیلی بزرگ باشد، هرگز برابر صفر نمی‌شود.

دبیر : آری درست است. منظور از آن‌که حد دنباله برابر صفر است، این نیست که جملات دنباله برابر صفر می‌شوند، بلکه خطای آنها تا صفر به دلخواه کوچک می‌گردد. اجازه دهید به این مبحث بعداً بپردازیم. فعلاً به تعاریف و مقدمات دنباله ادامه می‌دهیم.

فعالیت

نماد دنباله : وقتی با یک دنباله مانند

$$a_۱,\ a_۲,\ \ldots\ a_۳,\ \ldots, a_n\ ,\ \ldots$$

سر و کار داریم، آن را با نماد آکولاد یعنی $\{a_n\}_{n=۱}^{\infty}$ و یا مختصراً $\{a_n\}_{n=۱}$ و یا حتی مختصرتر با $\{a_n\}$ نشان می‌دهیم. برای مثال، دنباله‌هایی را که قبلاً حسین نام برد با $\left\{\frac{n}{n+۱}\right\}_{n=۱}$ ، $\left\{\frac{۱}{n}\right\}_{n=۱}$ نشان می‌دهیم، لذا جمله عمومی دنباله را در درون آکولاد قرا می‌دهیم و n=۱ نشانگر آن است که شماره جملات از عدد طبیعی ۱ شروع می‌شود.

البته هرگاه دنباله، فاقد ضابطه و قانون مشخص باشد. یعنی جمله عمومی آن را نتوانیم با فرمول ساده و معین مانند $a_n=\frac{۱}{n}$ بیان کنیم، چاره‌ای نداریم جز آنکه جملات دنباله را یکی یکی و به دنبال هم نام ببریم و از نماد دنباله نمی‌توانیم استفاده کنیم.

از این نوع دنباله‌ها، می‌توانیم به دنباله اعدادی که نمایشگر عدد π است اشاره کنیم (یعنی اعداد آن به عدد π گرایش دارند).

$$۳,\ ۳/۱۴,\ ۳/۱۴۲۸,\ \ldots$$

برای این دنباله هیچ قاعده و یا قانونی که بر طبق آن بتوان جملات دنباله را تولید کرد وجود ندارد (چرا؟).

نکته: ممکن است با یک توالی متناهی از اعداد سر و کار داشته باشیم. در این صورت این توالی را یک **دنباله متناهی** می‌نامیم، مانند

$$۱,۲,۳,۴,\ldots,۲۰$$

$$-۵,۵,\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۴},\sqrt{۲},-\sqrt{۳}$$

که اولی دنباله‌ای متناهی با ۲۰ جمله و دومی دنباله‌ای متناهی با ۶ جمله می‌باشد. اما وقتی از یک دنباله بدون قید نام برده می‌شود مرادمان یک دنباله نامتناهی است.

اکنون به ذکر مثال جالبی از دنباله‌ها می‌پردازیم که نظیر تابع ثابت می‌باشد.

مثال: فرض کنیم $C\in R$ عدد ثابتی باشد. دنباله $C,C,C,\ldots,C,\ldots$

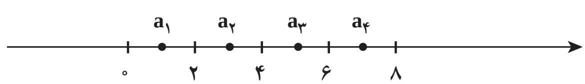
که در آن هر جملهٔ آن برابر C، یعنی برای هر عدد طبیعی n، $C_n=C$، دنباله ثابت C نامیده می‌شود

برای نمونه دنباله $\sqrt{۲},\sqrt{۲},\cdots,\sqrt{۲},\cdots$

دنباله ثابت $\sqrt{۲}$ یعنی $\{\sqrt{۲}\}$ می‌باشد.

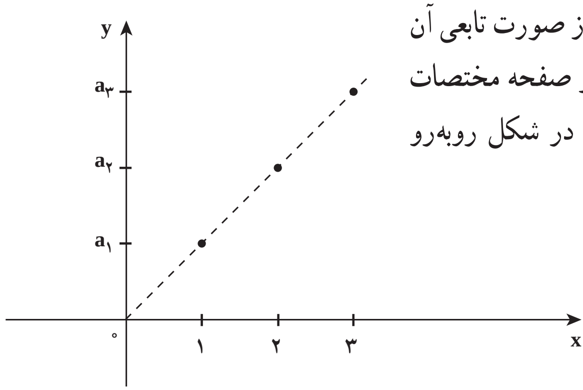
۱ـ۳ـ نمودار دنباله‌ها

یک دنباله را به دو صورت می‌توانیم نمایش دهیم. یک راه آن مشخص‌کردن جملات دنباله روی خط اعداد حقیقی است. برای نمونه دنباله اعداد زوج، یعنی $\{۲n\}_{n=۱}$ به‌صورت نقاطی روی محور اعداد نمایش داده می‌شود (شکل زیر).



جملات دنباله $a_{۲n}=۲n$، یعنی اعداد طبیعی زوج با نقاط توپر روی محور اعداد حقیقی مشخص شده است.

راه دوّم نمایش دنباله با استفاده از صورت تابعی آن است، همانند یک تابع نقاط دنباله را در صفحه مختصات نشان می‌دهیم. نمودار دنباله $a_{۲n}=۲n$ در شکل روبه‌رو نشان داده شده است.



وقتی با خط به معادله $f(x)=۲x$ مقایسه می‌کنیم، ملاحظه می‌کنیم که نمودار دنباله با ضابطه $a_n=۲n$ به‌صورت نقاط مجزا و توپر روی این خط قرار دارند.

۱ـ۴ـ انواع دنباله‌ها

در درس حسابان با انواع مهمّی از توابع آشنا شده‌اید. مفاهیم تابع صعودی، نابع نزولی، تابع کراندار در حسابان از اهمیت اساسی برخوردارند. این مفاهیم را بار دیگر یادآوری می‌نماییم.

فرض کنیم A زیرمجموعه‌ای از مجموعه اعداد حقیقی باشد، تابع f را بر A صعودی می‌نامیم، درصورتی که همواره از $x_۱ < x_۲$ نتیجه شود $f(x_۱) \leq f(x_۲)$، همچنین تابع f را بر A از بالا کراندار نامیم درصورتی که عدد حقیقی U یافت شود به‌طوری که برای هر $x \in A$ ، $f(x) \leq U$

مفاهیم نزولی بودن و از پایین کراندار بودن مشابهاً تعریف می‌شوند تابع f را بر A کراندار می‌نامیم درصورتی که از بالا و از پایین کراندار باشد، یعنی عددی مثبت مانند U یافت شود به‌طوری که برای هر $x \in A$ ، $-U \leq f(x) \leq U$

چون هر دنباله ماهیتاً یک تابع است، همین مفاهیم را می‌توانید در مورد دنباله‌ها تکرار کنید. در این‌جا کار ساده‌تر است، زیرا دامنه هر دنباله مجموعه اعداد طبیعی است که به‌طور مرتب شده، از کوچک به بزرگ، در نظر گرفته می‌شود:

$$\begin{array}{l} ۱ < ۲ < ۳ < ۴ < \cdots < n < n+۱ \ \cdots \\ \downarrow a_۱ \ \ a_۲ \ \ a_۳ \ \ a_۴ \quad \ a_n \ a_{n+۱} \ , \ \cdots \end{array}$$

پس هرگاه دنباله $\{a_n\}$ بخواهد صعودی باشد، چون $۲ > ۱$، باید $a_۱ < a_۲$. همچنین چون $۲ < ۳$ باید داشته باشیم $a_۲ \leq a_۳$ و به‌طور کلی چون $n < n+۱$، لازم است که $a_n < a_{n+۱}$، یعنی هرگاه از سمت چپ به جملات دنباله بنگریم، هر جمله باید از جمله بعدی کوچکتر یا مساوی باشد.

برای دنباله نزولی وضعیت برعکس است، دنباله‌ای نزولی است که وقتی از چپ بدان می‌نگریم هر جمله از جمله بعدی بزرگتر یا مساوی است به عبارت دیگر دنباله $\{a_n\}$ صعودی است هرگاه برای هر n، $a_n \leq a_{n+۱}$ و دنباله $\{b_n\}$ نزولی است هرگاه برای هر n، $a_{n+۱} \geq a_n$

هر دنباله که یا صعودی و یا نزولی باشد یک دنباله **یکنوا** نامیده می‌شود.

تمرین در کلاس

به دنباله‌های زیر توجه کنید.

الف) $۱, ۲, ۴, ۸, ۱۶, ۳۲, ۶۴, \ldots, n^۲, \ldots$

ب) $\frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۹}, \frac{۱}{۲۷}, \frac{۱}{۸۱}, \frac{۱}{۲۴۳}, \ldots, \frac{۱}{۳^n}, \ldots$

ج) $۲, \frac{۳}{۲}, \frac{۴}{۳}, \frac{۵}{۴}, \frac{۶}{۵}, \frac{۷}{۶}, \dots, \frac{n+۱}{n}, \dots$

د) $۲, (\frac{۳}{۲})^۲, (\frac{۴}{۳})^۳, (\frac{۵}{۴})^۴, (\frac{۶}{۵})^۵, \dots, (\frac{n+۱}{n})^n, \dots$

اکنون مشخص کنید کدام دنباله صعودی و کدامیک نزولی است.

نکته: در بحث دنباله، از ویژگی‌های حسابی دنباله چنان است که با افزایش شماره جمله دنباله، مقدار جملات افزایش می‌یابد، یا آن‌که وقتی دنباله‌ای از بالا کراندار است، جملات دنباله از یک عدد ثابتی بزرگتر نخواهند شد.

بررسی و مطالعه رفتار دنباله‌ها و همچنین توابع در واقع پیش‌بینی رفتار آنها است.

دنباله نوسانی

به دنباله‌های زیر توجه کنید.

الف) $۱, -۱, ۱, -۱, ۱, -۱, \dots, (-۱)^{n+۱}, \dots$

ب) $-\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۴}, -\frac{۱}{۸}, \frac{۱}{۱۶}, \dots, (-\frac{۱}{۲})^n, \dots$

ج) $۲, -۳, ۴, -۵, ۶, -۷, \dots$

ویژگی این دنباله‌ها چنان است که جملات آن یک درمیان مثبت و منفی هستند. جملات دنباله (الف) همگی حول دو نقطه ۱ و ۱− گرد آمده‌اند و در واقع برابر ۱ یا ۱− هستند. جملات دنباله (ب) نیز حول یک عدد معین گرد آمده‌اند، درحالی که جملات دنباله (ج) فاقد چنین ویژگی هستند. هیچ‌یک از این سه دنباله نه صعودی‌اند و نه نزولی، پس یکنوا نیستند.

مسائل

۱ــ چهار دنباله زیر را در نظر بگیرید :

الف) $\{n+۱\}_{n=۱}^{\infty}$ ب) $\{(-۱)^{n+۱}\}_{n=۱}^{\infty}$

ج) $\left\{\frac{n}{n+۱}\right\}_{n=۱}^{\infty}$ د) $\left\{۱+(-\frac{۱}{۲})^n\right\}_{n=۱}^{\infty}$

ابتدا تعدادی از جملات هر دنباله را بنویسید. این که چه تعداد از جمله‌های نخست را

انتخاب می‌کنید به خودتان بستگی دارد. سپس مشخص کنید که کدامیک صعودی و کدامیک نزولی‌اند. همچنین تجمع احتمالی جملات هر دنباله را حول یک عدد معین بررسی کنید.

۲ــ یک دنباله بسازید که کراندار باشد امّا صعودی نباشد.

۳ــ یک دنباله بسازید که هم کراندار و هم نزولی باشد.

۴ــ نشان دهید که هیچ‌کدام از دو جمله از دنباله $\left\{\frac{۱}{n}\right\}$ برابر نیستند.

۵ــ ده عدد گویا معرفی کنید که بین دو عدد $\frac{۱}{۱۰}$ و $\frac{۱}{۱۱}$ واقع باشند.

۶ــ دنباله‌ای از اعداد گویا بسازید که بین دو عدد $\frac{۱}{۱۰}$ و $\frac{۱}{۱۱}$ واقع باشند.

۷ــ با بررسی جملات (اولیه) دنباله‌های زیر رفتار آنها را حدس زده و حدس خود را توضیح دهید.

الف) $\left\{۱+(\frac{۱}{۲})^n\right\}$ ب) $\left\{\frac{n^۲}{۲n}\right\}$ ج) $\left\{۱+(-۱)^n\right\}$

د) $\left\{(۱+\frac{۱}{n})^n\right\}$ هـ) $\left\{\cos(\frac{n\pi}{۲n})\right\}$ ز) $\left\{(۱+\frac{۱}{n})^{n+۱}\right\}$

۸ــ دنباله $a_n=\frac{n}{n+۱}$ را در نظر می‌گیریم : $\frac{۱}{۲},\frac{۲}{۳},\frac{۳}{۴},\frac{۴}{۵},\dots,\frac{n}{n+۱},\dots$

اکنون ۵ جمله نخست آن را تعویض می‌کنیم و دنباله جدید را $\{b_n\}$ می‌نامیم؛ بنابراین، برای مثال،

$b_۱=۱, b_۲=۵, b_۳=۱۰, b_۴=۱۰, b_۵=-۱۵$

و برای $n \geq ۶$، قرار می‌دهیم $b_n = a_n$. رفتار دو دنباله $\{a_n\}$، $\{b_n\}$ را مقایسه کنید. چه نتیجه کلی از این بررسی عایدتان می‌شود؟ آن را بیان کنید.

۹ــ دنباله $c_n: ۱,۱,۲,۳,۵,۸,۱۳,۲۱,۳۴,\dots$

را در نظر می‌گیریم. رابطه بین جملات متوالی این دنباله را پیدا کنید.

$\{c_n\}$ یک نمونه از دنباله‌هایی است که به دنباله‌های فیبونانچی[1] معروف‌اند.

۱ــ لئونادو فیبونانچی یک ریاضیدان ایتالیایی بود که در رابطه با مطالعه زاد و ولد خرگوش‌ها و افزایش جمعیت آنها این‌گونه دنباله‌ها را شناسایی کرده است. در واقع مدل افزایش جمعیت خرگوش‌ها را صورت‌بندی کرده است.

۱۰ــ ثابت کنید هرگاه دنباله $\{a_n\}$ کراندار باشد، عدد مثبتی مانند M هست به قسمی که برای هر n، $|a_n| \le M$ و بالعکس.

۱۱ــ برای چندین جمله اولیه، فاصله جملات دنباله $\left\{\frac{2n}{n+1}\right\}$ را تا ۲ حساب کنید. n از چه عددی باید بزرگتر باشد تا نابرابری $\left|\frac{2n}{n+1}-2\right|<0/0001$ برقرار باشد.

۱۲ــ یک دنباله نوسانی تعریف کنید که کراندار باشد، دو دنباله نوسانی تعریف کنید که کراندار نباشند.

پرسش‌های مفهومی

۱ــ پرسش‌های زیر را بررسی کنید، اگر فکر می‌کنید درست‌اند، آنها را توضیح دهید و اگر فکر می‌کنید نادرست‌اند مثالی ارائه دهید.

الف) هرگاه n جمله نخست یک دنباله را تغییر دهیم در رفتار آن تغییری حاصل نمی‌شود.

ب) هرگاه $\{a_n\}$ دنباله‌ای صعودی و C عدد ثابتی باشد دنباله $\{ca_n\}$ نیز صعودی است.

ج) هرگاه $\{a_n\}$ دنباله‌ای نزولی و C عدد ثابتی باشد دنباله $\{ca_n\}$ نیز صعودی است.

د) هرگاه $\{a_n\}$ دنباله‌ای یکنوا و C عدد ثابتی باشد دنباله $\{ca_n\}$ نیز یکنوا است.

۱ـ۵ـ همگرایی دنباله‌ها

سرچشمه بسیاری از اندیشه‌های جدید ریاضی در اندیشه‌های کشف شده قبلی یا تجربه‌های گذشته نهفته است. با این حال، در بیشتر موارد چنین سرچشمه‌هایی در لایه‌های زیرین مفاهیم مربوطه پنهان بوده و به آسانی نمی‌توان آنها را ملاحظه کرد. در واقع، دیدن و یافتن آنها نگاهی تیزبین و شجاعت در تفکر می‌خواهد؛ در بعضی موارد نیز ظرافت‌هایی دیده می‌شود ولی در بدو امر به نظر نمی‌رسد که اندیشه جدید ریاضی در ورای آنها وجود داشته باشد؟

با چنین نگرشی به بحث‌ها و توصیف‌های مربوط به دنباله‌ها باز می‌گردیم و به کندوکاو سرچشمه‌ها، ظرافت‌ها یا اندیشه‌های نو می‌پردازیم.

برحسب هر ویژگی و یا مفهومی که تعریف کرده‌ایم دنباله‌ها را می‌توانیم به دو دسته تقسیم کنیم :

دنباله‌های کراندار و دنباله‌های بیکران (کراندار نیستند).

دنباله‌های یکنوا و دنباله‌هایی که یکنوا نیستند.

یک ویژگی دیگر در مجموعه دنباله‌های بررسی شده وجود دارد که کمتر خودنمایی می‌کند. برخی از دنباله‌ها این ویژگی را دارند که جملات آن به یک عدد مشخص نزدیک و نزدیک‌تر می‌شوند و از روی نمودار نیز شهود می‌شود که به یک نقطه می‌گرایند. بنابراین معیار دسته‌بندی جدید را از این دنباله‌هایی که جملات دنباله، به یک عدد معین می‌گرایند. و دنباله‌هایی که جملات آنها، به یک عدد معین نمی‌گرایند. برای مثال از دنباله‌های دسته اوّل به دنباله‌های زیر توجّه می‌کنیم:

دنباله $\left\{\frac{۱}{n}\right\}$ دنباله $\left\{\frac{۱}{n+۱}\right\}$ دنباله $\left\{۱+(-\frac{۱}{۲})^n\right\}$ دنباله $\left\{(-\frac{۱}{۲})^n\right\}$

و به‌عنوان نمونه از دنباله‌های دسته دوّم، یعنی دنباله‌هایی که با افزایش شماره جمله دنباله، به یک عدد معین نمی‌گرایند، دنباله‌های زیر را نام می‌بریم:

دنباله اعداد زوج $\{۲n\}$، دنباله اعداد فرد $\{۲n-۱\}$، دنباله $\left\{(-۱)^{n+۱}\right\}$

ملاحظه می‌کنیم که دنباله $\left\{\frac{۱}{n}\right\}$ به صفر میل می‌کند به عبارت دیگر جملات این دنباله با افزایش شماره جمله‌ها، به طرز دلخواهی به عدد صفر نزدیک و نزدیکتر می‌شوند. همچنین با محاسبه جملات دنباله $\left\{۱+(-\frac{۱}{۲})^n\right\}$ ملاحظه می‌کنیم که وقتی n بزرگ و بزرگتر می‌شود جملات این دنباله به عدد ۱ نزدیک و نزدیکتر می‌شوند. برای آنکه این مفهوم «نزدیکی جملات دنباله به عدد ۱» را به لحاظ ریاضی واضح و روشن کنیم به نمودار این دنباله بار دیگر دقت می‌کنیم.

قبل از این، جدولی برای تعیین مقادیر این دنباله تنظیم می‌کنیم.

n	۱	۲	۴	۵	۶	۷	…
$\mathbf{a_n}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۵}{۴}$	$\frac{۱۷}{۱۶}$	$\frac{۳۱}{۳۲}$	$\frac{۶۵}{۶۴}$	$\frac{۱۲۷}{۱۲۸}$	…

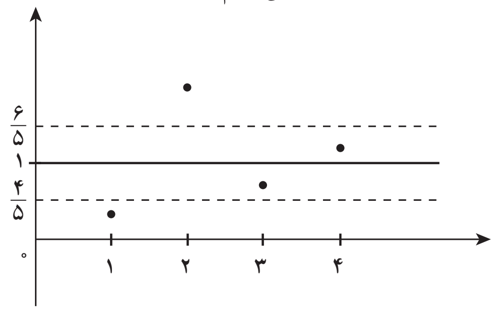
می‌دانیم میزان نزدیکی دو عدد با قدرمطلق تفاضل آن دو عدد سنجیده می‌شود. پس هرگاه بخواهیم $|a_n-۱|<\frac{۱}{۵}$، کافی است به جای a_n عبارت $۱+(-\frac{۱}{۲})^n$ را قرار دهیم:

$$|a_n-۱|=\left|۱+(-\frac{۱}{۲})^n-۱\right|=(\frac{۱}{۲})^n$$

حال برای آن‌که $(\frac{۱}{۲})^n<\frac{۱}{۵}$ کافی است $۲^n>۵$ (۱) پس هرگاه مثلاً $۲^n\geq ۸=۲^۳>۵$ به‌طور قطع نامساوی (۱) نیز برقرار است؛ در این صورت باید $n\geq ۳$.

در جدول نیز ملاحظه می‌کنیم که از شماره $n=۳$ به بعد اختلاف جملات دنباله تا عدد ۱ از $\frac{۱}{۵}$

کوچکتر است. به نمودار این دنباله نیز توجه می‌کنیم :



شکل بالا نقاط معرف جملات دنباله از جایی به بعد در درون نوار به مرکز $y=۱$ قرار دارند وقتی نواری به مرکز خط $y=۱$ و به شعاع $\frac{۱}{۵}$ در نظر می‌گیریم مقادیر جملات دنباله از مرتبه ۳ به بعد در این نوار قرار می گیریم؛ به زبان فنی‌تر هرگاه $n>۳$، یعنی $a_n \in (۱-\frac{۱}{۵},۱+\frac{۱}{۳})$ ، یعنی $a_n \in (\frac{۴}{۵},\frac{۶}{۵})$

$$n=۳\,,\,|a_n-۱|=\left|\frac{۹}{۸}-۱\right|=\frac{۱}{۸}<\frac{۱}{۵}$$

$$n=۴\,,\,|a_n-۱|=\left|\frac{۱۷}{۱۶}-۱\right|=\frac{۱}{۱۶}<\frac{۱}{۵}$$

$$n=۵\,,\,|a_n-۱|=\left|\frac{۳۱}{۳۲}-۱\right|=\frac{۱}{۳۲}<\frac{۱}{۵}$$

$$n=۶\,,\,|a_n-۱|=\left|\frac{۶۵}{۶۴}-۱\right|=\frac{۱}{۶۴}<\frac{۱}{۵}$$

فعالیت

بار دیگر به دنباله $\left\{\frac{۱}{n}\right\}$ برمی‌گردیم. می‌دانیم که بزرگ و بزرگتر شدن n جملات دنباله به عدد صفر می‌گرایند. اکنون از شما خواسته می‌شود که با محاسبات ریاضی این معنی را روشن‌تر سازید. برای نمونه به یک مورد توجه می‌کنیم :

هرگاه $a_n=\frac{۱}{n}$ ، از چه شماره و یا مرتبه‌ای به بعد اختلاف جملات دنباله تا صفر از $\frac{۱}{۱۰۰}$ کوچکتر است؟

فعالیت

در واقع می‌خواهیم جواب‌های نامساوی $|a_n - ۰| = \frac{۱}{n} < \frac{۱}{۱۰۰}$ را پیدا کنیم. این نامساوی معادل نامساوی $n > ۱۰۰$ می‌باشد، پس داریم.

$$n > ۱۰۰ \Rightarrow |a_n - ۰| < \frac{۱}{۱۰۰}$$

برای مثال

$$n = ۱۰۱ \Rightarrow |a_n - ۰| = \left|\frac{۱۷}{۱۶} - ۱\right| = \frac{۱}{۱۰۱} < \frac{۱}{۱۰۰}$$

$$n = ۱۰۵ \Rightarrow |a_n - ۰| = \left|\frac{۳۱}{۳۲} - ۱\right| = \frac{۱}{۱۰۵} < \frac{۱}{۱۰۰}$$

$$n = ۱۰۰۰ \Rightarrow |a_n - ۰| = \left|\frac{۶۵}{۶۴} - ۱\right| = \frac{۱}{۱۰۰۰} < \frac{۱}{۱۰۰}$$

حال با اختیارکردن $\frac{۱}{۱۰۰۰}$ به جای $\frac{۱}{۱۰۰}$، مرتبه مربوطه را پیدا کنید.

سپس با اختیارکردن $\frac{۱}{۱,۰۰۰,۰۰۰}$ به جای $\frac{۱}{۱۰۰۰}$ مرتبه مربوطه را پیدا کنید.

همچنین با اختیارکردن $\frac{۱}{۱,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰}$ به جای $\frac{۱}{۱۰۰}$ مرتبه مربوطه را پیدا کنید.

سؤال : آیا این وضعیت برای همه اعداد کوچک نظیر یک صد میلیونم، و یک میلیاردم برقرار است؟

نکته: برای پاسخگویی به پرسش اخیر به بررسی بیشتر دنباله $\left\{\frac{۱}{n}\right\}$ می‌پردازیم. برخی از مقادیر این دنباله را برای nهای بزرگ در جدول زیر درج کرده‌ایم.

n	$۱۰,$	$۱۰۰,$	$۱۰۰۰,$	$۱۰^۶,$	$۱۰^۸,$	$۱۰^۹,$	$\dots$
$\frac{۱}{n}$	$\frac{۱}{۱۰},$	$\frac{۱}{۱۰۰},$	$\frac{۱}{۱۰۰۰},$	$\frac{۱}{۱۰^۶},$	$\frac{۱}{۱۰^۸},$	$\frac{۱}{۱۰^۹},$	$\dots$

این جدول برخی مقادیر دنباله $\frac{۱}{n}$ را نشان می‌دهد.

با توجه به مقادیر دنباله مشاهده می‌کنیم که هر اندازه n بزرگتر اختیار شود مقدار $\frac{۱}{n}$ کوچکتر می‌شود و نقاط نمایش‌دهنده مقادیر این دنباله، روی محور اعداد، به نقطه صفر نزدیک و نزدیکتر می‌شوند.

از طرف دیگر می‌دانیم که همه مقادیر دنباله $\left\{\frac{۱}{n}\right\}$ مثبت هستند و لذا نقاط متناظر این مقادیر روی محور حقیقی سمت راست مبداء، یعنی صفر، قرار دارند. می‌توان چنین تصور کرد که چون مقادیر این دنباله از صفر کمتر نمی‌شوند، عدد صفر مانند یک نقطه که مانع عبور نقاط دنباله به سمت چپ خودش است، ایستادگی می کند و نقاط دنباله هرگز به صفر نمی‌رسند گرچه به دلخواه به آن نزدیک می‌شوند و گویی نقطه صفر حد نقاط این دنباله است. باید توجه کنیم که شهود بصری، در مواردی، با دقت ریاضی تفاوت دارد؛ در مورد دنباله $\left\{\frac{۱}{n}\right\}$ و نمودار هندسی نقاط آن روی محور اعداد به نظر می‌رسد که نقاط نمایش مقادیر $\frac{۱}{n}$ برای nهای بزرگ در نزدیک‌های نقطه صفر به هم می‌چسبند و گویی طولی پیوسته می‌سازند! در صورتی که این شهود هندسی کاملاً نادرست است. زیرا هیچ دو نقطه‌ای از این دنباله بر هم منطبق نیستند تا آن‌که طولی پیوسته به وجود آید، مهم‌تر از این می‌دانیم که در واقع بین هر دو کسر گویا بی‌شمار عدد حقیقی گویای دیگر وجود دارد.

با توجه به این‌که فاصله دو نقطه روی محور با قدرمطلق تفاضل آن دو نقطه سنجش می‌شود، از منظر جبری و محاسباتی قدر مطلق تفاضل دو عدد، اختلاف و نزدیکی آن دو عدد را مشخص می کند. بنابراین به‌جاست که مفاهیم مربوط به رفتار دنباله را با استفاده از نِماد و مفهوم قدرمطلق صورت‌بندی کنیم.

در حالت کلی هرگاه عددی را که تصور می‌شود جملات یک دنباله به آن می گرایند و یا حول آن تجمع می کنند «L» بنامیم، آنگاه به آسانی می‌توانیم عبارت‌هایمان را به زبان ریاضی برگردانیم :

اختلاف جمله nام دنباله $\{a_n\}$ با مقدار حدی L به زبان ریاضی می‌شود $|a_n - L|$ و یا فاصله جمله nام دنباله تا نقطه حدی دنباله می‌شود $|a_n - L|$

در حالت خاص دنباله $a_n = \frac{۱}{n}$ ، عبارت قدرمطلقی مربوطه به صورت زیر است :

$$|a_n - L| = \left|\frac{۱}{n} - ۰\right| = \frac{۱}{n}$$

در انجام فعالیت قبلی ملاحظه کردیم که اگر بخواهیم $\frac{۱}{n} < \frac{۱}{۱۰۰۰,۰۰۰}$ باشد، باید $n > ۱۰۰۰,۰۰۰$؛ و هرگاه بخواهیم $\frac{۱}{n} < \frac{۱}{۱۰^۹}$ کافی است مقادیر n در نامساوی $n > ۱۰^۹$ صدق کنند.

احمد : آیا می‌توان گفت که اختلاف جملات این دنباله از عدد صفر از مقدار $\frac{۱}{۱۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰}$ (یک صد میلیاردم) نیز کمتر می‌شود.

دبیر : آری، کافی است که n را از ۱۰۰،۰۰۰،۰۰۰،۰۰۰ بزرگتر بگیریم، مثلاً $n = ۱۰^{۱۱} + ۱$

در این صورت
$$\frac{1}{n}=\frac{1}{10^{11}+1}>\frac{1}{10^{11}}$$

احمد : آیا این وضعیت برای همه اعداد کوچک و کوچکتر از یکصد میلیاردم نیز صادق است؟

دبیر : آری هر عدد کوچک (مانند $\varepsilon>0$ اپسیلن) که انتخاب کنیم ازشماره‌ای به بعد اختلاف جملات مربوطه از صفر کمتر از ε است که در مثال بالا $\varepsilon=\frac{1}{10^{11}}$ اختیار شد.

امّا چون نمی‌توانیم این وضعیت را برای همه اعداد کوچک نظیر یک میلیونم، یک میلیاردم و یا یکصد میلیاردم امتحان کنیم به ناچار باید متوسل به ε شویم (بخوانید اپسیلن)

> ε درواقع نماینده همه اعداد کوچک و مثبت است و چون در عمل **دلخواه** فرض می‌شود ما را از تجربه‌ها و محاسباتی که پایان ندارد بی‌نیاز می‌سازد.

احمد : این بسیار جالب است، امّا شماره جمله‌ها چگونه عددی خواهد شد؟

دبیر : طبیعی است شماره جملات مربوطه که باید برای آنها نامساوی $\left|\frac{1}{n}-0\right|=\frac{1}{n}<\varepsilon$ برقرار باشد به ε بستگی خواهد داشت. برای نمونه وقتی $\varepsilon=\frac{1}{100}$، $M=101$ به دست آمد، یعنی هرگاه $n\geq 101$، $\frac{1}{n}<\frac{1}{100}$، M نماینده شماره مربوطه است.

وقتی $\varepsilon=\frac{1}{1000}$، شماره مربوطه یعنی $M=1001$ به‌دست آمد.

وقتی $\varepsilon=\frac{1}{10^{11}}$ شماره مربوطه یعنی $M=10^{11}+1$ به‌دست آمد، زیرا دیدیم از **این شماره به بعد**، یعنی هرگاه $n>10^{11}$ مثلاً $n=10^{11}+1$، $n=10^{11}+2$، $n=10^{11}+3$، ...

$$\frac{1}{n}=\frac{1}{10^{11}+1}<\frac{1}{10^{11}}=\varepsilon$$

$$\frac{1}{n}=\frac{1}{10^{11}+2}<\frac{1}{10^{11}}=\varepsilon$$

$$\frac{1}{n}=\frac{1}{10^{11}+3}<\frac{1}{10^{11}}=\varepsilon$$

و به‌طورکلی برای هر n که $n\geq 10^{11}+1$، $\frac{1}{n}<\varepsilon$

اکنون می‌توانیم تجربه‌مان را در خصوص دنباله $\left\{\frac{۱}{n}\right\}$ ریاضی وارتر بیان کنیم، برای هر عدد مثبت (ولو بسیار کوچک) ε فاصله a_nها از صفر از شماره‌ای مانند M به بعد کمتر از ε می‌شود.

به عبارت دقیق‌تر

برای هر عدد $\varepsilon > ۰$، عددی طبیعی مانند M هست که هرگاه $n \geq M$، $|a_n - ۰| < \varepsilon$ و بالاخره به این مفهوم کلیت داده و آن را برای هر دنباله دلخواه $\{a_n\}$ و عدد حقیقی مانند L که تصور می‌کنیم جملات دنباله به آن گرایش دارند، بیان می‌کنیم :

> **تعریف :** گوییم دنباله $\{a_n\}$ دارای حد L است، هرگاه برای هر عدد $\varepsilon > ۰$، عددی طبیعی مانند M وجود داشته باشد به‌طوری که برای هر عدد طبیعی n که $n \geq M$، نابرابری $|a_n - L| < \varepsilon$ برقرار باشد.

این جمله را که «دنباله $\{a_n\}$ دارای حدی برابر L است» با نماد ریاضی به شکل $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ نوشته و آن را چنین می‌خوانیم.

«حد دنباله a_n وقتی n به ∞ میل می‌کند برابر L است»

یا آن‌که می‌گوییم « دنباله $\{a_n\}$ به L همگراست» و در این صورت دنباله $\{a_n\}$ را یک دنباله **همگرا** می‌نامیم.

وقتی برای دنباله‌ای مانند $\{a_n\}$ چنین عددی حقیقی مانند L که در تعریف فوق صدق می‌کند وجود نداشته باشد دنباله $\{a_n\}$ را یک دنباله **واگرا** می‌نامیم.

مثال: دنباله $\left\{(-۱)^n\right\}_{n=۱}^{\infty}$ را در نظر می‌گیریم، جملات این دنباله یک درمیان اعداد ۱− و ۱ را اختیار می‌کنند. در واقع جملات این دنباله به‌عنوان نقاط خط حقیقی روی دو نقطه ۱− و ۱ قرار گرفته و لذا به این دو نقطه گرایش دارند. امّا معلوم است که این دنباله همگرا نمی‌باشد، زیرا مقدار L می‌بایست یک عدد **منحصر به فرد** بوده و همه جملات به همین یک عدد گرایش کنند.

حال هرگاه $L=۱$ اختیار کنیم جملات این دنباله با nهای فرد هرگز به L (به مقدار دلخواه) نزدیک نمی‌شوند. همین وضعیت برای $L=-۱$ نیز صادق است، پس یک عدد مشخص L که در تعریف همگرایی صدق کند وجود ندارد.

تمرین در کلاس

۱ــ توضیح دهید که چرا دنباله $a_n=۲n+۱$ همگرا نمی‌باشد.

۲ــ دنباله $۱,-\frac{۱}{۲},۲,-\frac{۲}{۳},۳,-\frac{۳}{۴},۴,-\frac{۴}{۵},۵,-\frac{۵}{۶},\dots$ را در نظر بگیرید، ابتدا ضابطه این دنباله را معلوم کنید، سپس از این دنباله دو دنباله استخراج کنید که یکی همگرا و دیگری واگرا باشد.

نکته : مسأله‌های مربوط به تشخیص همگرایی و یا پیدا کردن حد دنباله‌ها را می‌توان چنین طبقه‌بندی کرد.

الف) مسأله‌هایی که در آنها از پیش همگرایی دنباله بررسی شده و از شما خواسته می‌شود تا مطابق تعریف تساوی حدی

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \qquad (۱)$$

را محقق سازید، برای اثبات (۱) طبق تعریف می‌بایست نشان دهیم که حکم منطقی زیر برقرار و درست است.

(۲) برای هر عدد $\varepsilon>۰$، عددی طبیعی مانند M هست به قسمی که برای هر $n\geq M$، $|a_n-L|<\varepsilon$

در اثبات (۲)، $\varepsilon>۰$ به‌عنوان یک عدد حقیقی مثبت **معلوم** مسأله است.

همچنین در اینجا M به‌عنوان یک عدد طبیعی (شماره جملات مورد نظر) مجهول مسأله است.

M را باید چنان پیدا کنیم که در گزاره شرطی زیر صدق کند :

اگر n عددی طبیعی و $n\geq M$ آنگاه $|a_n-L|<\varepsilon$

معنای این گزاره شرطی آن است که از شماره M به بعد جملات دنباله در نامساوی $|a_n-L|<\varepsilon$ صدق کرده و لذا در اطراف L تجمع می‌کنند.

در مسائل مربوط به اجرای دستورالعمل فوق، چون می‌خواهیم نابرابری $|a_n-L|<\varepsilon$ برقرار باشد و ε بر ما معلوم است. با این نابرابری کار می‌کنیم تا بتوانیم به نحوی M را پیدا کنیم.

ب) دسته دوم مسأله‌های مربوط به حد مسأله‌هایی است که در آن L بر ما معلوم نیست. در واقع در این نوع مسأله‌ها از شما خواسته می‌شود با بررسی جملات دنباله چنانچه فکر می‌کنید دنباله

مورد نظر همگراست ابتدا L را حدسیه‌سازی کنید و سپس در صورت واقعیت امر و درست بودن حدسیه‌تان، مطابق بند الف تساوی حدی، $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ را ثابت کنید.

ضمناً همیشه یادتان باشد که :

> تسلط بر خواص نابرابری‌ها و درک درست حکم منطقی (۲)، که همان مفهوم حد است، از ملزومات اساسی حل مسأله‌های مربوط به همگرایی است.

مثال : همگرایی دنباله $\left\{۳-(\frac{۱}{۲})^n\right\}_{n=۱}$ را بررسی کنید.

حل : باید معلوم کنیم که آیا این دنباله همگراست یا واگرا و اگر همگراست به چه عددی همگراست؟

با اندکی کنکاش در مقادیر این دنباله ملاحظه می‌کنیم که جملات دنباله، برای nهای به قدر کافی بزرگ، به عدد ۳ گرایش دارند. دلیل این امر آن است که مقدارهای $(\frac{۱}{۲})^n$ برای nهای بزرگ کوچک و کوچکتر شده و مقدار آن به صفر نزدیک می‌شوند.

حدس : $\lim_{n\to\infty}(۳-(\frac{۱}{۲})^n)=۳$ ، در اینجا $L=۳$.

برهان : فرض کنیم $\varepsilon>۰$ عدد دلخواهی باشد باید Mی پیدا کنیم که

$$\left|\left(۳-(\frac{۱}{۲})^n\right)-۳\right|<\varepsilon \quad ,n\geq M \text{ برای هر } n \text{ که} \qquad (۱)$$

داریم

$$\left|\left(۳-(\frac{۱}{۲})^n\right)-۳\right|<(\frac{۱}{۲})^n$$

درنتیجه باید معلوم کنیم که از چه شماره‌ای به بعد نابرابری $(\frac{۱}{۲})^n<\varepsilon$ برقرار می‌گردد و همین شماره مورد نظر مجهول M را به‌دست می‌دهد. این نابرابری معادل نابرابری $۲^n>\frac{۱}{\varepsilon}$ است. از طرفین لگاریتم در پایه ۲ می‌گیریم

$$n>\log_۲\frac{۱}{\varepsilon}$$

چون معلوم نیست که $\log_۲\frac{۱}{\varepsilon}$ عددی طبیعی باشد، M را به‌صورت زیر معرفی می‌کنیم.

$$M=\left[\log_۲\frac{۱}{\varepsilon}\right]+۱$$

و بدین ترتیب مجهول M به‌دست می‌آید.

احمد : از کجا معلوم است که این مقدار M در گزاره شرطی (۱) صدق می‌کند؟

دبیر : می‌توانیم M را آزمون نماییم، برای این کار فرض کنیم n عددی طبیعی و $n \geq M$ باید نشان دهیم

(۲)
$$\left|(۳-(\frac{۱}{۲})^n)-۳\right|<\varepsilon$$

در اینجا $a_n = ۳-(\frac{۱}{۲})^n$ ، چون : $n \geq M = \left[\log_۲ \frac{۱}{\varepsilon}\right]+۱$

و برای هر x، $[x]+۱>x$ ، پس $n>\log_۲ \frac{۱}{\varepsilon}$

درنتیجه :
$$۲^n > ۲^{\log_۲ \frac{۱}{\varepsilon}} = \frac{۱}{\varepsilon}$$

با معکوس کردن جملات، جهت نابرابری تغییر می‌کند :
$$\frac{۱}{۲^n}<\varepsilon$$

و یا
$$(\frac{۱}{۲})^n<\varepsilon$$

امّا
$$\left|(۳-(\frac{۱}{۲})^n)-۳\right| = (\frac{۱}{۲})^n < ۳$$

یعنی برای هر n که $n \geq M$، نابرابری (۲) برقرار است.

محسن : نیازی به آزمایش M نیست زیرا برای یافتن M، همه عملیات برگشت‌پذیرند.

دبیر : درست است، اگر به برگشت‌پذیری عملیات و کار با نابرابری‌ها توجه بکنید لزومی به آزمایش M به دست آمده نمی‌باشد.

مثال: آیا دنباله $\{a_n\}$ با ضابطه $a_n = \sin\frac{n\pi}{۲}$ همگراست؟

حل: برخی مقادیر این دنباله رابررسی می‌کنیم.

$$n=۱ \ , \ a_۱ = \sin\frac{\pi}{۲} = ۱$$

$$n=۲ \ , \ a_۲ = \sin\pi = ۰$$

$$n=۳ \ , \ a_۳ = \sin\frac{۳\pi}{۲} = -۱$$

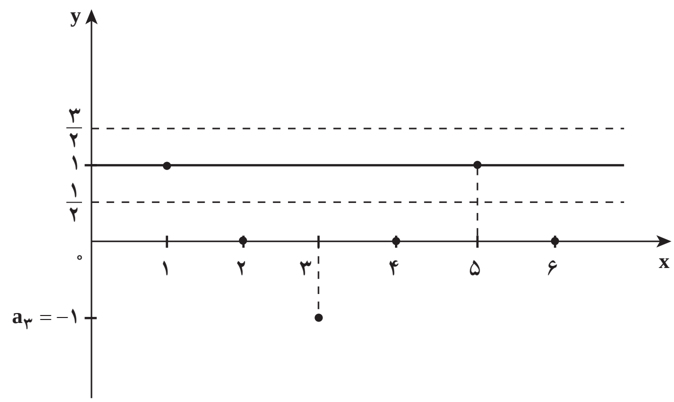
$$n=۴ \ , \ a_۴ = \sin ۲\pi = ۰$$

$$n=۵ \ , \ a_۵ = \sin\frac{۵\pi}{۲} = ۱$$

با ادامه محاسبات ملاحظه می‌کنیم که مقدارهای این دنباله منحصر به اعداد ۱ و ۰ و ۱− هستند پس این دنباله نمی‌تواند همگرا بوده باشد.

احمد : بسیاری از جملات دنباله برابر ۱ بوده و لذا در ۱ مجتمع می‌شوند، آیا ممکن نیست که دنباله همگرا به عدد ۱ باشد.

دبیر : خیر. در این مورد ساده‌ترین راه استفاده از نمودار دنباله است و کافی است بازه‌ای مانند $(۱-\frac{۱}{۲}\,,\,۱+\frac{۱}{۲})$ یعنی نواری به مرکز ۱ و به شعاع $\varepsilon=\frac{۱}{۲}$ را حول خط $y=۱$ در نظر بگیریم (شکل زیر)



هرچقدر M را بزرگ اختیار کنیم، $n\geq M$ را می‌توان به‌صورت $n=۲k$ در نظر گرفت و لذا $a_{۲k}=\sin_{k\pi}=۰$ یعنی تعداد زیادی از جملات که با شماره زوج هستند خارج از بازه $(۱-\frac{۱}{۲}\,,\,۱+\frac{۱}{۲})$ قرار می‌گیرند.

احمد : امّا تعداد زیادی از جملات دنباله که با شماره فرد هستند برابر ۱ بوده و لذا در بازه $(۱-\frac{۱}{۲}\,,\,۱+\frac{۱}{۲})$ هستند.

دبیر : درست است. امّا اگر بخواهد تساوی حدی $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{n\pi}{۲}=۱$ اتاق بیفتد باید نظیر $(۱-\varepsilon,۱+\varepsilon)$ که در اینجا $\varepsilon=\frac{۱}{۲}$، طبق تعریف عدد طبیعی M یافت شود که برای هر $n\geq M$، $a_n\in(۱-\varepsilon,۱+\varepsilon)$ (و یا $|a_n-۱|<\varepsilon$)

توجه کنید که این یک حکم **کلی** است : برای هر n که $n\geq M$ باید نابرابری برقرار باشد. درحالی که گفته شد هرچقدر که M را اختیار کنیم nهایی هست، $n=۲k$ که $n\geq M$ امّا $|a_n-۱|\geq\varepsilon=\frac{۱}{۲}$ زیرا $a_n\notin(۱-\frac{۱}{۲}\,,\,۱+\frac{۱}{۲})$، و این با تعریف همگرایی در تناقض است.

مسائل

۱ــ ابتدا حد دنباله $\left\{\frac{n-۱}{n}\right\}_{n=۱}$ را حدس بزنید و سپس حدس خود را به روش ε اثبات کنید.

۲ــ فرض کنیم $\{a_n\}_{n=۱}$ یک دنباله همگرا باشد. همچنین فرض کنیم K عدد صحیح و ثابت است به قسمی که $n+k\geq ۱$، دنباله $\{b_n\}_{n=۱}$ را چنین تعریف می‌کنیم : $b_n=a_{n+k}$ برای مثال هرگاه $k=۲$ و $a_۱, a_۲, a_۳, \cdots, a_n, a_{n+۱}, \cdots$ دنباله $\{a_n\}$ باشد، دنباله $\{b_n\}$ چنین است :

$$b_۱=a_۳, b_۲=a_۴, b_۳=a_۵, \cdots, b_n=a_{n+۲}, \cdots$$

یعنی $a_۳, a_۴, a_۵, \ldots, a_{n+۲}, \ldots$

همان دنباله $\{b_n\}_{n=۱}$ است. ثابت کنید هرگاه $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=L$ و آنگاه $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=L$

۳ــ فرض کنیم $\{P_n\}_{n=۱}$ یک دنباله همگرا و $P_{n+۱}=\frac{bP_n}{a+P_n}$ که در آن a و b اعدادی ثابت‌اند. با استفاده از مسأله ۷ حد دنباله $\{P_n\}_{n=۱}$ را به‌دست آورید.

۴ــ کدامیک از دنباله‌های زیر همگراست. آنهایی را که فکر می‌کنید همگرا نیستند، واگرایی دنباله را توضیح دهید.

الف) $\left\{(\frac{۱}{۳})^{n-۱}\right\}_{n=۱}$ ب) $\{۳^n\}_{n=۱}$ ج) $\{\log n\}_{n=۱}$ د) $\left\{\log\frac{۱}{n}\right\}_{n=۱}$

کسانی که مفهوم حد دنباله و حد توابع را به درستی درک کنند ریاضیات را بهتر درک می‌کنند. (استاد دکتر غلامحسین مصاحب (۱۳۸۴ــ۱۳۵۸).

۱ـ۶ـ دنباله‌های واگرا به $\pm\infty$

دنباله‌های واگرا را به دو دسته می‌توان تقسیم‌بندی کرد :

دنباله‌هایی مانند $\{(-۱)^n\}_{n=۱}$ که برای آنها هیچ عدد حقیقی، و $\pm\infty$ یافت نمی‌شود به‌طوری‌که

$$\lim_{n\to\infty} a_n=L$$

دنباله‌های واگرایی مانند $\{2n\}_{n=1}$ گرچه جملات دنباله، برای nهای بزرگ، حول یک عدد حقیقی تجمع ندارند، لیکن دنباله به نوعی خوشرفتار است!

ادعای ما از خوشرفتاری این دنباله چیست؟

وقتی برای nهای بزرگ جملات دنباله را بررسی می‌کنیم (با مقداردهی به n) ملاحظه می‌کنیم که مقادیر جملات از هر عدد حقیقی که **بخواهیم** بزرگتر می‌شوند و این یک **نوع** خوشرفتاریست!

مثلاً هرگاه **بخواهیم** $2n > 10^6$ **کافی** است $n > 500,000$

هرگاه **بخواهیم** $2n > 10^6$ **کافی** است $n > 50,000,000$

معنی این گزاره شرطی آن است که جملات دنباله از شماره $50,000,000$ بعد از عدد (از پیش‌تعیین شده) $100,000,000$ بزرگترند؟ زیرا از $n > 50,000,000$ نتیجه می‌گیریم که $2n > 100,000,000$.

به‌طورکلی فرض کنیم k عدد حقیقی کاملاً دلخواهی باشد برای آنکه $2n > k$ کافی است $n > \frac{k}{2}$ و چون می‌خواهیم n طبیعی باشد (شماره جملات) کافی است که $n \geq \left[\frac{k}{2}\right] + 1$ اختیار کنیم زیرا واضح است که $\left[\frac{k}{2}\right] + 1 > \frac{k}{2}$.

حال می‌توانیم تعریف خاصی از واگرایی ارایه دهیم.

تعریف: گوییم دنباله $\{a_n\}_{n=1}$ واگرا به ∞ (یا $+\infty$) است هرگاه گزاره منطقی زیر برقرار باشد.

برای هر عدد حقیقی مثبت K، عددی طبیعی مانند M یافت شود به قسمتی که هرگاه $n \geq M$، $a_n > k$.

در این صورت می‌نویسیم $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

به زبان ساده واگرایی به ∞ دلالت بر آن دارد که جملات دنباله بزرگ و بزرگتر می‌شوند به نحوی که برای هر عدد حقیقی (بزرگ) k، از شماره‌ای به بعد همه جملات از k بزرگترند.

نکته‌ای که فوراً از واگرایی به ∞ حاصل می‌شود این است که هرگاه تساوی $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ اتفاق بیفتد، جملات دنباله، از **جایی به بعد** الزاماً مثبت‌اند، نه تنها مثبت‌اند بلکه بزرگ و بزرگتر می‌شوند و به صورتی مجازی می‌توان گفت که در حول و حوش ∞ گرد می‌آیند!

مشابه وضعیت فوق وقتی است، که جملات دنباله، از جایی به بعد منفی‌اند، لیکن از نظر قدرمطلقی بزرگ و بزرگتر می‌شوند.

تعریف : گوییم دنباله $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ واگرا به $-\infty$ است و می‌نویسیم $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ هرگاه گزاره زیر برقرار باشد.
برای هر عدد حقیقی منفی K، عدد طبیعی مانند M وجود داشته باشد به طوری که هرگاه $n \geq M$ آنگاه $a_n < k$

پس هرگاه $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ اتفاق افتد جملات دنباله می‌بایست از جایی به بعد منفی بوده و از نظر قدرمطلق بزرگ و بزرگتر شوند.

پرسش : آیا دنباله‌ای که جملات آن به‌صورت نوسانی مثبت و منفی می‌شوند می‌تواند واگرا به $+\infty$ یا واگرا به $-\infty$ باشد؟

تمرین در کلاس

ابتدا با حدسیه‌سازی مشخص کنید که کدامیک از دنباله‌ها واگرا به $+\infty$ یا واگرا به $-\infty$ است و سپس حدس خود را ثابت کنید.

۱) $\{n^2\}_{n=1}^{\infty}$　　۲) $\{1000-n^2\}_{n=1}^{\infty}$　　۳) $\left\{\frac{1}{10^6}(n+1)\right\}_{n=1}^{\infty}$

برای نمونه و راهنمایی به (۱) می‌پردازیم
وقتی n مقادیر بزرگ اختیار می‌کند، قطعاً n^2 نیز بزرگتر می‌شود، درنتیجه حدسمان این است که $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 = +\infty$ (۱)

برهان (۱) : فرض کنیم $K>0$ عدد مثبت دلخواهی باشد. باید نشان دهیم از شماره ای به بعد $n^2>K$، پس شماره‌ای مانند M است که هرگاه $n \geq M$ ، $n^2>K$ در اینجا K معلوم مسأله است.

امّا نامساوی $n^2>k$ معادل $n > \sqrt{k}$ می‌باشد. می‌توانیم شماره M مجهول را $M = \left[\sqrt{k}\right]+1$ اختیار کنیم. اکنون می‌توانیم حکم مسأله را آزمون نماییم : فرض کنیم $n \geq \left[\sqrt{k}\right]+1$ پس $n > \sqrt{k}$

درنتیجه $n^۲>K$

و یا $a_n=n^۲>K$

یک بار دیگر حل مسأله رابه اختصار مرور می‌کنیم.

ادعا داشتیم که $\lim\limits_{n\to\infty} n^۲=+\infty$ ، برای اثبات این ادعا، می‌بایست ثابت کنیم (✱) برای هر عدد $K>۰$ ، Mیی هست که هرگاه $n\geq M$ ، $n^۲>k$ در اثبات (✱)، k معلوم و M مجهول است. M باید چنان پیدا شود که برای هر $n\geq M$ ، $n^۲>k$

با استفاده از خواص نامساوی‌ها از نامساوی $n^۲>K$، که مطلوب ماست، راه افتادیم و به $M=\left[\sqrt{k}\right]+۱$ به‌عنوان شماره مجهول رسیدیم.

یادتان باشد، که در حل مسأله‌های مربوط به حد دنباله‌ها :

> استفاده از خواص نابرابری‌ها و درک صحیح گزاره‌های شرطی اگر ... آنگاه در یادگیری حسابان نقش اساسی دارد.

مسائل

۱ــ ثابت کنید الف) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^۲+۱}{n}=\infty$ ب) $\lim\limits_{n\to\infty}(-۱)^n\frac{n^۲+۱}{n}$ موجود نیست.

۲ــ ثابت کنید هرگاه $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$ آنگاه $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{۱}{a_n}=۰$

۳ــ فرض کنیم همواره $a_n>۰$ و $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{۱}{a_n}=۰$. ثابت کنید $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$.

۴ــ فرض کنیم همواره $a_n<۰$ و $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{۱}{a_n}=۰$. ثابت کنید $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=-\infty$.

۵ــ فرض کنیم $a_n=\frac{۵n^۲-۳n+۱۱}{۲n+۱}$ ، $b_n=\frac{n^۲-۱}{۶n^۲+۱}$ ، $c_n=\frac{۳n^۲+۱}{۲n^۲+۷}$

دنباله‌هایی از اعداد باشند. ثابت کنید.

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$ ، $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=۰$ ، $\lim\limits_{n\to\infty} c_n=\frac{۳}{۲}$

۱ـ۷ـ اصل موضوع تمامیت

مطالعه حد دنباله‌ها ارتباط تنگاتنگی با ویژگی‌های مجموعه اعداد حقیقی یعنی R دارد. پس از کشف نظریه حساب دیفرانسیل و انتگرل توسط دانشمندان آلمانی و انگلیسی در قرن هفدهم نابسامانی‌هایی در برخی موارد و نتایج آن بروز کرد. ریاضیدانان چندی در رفع این نابسامانی‌ها تلاش کردند و سرانجام پس از طی بیش از یک قرن و ایراشتراس توانست به رفع آن نایل شود. و ایراشتراس دریافت که صورت‌بندی دقیق و منطقی بحث حساب دیفرانسیل و انتگرال بر شناخت عمیق‌تر دستگاه اعداد حقیقی استوار است. اصل تمامیت یکی از مهم‌ترین ویژگی‌های R است که دستگاه اعداد گویا، یعنی Q، فاقد آن است، گرچه Q همه خواص جبری و ترتیبی مربوط به R را داراست. در این بخش قصدمان این نیست تا نقص Q را بررسی کنیم، لیکن به دلیل نیاز به استفاده از اصل تمامیت، این اصل را بیان خواهیم کرد. اصل تمامیت، همانند بیشتر اصول دیگر، گرچه به لحاظ شهودی درکی ساده دارد، امّا به لحا نظری اثبات آن نامکن جلوه می کند.

ابتدا دو ویژگی در باب زیر مجموعه‌های R بیان می‌کنیم که منبعث از رابطه ترتیبی روی R می‌باشند. در اینجا فرض می‌کنیم A یک زیرمجموعه ناتهی R باشد.

تعریف ۱ : عدد حقیقی U را یک <u>کران بالای</u> A نامیم هرگاه برای هر $x \in A$، $x \leq u$.

$a \in R$ را <u>کوچکترین کران بالای</u> A می‌نامیم هرگاه a یک کران بالای A بوده و برای هر کران بالای دیگر A مانند U، $a \leq U$

مشابهاً می‌توانیم از پایین به مجموعه A نگاه کنیم :

تعریف ۲ : عدد حقیقی V را <u>یک کران پایین</u> A نامیم هرگاه برای هر $x \in A$، $v \leq x$.

$a \in R$ را <u>بزرگترین کران پایین</u> A نامیم هرگاه b یک کران پایین A بوده و برای هر کران پایین دیگر A مانند $v \leq b$, v.

کوچکترین کران بالا را سوپریموم و بزرگترین کران پایین را اینفیموم می‌نامند.

دقت کنید که تعریف ۲ چگونه از روی تعریف ۱ ساخته شده است!

برای مثال، فرض کنیم $A = [۱ , ۲]$: در این صورت ۳ یک کران بالای A است.

۳/۵ نیز یک کران بالای A است.

۲/۵ چطور؟ A چند کران بالا دارد؟

کوچکترین کران بالای A کدام است؟ آری $a=۲$ کوچکترین کران بالای A است.

مشابهاً به‌آسانی معلوم است که $b=۱$ بزرگترین کران پایین A است. در این مثال هم a و هم b

به A تعلق دارند، امّا ممکن است کوچکترین کران بالا و یا بزرگترین کران پایین یک مجموعه به آن مجموعه تعلق نداشته باشند.

هرگاه $B=(۱,۲)$ (بازه باز) آنگاه کوچکترین کران بالای B برابر ۲ و بزرگترین کران پایین B نیز برابر ۱ است درحالی که هیچ‌یک به B تعلق ندارند. (چرا؟)

سؤال: آیا همهٔ زیرمجموعه‌های ناتهی R دارای کوچکترین کران بالا و بزرگترین کران پایین هستند؟ نظرتان را در مورد $A=[۱,+\infty)$ و $B=(-\infty,۲)$ بیان کنید.

تمرین در کلاس

الف) در مورد احکام زیر فکر کنید، می‌توانید با مثال‌ها کار کنید. اگر فکر می‌کنید درست‌اند آنها را توضیح دهید. و اگر فکر می‌کنید نادرست‌اند، نیز توضیح دهید.

۱ــ هر مجموعه از بالا کراندار دارای کوچکترین کران بالا است.

۲ــ هر مجموعه از پایین کراندار دارای بزرگترین کران پایین است.

۳ــ هرگاه A یک مجموعه کراندار و ناتهی باشد هم کوچکترین کران بالا و هم بزرگترین کران پایین دارد.

۴ــ هرگاه $Q\neq A\subseteq B$ و $U\in B$ یک کران بالای B باشد، U یک کران بالای A نیز می‌باشد.

۵ــ حکمی نظیر ۴ در باب کران‌های پایین بیان کنید.

اکنون **اصل موضوع تمامیت** را بیان می‌کنیم، باید توجه داشت «اصل موضوع» و یا اختصاراً «اصل» در ریاضیات به **گزاره‌ای گفته می‌شود که بدون اثبات پذیرفته می‌شود اصل موضوع تمامیت** در باب اعداد حقیقی.

یک مجموعه ناتهی از اعداد حقیقی که دارای کران بالا باشد، دارای کوچکترین کران بالا است.

این اصل معادل است با اصل زیر :

یک مجموعه ناتهی از اعداد حقیقی که دارای کران پایین باشد، دارای بزرگترین کران پایین است.

اکنون با استفاده از این اصل به اثبات مهمترین قضیهٔ این فصل می‌پردازیم

قضیه ۱: فرض کنیم $\{a_n\}$ یک دنباله صعودی و از بالا کراندار باشد در این صورت $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ وجود دارد. به عبارت دیگر هر دنباله صعودی و از بالا کراندار همگراست.

برهان: قرار می‌دهیم $S=\{a_n \mid n\in N\}$، یعنی S مجموعه مقادیر عددی جملات دنباله مورد بحث است پس $S\neq\phi$ و S دارای کران بالایی مانند K است. بنابر اصل موضوع تمامیت S دارای کوچکترین کران بالاست. این کوچکترین کران بالای S را L می‌نامیم. نشان می‌دهیم که

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

برای هر n، $a_n\geq L$ حال فرض کنیم $\varepsilon>0$ عدد دلخواهی باشد. پس $L-\varepsilon$ یک کران بالای S نیست، زیرا $L-\varepsilon<L$ و L کوچکترین کران بالای S فرض شده است.

چون $L-\varepsilon$ کران بالای S نیست، حداقل یک عضو S مانند a_N وجود دارد.

به طوری که $L-\varepsilon<a_N$. حال برای هر $n\geq N$.

$$a_n\geq a_N>L-\varepsilon$$

از طرف دیگر $a_n<L$ درنتیجه برای هر n که $n\geq N$

$$L-\varepsilon<a_n<L+\varepsilon$$

یعنی برای هر $n\geq N$،

$$|a_n-L|<\varepsilon$$

پس $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$، همچنان که ادعا شده است.

قضیه فوق یک زوج دارد که از تبدیل مفاهیم موجود در قضیه به مفاهیم زوج آن به‌دست می‌آید! آن را بیان می‌کنیم.

قضیه ۲: هر دنباله نزولی و کراندار از پایین همگراست.

مثال: ثابت کنید دنباله $\left\{\sin\frac{\pi}{2n}\right\}_{n=1}$ همگراست.

مثال: ثابت کنید دنباله $\left\{\sin\frac{\pi}{2n}\right\}_{n=1}$ همگراست.

حل: با توجه به شناختی از رفتار تابع $y=\sin\frac{\pi}{2n}$ به ویژه در بازه $(0,\frac{\pi}{2})$ داریم، معلوم است که این دنباله یک دنباله نزولی است. به‌علاوه برای هر n، $0<\sin\frac{\pi}{2n}$

پس عدد ۰ یک کران پایین این دنباله است. بنابراین بر طبق قضیه ۲، این دنباله همگراست.

تمرین در کلاس

۱ــ ابتدا نشان دهید که دنباله‌های زیر همگرا هستند

الف) $\left\{1+\frac{1}{n^2+1}\right\}$ ب) $\left\{1-\frac{1}{n}\right\}$

سپس حد آنها را حساب کنید.

۲ــ دنباله $\{a_n\}$ چنین تعریف شده است :

$$a_1=1\ ,\ a_{n+1}=\sqrt{7+a_n} \qquad (n=1,2,3,\dots)$$

الف) ثابت کنید که این دنباله همگراست.

ب) حد این دنباله را به‌دست آورید.

این بخش را با یک قضیه مهم به پایان می‌رسانیم که در حسابان و آنالیز نقشی کلیدی دارد.

قضیه : هر عدد حقیقی حد دنباله‌ای از اعداد گویا است.

اثبات : فرض کنیم u عدد حقیقی دلخواهی باشد. دو حالت وجود دارد.

حالت اول : u عددی گویا است. قرار می‌دهیم $u_n=u$، (برای هر $n\in N$)

پس $\{u_n\}$ دنباله‌ای ثابت و متشکل از اعداد گویای U بوده و معلوم است که $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=u$.

حالت دوم : u عددی گنگ است، بسط اعشاری u را در نظر می‌گیریم.

$$u=u_0/u_1\,u_2\,u_3\cdots u_n\cdots$$

که در آن u_0 جزء صحیح u بوده و عددی صحیح است. چون u گنگ است بسط اعشاری u نامتناهی و البته نامنظم می‌باشد. قرار می‌دهیم.

$$r_1=U_0/U_1$$
$$r_2=U_0/U_1U_2$$
$$\vdots$$
$$r_n=U_0/U_1U_2\cdots U_n$$
$$\vdots$$

لذا هر r_n عددی گویا است زیرا بسط اعشاری مختوم دارد : به علاوه

$$0<u-r_n=\underbrace{0/0\,0\cdots0}_{\text{n بار صفر}}U_{n+1}U_{n+2}\cdots$$

درنتیجه $\quad ۱۰^{n}\left|U-r_{n}\right|=/U_{n+۱}\cdots U_{n+k}\cdots<۱$

و یا $\quad ۰<\left|U-r_{n}\right|\frac{۱}{۱۰^{n}}$

چون $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{۱}{۱۰^{n}}=۰$ ، به‌ازای عدد دلخواه $\varepsilon>۰$ ، Nی هست که برای هر $n\geq N$، $\frac{۱}{۱۰^{n}}<\varepsilon$
درنتیجه برای هر n که $n\geq N$، $\left|U-r_{n}\right|<\frac{۱}{۱۰^{n}}<\varepsilon$ یعنی $\lim\limits_{n\to\infty}r_{n}=U$

یکی از کاربردهای این قضیه، استفاده از آن برای تعریف توان اعداد به نمای گنگ است. فرض کنیم a عددی مثبت و x عددی گنگ باشد. بنابر قضیه فوق دنباله‌ای مانند $\{x_n\}$ از اعداد گویا هست که $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n}=x$ ، اینک توان a^x را چنین تعریف می کنیم :

$$a^{x}=\lim_{n\to\infty}a^{x_{n}}$$

چون توان اعداد گویا تعریف شده است، a^x (a به نمای عدد گنگ) تعریف شده است. قواعد آشنای توان که برای اعداد گویا برقرار است به توان‌های گنگ نیز منتقل می‌شود. فرض کنیم x و y دو عدد گنگ باشند، لذا دنباله‌ای از اعداد گویا مانند $\{y_n\}$ هست که $\lim\limits_{n\to\infty}y_{n}=y$ ، بنابراین :

$$\begin{aligned}a^{x}.a^{y}&=(\lim_{n\to\infty}a^{x_{n}})(\lim_{n\to\infty}a^{y_{n}})=\lim_{n\to\infty}(a^{x_{n}}a^{y_{n}})\\&=\lim_{n\to\infty}a^{x_{n}+y_{n}}\quad(\text{چون } x_n \text{ و } y_n \text{ گویا هستند})\\&=a^{\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n}+y_{n})}\\&=a^{\lim\limits_{n\to\infty}x_{n}+\lim\limits_{n\to\infty}y_{n}}\\&=a^{x+y}\end{aligned}$$

۱ـ۸ـ یک دنبالهٔ مهم

دنباله زیر را درنظر می گیریم $\quad \left\{(۱+\frac{۱}{n})^{n}\right\}_{n=۱}^{\infty}:۲,(\frac{۳}{۲})^{۲},(\frac{۴}{۳})^{۳},(\frac{۵}{۴})^{۴},(\frac{۶}{۵})^{۵},\ldots$

این دنباله هم به لحاظ کاربردی و همچنین از جنبه نظری اهمیت فوق‌العاده دارد. چرا؟ ثابت می‌شود این دنباله همگراست و هرگاه حد آن را e بنامیم، یعنی

$$\lim_{n\to\infty}(۱+\frac{۱}{n})^{n}=e$$

عدد حقیقی e به‌صورتی طبیعی، در بیشتر پدیده‌های خلقت ظاهر می‌شود. دو دسته از مهم‌ترین

پدیده‌ها فرآیندهای رشد و زوال هستند. در اولی کمیت مورد مطالعه (نسبت به زمان) رشد می‌کند و در پدیده دوم کمیت مورد بحث رو به زوال دارد. برای مثال : وقتی تعداد اندکی باکتری را در محیطی مناسب قرار می‌دهیم، به شدت رشد کرده و پس از زمان اندکی تعداد آنها ۲، ۳ و یا صد برابر می‌شود. در حالی‌که هرگاه مقداری ماده رادیواکتیویته مانند فلزهای اورانیوم، پلوتونیوم، و یا انشتانیوم را داشته باشیم، پس از مدتی مقدار آن کاهش یافته، یعنی بخشی از ماده زوال یافته و به عناصر دیگری مبدل می‌گردد. عدد e در چنین پدیده‌هایی نقشی اساسی دارد، به‌گونه‌ای که در محاسبات مربوط به رشد و زوال به‌صورتی طبیعی بروز می‌کند. e در اقتصاد نیز مطرح می‌شود. از این بابت لگاریتمی که پایه آن عدد e باشد **لگاریتم طبیعی** نامیده می‌شود.

اثبات همگرایی دنباله $\left\{(1+\frac{1}{n})^n\right\}$ براساس اصل موضوع تمامیت امکان‌پذیر است ابتدا ثابت می‌کنیم که این دنباله صعودی است، سپس ثابت می‌کنیم که این دنباله از بالا کراندار است. مثلاً برای هر عدد طبیعی n، $(1+\frac{1}{n})^n \leq 4$

ابتدا یک قضیه کمکی ثابت می‌کنیم

قضیه ۲ : دنباله $\{b_n\}$ با ضابطه $b_n=(1-\frac{1}{n})^n$ صعودی است.

برهان* : ثابت می‌کنیم برای هر n، $\frac{b_{n+1}}{b_n}>1$

داریم
$$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{(1-\frac{1}{n+1})^{n+1}}{(1-\frac{1}{n})^n}=\frac{(1-\frac{1}{n+1})^{n+1}}{(1-\frac{1}{n})^{n+1}}\times(1-\frac{1}{n})$$

$$=\left(\frac{\frac{n}{n+1}}{\frac{n-1}{n}}\right)^{n+1}(1-\frac{1}{n})=\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{n+1}(1-\frac{1}{n})$$

$$=(1+\frac{1}{n^2-1})^{n+1}(1-\frac{1}{n})$$

بنابرنامساوی برنولی : $(1+\frac{1}{n^2-1})^{n+1}>1+\frac{n+1}{n^2-1}$

* برهان‌های ستاره‌دار (مربوط به قضایای ۲ و ۳ و ۴) برای مطالعه آزاد و اختیاری دانش‌آموزان است.

بنابراین

$$\frac{b_{n+1}}{b_n}=(1+\frac{1}{n^2-1})^{n+1}(1-\frac{1}{n})>(1+\frac{n+1}{n^2-1})(1-\frac{1}{n})$$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n}>(1+\frac{1}{n-1})(1-\frac{1}{n})=1$$

قضیهٔ ۳: دنباله $\{a_n\}$ با ضابطه: $a_n=(1+\frac{1}{n})^n$ صعودی است

برهان*: کافی است ثابت کنیم برای هر n، $\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$، داریم

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}}{(1+\frac{1}{n})^n}=\left(\frac{1+\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n}}\right)^{n+1}\times(1+\frac{1}{n})$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=(\frac{n^2+2n}{(n+1)^2})^{n+1}\times(1+\frac{1}{n})=(1-\frac{1}{(n+1)^2})^{n+1}(1+\frac{1}{n})$$

(بنابر نامساوی برنولی)

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}>(1-\frac{n+1}{(n+1)^2})(1+\frac{1}{n})=1$$

چون $a_1=2$ و دنباله $\{a_n\}$ صعودی است پس برای هر $n\geq 2$، $a_n>2$.

قضیهٔ ۴: دنباله $\{a_n\}$ با ضابطه $a_n=(1+\frac{1}{n})^n$ از بالا کراندار است.

برهان*: بنابر قضیه (۲) دنباله $\{b_n\}$ با ضابطه $b_n=(1-\frac{1}{n})^n$ صعودی است. چون $b_2=\frac{1}{4}$

پس برای هر n، $b_n>\frac{1}{4}$، از اینجا نتیجه می‌گیریم که برای هر n، $a_nb_n>a_n\times\frac{1}{4}$

امّا $a_nb_n=(1+\frac{1}{n})^n(1-\frac{1}{n})^n=(1-\frac{1}{n^2})^n<1$

در نتیجه $a_n\times\frac{1}{4}<1$ و یا $a_n<4$

نتیجه۱: دنباله $a_n=(1+\frac{1}{n})^n$ صعودی و از بالا کراندار است پس طبق قضیه ۱ همگراست.

نتیجه ۲ : حد دنباله $\{a_n\}$ را e می‌نامیم، یعنی $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$.

ضمناً برای هر n، $2<a_n<4$، لذا $2 \le \lim\limits_{n\to+\infty} a_n \le 4$ یعنی $2\le e \le 4$

و ثابت می‌شود که عدد ۳ نیز یک کران بالای دنباله $\{a_n\}$ است و $2<e<3$.

مثال : ثابت کنید که دنباله $\left\{(1+\frac{1}{n})^{n+1}\right\}$ نزولی است

حل : کافی است ثابت کنیم که $\frac{a_n}{a_{n+1}}>1$ ، داریم :

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{(1+\frac{1}{n})^{n+1}}{(1+\frac{1}{n+1})^{n+2}}$$

$$=\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n+1}}\right)^{n+1}\times\frac{1}{1+\frac{1}{n+1}}=(1+\frac{1}{n(n+2)})^{n+1}\times\frac{1}{1+\frac{1}{n+1}}$$

و امّا طبق نامساوی برنولی داریم :

$$(1+\frac{1}{n(n+2)})^{n+1}\ge 1+\frac{n+1}{n(n+2)}>1+\frac{n+1}{(n+1)^2}=1+\frac{1}{n+1}$$

بنابراین

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}>(1+\frac{1}{n+1})\times\frac{1}{(1+\frac{1}{n+1})}=1$$

و یا

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}>1$$

تمرین در کلاس

۱ــ حد دنباله‌های زیر را حدس بزنید.

$$a_n=(1+\frac{1}{n})^{2n} \qquad b_n=(1+\frac{1}{n})^{3n} \qquad c_n=(1+\frac{1}{n})^{\frac{n}{2}}$$

راهنمایی : از قاعده توان‌های مکرر استفاده کنید : $[(a)^\alpha]^\beta=(a)^{\alpha\beta}$

۲ــ از ماشین حساب و یا رایانه خود استفاده کرده و عدد e را تا ۱۰ رقم اعشار به‌دست آورید.

۳ــ حاصل $(1+0/01)^{100}$ را به‌دست آورید و با عدد e مقایسه کنید.

خواندنی

لئونارد اویلر (Leonard Euler) : ریاضیدان مشهور آلمانی که کارهای زیادی در زمینه‌های مختلف ریاضیات از جمله جبر، آنالیز، توپولوژی و هندسه انجام داده است. اویلر ریاضیدانی بسیار پرکار بوده است با بیش از ۵۷۰ کتاب و مقاله در عالَم ریاضیات در زمان حیات خود به رشته تحریر درآورده است. برخی هم او را سودمندترین ریاضیدان همه قرون و اعصار دانسته‌اند.

انتخاب حرف e برای عدد $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ ، که آن را عدد نِپِر می‌نامند به افتخار اویلر از حرف اوّل اویلر (Euler) اقتباس شده است.

۱ـ۹ـ جبر دنباله‌ها

دنباله‌های عددی، را می‌توان همانند اعداد با هم جمع یا تفریق کرد و دنباله جدیدی به نام مجموع یا تفاضل (دو دنباله) به‌دست آورد. همچنین دو دنباله عددی را می‌توان درهم ضرب کرد و دنباله جدیدی به نام دنباله حاصلضرب به‌دست آورد. در مورد تقسیم نیز تحت شرایطی می‌توان دو دنباله را برهم تقسیم کرد.

تعریف : فرض کنیم $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو دنباله باشند، در این‌صورت دنباله‌های $\{a_n+b_n\}$ و $\{a_n-b_n\}$ و $\{a_nb_n\}$ را خواهیم داشت، جمله nام دنباله $\{a_n+b_n\}$ همان حاصل‌جمع عددی a_n و b_n است.

همگرایی دنباله‌های $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ به‌آسانی به همگرایی دنباله‌های به‌دست آمده منتقل می‌شود.

قضیه ۵ : فرض کنیم $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو دنباله همگرا باشند. در این صورت

الف) دنباله‌های $\{a_n\pm b_n\}$ ، $\{a_n . b_n\}$ ، $\{c . a_n\}$ (c عددی ثابت) همگرا هستند، به‌علاوه

$$\lim_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n\pm\lim_{n\to\infty}b_n \quad \text{و} \quad \lim_{n\to\infty}a_nb_n=\lim_{n\to\infty}a_n . \lim_{n\to\infty}b_n$$

ب) هرگاه $\lim\limits_{n\to\infty}b_n\neq 0$ ، دنباله $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ نیز همگرااست و $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}$

قضیه۶ (قضیه فشردگی) : فرض کنیم $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو دنباله و $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=L$ ،

همچنین فرض کنیم $\{c_n\}$ دنباله‌ای باشد به قسمی که برای هر n، $a_n \le c_n \le b_n$ در این صورت دنباله $\{c_n\}$ نیز همگراست و $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = L$.

برهان: فرض کنیم $\varepsilon > ۰$ عدد مفروض دلخواهی باشد. چون $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$ از شماره‌ای مانند $N_۱$ به بعد $|b_n - L| < \varepsilon$ (۱)

همچنین چون $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ از شماره‌ای مانند $N_۲$ به بعد $|a_n - L| < \varepsilon$ (۲)

حال فرض کنیم $N = Max\{N_۱, N_۲\}$، و n عدد طبیعی دلخواهی باشد که $n \ge N$، پس برای هر $n \ge N_۱$ و $n \ge N_۲$، روابط (۱)، (۲) با هم برقرارند و داریم. $b_n < L + \varepsilon$

$L - \varepsilon < a_n$ (چرا؟)

امّا برای هر n، $a_n \le c_n \le b_n$، لذا برای هر n که $n \ge N$،

$$L - \varepsilon < c_n < L + \varepsilon$$

یعنی $|c_n - L| < \varepsilon$، در نتیجه $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = L$

مثال: می‌دانیم $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{۱}{n^k} = ۰$ که در آن k عددی طبیعی است در همگرایی دنباله‌های زیر بحث کنید.

الف) $\left\{\frac{۲n^۲ - n - ۱}{۵n^۲ + n - ۳}\right\}$ ب) $\left\{\frac{\cos n}{n}\right\}$

حل: (الف) داریم

$$\frac{۲n^۲ - n - ۱}{۵n^۲ + n - ۳} = \frac{۲ - \frac{۱}{n} - \frac{۱}{n^۲}}{۵ + \frac{۱}{n} - \frac{۳}{n^۲}}$$

امّا

$$\lim_{n\to\infty} (۲ - \frac{۱}{n} - \frac{۱}{n^۲}) = \lim_{n\to\infty} ۲ - \lim_{n\to\infty} \frac{۱}{n} - \lim_{n\to\infty} \frac{۱}{n^۲}$$

$$= ۲ - ۰ - ۰ = ۲$$

$$\lim_{n\to\infty} (۵ + \frac{۱}{n} - \frac{۳}{n^۲}) = \lim_{n\to\infty} ۵ + \lim_{n\to\infty} \frac{۱}{n} - ۳ \lim_{n\to\infty} \frac{۱}{n^۲}$$

$$= ۵ + ۰ - ۰ = ۵$$

در نتیجه

$$\lim_{n\to\infty} \frac{۲n^۲ - n - ۱}{۵n^۲ + n - ۳} = \frac{۲}{۵}$$

(ب) می‌دانیم همواره $-۱\leq \cos x\leq ۱$ در نتیجه برای هر عدد طبیعی n،

$$\frac{-۱}{n}\leq \frac{\cos n}{n}\leq \frac{۱}{n}$$

چون $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-۱}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{۱}{n}=۰$ پس $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\cos n}{n}=۰$

مسائل

در هر یک از تمرین‌های زیر مشخص کنید که آیا دنبالهٔ موردنظر

الف) (از بالا یا پایین) کراندار است.

ب) جملات دنباله مثبت یا منفی‌اند.

ج) صعودی یا نزولی و یا نوسانی‌اند.

د) همگرا یا واگراست؛ و اگر واگراست به $+\infty$ و یا واگرا به $-\infty$ و یا هیچ‌یک.

۱ـ $\left\{\frac{۵n^۲}{n^۲+۱}\right\}$ ۲ـ $\left\{\frac{۲n}{n^۲+۱}\right\}$ ۳ـ $\left\{۴+\frac{(-۱)^n}{n}\right\}$

۴ـ $\left\{\sin\frac{۱}{n}\right\}$ ۵ـ $\left\{\frac{n^۲-۱}{n}\right\}$ ۶ـ $\left\{\frac{\sin n}{n}\right\}$

۷ـ $\left\{n\cos\frac{n\pi}{۲}\right\}$ ۸ـ $\left\{n\sin\frac{n\pi}{۲}\right\}$ ۹ـ $\left\{n\cos\frac{(-۱)^n}{n}\right\}$

۱۰ـ ثابت کنید $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}=+\infty$. آیا از این می‌توان نتیجه گرفت که $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n+۱}=+\infty$ ؟

۱۱ـ همگرایی، واگرایی و واگرایی به $+\infty$ یا $-\infty$ دنباله‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $\left\{\frac{n^۲-۱}{n}\right\}$ ب) $\left\{(-۱)^n\frac{n+۱}{n}\right\}$ ج) $\left\{\frac{n}{\sqrt{n+۱}}\right\}$

۱۲ـ فرض کنیم $\{a_n\}$ یک دنبالهٔ همگرا و برای هر n داشته باشیم $۱۰۰a_n=۴۵۲+a_n$ حد این دنباله را پیدا کنید.

۱۳ـ فرض کنیم دنبالهٔ $\{p_n\}$ همگرا و a و b دو عدد ثابت باشند به قسمی که $p_{n+۱}=\frac{bp_n}{a+p_n}$ ،

حد دنباله $\{p_n\}$ را حساب کنید.

۱۴ــ حد دنباله‌های روبه‌رو را به‌دست آورید.
$$\left\{(1+\frac{1}{n})^{\frac{n}{2}}\right\} \quad , \quad \left\{(1+\frac{1}{n})^{2n}\right\}$$

راهنمایی : از این قضیه که هرگاه $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$ (دنباله $\{a_n\}$ با مقادیر مثبت همگرا به عدد مثبت α باشد) و $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \beta$ یعنی $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو دنباله همگرا باشند، دنباله $\left\{a_n^{b_n}\right\}$ نیز همگراست و $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n^{b_n}) = (\lim\limits_{n\to\infty} a_n)^{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \alpha^{\beta}$ استفاده کنید ($\alpha > 0$ و β دو عدد حقیقی‌اند.)

فصل ۲

حد و پیوستگی

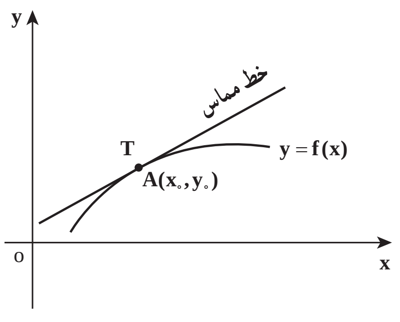
۲ـ۱ـ مقدمه

فرایند گذر از ریاضیات مقدماتی به حسابان

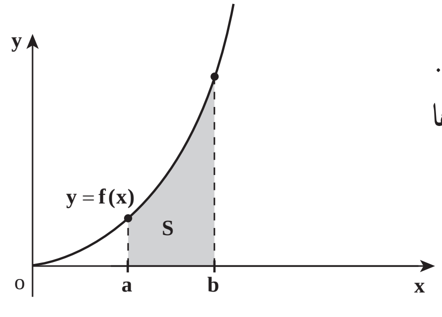
رشد و توسعهٔ بخش وسیعی از حسابان ریشه در دو مسألهٔ هندسی دارد :

پیدا کردن مساحت‌هایی از ناحیه‌های یک سطح (صفحه) و پیدا کردن خط‌های مماس بر منحنی‌ها. در این بخش نشان می‌دهیم هر دو مسأله به‌طور تنگاتنگی براساس یک مفهوم بنیادی از حسابان که به عنوان «حد» شناخته شده قابل بیان می‌باشند.

مسألهٔ خط مماس و مساحت : حسابان حول دو مسألهٔ بنیادی زیر متمرکز است :



۱ــ مسألهٔ مماس : تابع f و نقطه $A(x_\circ$ و $y_\circ)$ روی نمودار آن داده شده است، معادله خط مماس بر نمودار f در نقطه A را پیدا کنید. (شکل روبه‌رو)



۲ــ مسألهٔ مساحت : تابع f داده شده است. مساحت ناحیهٔ بین نمودار f و بازهٔ [a , b] و محور xها را پیدا کنید. (شکل روبه‌رو)

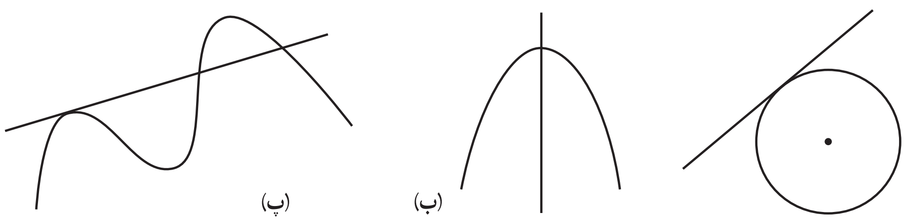
از منظر سنتی و تاریخی آن بخش از حساب که از مسألهٔ مماس برآمده است «حساب دیفرانسیل» نامیده می‌شود و آن بخش از حسابان که از مسأله مساحت برآمده است «حساب انتگرال» نامیده می‌شود. کشف رابطه بین این دو حساب که تحت عنوان قضیه اساسی عرضه می‌گردد باعث شده است که تفکیک میان این دو، دشوار بوده و مطالعه هر دو مسأله تحت عنوان حساب دیفرانسیل و انتگرال انجام گیرد.

برای حل کردن مسأله‌های مماس و مساحت لازم است درک و فهم دقیق‌تری از مفاهیم «خط مماس» و «مساحت» داشته باشیم.

در این فصل به توضیح و تبیین خط مماس و مفهوم حد پرداخته، بررسی و مطالعه مسألهٔ مساحت را به فصل ۴ واگذار می‌کنیم.

۲ـ۲ـ خط‌های مماس و حد

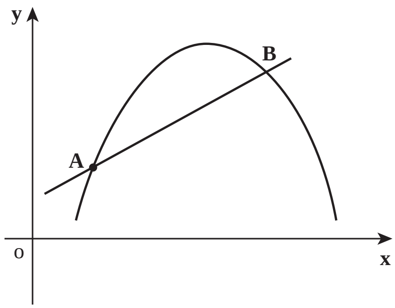
در هندسه مسطحه، یک خط بر دایره مماس است، هرگاه آن خط دایره را دقیقاً در یک نقطه قطع کند (شکل زیر قسمت الف). این تعریف برای انواع دیگر منحنی‌ها صادق نیست (شکل زیر قسمت ب). خطی که دقیقاً در یک نقطه منحنی را قطع می‌کند، مماس نیست. در شکل زیر قسمت(پ) این خط بر منحنی مماس است در حالی که منحنی را بیش از یک بار قطع کرده است.


(الف) (ب) (پ)

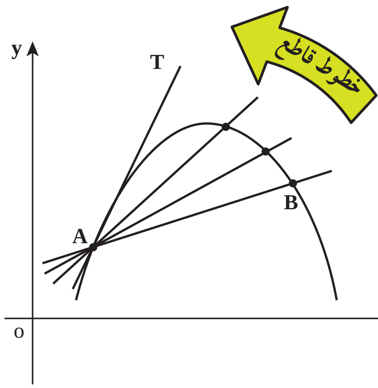
برای اینکه تعریف مفهوم خط مماس را برای منحنی‌هایی غیر از دایره بیان کنیم، باید با روشی دیگر خط‌های مماس را درنظر بگیریم.

نقطهٔ A را روی یک منحنی در صفحه x−y درنظر می‌گیریم. اگر B نقطهٔ دلخواه و متمایز با A روی منحنی باشد، به خطی که از نطقهٔ A و B می‌گذرد، خط قاطع می‌گوییم (شکل صفحهٔ بعد قسمت الف). شهود ما پیشنهاد می‌کند که اگر نقطهٔ B را روی منحنی به سوی A حرکت دهیم، خط قاطع به سوی یک حالت «حدی» دوران می‌کند (شکل صفحهٔ بعد قسمت ب). خط T که این حالت (مکان) حدی را اشغال می‌کند، را به‌عنوان خط مماس در نقطه A درنظر می‌گیریم.

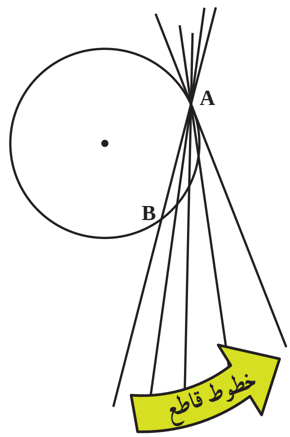
همان‌گونه که از شکل زیر قسمت (پ) معلوم است، این مفهوم جدید از یک خط مماس با مفهوم معمولی که برای دایره به کار می‌رود منطبق و سازگار است.



(الف)



(ب)



(پ)

۲ـ۳ـ مفهوم حد ـ فرایند حد

مطالعه و بررسی مسألهٔ خط مماس و مسألهٔ مساحت یک ناحیه در صفحه، موجب پیدایش شهودی و تقریبی مفهوم ریاضی جدیدی به‌نام «حد» شد. تلاش‌های بعدی بر روی دقیق‌کردن مفهوم حد و رسمیت یافتن آن در ریاضیات متمرکز گردید. سپس مطالعه و بررسی نتایج حاصل از آن و کاربردهای آن در ریاضیات و در علوم دیگر در دستور کار قرار گرفت. خیلی زود مشخص گردید که مفهوم حد فراتر از حل مسأله خط مماس و مسأله مساحت باعث حل مسائل بسیار، پیدایش اندیشه‌های ریاضی بسیار و به‌طور کلی رشد و توسعه وسیع ریاضیات گردید.

یکی از نقش‌آفرینی‌های اساسی مفهوم حد که موجب کاربردهای وسیع و حل مسائل بسیاری در حوزه‌های علمی دیگر شد، بررسی رفتار تابع است. بسیاری از پدیده‌های طبیعی و فیزیکی، بسیاری از مسأله‌های واقعی پس از صورت‌بندی ریاضی به صورت یک تابع درمی‌آید.

بنابراین بررسی رفتار تابع، دربرگیرنده بسیاری از پدیده‌های طبیعی، فیزیکی، اقتصادی، زیستی و … و حل مسائل واقعی مربوطه می‌باشد. در این بخش به بررسی و مطالعه مفهوم حد به‌صورت شهودی و تقریبی می‌پردازیم.

فعالیت

برای شروع تابع $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ و دو دنباله $\{(۰/۱)^n\}$ و $\{-(۰/۱)^n\}$ را درنظر می‌گیریم، (مقادیر x برحسب رادیان است).

الف) سه جملهٔ اوّل هر کدام از دنباله‌های بالا را بنویسید و حدس بزنید هر کدام از دو دنباله به چه عددی همگرا هستند؟

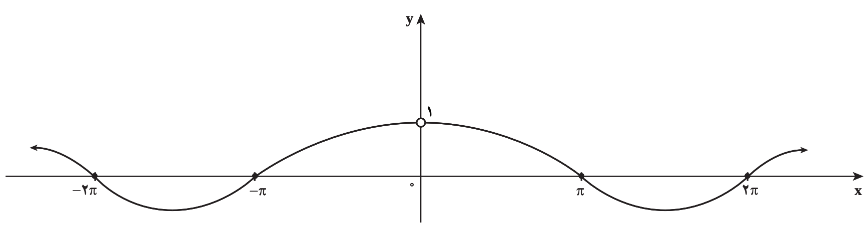
ب) جدول زیر را تکمیل کنید.

x از چپ به عدد ... نزدیک می‌شود ← → x از راست به عدد ... نزدیک می‌شود

x	−۰/۱	−۰/۰۱	−۰/۰۰۱	۰			۰/۱
f(x)	۰/۹۹۸۳	۰/۹۹۹۹	۰/۹۹۹۹۹	?			۰/۹۹۸۳

f(x) به عدد ... نزدیک می‌شود ← → f(x) به عدد ... نزدیک می‌شود

در این فعالیت نمودار تابع $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ که در x=۰ تعریف نشده است به صورت شکل زیر است :



نتایج به دست آمده از جدول بالا را از روی نمودار تابع f بررسی نمایید.

تمرین در کلاس

تابع $f(x)=\frac{x^۳-۱}{x-۱}$ را درنظر می‌گیریم.

۱ــ پنج جملهٔ اوّل هر کدام از دنباله‌های $\{۱-(۰/۱)^{n-۱}\}$ و $\{۱+(۰/۱)^{n-۱}\}$ را بنویسید و حدس بزنید هر کدام از دو دنباله به چه عددی همگرا هستند؟

۲ــ جدول زیر را تکمیل کنید.

x از راست به عدد ... نزدیک می‌شود | x از چپ به عدد ... نزدیک می‌شود

x	۰	۰/۹	۰/۹۹	۰/۹۹۹	۰/۹۹۹۹	۱	۱/۰۰۰۱	۱/۰۰۱	۱/۰۱	۱/۱	۱
f(x)	۱	۲/۹۷۱	۲/۹۷۰۱	۲/۹۹۷۰۰۱		?		۳/۰۰۳۰۰۱	۳/۰۳۰۱	۳/۳۱	۳

f(x) به عدد ... نزدیک می‌شود | f(x) به عدد ... نزدیک می‌شود

۳ــ نمودار تابع f را در صفحهٔ مختصات رسم کنید و سپس به کمک نمودار تابع حدس بزنید که اگر **x** با مقادیر بزرگ‌تر از ۱ به ۱ نزدیک شود و همچنین x را با مقادیر کوچک‌تر از ۱ به ۱ نزدیک کنیم، f(x) به چه عددی نزدیک خواهد شد؟

در تمرین و فعالیت بالا با تابعی روبه‌رو بودیم که متغیر x (در دامنه تابع) به عددی مانند α نزدیک می‌شد و این سؤال مطرح بود که آیا مقدارهای تابع به عدد خاصی نزدیک می‌شوند؟ این مفهوم را حدگیری از تابع در نقطه a می‌نامند (فرایند حد)

از فعالیت بالا نتیجه می‌گیریم، وقتی متغیر x (در دامنه f) بسیار بسیار به صفر نزدیک باشد (با مقادیر بزرگ‌تر از صفر و یا کوچک‌تر از صفر)، مقدارهای f(x) به ۱ نزدیک هستند. میزان نزدیک بودن آنها به ۱، بستگی به میزان نزدیک بودن x به صفر دارد. در حقیقت، به نظر می‌رسد که می‌توانیم مقدارهای f(x) را هر چقدر که بخواهیم به ۱ نزدیک کنیم، به شرطی که x را به اندازه کافی به صفر نزدیک کرده باشیم و این را چنین می‌گوییم «حد تابع f وقتی که x به صفر میل می‌کند برابر ۱ است» و می‌نویسیم :

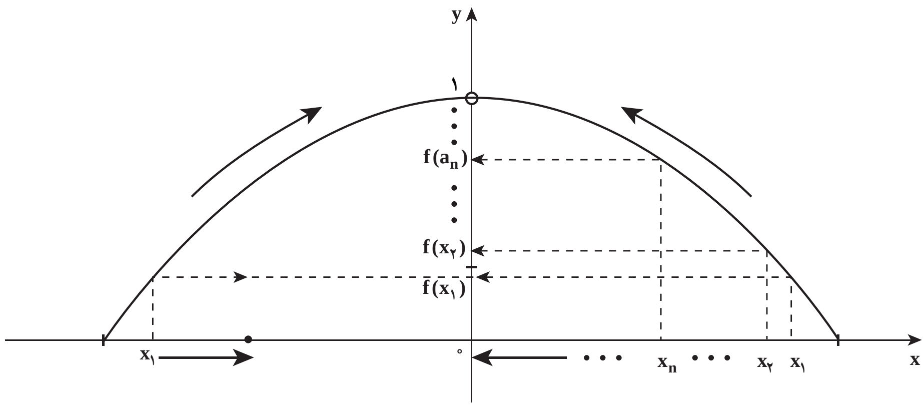
$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x}{x}=۱$$

همچنین از تمرین در کلاس نتیجه می‌گیریم، وقتی متغیر x (در دامنه f) بسیار بسیار نزدیک‌به ۱ باشد (با مقادیر بزرگ‌تر از ۱ و یا کوچک‌تر از ۱)، مقدارهای f(x) به ۳ نزدیک هستند. میزان نزدیک بودن آنها به ۳، بستگی به میزان نزدیک بودن x به ۱ دارد. در حقیقت، به نظر می‌رسد که می‌توانیم مقدارهای f(x) را هر چقدر که بخواهیم به ۳ نزدیک کنیم، به شرطی که x را به اندازه کافی به ۱ نزدیک کرده باشیم و این را چنین می‌گوییم «حد تابع f وقتی که x به ۱ میل می‌کند برابر ۳ است» و می‌نویسیم :

$$\lim_{x\to ۱}\frac{x^{۳}-۱}{x-۱}=۳$$

در تمرین و فعالیت صفحات قبل مفهومی بررسی شد که می‌توان برای یک تابع دلخواه f به صورت زیر تشریح کرد.

فرض کنید نمودار تابع دلخواه f در حوالی $x=0$ به شکل زیر باشد.



نمودار f

با مشاهده نمودار f اگر مقدارهای x که همان مقدارهای دنباله دلخواه $\{x_n\}$ هستند، همگرا به صفر باشند، دنباله $\{f(x_n)\}$ به ۱ همگراست و نیز اگر متغیر x (x عضو دامنه f) با مقدارهای بزرگ‌تر و کوچک‌تر از صفر به صفر میل کند $f(x)$ به ۱ میل می‌کند.

در حالت کلی از نمادگذاری زیر استفاده می‌کنیم :

فرض می‌کنیم مجموعهٔ D که زیر مجموعه‌ای است از مجموعه اعداد حقیقی، دامنه تابع f باشد. اگر مقدار $f(x)$ میل کند به عدد L، وقتی که x (عضو D) به a میل کند.

می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$

و می‌خوانیم «حد $f(x)$ وقتی x به a میل می‌کند برابر L است».

تذکر : وقتی می‌گوییم که «x به a میل می‌کند» $x \neq a$ می‌باشد و اختلاف x و a کوچک و کوچک‌تر می‌شود، فرض بر این است که تابع f در یک همسایگی چپ یا راست (یا هر دو) نقطه a تعریف شده باشد.

تمرین در کلاس

ویژگی‌ها و وضعیت مقادیر تابع $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x+۱}-۱}$ به ازای چهار جملهٔ اوّل دنباله‌های $\{(۰/۱)^n\}$ و $\{-(۰/۱)^n\}$ را در نزدیکی $x=۰$ با تنظیم جدول و رسم نمودار تابع توصیف کنید و سپس $\lim\limits_{x\to ۰} f(x)$ را تخمین بزنید.

حدودی که وجود ندارند.

فعالیت

تابع $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$ و دنباله‌های $\{(۰/۱)^{n-۱}\}$ و $\{-(۰/۱)^{n-۱}\}$ را درنظر می‌گیریم.

الف) پنج جملهٔ اوّل دنباله‌های داده شده را بنویسید.

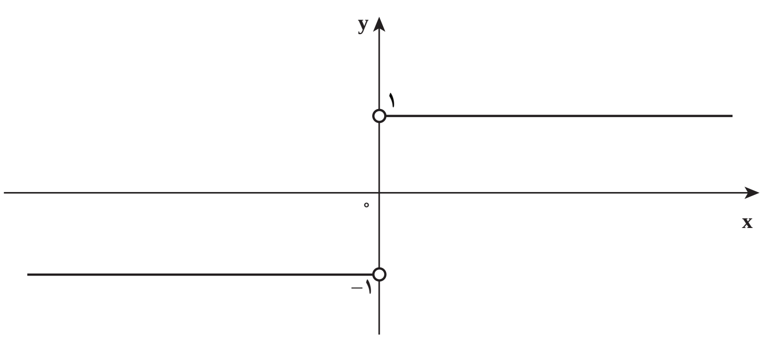
ب) جدول زیر را برای تابع f تکمیل کنید.

x با مقادیر بزرگ‌تر از صفر به صفر نزدیک می‌شود — x با مقادیر کوچک‌تر از صفر به صفر نزدیک می‌شود

x	−۱	−۰/۱	−۰/۰۱	−۰/۰۰۱	−۰/۰۰۰۱	۰	۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۱	۰/۱	۱
$f(x)=\dfrac{\lvert x\rvert}{x}$											

f(x) به عدد ... نزدیک می‌شود — f(x) به عدد ... نزدیک می‌شود

پ) نتایج به‌دست آمده خود را روی نمودار تابع $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$ که در زیر آمده است توضیح دهید.



ت) آیا $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{|x|}{x}$ وجود دارد؟

در حالت کلی :

الف) در یک تابع f اگر متغیر x (در دامنه f) با مقادیر بزرگ‌تر از عددی مانند a به a نزدیک شود و مقادیر f(x) به عددی مانند L_1 میل کند گفته می‌شود تابع f در نقطهٔ a حد راست دارد و مقدار این حد L_1 است و می‌نویسیم :

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L_1$$

L_1 را حد راست تابع f در a می‌نامیم.

بنابراین از این فعالیت نتیجه می‌گیریم :
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$$

ب) در یک تابع f اگر متغیر x (در دامنه f) با مقادیر کوچک‌تر از عددی مانند a به a نزدیک شود و مقادیر f(x) به عددی مانند L_2 نزدیک شود گوییم تابع f در نقطهٔ a حد چپ دارد و مقدار این حد L_2 است و می‌نویسیم :

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L_2$$

بنابراین از فعالیت نتیجه می‌گیریم : $\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$

تمرین در کلاس

ابتدا نمودار تابع f(x)=x+[x] را در بازه [۰,۲) رسم کنید و سپس مقادیر $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ و $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ را تخمین بزنید. آیا $\lim_{x\to 1} f(x)$ وجود دارد؟

طرح یک مسأله

وجود حدهای $\lim_{x\to 0^+} \sin\frac{\pi}{x}$ و $\lim_{x\to 0^-} \sin\frac{\pi}{x}$ را بررسی کنید. اصطلاحاً گوییم رفتار تابع $f(x) = \sin\frac{\pi}{x}$ را در مجاورت $x=0$ بررسی می‌کنیم.

در مورد حد اوّل دنباله‌هایی در نظر می‌گیریم که با مقادیر بزرگ‌تر از صفر به صفر میل می‌کنند.

۱ــ می‌دانیم دنباله $a_n = \frac{1}{n}$ همگرا به صفر است. مقادیر تابع را در ازای مقادیر این دنباله محاسبه می‌کنیم. (جدول ۱)

(جدول ۱)

a_n	۱	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۴}$	...
$f(a_n)$	$\sin\pi$	$\sin۲\pi$	$\sin۳\pi$	$\sin۴\pi$	...

سپس جملات دنباله $\{f(a_n)\}$ همگی برابر صفر بوده و این دنباله به صفر همگرا است.

۲ــ دنباله $\{b_n\}$ را با جمله عمومی $b_n = \frac{۲}{۴n+۱}$ درنظر می‌گیریم، جملات اوّلیه دنباله $\left\{\frac{۲}{۵},\frac{۲}{۹},\frac{۲}{۱۳},\frac{۲}{۱۷},...\right\}$ بوده و می‌دانیم که این دنباله همگرا به صفر است. به ازای این مقادیر جدول(۲) را تشکیل می‌دهیم :

(جدول ۲)

b_n	$\frac{۲}{۵}$	$\frac{۲}{۹}$	$\frac{۲}{۱۳}$	$\frac{۲}{۱۷}$	...
$f(b_n)$	۱	۱	۱	۱	...

پس دنباله $\{f(b_n)\}$ دنباله ثابت ۱ بوده و همگرا به عدد ۱ می‌باشد.

۳ــ دنباله $\{c_n\}$ را با مقادیر $\left\{\frac{۲}{۳},\frac{۲}{۷},\frac{۲}{۱۱},\frac{۲}{۱۵},...\right\}$ که به صفر همگراست در نظر می‌گیریم.

مشابهاً جدول (۳) را برای مقادیر تابع به ازای این xها محاسبه می‌کنیم :

(جدول ۳)

c_n	$\frac{۲}{۳}$	$\frac{۲}{۷}$	$\frac{۲}{۱۱}$	$\frac{۲}{۱۵}$	...
$f(c_n)$	-۱	-۱	-۱	-۱	...

پس دنباله $\{f(c_n)\}$ به عدد ۱− همگراست.

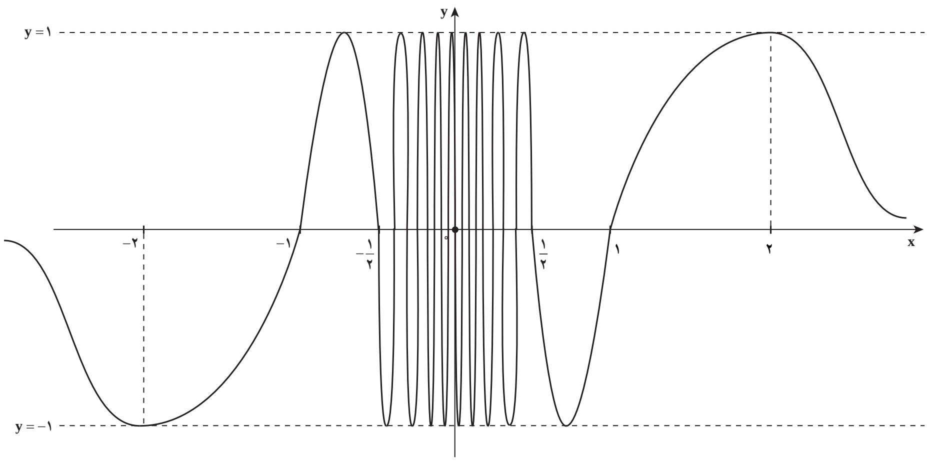
ملاحظه می‌کنیم که $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)=۰$ و $\lim\limits_{n\to\infty} f(b_n)=۱$ و $\lim\limits_{n\to\infty} f(c_n)=-۱$ در حالی‌که $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = ۰$ یعنی دنباله‌های به‌دست آمده برای مقادیر تابع به یک عدد ثابت و

مشخص همگرا نیستند در حالی که همه دنباله‌های عدد انتخاب شده به صفر همگرا بودند.

مشابه وضعیت فوق با انتخاب دنباله‌هایی که با مقادیر کوچک‌تر از صفر به صفر همگرایند، وجود یا عدم وجود $\lim\limits_{x\to ۰^-} f(x)$ را بررسی کنید.

برای نمونه می‌توانید دنباله‌های $a_n=-\frac{۱}{n}$ و $b_n=-\frac{۲}{۴n+۱}$ را به‌کار گیرید.

با استفاده از ماشین حساب‌های علمی و یا رایانه ملاحظه می‌کنیم که نمودار تابع f به شکل زیر می‌باشد.



ملاحظه می‌کنیم که مقادیر تابع در مجاورت $x=۰$ بین دو عدد ثابت ۱ و ۱− کم و زیاد می‌شوند، در این‌صورت گفته می‌شود تابع در مجاورت $x=۰$ رفتاری **نوسانی** دارد و نیز نمودار تابع به‌صورت موج‌های فشرده‌تری به محور y گرایش دارند.

چون تابع $f(x)=\sin\frac{\pi}{x}$ ، تابعی فرد است نمودار f بر بازه $(-\infty,۰)$ قرینه نمودار f بر بازه $(۰,+\infty)$ نسبت به محور y است.

پرسش : براساس اطلاعات به‌دست آمده در جدول‌های (۱) و (۲) و (۳) آیا $\lim\limits_{x\to ۰}\sin\frac{\pi}{x}$ وجود دارد؟

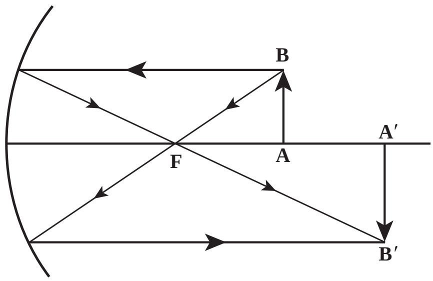
۲ـ۴ـ حد بی‌نهایت

مسأله : تصویری از یک شیء که در مقابل آینه مقعر قرار گرفته روی پرده افتاده است، با این فرض که فاصله شیء از آینه بزرگ‌تر از فاصله کانونی $(p>f)$

۱ــ رابطه بزرگ‌نمایی آینه مقعر (m) را بر حسب p و f به‌دست آورید.

۲ــ وضعیت m را وقتی که p به f نزدیک می‌شود بررسی کنید.

در این فعالیت اگر f فاصله کانونی و p فاصله جسم تا آینه و q فاصله تصویر تا آینه فرض شود (شکل روبه‌رو)، بزرگ‌نمایی در آینه مقعر برابر است با :



$$m=\frac{\text{طول تصویر}\ A'B'}{\text{طول شیء}\ AB} \quad \text{یا} \quad m=\frac{q}{p}$$

۱ــ همان‌طور که در فیزیک یاد گرفته‌اید، داریم :

$$\frac{۱}{p}+\frac{۱}{q}=\frac{۱}{f} \qquad (۱)$$

در رابطه (۱) به جای q، mp را قرار می‌دهیم تا رابطه (۲) به‌دست آید.

$$m=\frac{f}{p-f} \qquad (۲)$$

۲ــ در رابطه (۲) فاصله کانونی (f) ثابت است و فاصله شیء تا آینه متغیر است و مقدار بزرگ‌نمایی (m) مقدار تابعی است برحسب متغیر p.

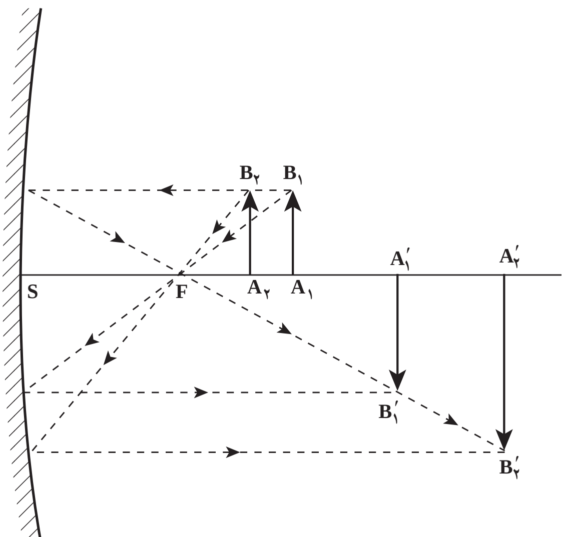
اکنون اگر p با مقدارهای بزرگ‌تر از f به f نزدیک و نزدیک‌تر شود، آنگاه m (بزرگ‌نمایی) بزرگ و بزرگ‌تر خواهد شد.

در حقیقت از نزدیک‌کردن p به مقادیر بزرگ‌تر از f به f، می‌توان هرچقدر که بخواهیم m را بزرگ انتخاب کنیم (مقدارهای m بی‌کران افزایش می‌یابند) و از نمادگذاری

$$\lim_{p\to f^+}\frac{f}{p-f}=+\infty$$

استفاده می‌کنیم.

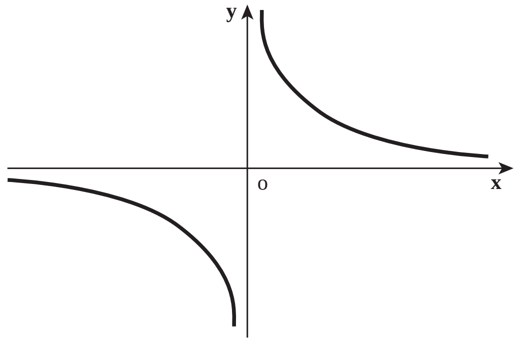
پرسش : نمادگذاری بالا را به کمک شکل روبه‌رو توصیف کنید.



طول شیء $A_۱B_۱=A_۲B_۲=\ldots=A_nB_n=\ldots$

فعالیت

تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ را که دامنه آن $R-\{۰\}$ است، درنظر می‌گیریم. نمودار این تابع را در حسابان دیده‌اید (شکل روبه‌رو).

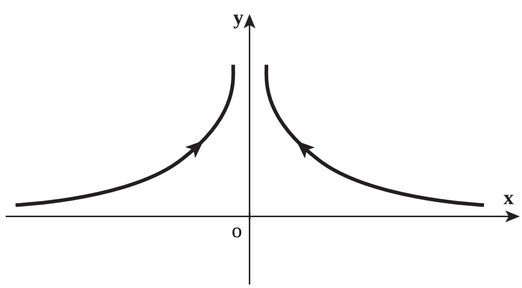


ملاحظه می‌کنیم که وقتی x با مقادیر بزرگ‌تر از صفر (از سمت راست صفر) به صفر نزدیک می‌شود مقادیر تابع به دلخواه بزرگ می‌شوند. به زبان دنباله‌ها هرگاه دنباله‌ای را درنظر بگیریم که به صفر میل کند مانند دنباله $a_n=\frac{۱}{n}$ دنباله $f(a_n)=f(\frac{۱}{n})=n$ به دست می‌آید و می‌دانیم که $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)=\infty$ پس $\lim\limits_{x\to ۰^+}\frac{۱}{x}=+\infty$

مشابهاً از روی نمودار می‌بینیم که وقتی x با مقادیر کوچک‌تر از صفر (از سمت چپ صفر) به صفر نزدیک می‌شود، مقادیر تابع که همگی منفی‌اند، از هر عددی کوچک‌تر می‌شوند. به زبان دنباله‌ها، هرگاه بخواهیم x از سمت چپ به صفر میل کند، باید دنباله‌هایی را درنظر بگیریم که با مقادیر منفی به صفر میل کنند، مانند دنباله $a_n=-\frac{۱}{n}$ و یا $b_n=\frac{-۱}{n^۲}$ ، در این‌صورت مثلاً $f(a_n)=-n$ به‌دست آمده و $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)=-\infty$ ، بنابراین: $\lim\limits_{x\to ۰^-}\frac{۱}{x}=-\infty$

از این بررسی نتیجه می‌گیریم که تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ در صفر حد ندارد.

اکنون تابع $f(x)=\frac{۱}{x^۲}$ را درنظر می‌گیریم. نمودار این تابع یک منحنی است بالای محور x که در مجاورت صفرشاخه‌های آن به گونه‌ای مماس‌وار به محور y نزدیک می‌شوند (شکل روبه‌رو).



برای آنکه رفتار تابع را در مجاورت صفر بررسی کنیم، به عبارت دیگر در خصوص وجود یا عدم وجود حد تابع در صفر مطالعه کنیم، دنباله‌هایی رادرنظر می‌گیریم که به صفر میل کنند (مقادیر دنباله عضو دامنهٔ f)، مانند $a_n=\frac{۱}{n}$ و $b_n=-\frac{۱}{n}$ ، در این صورت :

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n)=\lim_{n\to\infty} n^۲=+\infty \quad \text{و} \quad \lim_{n\to\infty} f(b_n)=\lim_{n\to\infty} n^۲=+\infty$$

توجه داریم که مقادیر دنباله $\{a_n\}$ از راست و مقادیر دنباله $\{b_n\}$ از چپ به صفر میل می‌کنند.

بنابراین : $\lim_{x\to ۰^-}\frac{۱}{x^۲}=+\infty$ و $\lim_{x\to ۰^+}\frac{۱}{x^۲}=+\infty$

در نتیجه اصطلاحاً می‌گوییم تابع f در نقطه $a=۰$ دارای حد نامتناهی و یا حد بی‌کران است.

وقتی $\lim_{x\to a} f(x)=-\infty$ ، باز هم‌چنین توصیف می‌کنیم که تابع f در نقطه a دارای حد نامتناهی است.

حالت کلی : وقتی از نماد $\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$ استفاده می‌کنیم، گوییم f در a دارای حد $+\infty$ است و این بدان معنی است که مقادیر f(x) به دلخواه بزرگ و بزرگ‌تر می‌شوند، به شرط آن‌که متغیر x (عضو دامنهٔ f) به قدر کافی به a نزدیک شود. به زبان دنباله‌ها این وقتی اتفاق می‌افتد که برای هر دنباله $\{a_n\}$ با مقادیر عضو دامنهٔ f که $a_n\to a$، $\lim_{n\to\infty} f(a_n)=+\infty$.

تمرین در کلاس

نشان دهید که $\lim_{x\to ۰}(-\frac{۱}{x^۲})=-\infty$

فعالیت

تابع $f(x)=\frac{-۱}{(x-۱)^۲}$ و دنباله‌های $\{۱+(۰/۱)^{n-۱}\}$ و $\{۱-(۰/۱)^{n-۱}\}$ را درنظر می‌گیریم :

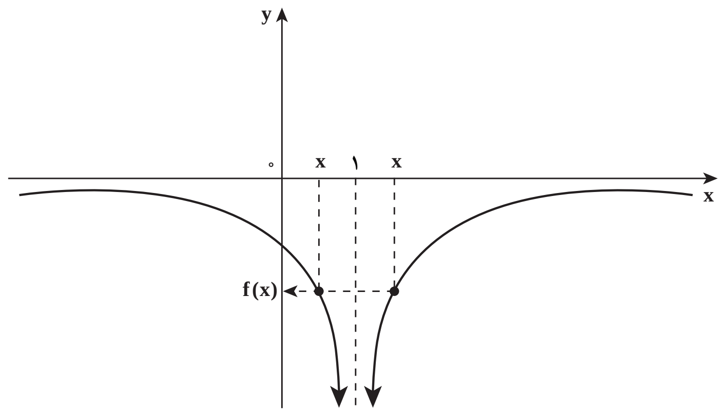
۱ــ پنج جملهٔ اوّل دنباله‌های بالا را بنویسید.

۲ــ جدول زیر را برای تابع f تکمیل کنید.

x	$-۱/۱$	$-۱/۰۱$	$-۱/۰۰۱$	$-۱/۰۰۰۱\to۱\leftarrow-۱/۰۰۰۱$	$۱/۰۰۱$	$۱/۰۱$	$۱/۱$
f(x)				$\to ؟ \leftarrow$			

۳ــ آیا مقدارهای f(x) وقتی x به ۱ نزدیک می‌شود، به عدد خاصی نزدیک

می‌شوند؟ جواب خود را از روی نمودار تابع $f(x)=\frac{-1}{(x-1)^2}$ در شکل زیر توضیح دهید.



این فعالیت به ما نشان می‌دهد، وقتی x به ۱ نزدیک می‌شود، $(x-1)^2$ به صفر نزدیک خواهد شد و $\frac{-1}{(x-1)^2}$ بسیار کوچک منفی می‌شود. در حقیقت به نظر می‌رسد که می‌توان با نزدیک کردن x به اندازهٔ کافی به ۱، مقدارهای f(x) را به دلخواه با مقادیر منفی کوچک و کوچک‌تر کرد (مقدارهای f(x) بی‌کران کاهش می‌یابند).

در نتیجه مقدارهای f(x) به هیچ عدد میل نمی‌کند. بنابراین $\lim\limits_{x\to 1}\frac{-1}{(x-1)^2}$ وجود ندارد.

برای نشان دادن وضعیتی که در این فعالیت پیش آمده از نمادگذاری $\lim\limits_{x\to 1}\frac{-1}{(x-1)^2}=-\infty$ استفاده می‌کنیم.

حالت کلی: وقتی از نماد $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$ استفاده می‌کنیم، گوییم f در a دارای حد $-\infty$ است. و این بدان معنی است که مقادیر f(x) با مقدارهای منفی کوچک و کوچک‌تر می‌شوند (مقادیر f(x) بی‌کران با مقادیر منفی کاهش می‌یابند) به شرط آن‌که متغیر x (عضو دامنه f) به قدر کافی به a نزدیک شود. به زبان دنباله‌ها، این وقتی اتفاق می‌افتد که برای هر دنباله $\{a_n\}$ با مقادیر عضو دامنه f که $a_n\to a$، $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)=-\infty$.

تمرین در کلاس

نشان دهید که $\lim\limits_{x\to 1}\frac{-1}{(x-1)^2}=-\infty$

۲ـ۵ـ حد در بی‌نهایت

تا اینجا رفتار تابع را در حول و حوش عددی حقیقی مانند a مورد مطالعه قرار داده‌ایم، به عبارت دقیق‌تر وجود یا عدم وجود حد تابع را در نقطه مشخص a بررسی کرده‌ایم. در این بخش علاقه‌مندیم تا رفتار تابع را برای مقادیر بسیار بزرگ x و یا برای مقادیر بسیار کوچک ولی از حیث قدرمطلق بزرگ، مورد مطالعه قرار دهیم. رفتار تابع را برای xهای بزرگ و بی‌کران مثبت، حد در $+\infty$ و رفتار تابع را برای xهای بزرگ و با علامت منفی (بی‌کران منفی) حد در $-\infty$ نامیده می‌شود. به مثال تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ که نمودار آن نیز در صفحهٔ ۶۵ کتاب ملاحظه گردید برمی‌گردیم. وقتی x مقادیر بزرگ و بزرگ‌تر را اختیار می‌کند، یعنی در جهت xهای مثبت روی خط حقیقی به اصطلاح تغییر می‌کند، مقادیر تابع کوچک و کوچک‌تر شده و از هر عدد مشخصی کوچک‌تر می‌شوند. به لحاظ شهودی، همچنان‌که در شکل نمایان است نمودار این تابع در سمت راست و برای xهای بزرگ رفته رفته به محور x نزدیک‌تر می‌شود یعنی فاصله نقاط این شاخهٔ نمودار از محور x، کوچک و کوچک‌تر می‌شود.

با ابزار دنباله نیز می‌توانیم مسأله را بهتر بررسی کنیم، منتهی چون مرادمان حد در $+\infty$ است، باید دنباله‌ها را چنان اختیار کنیم که به $+\infty$ واگرا باشند. برای نمونه فرض کنیم دنباله $\{a_n\}$ با ضابطه $a_n=n$ یک چنین دنباله‌ای باشد پس $f(a_n)=\frac{۱}{a_n}=\frac{۱}{n}$ و می‌دانیم $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{۱}{n}=۰$ پس می‌گوییم $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{۱}{x}=۰$

مشابهاً وقتی xها به $-\infty$ میل می‌کنند، یعنی xها علامت منفی دارند ولی از لحاظ قدرمطلق بزرگ و بزرگ‌تر می‌شوند. بنابراین دنباله‌ها را طوری باید اختیار کنیم که به $-\infty$ واگرا باشند. برای نمونه هرگاه با دنباله $a_n=۱-n^۲$ کار کنیم، $f(a_n)=\frac{۱}{a_n}=\frac{۱}{۱-n^۲}$ و می‌دانیم که $\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)=۰$ پس $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{۱}{x}=۰$، و این واقعیتی است که از نمودار نیز به خوبی مشهود است.

حالت کلی : وقتی می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=L$، منظورمان آن است که مقادیر f(x) را هرچقدر که بخواهیم به L نزدیک کنیم به شرط آنکه xهای عضو دامنه f به قدر کافی بزرگ باشند.

تمرین در کلاس

دبیر : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x+۱}$ را حدس بزنید.

محسن این‌گونه مسأله را بررسی کرده است :

در رابطه با حدسیه‌سازی $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x+1}$ با مقادیر بزرگ و بزرگ‌تر x سرو کار داریم. پس عدد ۱ و یا هر عدد ثابت دیگری، در مقابل x ناچیز است. پس اگر x+1 مخرج کسر را با x تقریب کنیم، مقادیر تابع با $\frac{x}{x}=1$ تقریب می‌گردند، بنابراین مقادیر این تابع برای xهای بزرگ، عددهایی نزدیک ۱ هستند. در نتیجه حدس می‌زنیم که

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x+1}=1$$

آیا استدلال و تفکر شهودی محسن درست است؟

می‌توانید دنباله‌های $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ با ضابطه‌های $a_n=n$ و $b_n=n^2+1$ را که هر دو به $+\infty$ واگرا هستند، محک بزنید.

در مورد مقدار $\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x+1}$ چگونه فکر می‌کنید؟

حالت کلی : هرگاه x با مقادیر منفی کوچک و کوچک‌تر شود، آنگاه f(x) به L نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود، می‌نویسیم $\lim_{x\to-\infty}f(x)=L$ و گوییم حد تابع f در $-\infty$ برابر L است.

توجه داشته باشید که وقتی x مقادیر منفی را اختیار کند، برای آن‌که مرتب کوچک‌تر شود باید قدرمطلق آن بزرگ‌تر گردد.

تمرین در کلاس

۱ــ مقدارهای $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ و $\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ را در صورت وجود، حدس بزنید.

۲ــ نمودار تابع f در شکل زیر نشان داده شده است :

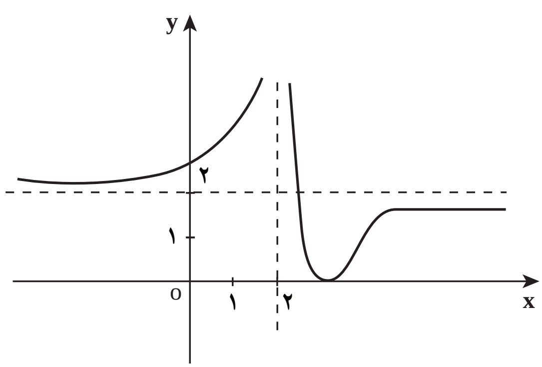
حدهای زیر را حدس بزنید.

الف) $\lim_{x\to2^-}f(x)$

ب) $\lim_{x\to2^+}f(x)$

پ) $\lim_{x\to-\infty}f(x)$

ت) $\lim_{x\to+\infty}f(x)$



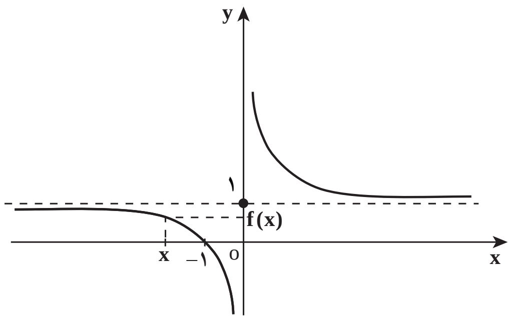
۳ــ تابع $f(x)=\frac{x+1}{x}$ و دنباله $\{a_n\}$ با ضابطه $a_n=-10^n$ را درنظر بگیرید.

الف) وقتی x مقادیر این دنباله را طبق جدول زیر اختیار کند f(x) را محاسبه کنید.

a_n	-10	-100	-1000	-10000
$f(a_n)$				

ب) آیا $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ وجود دارد؟

جواب خود را با توجه به نمودار $f(x)=\frac{x+1}{x}$ که در شکل روبه‌رو آمده نیز توجه کنید. $\left(f(x)=\frac{x+1}{x}=1+\frac{1}{x}\right)$



مسائل

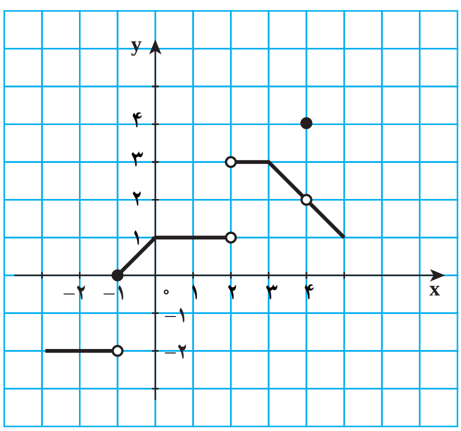
۱ــ با استفاده از نمودار f که در زیر داده شده است، مقدار هریک از عبارت‌های زیر را، در صورت وجود، مشخص کنید. اگر این مقدار وجود ندارد توضیح دهید که چرا وجود ندارد.

الف) $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$

ب) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

پ) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

ت) $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$



۲ــ تابع هِوی‌ساید (Heaviside) به‌صورت زیر تعریف می‌شود :

$$H(t)=\begin{cases}۱ \ , & t\geq ۰\\ ۰ \ , & t<۰\end{cases}$$

از این تابع در مدارهای الکتریکی برای نشان دادن هجوم ناگهانی جریان الکتریکی، یا ولتاژ، در لحظه زدن کلید استفاده می‌شود.

الف) نمودار تابع هوی‌ساید را رسم کنید.

ب) مقدار عبارت‌های $\lim\limits_{t\to ۰^-} H(t)$ و $\lim\limits_{t\to ۰^+} H(t)$ را مشخص کنید.

۳ــ تابع علامت (یا تابع signum) به‌صورت زیر تعریف می‌شود :

$$sgn(x)=\frac{x}{|x|}=\begin{cases}۱ \ , & x>۰\\ -۱ \ , & x<۰\\ \text{تعریف نشده} \ , & x=۰\end{cases}$$

الف) نمودار تابع علامت را رسم کنید.

ب) مقدار عبارت‌های $\lim\limits_{x\to ۰^-} sgn(x)$ و $\lim\limits_{x\to ۰^+} sgn(x)$ را مشخص کنید.

۴ــ نمودار تابع $f(x)=[x]+[-x]$ را رسم نموده و حدهای زیر را مشخص کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)$

ب) $\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)$

پ) $\lim\limits_{x\to ۱} f(x)$

آیا می‌توان نوشت : $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-۱$ ، (به ازای هر a عضو $\mathbb{R}$)؟

۵ــ با رسم نمودار تابع $f(x)=\frac{x}{[x]}$ در بازه $[-۱,۱]$، مقدار هریک از عبارت‌های زیر را، **در صورت وجود**، مشخص کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۰^-} \frac{x}{[x]}$ ب) $\lim\limits_{x\to ۰^+} \frac{x}{[x]}$

([ ] علامت جزء صحیح است.)

۶ــ مقدار $\lim\limits_{x\to ۰}\left[\frac{\sin x}{x}\right]$ را پیدا کنید.

۲ـ۶ـ مفهوم ریاضی حد

همان‌طور که در فعالیت بخش اوّل بررسی شد، تابع $g(x)=\sin\frac{\pi}{x}$ در مجاورت $x=0$ (به‌ازای $x\neq 0$) دارای رفتاری نوسانی است و به ازای دنباله‌های همگرا به صفر $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ و $\{c_n\}$ و $\{x_n\}$، دنباله‌های $\{g(a_n)\}$ و $\{g(b_n)\}$ و $\{g(c_n)\}$ و $\{g(x_n)\}$ به ترتیب به ۰ و ۱ و ۱− و $\frac{1}{2}$ همگرا می‌شوند یعنی به ازای هر دنباله دلخواه همگرا به صفر مقدارهای $g(x)$ به سمت یک عدد ثابتی میل نمی‌کند بنابراین $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{\pi}{x}$ وجود ندارد.

البته نباید این ذهنیت به‌وجود آید که فقط نوسان‌های $g(x)=\sin\frac{\pi}{x}$ جلوی حد داشتن آن را در $x=0$ می‌گیرند. زیرا با بررسی وضعیت تابع $x\neq 0$، $f(x)=x\sin\frac{\pi}{x}$ در مجاورت $x=0$ خواهیم دید این تابع مانند تابع $g(x)=\sin\frac{\pi}{x}$ دارای نوسان است، امّا در اینجا نوسان‌ها به وسیلهٔ عامل میرایی x، مستهلک می‌شوند. برای یادگیری بهتر مفاهیم «عامل میرایی x» و «مستهلک شدن نوسان‌ها» ابتدا جدول‌های زیر را به کمک دنباله‌های فعالیت بخش اوّل که برای تابع $g(x)=\sin\frac{\pi}{x}$ به‌کار بردیم، با تابع $x\neq 0$، $f(x)=x\sin\frac{\pi}{x}$ تنظیم می‌کنیم.

(۵)

$x=a_n$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\dots$
$f(a_n)$	0	0	0	0	0	$\dots\to 0$

(۶)

$x=b_n$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{13}$	$\frac{2}{17}$	$\frac{2}{21}$	$\dots$
$f(b_n)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{13}$	$\frac{2}{17}$	$\frac{2}{21}$	$\dots\to 0$

(۷)

$x=c_n$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{19}$	$\dots$
$f(c_n)$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{7}$	$-\frac{2}{11}$	$-\frac{2}{15}$	$-\frac{2}{19}$	$\dots\to 0$

(۸)

$x=x_n$	$\frac{6}{13}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{6}{37}$	$\frac{6}{49}$	$\frac{6}{61}$	$\dots$
$f(x_n)$	$\frac{3}{13}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{3}{37}$	$\frac{3}{49}$	$\frac{3}{61}$	$\dots\to 0$

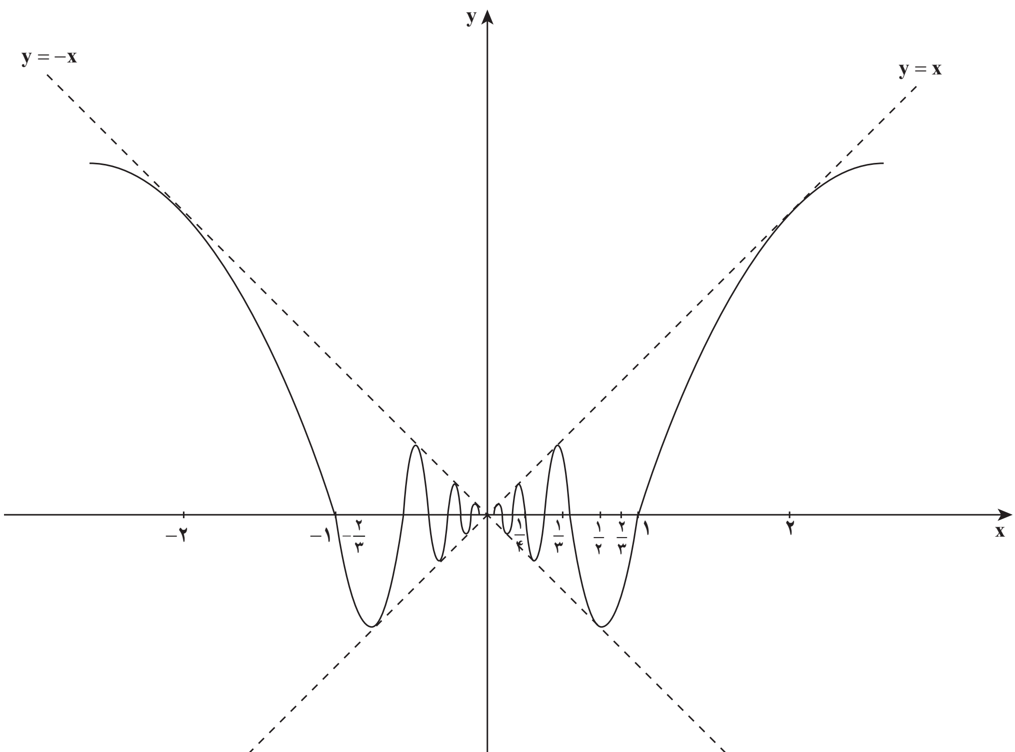
با مشاهدهٔ جدول‌های ۵ و ۶ و ۷ و ۸ معلوم می‌شود که با نزدیک کردن x (مقدار دنباله) به صفر، می‌توان هرچقدر که بخواهیم $f(x)$ را به صفر نزدیک کنیم و عاملی که باعث شده به ازای هر دنباله همگرا به صفر نظیر $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ و $\{c_n\}$ و $\{x_n\}$ و ...، $f(x)$ به صفر میل کند همان عامل «x» است که در $\sin\frac{\pi}{x}$ ضرب شده و $f(x)$ را به‌وجود آورده است.

از طرفی به ازای هر $x \neq ۰$، $-۱ \leq \sin\frac{\pi}{x} \leq ۱$ و

$x > ۰$، $-x \leq x\sin\frac{\pi}{x} \leq x$

$x < ۰$، $-x \geq x\sin\frac{\pi}{x} \geq x$

از این‌رو در هر حالت $f(x)$ بین $y = x$ و $y = -x$ قرار می‌گیرد و چون تابع f زوج است نمودار تابع $f(x) = x\sin\frac{\pi}{x}$ نسبت به محور y تقارن دارد و حد مشترک توابع $f(x) = x\sin\frac{\pi}{x}$ و $y = x$ و $y = -x$ وقتی $x \to ۰$، مساوی صفر است.



نمودار $f(x) = x\sin\frac{\pi}{x}$

با بررسی رفتار تابع $f(x)=x\sin\frac{\pi}{x}$ به‌طور شهودی نشان داده شد که $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{\pi}{x}=0$. در حالی که $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{\pi}{x}$ وجود ندارد، از این‌رو برای طرح مفاهیم حد و اثبات قضایایی در باب حدود، تعریف حد را با رویکرد دقیق ریاضی بیان می‌کنیم.

توضیح اینکه در این بخش با تابع‌هایی سروکار داریم مانند $f: D\to \mathbb{R}$ که دامنهٔ آن D، زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ (مجموعهٔ اعداد حقیقی) است. در این کتاب وقتی از حد تابع f در نقطهٔ x=a صحبت می‌کنیم فرض بر این است که تابع f در یک همسایگی چپ یا راست (یا هر دو) نقطه a تعریف شده باشد.

تعریف: فرض کنیم D زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ و $f: D\to\mathbb{R}$ یک تابع باشد، در این صورت، گوییم حد تابع f در a، عدد حقیقی L است و می‌نویسیم، $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ ، هرگاه به ازای هر دنباله از نقاط دامنهٔ f مانند $\{a_n\}$ که به a همگراست $(a_n\neq a)$، دنباله $\{f(a_n)\}$ به L همگرا باشد.

دقت کنید چون حد دنباله $\{f(a_n)\}$ در صورت وجود یکتا است، حد تابع f در نقطه a نیز در صورت وجود یکتا است که آن را با $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ نشان می‌دهیم.

مثال: به کمک تعریف ثابت کنید : $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$

حل: تابع $f(x)=\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}$ به ازای $x=1$ نامعین است و برای هر $x\neq 1$ داریم $f(x)=x+1$

و برای هر دنباله $\{a_n\}$ که $a_n\neq 1$ و همگرا به ۱ داریم :

$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n)=\lim_{n\to+\infty}(a_n+1)=1+1=2$$

بنابراین

$$\lim_{x\to 1} f(x)=2$$

تمرین در کلاس

به کمک تعریف ثابت کنید :

۱ــ عدد ثابت c، $\lim\limits_{x\to a} c=c$, $\lim\limits_{x\to a} x=a$

۲ــ $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{\pi}{x}=0$

۳ــ $\lim\limits_{x\to a} x^2=a^2$

۴ــ $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{a}$ ، n عددی است طبیعی (اگر n زوج باشد، $a\geq 0$)

مسأله: به کمک تعریف ثابت کنید تابع $f(x)=\sin\frac{\pi}{x}$ در نقطه $x=0$ حد ندارد.

در فعالیت زیر نشان می‌دهیم تابع f در $x=0$ حد ندارد:

فعالیت

۱ــ دو دنباله به‌نام‌های $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ مثال بزنید که هردو مخالف صفراند ولی به عدد صفر همگرا باشند.

۲ــ دنباله‌های $\{f(a_n)\}$ و $\{f(b_n)\}$ به چه عددی همگرا هستند؟

۳ــ آیا $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{\pi}{x}$ وجود دارد؟

در فعالیت بالا

۱ــ دنباله‌های $\{a_n\}$ با ضابطه $a_n=\frac{1}{n}$ و $\{b_n\}$ با ضابطه $b_n=\frac{1}{2n+\frac{1}{2}}$ هردو مخالف صفرند ولی به صفر همگرا هستند.

۲ــ
$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n)=\lim_{n\to+\infty}\sin n\pi=\lim_{n\to+\infty} 0=0$$
$$\lim_{n\to+\infty} f(b_n)=\lim_{n\to+\infty}\sin(2n\pi+\frac{\pi}{2})=\lim_{n\to+\infty} 1=1$$

۳ــ چون حد دنباله در صورت وجود یکتا است و در این فعالیت $\lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n)\neq\lim\limits_{n\to+\infty} f(b_n)$ بنابراین طبق تعریف (۱)، $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{\pi}{x}$ وجود ندارد.

تمرین در کلاس

ثابت کنید:

۱ــ $\lim\limits_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$ وجود ندارد.

۲ــ تابع f با ضابطه $f(x)=\begin{cases} x^2 & , \quad x<0 \\ x-1 & , \quad x>0\end{cases}$ در نقطه صفر دارای حد نیست.

قضیه صفحهٔ بعد محاسبه حد بسیاری از توابع را بدون مراجعه مستقیم به تعریف (۱) امکان‌پذیر می‌سازد.

قضیه ۱ : فرض کنیم D زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ باشد و $g: D \to \mathbb{R}$ و f تابع‌هایی باشند که

$\lim\limits_{x\to a} g(x) = L_۲ \quad , \quad \lim\limits_{x\to a} f(x) = L_۱$ در این صورت

الف) $\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x) = L_۱ + L_۲$

ب) $\lim\limits_{x\to a}(f-g)(x) = L_۱ - L_۲$

پ) $\lim\limits_{x\to a}(cf)(x) = cL_۱$ ، c عددی ثابت است.

ت) $\lim\limits_{x\to a}(f.g)(x) = L_۱.L_۲$

ث) اگر $L_۲ \neq ۰$ آنگاه $\lim\limits_{x\to a} f/g(x) = \dfrac{L_۱}{L_۲}$

نتیجه : با استفاده از استقراءِ ریاضی از قضیه (۱) نتیجه می‌شود :

$$\lim_{x\to a}(f_۱(x)+f_۲(x)+\cdots+f_n(x)) = \lim_{x\to a} f_۱(x)+\cdots+\lim_{x\to a} f_n(x)$$

$$\lim_{x\to a}(f_۱(x)f_۲(x)\cdots f_n(x)) = \lim_{x\to a} f_۱(x)\times\lim_{x\to a} f_۲(x)\times\cdots\times\lim_{x\to a} f_n(x)$$

مثال : نشان دهید :

الف) $\lim\limits_{x\to a} x^n = a^n$

ب) اگر P(x) یک چندجمله‌ای دلخواه باشد آنگاه $\lim\limits_{x\to a} P(x) = P(a)$

پ) اگر P(x) و Q(x) دوچندجمله‌ای دلخواه باشند و $Q(a) \neq ۰$ آنگاه :

$$\lim_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}$$

حل:

الف)

$$\lim_{x\to a} x^n = (\lim_{x\to a} x)\cdots(\lim_{x\to a} x) = (\lim_{x\to a} x)^n = a^n$$

ب) اگر $P(x) = a_n x^n + a_{n-۱}x^{n-۱} + \ldots + a_۰$ آنگاه طبق قسمت الف و قسمت پ قضیه (۱) داریم :

$$\lim_{x\to a} P(x) = a_n \lim_{x\to a} x^n + a_{n-۱}\lim_{x\to a} x^{n-۱} + \cdots + \lim_{x\to a} a_۰$$

$$= a_n a^n + a_{n-۱}a^{n-۱} + \ldots + a_۰ = P(a)$$

پ) طبق قسمت (ث) قضیه (۱) و قسمت (ب) مثال (۲) داریم :

$$\lim_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}P(x)}{\lim\limits_{x\to a}Q(x)}=\frac{P(a)}{Q(a)}$$

اثبات قضیه (۱)

دنباله دلخواه $\{a_n\}$، همگرا به a را که $a_n \neq a$ است درنظرمی‌گیریم چون $\lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n)=L_1$

و $\lim\limits_{n\to+\infty} g(a_n)=L_2$ پس :

$$\lim_{n\to+\infty}(f(a_n)\pm g(a_n))=\lim_{n\to+\infty}f(a_n)\pm\lim_{n\to+\infty}g(a_n)=L_1\pm L_2$$

در نتیجه

$$\lim_{x\to a}(f\pm g)(x)=L_1\pm L_2$$

$$\lim_{n\to+\infty}cf(a_n)=c\lim_{n\to+\infty}f(a_n)=cL_1$$

$$\lim_{n\to+\infty}f(a_n)g(a_n)=\lim_{n\to+\infty}f(a_n)\lim_{n\to+\infty}g(a_n)=L_1L_2$$

در نتیجه

$$\lim_{x\to a}cf(x)=cL_1\quad,\quad\lim_{x\to a}(f.g)(x)=L_1L_2$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{f(a_n)}{g(a_n)}=\frac{\lim\limits_{n\to+\infty}f(a_n)}{\lim\limits_{n\to+\infty}g(a_n)}=\frac{L_1}{L_2}\quad,\quad L_2\neq 0$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{L_1}{L_2}\quad,\quad L_2\neq 0$$

در نتیجه

تمرین در کلاس

۱ـ به کمک قضیه (۱) ثابت کنید :

$\lim\limits_{x\to a}f(x)=L$ اگر و تنها اگر $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-L)=0$

۲ـ به کمک قضیه (۱) ثابت کنید :

الف) $\lim\limits_{x\to 2}9x^2=36$ ب) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2}{x+1}=\frac{4}{3}$

پ) $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+1)(x^2+x)=4$

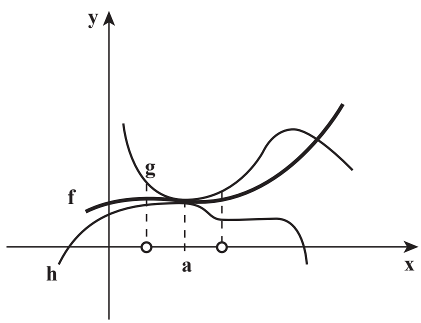
۲ـ۷ـ قضیه فشردگی

در بعضی مواقع برای محاسبهٔ حد یک تابع، مقایسهٔ آن تابع با دو تابع که دارای حد معلوم هستند مفید می‌باشد (هرسه تابع باید در حوالی یک نقطه باهم مقایسه شوند).

برای مثال در شکل (۱) این بخش مشاهده می‌شود نمودار تابع $f(x) = x\sin\frac{1}{x}$ به ازای $x \neq 0$ همواره بین نمودارهای دو تابع $g(x) = x$ و $h(x) = -x$ قرار دارد و با توجه به شکل (۱) اگر x به صفر میل کند، هر دو تابع $g(x) = x$ و $h(x) = -x$ به صفر میل می‌کنند و به‌طور شهودی نتیجه می‌شود که اگر $x \to 0$ آنگاه $f(x)$، که بین $g(x)$ و $h(x)$ فشرده شده است به صفر میل می‌کند. این ایده محتوای قضیه زیر موسوم به قضیه فشردگی است.

قضیه۲: هرگاه به ازای هر x در بازهٔ بازی شامل a،(به‌جز احتمالاً در خود a) $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ و نیز $\lim_{x\to a} h(x) = L = \lim_{x\to a} g(x)$ آنگاه : $\lim_{x\to a} f(x) = L$

توصیف قضیهٔ فشردگی، که گاهی آن را قضیه ساندویچ هم می‌نامند، در شکل زیر آورده شده است.

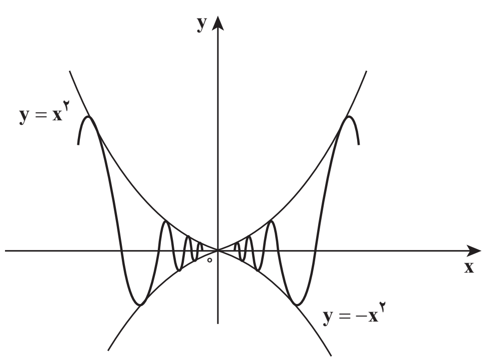


طبق این قضیه اگر $f(x)$ در نزدیکی a بین $h(x)$ و $g(x)$ فشرده شده باشد و اگر حدهای h و g در a برابر با L باشد، آنگاه تابع f در a حدی برابر با L دارد.

مثال: نشان دهید $\lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = 0$

حل: ابتدا توجه کنید که نمی‌توان نوشت :

$$\lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0} x^2 \times \lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$$



زیرا $\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ وجود ندارد (با توجه به مسأله ۱) ولی به علت این که $-1 \leq \sin\frac{1}{x} \leq 1$ پس همان‌طور که در شکل زیر هم مشاهده می‌شود

$$-x^2 \leq x^2 \sin\frac{1}{x} \leq x^2$$

و می‌دانیم $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = \lim\limits_{x\to 0}(-x)^2 = 0$ پس طبق قضیه فشردگی نتیجه می گیریم :

$$\lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = 0$$

اثبات قضیه فشردگی : باید نشان دهیم که برای هر دنباله دلخواه $\{a_n\}$ که همگرا به a است و $a_n \neq a$، دنباله $\{f(a_n)\}$ به L همگراست.

و امّا برای هر دنباله $\{a_n\}$ که به a همگراست، به ازای nهای به اندازه کافی بزرگ، a_n در یک همسایگی محذوف a قرار می‌گیرد. بنابراین : $h(a_n) \le f(a_n) \le g(a_n)$ و $\lim\limits_{n\to +\infty} h(a_n) = \lim\limits_{n\to +\infty} g(a_n) = L$

پس طبق قضیه فشردگی در دنباله‌ها داریم : $\lim\limits_{n\to +\infty} f(a_n) = L$ (شکل بالا را مشاهده کنید)

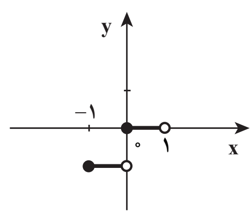
بنابراین $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$.

تعریف: اگر A زیرمجموعه‌ای از دامنه f باشد، آنگاه تابع f را بر مجموعه A **کراندار** می‌نامیم، در صورتی که عدد مثبتی مانند M یافت شود به‌طوری که برای هر $x \in A$، $|f(x)| \le M$

مثال : الف) تابع $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ در دامنه‌اش کراندار است. زیرا به ازای هر $x \in D_f$،

$$\left|\sin\frac{1}{x}\right| \le 1$$

ب) تابع $f(x) = [x]$ بر مجموعه $A = \{x \in \mathbb{R} , -1 < x < 1\}$ کراندار است زیرا به ازای هر $x \in A$، $f(x)$ یا صفراست و یا -1 یعنی $|f(x)| \le 1$



تمرین در کلاس

نشان دهید تابع $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ در دامنه‌اش کراندار است.

یادآوری : همان‌طور که قبلاً نشان داده شد تابع $f(x)=\sin\frac{\pi}{x}$ در نقطه صفر حد ندارد ولی در دامنه‌اش کراندار است و با مشاهده نمودار تابع $g(x)=x\sin\frac{\pi}{x}$ (شکل (۱) را مشاهده کنید) که بین دو تابع $y=x$ و $y=-x$ فشرده شده است. معلوم می‌شود که $\lim\limits_{x\to ۰} x\sin\frac{\pi}{x}=۰$.

و از این ایده می‌توان قضیه زیر را بیان کرد، که در محاسبه حد بعضی از توابع به‌کار می‌رود.

قضیه ۳ : اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=۰$ و تابع g در یک همسایگی محذوف a کراندار باشد. آنگاه

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x)=۰$$

مثال : بنابر قضیه (۳) داریم :

$$۱)\ \lim_{x\to ۱}(x-۱)^۲\sin\frac{۱}{x-۱}=۰$$

زیرا : $\lim\limits_{x\to ۱}(x-۱)^۲=۰$ و $-۱\le \sin\frac{۱}{x-۱}\le ۱$ یعنی تابع $g(x)=\sin\frac{۱}{x-۱}$ کراندار است.

$$۲)\ \lim_{x\to ۰} x^۲[x]=۰$$

زیرا : $\lim\limits_{x\to ۰} x^۲=۰$ و تابع $g(x)=[x]$ در یک همسایگی محذوف صفر و به شعاع مثلاً $r=۱$ کراندار است.

اثبات قضیه (۳) : طبق تعریف حد به ازای هر دنباله $\{a_n\}$ که همگرا به a باشد و $a_n\ne a$ داریم $\lim\limits_{n\to +\infty} f(a_n)=۰$ و برای تابع g که در یک همسایگی محذوف a کراندار است عدد مثبتی مانند M وجود دارد که $|g(a_n)|\le M$ پس طبق قضیه فشردگی نتیجه می‌شود که دنباله $\{f(a_n)\,g(a_n)\}$ همگرا به صفر است. بنابراین $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)=۰$

تمرین در کلاس

۱ــ نشان دهید که اگر $\lim\limits_{x\to a}|f(x)|=۰$ ، آنگاه $\lim\limits_{x\to a} f(x)=۰$

۲ــ اگر به ازای هر $x\ne ۰$ داشته باشیم $۳-x^۲\le f(x)\le ۳+x^۲$، مطلوب است $\lim\limits_{x\to ۰} f(x)$

۳ــ تابع دیریکله با ضابطه $D(x)=\begin{cases}۱ & \text{گویا } x\text{،}\\ ۰ & \text{اصم } x\text{،}\end{cases}$ داده شده است. ثابت کنید $\lim\limits_{x\to ۰} xD(x)=۰$

یادداشت

در حالت کلی قاعده زیر درست است که در بخش پیوستگی تابع مرکب توضیح داده می‌شود.

قاعده ریشه‌گیری : $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a}f(x)}$ که در اینجا n عددی است طبیعی (اگر n زوج باشد، فرض می‌کنیم $\lim\limits_{x\to a}f(x)=L\geq 0$)

مثال: طبق قاعده ریشه‌گیری داریم :

$$1)\ \lim_{x\to 3}\sqrt{\frac{x-2}{3x^2-2}}=\sqrt{\frac{1}{25}}=\frac{1}{5}$$

$$2)\ \lim_{x\to 5}\sqrt[3]{\frac{x-6}{x^2+2}}=\sqrt[3]{\frac{-1}{27}}=\frac{-1}{3}$$

تمرین در کلاس

مقدار $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt[4]{\frac{x+15}{2x^2-1}}$ را به‌دست آورید.

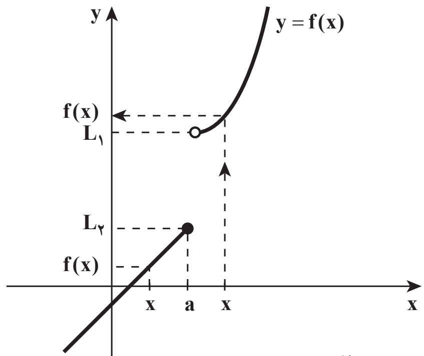
۲ـ ۸ ـ حدهای یک‌طرفه

همان‌طورکه بعد از تعریف حد بیان شد، حد تابع یکتاست، یعنی اگر $\lim\limits_{x\to a}f(x)=L_1$ و $\lim\limits_{x\to a}f(x)=L_2$ آنگاه $L_1=L_2$

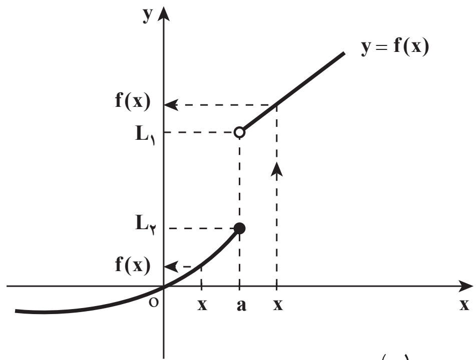
با وجود این که تابعی مانند f فقط می‌تواند یک حد در نقطهٔ مفروض داشته باشد، گاهی لازم است بتوانیم رفتار توابعی را وقتی x با مقدارهای بزرگتر از a به a میل می‌کند و یا وقتی که x با مقدارهای کوچکتر از a به a میل می‌کند، توصیف کنیم.

همچنین ممکن است $f(x)$، با نزدیک شدن x به a از دوجهت راست و چپ به دو مقدار متفاوت میل کند. (الف، ب در شکل زیر) و یا اینکه تابع به ازای xهای کوچکتر از a و یا بزرگتراز a، تعریف نشده باشد (پ، ت در شکل زیر).

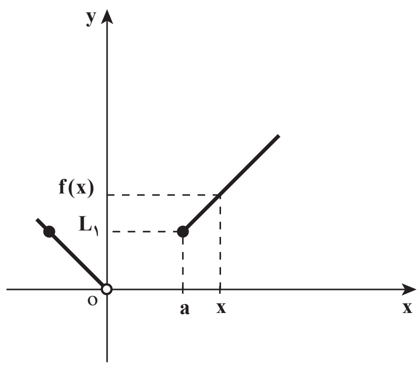
در حالتی که x با مقادیر بزرگتر از a (از سمت راست) به a میل کند حد $f(x)$ را، حد راست $f(x)$ و حد $f(x)$، وقتی x با مقادیر کوچکتر از a (از سمت چپ) به a میل کند حد چپ $f(x)$ نامیده می‌شود و حد راست تابع $y=f(x)$ در نقطه a را با نماد $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ و حد چپ تابع $y=f(x)$ در نقطه a را با نماد $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)$ نشان می‌دهیم.



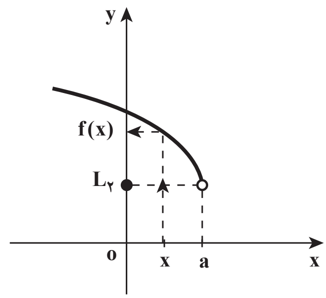
(الف)



(ب)



(پ)



(ت)

با این توضیح‌ها دو تعریف زیر را بیان می‌کنیم. همچنین در حد راست تابع f در نقطه a فرض بر این است که تابع در یک همسایگی راست a تعریف‌شده و برای حد چپ لازم است تابع در یک همسایگی چپ a تعریف شده باشد.

تعریف: گوییم تابع $y=f(x)$ در نقطه a دارای حد راست L است و می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=L$، هرگاه به ازای هر دنباله از عضوهای دامنه f مانند $\{a_n\}$ که به a همگراست و $a_n>a$ داشته باشیم: $\lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n)=L$

مثال: تابع $f(x)=\begin{cases}2x-1\,, & x\le 1\\ x^2+1\,, & x>1\end{cases}$ را درنظر بگیرید. به کمک تعریف حد راست ثابت کنید $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=2$.

حل: فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ای دلخواه و همگرا به ۱ باشد $(a_n \neq 1)$ که مقادیر آن همگی از ۱ بزرگتر باشند آنگاه :

$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = \lim_{n\to+\infty} (a_n^2 + 1) = 1 + 1 = 2$$

پس طبق تعریف $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 2$

تمرین در کلاس

به کمک تعریف حد راست ثابت کنید : $\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$

تعریف: گوییم تابع $y = f(x)$ در نقطه a دارای حد چپ L است و می‌نویسیم $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$ ، هرگاه به ازای هر دنباله از عضوهای دامنه f مانند $\{a_n\}$ که به a همگرااست و $a_n < a$ داشته باشیم : $\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = L$

مثال: تابع $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x \leq 1 \\ x^2 + 1, & x > 1 \end{cases}$ را درنظر گرفته و $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ را به کمک تعریف حد چپ به‌دست آورید.

حل: فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ای دلخواه و همگرا به ۱ باشد $(a_n \neq 1)$ که مقادیر آن همگی از ۱ کوچکتر باشند آنگاه :

$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = \lim_{n\to+\infty} (2a_n - 1) = 2 - 1 = 1$$

پس طبق تعریف $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1$

تمرین در کلاس

به کمک تعریف ثابت کنید که اگر $\lim_{x\to a^+} f(x)$ و $\lim_{x\to a^-} f(x)$ موجود و مساوی عدد حقیقی L باشند آنگاه $\lim_{x\to a} f(x)$ موجود و مساوی L است.

نکته: کلیه قضایایی که در این بخش بررسی شدند، با تغییرات جزئی و بدیهی در مورد حدهای یک‌طرفه نیز برقرار هستند.

مثال: ثابت کنید : $\lim_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right]=1$ ، که در آن، $\left[\frac{1}{x}\right]$ جزءِ صحیح $\frac{1}{x}$ است.

حل: می‌دانیم به ازای هر عدد حقیقی S، $S-1<[S]\le S$ و با انتخاب $S=\frac{1}{x}\,,\ x\neq 0$ داریم :

$$\frac{1}{x}-1<\left[\frac{1}{x}\right]\le\frac{1}{x} \qquad (1)$$

رابطه (۱) را برای دو حالت زیر درنظر می‌گیریم.

۱) طرفین نامساوی‌های (۱) را در $x>0$ ضرب می کنیم.

$$1-x<x\left[\frac{1}{x}\right]\le 1$$

چون $\lim_{x\to 0^+} 1=1$ و $\lim_{x\to 0^+}(1-x)=1$ ، بنابر قضیه فشردگی داریم : $\lim_{x\to 0^+} x\left[\frac{1}{x}\right]=1$

۲) طرفین نامساوی‌های (۱) را در $x<0$ ضرب می‌کنیم.

$$1\le x\left[\frac{1}{x}\right]<1-x$$

چون $\lim_{x\to 0^-} 1=1$ و $\lim_{x\to 0^-}(1-x)=1$ ، بنابراین طبق قضیه فشردگی داریم :

$$\lim_{x\to 0^-} x\left[\frac{1}{x}\right]=1$$

در نتیجه $\lim_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right]=1$

تمرین در کلاس

نشان دهید : $\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$ موجود نیست.

یادآوری : در حسابان دیده‌اید که اگر x برحسب رادیان باشد نامساوی‌های زیر به ازای xهایی که $0<|x|<\frac{\pi}{2}$ ، برقرارند

$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1 \qquad (1)$$

نتیجه : نامساوی $|\sin x|\le|x|$ به ازای هر x (برحسب رادیان) برقرار است.

برهان: نامساوی بـه ازای $x=0$ می‌شود $0\le 0$ که این هم درست است و به ازای $0<|x|<\frac{\pi}{2}$ ،

نامساوی به‌خاطر (۱) برقرار می‌باشد و نامساوی به ازای $|x| \geq \frac{\pi}{۲}$ نیز واضح است که برقرار است زیرا $|\sin x| \leq ۱$

مثال: به کمک تعریف حد ثابت کنید :

اگر a یک عدد حقیقی باشد، آنگاه $\lim_{x \to a} \sin x = \sin a$

اثبات: دنباله دلخواه $\{a_n\}$ که همگرا به a است و برای هر عدد طبیعی n ، $a_n \neq a$ را درنظر بگیرید، در این‌صورت

$$|\sin a_n - \sin a| = ۲\left|\sin\frac{a_n - a}{۲}\cos\frac{a_n - a}{۲}\right| \leq ۲\left|\sin\frac{a_n - a}{۲}\right| \leq |a_n - a|$$

بنابراین $\lim_{n \to +\infty} \sin a_n = \sin a$

در نتیجه طبق تعریف حد، $\lim_{x \to a} \sin x = \sin a$

تمرین در کلاس

۱ــ ثابت کنید : $\lim_{x \to a} \cos x = \cos a$

۲ــ ثابت کنید : الف) $\lim_{x \to a} \tan x = \tan a$ ، $a \neq k\pi + \frac{\pi}{۲}$

ب) $\lim_{x \to a} \cot x = \cot a$ ، $a \neq k\pi$ (k عدد صحیح است)

۲ـ۹ـ محاسبه یک حد مهم

در بخش قبل با جدول و نمودار به‌صورت شهودی نتیجه گرفتیم که $\lim_{x \to ۰} \frac{\sin x}{x} = ۱$ (x برحسب رادیان)

اکنون به کمک قضیه فشردگی درستی تساوی $\lim_{x \to ۰} \frac{\sin x}{x} = ۱$ را ثابت می‌کنیم.

اثبات: می‌دانیم $\lim_{x \to ۰} \cos x = \cos ۰ = ۱$ و برای هر x که $۰ < |x| < \frac{\pi}{۲}$ ، $\cos x < \frac{\sin x}{x} < ۱$

و یا

$$۰ < ۱ - \frac{\sin x}{x} < ۱ - \cos x$$

از طرفی $\lim_{x \to ۰} ۰ = ۰$ و $\lim_{x \to ۰} (۱ - \cos x) = ۱ - ۱ = ۰$ پس بنابر قضیه فشردگی داریم :

$$\lim_{x \to ۰} \left(۱ - \frac{\sin x}{x}\right) = ۰$$

در نتیجه : $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

مثال: حد تابع $f(x)=\frac{\sin ax}{bx}$ را وقتی $x\to 0$ بیابید. $(a,b\neq 0)$

حل:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{bx}=\lim_{x\to 0}\frac{a}{b}\times\frac{\sin ax}{ax}=\frac{a}{b}\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax}=\frac{a}{b}\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}$$

زیرا، وقتی $x\to 0$، $t=ax\to 0$ و امّا $\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$

در نتیجه

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{bx}=\frac{a}{b}$$

مثال: حد تابع $f(x)=\frac{\sin(\sin x)}{x}$ را وقتی $x\to 0$ بیابید.

حل: می‌دانیم $\lim_{x\to 0}\sin x=0$ که در این تساوی $x\neq 0$ و $\sin x\neq 0$ بنابراین

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)}{\sin x}\times\frac{\sin x}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\times\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

زیرا اگر $x\to 0$ داریم $t=\sin x\to 0$

تمرین در کلاس

مقدار $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{3x}$ را حساب کنید.

روش‌های محاسبهٔ بعضی از حدود : اگر $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=0$ آن وقت برای محاسبه $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ نمی‌توان از قضیه حد خارج‌قسمت استفاده کرد.

بلکه باید تابع $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ را از طریق حذف عامل مخالف صفر مشترک در صورت و مخرج کسر (با عمل تجزیه و گویا کردن صورت یا مخرج کسر) با تابعی ساده‌تر مانند $y=h(x)$ که حدشان برابر است، عوض کرد. این کار به این دلیل درست است که به ازای $x\neq a$ ، $\frac{f}{g}(x)=h(x)$ و در حالت کلی نتیجهٔ زیر درست است.

اگر $x \neq a$, $\frac{f}{g}(x) = h(x)$ ، در این صورت $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} h(x)$ به شرط آنکه حدها وجود داشته باشند.

مثال: $\lim\limits_{x \to -۲} \frac{۲x^۲ + ۵x + ۲}{x + ۲}$ را بیابید.

حل: چون $\lim\limits_{x \to -۲} (۲x^۲ + ۵x + ۲) = \lim\limits_{x \to -۲} (x + ۲) = ۰$ بنابراین به ازای $x \neq -۲$ و یا $x + ۲ \neq ۰$ داریم:

$$\frac{۲x^۲ + ۵x + ۲}{x + ۲} = \frac{\cancel{(x + ۲)}(۲x + ۱)}{\cancel{(x + ۲)}} = ۲x + ۱$$

در نتیجه

$$\lim\limits_{x \to -۲} \frac{۲x^۲ + ۵x + ۲}{x + ۲} = \lim\limits_{x \to -۲} (۲x + ۱) = -۴ + ۱ = -۳$$

تمرین در کلاس

مطلوب است محاسبه $\lim\limits_{x \to ۱} \frac{x^۳ - ۱}{x^۲ - ۱}$

مثال: مقدار $\lim\limits_{x \to ۰} \frac{x^۲}{\sqrt{x^۲ + ۹} - ۳}$ را بیابید.

حل: اگر x به صفر میل کند، صورت و مخرج کسر به صفر میل می‌کنند بنابراین به ازای $x \neq ۰$ داریم:

$$\frac{x^۲}{\sqrt{x^۲ + ۹} - ۳} = \frac{x^۲(\sqrt{x^۲ + ۹} + ۳)}{(\sqrt{x^۲ + ۹} - ۳)(\sqrt{x^۲ + ۹} + ۳)} = \frac{x^۲(\sqrt{x^۲ + ۹} + ۳)}{x^۲ + ۹ - ۹} = ۳ + \sqrt{x^۲ + ۹}$$

در نتیجه

$$\lim\limits_{x \to ۰} \frac{x^۲}{\sqrt{x^۲ + ۹} - ۳} = \lim\limits_{x \to ۰} (۳ + \sqrt{x^۲ + ۹}) = ۳ + \sqrt{۹} = ۶$$

تمرین در کلاس

مقدار $\lim\limits_{x \to ۱} \frac{x^۲ - ۱}{\sqrt[۳]{x} - ۱}$ را بیابید.

مثال: مقدار $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{1+\cos^3 x}{\sin^2 x}$ را بیابید.

حل: وقتی x به π میل کند، صورت و مخرج کسر به صفر میل می‌کنند پس به ازای $x \neq \pi$ (حد را در یک همسایگی محذوف π حساب می‌کنیم)

$$\frac{1+\cos^3 x}{\sin^2 x} = \frac{(1+\cancel{\cos x})(1-\cos x+\cos^2 x)}{(1+\cancel{\cos x})(1-\cos x)} = \frac{1-\cos x+\cos^2 x}{1-\cos x}$$

عامل $(1+\cos x) \neq 0$ از صورت و مخرج ساده شده است زیرا $x \neq \pi$ است.

در نتیجه
$$\lim_{x \to \pi} \frac{1+\cos^3 x}{\sin^2 x} = \lim_{x \to \pi} \frac{1-\cos x+\cos^2 x}{1-\cos x} = \frac{1+1+1}{1-(-1)} = \frac{3}{2}$$

تمرین در کلاس

مقدار $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\sin x}{\cos^2 x}$ را محاسبه کنید.

مسائل

۱ــ به کمک تعریف دنباله‌ای حد، ثابت کنید

الف) $\lim\limits_{x \to 2} x^3 = 8$

ب) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2-9}{x-3} = 6$

پ) $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt{x-1} = 0$

ت) $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a} \quad , \quad a \geq 0$

ث) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^+} x^2 [x] = 0$

۲ــ الف) دو تابع به نام‌های f و g مثال بزنید که $\lim\limits_{x \to a} (f(x)+g(x))$ وجود داشته باشد، ولی نه $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ وجود داشته باشد نه $\lim\limits_{x \to a} g(x)$

ب) دو تابع به نام‌های f و g مثال بزنید که $\lim\limits_{x \to a} f(x)g(x)$ وجود داشته باشد، ولی نه $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ وجود داشته باشد، نه $\lim\limits_{x \to a} g(x)$

۳ــ با استفاده از قضایای حد، حدهای زیر را در صورت وجود حساب کنید :

الف) $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{(x+۳)^۲-۹}{x}$ ب) $\lim\limits_{x\to ۴}\dfrac{x-۴}{\sqrt{x}-۲}$

پ) $\lim\limits_{x\to ۰}\tan x\cot x$ ت) $\lim\limits_{x\to ۰^-}(۱-x+[x]-[۲x])$

۴ــ آیا عددی مانند a وجود دارد که مقدار $\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{x+۱-\sqrt{۴x+۱}}{۲x^۲+ax-۴}$ ، عددی مخالف صفر باشد؟ مقدار a و مقدار این حد را پیدا کنید.

۵ــ عددهای a و b را چنان انتخاب کنید که $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{\sqrt{ax+b}-۲}{x}=۱$

۶ــ $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{|۳x-۱|-|۳x+۱|}{x}$ را حساب کنید.

۷ــ $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{۱}{x}(۱-x\left[\dfrac{۱}{x}\right])$ را حساب کنید.

۸ ــ $\lim\limits_{x\to ۰}(\dfrac{۳x-۴}{x^۲-۲x}-\dfrac{x+۲}{x^۲+x})$ را حساب کنید.

۹ــ مقدار $\lim\limits_{x\to ۰^+}\sin ۴x(\cot ۲x-\cot x)$ را بیابید.

۱۰ــ مقدار $\lim\limits_{x\to \frac{۱}{۲}^+}\dfrac{|\cos \pi x|}{۱-\sqrt{۲x}}$ را بیابید.

۱۱ــ تابع $f(x)=\left[\dfrac{۴x^۲+۳}{x^۲+۱}\right]$ در چند نقطه دارای حد است؟ (چرا؟)

۱۲ــ حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{۱-\cos x}{x^۲}$ ب) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۴}}\dfrac{۱-\tan x}{\sin x-\cos x}$

پ) $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{\cos ۳x-\cos x}{x^۲}$ ت) $\lim\limits_{x\to ۴}(۲-\sqrt{x})\tan\dfrac{\pi x}{۸}$

۱۳ــ با استفاده از قضیه فشردگی مقدار $\lim\limits_{x\to ۰}x^۲\cos\dfrac{۱}{x}$ را بیابید (می‌توانید راه حل ساده‌تری برای این مسأله، ارائه دهید؟)

۱۴ــ با فرض اینکه $f(x)=\left[x+\dfrac{۱}{۳}\right]+[۳x]$ ، دنباله $\left\{f(\dfrac{۱}{۳}+\dfrac{۱}{n})\right\}$ به چه عددی همگراست؟

۱۵ــ به کمک تعریف دنباله‌ای حد، ثابت کنید تابع‌های زیر در نقطهٔ داده شده، حدشان موجود نیست.

الف) $f(x)=\frac{|x-۱|}{x-۱}$ در نقطهٔ $x=۱$ ب) $g(x)=\cos\frac{۱}{x-۱}$ در نقطهٔ $x=۱$

۱۶ــ به کمک تعریف دنباله‌ای حد، ثابت کنید، تابع زیر (تابع دیریکله) در هیچ نقطه‌ای دارای حد نیست.

$$D(x)=\begin{cases}۰ & \text{گویا، } x\\ ۱ & \text{گنگ، } x\end{cases}$$

۱۷ــ به کمک تعریف دنباله‌ای حد، نشان دهید تابع زیر در نقطهٔ $x=\frac{۱}{۲}$، دارای حد است و مقدار حد را مشخص کنید.

$$f(x)=\begin{cases}x+۲ & \text{گویا، } x\\ ۳x+۱ & \text{گنگ، } x\end{cases}$$

۲ـ ۱۰ ـ پیوستگی تابع

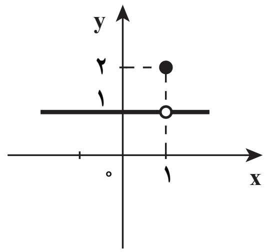
مقدمه : یک شیء، متحرک فیزیکی که در حال حرکت است، نمی‌تواند در یک‌جا ناپدید شده و دوباره درجایی دیگر ظاهر شود. لذا ما مسیر متحرک را یک خط راست یا یک منحنی یکپارچهٔ بدون سوراخ (حفره) و بدون هیچ بریدگی یا جهشی می‌بینیم. این چنین خط راست یا منحنی‌هایی را «پیوسته» می‌گوییم. در این بخش، می‌خواهیم این مفهوم شهودی را به‌صورت ریاضی بیان کرده و چند خاصیت نمودارها و منحنی‌های پیوسته را توصیف کنیم.

اوّلین ایده‌ای که از کلمه پیوستگی به ذهن شما می‌رسد چیست؟

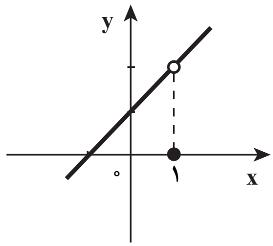
«**مسلسل**»، «**به‌هم چسبیده**»، «**بدون بریدگی**» : همهٔ اینها از کلمه پیوستگی به ذهن می‌رسد و به‌طور کلی تصور ذهنی ما از نمودار یک تابع پیوسته، یک خط راست یا یک منحنی صاف و هموار در صفحه مختصات است، اگرچه تابع‌هایی وجود دارد که در یک یا چند نقطه و یا در دامنه‌اش پیوسته‌اند ولی اطلاق کلمهٔ پیوسته به آنها دور از ذهن به‌نظر می‌رسد (مثالی ارائه می‌شود) و در این بخش خواهیم دید، توابع پیوسته آن‌گونه که احساس و درک شهودی اوّلیهٔ ما بیانگر آن است، خیلی هم ساده نیستند، درواقع خیلی از توابع پیوسته هموار نیستند.

فعالیت

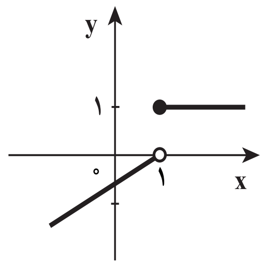
در شکل زیر رفتار توابع f_1 و f_2 و f_3 و f_4 را در حوالی نقطه $x = ۱$ بررسی کنید.
(مقدار تابع و حد تابع را در صورت وجود به‌دست آورید)



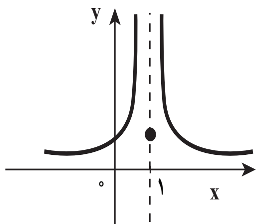
(الف)



(ب)



(پ)



(ت)

الف) $f_1(x) = \begin{cases} \dfrac{x-۱}{x-۱} & , \quad x \neq ۱ \\ ۲ & , \quad x = ۱ \end{cases}$

ب) $f_2(x) = \begin{cases} \dfrac{x^۲-۱}{x-۱} & , \quad x \neq ۱ \\ ۰ & , \quad x = ۱ \end{cases}$

پ) $f_3(x) = \begin{cases} ۱ & , \quad x \geq ۱ \\ x-۱ & , \quad x < ۱ \end{cases}$

ت) $f_4(x) = \begin{cases} \dfrac{۱}{(x-۱)^۲} & , \quad x \neq ۱ \\ ۱ & , \quad x = ۱ \end{cases}$

در فعالیت بالا دیدیم که رابطه $\lim\limits_{x \to ۱} f_n(x) = f(۱)$ ، $(n = ۱,۲,۳,۴)$ در توابع داده شده برقرار نیست و به‌طور شهودی ملاحظه می‌شود که این توابع در نقطهٔ $x = ۱$ دارای بریدگی و یا پرش هستند و می‌گوییم این توابع در نقطه $x = ۱$ ناپیوسته‌اند. در سایر نقاط وضعیت چگونه است؟

معلوم است که در هر نقطه به طول $x \neq ۱$ نمودار تابع‌های بالا بریدگی و یا پرشی ندارند که در این حالت، گوییم در نقاط $x \neq ۱$ پیوسته‌اند. به زبان نمادی گوییم تابع f در نقطه $x = a$ پیوسته است هرگاه

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$ این امور ما را به تعریف زیر می‌رساند.

تعریف ۱: فرض کنیدتابع f در نقطهٔ a و در یک همسایگی چپ یا راست (یا هر دو) تعریف‌شده باشد. در این صورت می‌گوییم تابع f در نقطهٔ a پیوسته است هرگاه شرایط زیر برقرار باشد:

الف) $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ وجود داشته باشد.

ب) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$

تبصره ۱: البته شرط «ب» نیز به تنهایی پیوستگی تابع f را در a بیان می‌کند،

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$$

چرا که سخن از این عبارت متضمن وجود $f(a)$، وجود حد و تساوی مقدار حد با $f(a)$ است.

تبصره ۲: اگر تابع f در نقطه a عضو دامنه‌اش پیوسته نباشد، گوییم f در a ناپیوسته است.

مثال: آیا مقداری برای m یافت می‌شود که تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x} & , \ x\neq 0\\ m & , \ x=0\end{cases}$ در $x=0$ پیوسته باشد؟

حل: می‌دانیم $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|x|}{x}=1$ و $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|x|}{x}=-1$، درنتیجه $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$ وجود ندارد. لذا m را هر عددی که بگیریم، شرط (ب) در تعریف پیوستگی برقرار نیست و نمی‌توان تابع f را در $x=0$ پیوسته کرد.

تمرین در کلاس

پیوستگی تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & , \ x\neq 1\\ 4 & , \ x=1\end{cases}$ را در $x=1$ بررسی کنید.

پیوستگی تابع در هر نقطه از دامنه آن: دامنه اکثر توابعی که با آنها سروکار داریم یا بازه هستند یا اجتماع تعدادی بازهٔ جدا از هم، نقطه c متعلق به دامنه را یک **نقطه درونی** دامنه می‌نامیم هرگاه این نقطه به بازهٔ بازی واقع در دامنه تعلق داشته باشد. مثلاً دامنه تابع $f(x)=\sqrt{1-x^2}$

بازه بسته $[-۱,۱]$ است که از نقاط درونی $(-۱,۱)$ و نقطه انتهایی چپ -۱ و نقطه انتهایی راست ۱ تشکیل شده است. بنابراین می‌گوییم تابع f در نقطه درونی c متعلق به دامنه‌اش پیوسته است هرگاه

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$$

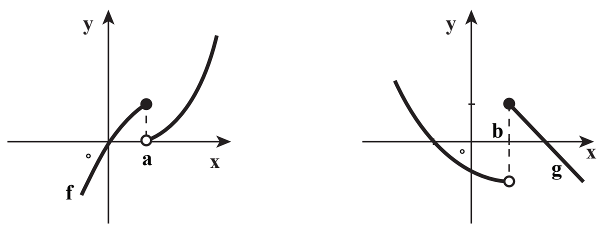
مثال: نشان دهید تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x} & , \quad x\neq ۰\\ ۱ & , \quad x=۰\end{cases}$ در نقطه $x = ۰$ پیوسته است.

حل: $x = ۰$ نقطه درونی دامنه f است و $\lim_{x\to ۰} f(x) = f(۰) = ۱$ پس تابع f در $x = ۰$ پیوسته است.

تمرین در کلاس

نشان دهید تابع $f(x)=\sqrt{۴-x^۲}$ در نقطهٔ $x = ۱$ پیوسته است.

پیوستگی راست و چپ : ممکن است یک تابع در یک نقطه از دامنه‌اش پیوسته نباشد (شکل زیر را ببینید)



(الف) (ب)

در قسمت (الف) $\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$ ، در این حالت می‌گوییم تابع f در $x = a$ پیوستگی چپ دارد و در قسمت (ب) $\lim_{x\to b^+} f(x) = f(b)$ که می‌گوییم تابع f در $x = b$ پیوستگی راست دارد، بنابراین تعریف زیر را بیان می‌کنیم.

تعریف ۲: می‌گوییم f در c از راست پیوسته است هرگاه $\lim_{x\to c^+} f(x) = f(c)$

می‌گوییم f در c از چپ پیوسته است هرگاه $\lim_{x\to c^-} f(x) = f(c)$

مثال: تابع $f(x)=[x]$ در هر عدد صحیح n از راست پیوسته است امّا از چپ ناپیوسته است.

زیرا :

$$\lim_{x\to n^+} f(x)=\lim_{x\to n^+}[x]=n=f(n)$$

امّا

$$\lim_{x\to n^-} f(x)=\lim_{x\to n^-}[x]=n-۱\neq f(n)$$

تمرین در کلاس

پیوستگی تابع $f(x)=[\sin x]$ را در نقطه $x=\pi$ بررسی کنید. (پیوستگی راست و چپ)

تعریف: **پیوستگی درنقاط انتهایی**

۱) اگر c یک نقطهٔ انتهایی چپ دامنه f باشد، می‌گوییم f در c پیوسته است هرگاه در c از راست پیوسته باشد.

۲) اگر c یک نقطهٔ انتهایی راست دامنه f باشد می‌گوییم f در c پیوسته است هرگاه در c از چپ پیوسته باشد.

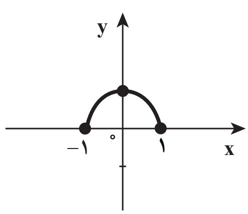
برای درک بهتر این تعریف به مثال زیر توجه کنید.

مثال: دامنه تابع $f(x)=\sqrt{۱-x^۲}$ بازهٔ $[-۱,۱]$ است، f در نقطهٔ انتهایی راست دامنه خود یعنی ۱ پیوسته است زیرا در آنجا از چپ پیوسته است، زیرا به این سبب که $\lim_{x\to ۱^-} f(x)=f(۱)=۰$ و f در نقطهٔ انتهایی چپ دامنه خود یعنی ۱− پیوسته است زیرا در آنجا از راست پیوسته است :

$$\lim_{x\to(-۱)^+} f(x)=f(-۱)=۰$$

البته f در هر نقطه درونی دامنه‌اش $(-۱<x<۱)$ نیز پیوسته است یعنی اگر $-۱<c<۱$ آنگاه $\lim_{x\to c} f(x)=\sqrt{۱-c^۲}=f(c)$ (شکل زیر نمودار f است)

پرسش : آیا تابع f در هر نقطه از دامنه‌اش پیوسته است؟



نمودار f

تمرین در کلاس

پیوستگی تابع $f(x)=x-\sqrt{۴-x^۲}$ را در نقاط انتهایی دامنه آن بررسی کنید.

پیوستگی روی بازه : می‌گوییم تابع f روی بازهٔ I پیوسته است هرگاه f در هر نقطهٔ I پیوسته باشد به‌ویژه می‌گوییم f تابعی پیوسته است هرگاه f در هر نقطهٔ دامنه‌اش پیوسته باشد.

مثال: پیوستگی تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را در دامنه‌اش یعنی $[۰,+\infty)$ بررسی کنید.

حل: تابع f در نقطهٔ انتهایی چپ دامنه‌اش یعنی ۰ پیوسته است زیرا در آنجا از راست پیوسته است $(\lim\limits_{x\to ۰^+}\sqrt{x}=f(۰))$ همچنین f در هر نقطهٔ $c>۰$ پیوسته است زیرا $\lim\limits_{x\to c}\sqrt{x}=\sqrt{c}$

تمرین در کلاس

پیوستگی تابع $f(x)=\dfrac{۱}{\sqrt{x-۱}}$ را در دامنه‌اش بررسی کنید.

۲ـ۱ـ۱ـ مفهوم پیوستگی تابع f در یک نقطه براساس همگرایی دنباله‌ها

تابع f را در نقطهٔ x=a عضو دامنه‌اش پیوسته می‌نامیم، به شرطی که

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a) \qquad (۱)$$

البته برقراری رابطه (۱) به‌طور ضمنی دو ویژگی زیر را لازم دارد.

۱ــ $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ وجود داشته باشد.

۲ــ $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$

با این توضیح و تعریف حد تابع بر اساس همگرایی دنباله‌ها، می‌توان تعریف دیگری از پیوستگی تابع در یک نقطه را براساس همگرایی دنباله‌ها بیان کرد.

تعریف ۳: فرض کنیم D دامنه تابع f زیر مجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ باشد، $a\in D$ تابع $f: D\to\mathbb{R}$ در نقطهٔ a پیوسته است، هرگاه به ازای هر دنباله از نقاط D مانند $\{a_n\}$ که به a همگراست، دنبالهٔ $\{f(a_n)\}$ به $f(a)$ همگرا باشد.

محتوی این تعریف این است که پیوستگی تابع در یک نقطه هم ارز این است که با دقیق‌تر کردن ورودی، می‌توان به خروجی‌های دلخواه دقیق دست یافت.

به کمک تعریف پیوستگی تابع در یک نقطه براساس همگرایی دنباله‌ها می‌توان پیوستگی مجموع، حاصل‌ضرب و خارج قسمت دو تابع پیوسته را نتیجه گرفت.

قضیه ۱ : فرض کنید D اشتراک دامنه تابع‌های f و g باشد و f و g هر دو در نقطه a پیوسته باشند و c عددی ثابت باشد آنگاه تابع‌های زیر نیز در a پیوسته‌اند.

الف) $f+g$ ب) $f-g$ پ) cf ت) $f.g$ ث) $\frac{f}{g}$ به شرطی که $g(a)\neq ۰$

برهان: همهٔ حکم‌ها به سادگی از حکم‌های مشابه برای محاسبه حد مجموع و حاصل‌ضرب و خارج قسمت در قضیه (۱) نتیجه می‌شوند.

برای نمونه قسمت (ث) را ثابت می‌کنیم.

به ازای هر دنباله دلخواه $\{x_n\}$ از نقاط D که همگرا به a است داریم :

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n)=f(a) \quad \text{و} \quad \lim_{n\to+\infty} g(x_n)=g(a)$$

بنابراین

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)}=\frac{f(a)}{g(a)}\text{، } g(a)\neq ۰$$

پس طبق تعریف (۳) تابع $\frac{f}{g}$ در نقطهٔ a پیوسته است.

نکته: عکس این قضیه همواره درست نیست.

مثال: تابع‌های $f(x)=\begin{cases} ۱ & x \text{ گویا،} \\ ۰ & x \text{ گنگ،} \end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases} ۰ & x \text{ گویا،} \\ ۱ & x \text{ گنگ،} \end{cases}$ در $x=۰$ حد ندارند و بنابراین در $x=۰$ پیوسته نیستند. امّا برای هر $x\in R$، $(f.g)(x)=۰$

و این تابع ثابت در هر نقطه‌اش، حد آن با مقدار تابع در آن نقطه برابر است، پس در تمام نقاط ازجمله $x=0$ پیوسته است.

فعالیت

دو تابع مثال بزنید که هر دو در نقطهٔ a ناپیوسته باشند ولی مجموع آنها در a پیوسته باشد.

تابع‌هایی مانند تابع چند جمله‌ای و یا تابع کسری گویا، در هر نقطه از دامنه، حد تابع با مقدار تابع در آن نقطه برابر است و این خود ایده‌ای است برای بیان قضیه زیر

قضیه ۲ :

الف) هر چند جمله‌ای همه‌جا پیوسته است یعنی روی $\mathbb{R}=(-\infty , +\infty)$ پیوسته است.

ب) هر تابع گویا در هر نقطه از دامنه‌اش پیوسته است.

برهان :

الف) هر چند جمله‌ای تابعی است به شکل

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

که در آن a_0 و a_1 و ... و a_{n-1} و a_n عددهایی ثابت‌اند

می‌دانیم

$$\lim_{x\to c} a_0 = a_0$$

$$\lim_{x\to c} x^m = c^m \quad ، m=1,2,3,\ldots,n$$

این تساوی به‌معنی آن‌است که تابع $f(x)= x^m$ تابعی است پیوسته در نتیجه بنابر قسمت (پ) قضیه (۱) $g(x)=ax^m$ نیز تابعی است پیوسته. چون $P(x)$ مجموع تابع‌هایی پیوسته نظیر $g(x)=ax^m$ و تابعی ثابت است بنابر قسمت الف قضیه (۱) نتیجه می‌شود تابع چند جمله‌ای در $\mathbb{R}$ پیوسته است.

ب) هر تابع گویا تابعی است به شکل $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ که در آن $P(x)$ و $Q(x)$ چند جمله‌ای‌اند و دامنه f مجموعه $D=\{x\in\mathbb{R} \mid Q(x)\neq 0\}$ است.

از طرفی بنابر قسمت الف قضیه (۲)، $P(x)$ و $Q(x)$ در همه‌جا پیوسته‌اند در نتیجه طبق قسمت (ث) قضیه (۱) تابع f در تمام نقاط دامنه‌اش پیوسته است.

مثال: تابع $f(x)=\dfrac{x^3+2x^2-x+1}{x^2-1}$ روی چه بازه‌هایی پیوسته است؟

حل: دامنه f، مجموعهٔ $D=IR-\{-1,+1\}$، بنابراین طبق قضیه (۱) تابع f به‌جز در نقاطی که مخرج آن صفر می‌شود، همه‌جا پیوسته است در نتیجه تابع روی بازه‌های زیر پیوسته است.

$(-\infty,-1)$ و $(-1,1)$ و $(1,+\infty)$

تمرین در کلاس

تابع $f(x)=\dfrac{2}{x-3}+\dfrac{x+1}{x^2+x+1}$ روی چه بازه‌هایی پیوسته است؟

۲ـ۱۲ـ پیوستگی توابع مثلثاتی

در حدهای مثلثاتی ثابت شده است که

$$\lim_{x\to a}\sin x=\sin a \quad \text{و} \quad \lim_{x\to a}\cos x=\cos a$$

بنابراین طبق تعریف پیوستگی تابع در نقطهٔ a تابع‌های $f(x)=\sin x$ و $g(x)=\cos x$ در هر نقطهٔ a پیوسته‌اند در نتیجه تابع $\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ بجز در نقاطی که $\cos x=0$ پیوسته است و تابع $\cot x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$ بجز در نقاطی که $\sin x=0$ پیوسته است.

توضیح: در نقاطی که $\cos x=0$، $x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ $(k\in z)$

و در نقاطی که $\sin x=0$، $x=k\pi$ $(k\in z)$

مثال: فرض کنید $f(x)=\dfrac{\sin^2 x}{1-\cos x}$، $f(0)$ را چنان تعریف کنید که تابع f در $x=0$ پیوسته باشد.

حل:

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{(1-\cos x)}$$

وقتی x به صفر میل می‌کند داریم $(1-\cos x)\neq 0$ پس

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}(1+\cos x)=1+1=2$$

با انتخاب $f(0)=2$ تابع f در صفر پیوسته می‌شود.

تمرین در کلاس

تابع $f(x)=\frac{\tan x}{1+\sin x}$ در چه نقاطی پیوسته است؟

به این ترتیب با اتکا به قضیه (۱) می‌توان با عملیات جبری از تابع‌های پیوسته داده شده، تابع‌های پیوسته جدیدی ساخت و علاوه بر این، روش دیگر، برای تولید تابع‌های پیوسته، ترکیب تابع‌های پیوسته است.

این کار بنابر قضیه زیر میسر است.

قضیه ۳: اگر تابع f در b پیوسته باشد و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=b$ ، آنگاه

$$\lim_{x\to a} f(g(x))=f(b)$$

به عبارت دیگر $\lim\limits_{x\to a} f(g(x))=f(\lim\limits_{x\to a} g(x))$

در حقیقت قضیه (۳) بیانگر آن است که وقتی x به a نزدیک شود، g(x) به b نزدیک می‌شود و چون f در b پیوسته است، وقتی g(x) به b میل می‌کند آن وقت $\lim\limits_{x\to a} f(g(x))=f(b)$

همچنین در این قضیه می‌توان نماد حد را به درون نماد تابع بُرد، به شرطی که تابع پیوسته باشد و حد وجود داشته باشد.

به عبارت دیگر در این قضیه تعویض و جابه‌جا کردن نماد «f» با نماد «lim» مجاز است.

مثال: می‌دانیم تابع f(x)=|x| همه‌جا پیوسته است. و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=b$ بنابراین طبق قضیه (۳) داریم:

$$\lim_{x\to a} f(g(x))=f(\lim_{x\to a} g(x))=f(b)=|b|$$

از قضیه (۳) نتیجه می‌گیریم که ترکیب دو تابع پیوسته، خود تابعی پیوسته است.

و به بیان دقیق‌تر، اگر تابع g در نقطه a و تابع f در g(a) پیوسته باشد، آنگاه تابع fog در نقطه a پیوسته است.

مثال: نشان دهید تابع $y=\sqrt[3]{\frac{x-2}{x^2+x+1}}$ همه‌جا پیوسته است.

حل: مخرج کسر زیر رادیکال همواره مخالف صفر است ($\Delta=1-4<0$) بنابراین تابع گویای $g(x)=\dfrac{x-2}{x^2+x+1}$ همه‌جا پیوسته است.

از طرفی تابع $f(x)=\sqrt[3]{x}$ همواره پیوسته است ($\lim\limits_{x\to a} f(x)=\sqrt[3]{a}$)

پس ترکیب دو تابع پیوسته f و g یعنی تابع $f(g(x))=\sqrt[3]{\dfrac{x-2}{x^2+x+1}}$ همه‌جا پیوسته است.

تمرین در کلاس

تابع $f(x)=\tan\sqrt{x}$ در چه نقاطی ناپیوسته است؟

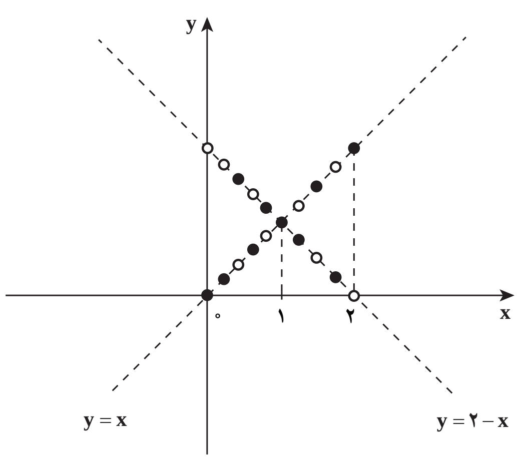
همان‌طور که در مقدمه پیوستگی تابع، گفته شد، تابع‌هایی وجود دارد که در یک یا چند نقطه از دامنه‌شان پیوسته‌اند ولی اطلاق کلمهٔ پیوسته به آنها دور از ذهن به نظر می‌رسد.

مثال: تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{گویا } x، \\ 2-x & \text{گنگ } x، \end{cases}$$

نقاطی از تابع f را تعیین کنید که تابع در آن نقاط پیوسته باشد.

حل: می‌دانید که در هر بازهٔ باز از اعداد حقیقی هم اعداد گویا وجود دارد و هم اعداد گنگ، بنابراین نقاط تابع f یا روی خط y=x (وقتی که x گویا باشد) و یا روی خط y=۲−x (وقتی که x اصم باشد) قرار دارند.



با مشاهده نمودار به صورت نقطه‌چین تابع در شکل روبه‌رو هر چقدر به نقطهٔ (۱و۱) نزدیک‌تر شویم نقطه‌چین‌ها

به هم متراکم‌تر خواهند شد. و به نظر می‌رسد که تابع در $x=1$ حد دارد و برای اثبات درستی حدس خود، از تعریف حد به شرح زیر استفاده می‌کنیم.

فرض کنید $a\in\mathbb{R}$، $\{a_n\}$ دنباله‌ای دلخواه از اعداد حقیقی باشد به‌طوری که $a_n\to a$ و زیر دنبالهٔ $\{b_n\}$ که همهٔ جملات آن از اعداد گویا و زیر دنبالهٔ $\{c_n\}$ که همهٔ جملات آن از اعداد گنگ تشکیل شده است را انتخاب می‌کنیم.

$$f(b_n)=b_n\ ,\ f(c_n)=2-c_n$$

بنابراین

$$\lim_{n\to+\infty} f(b_n)=a\ ,\ \lim_{n\to+\infty} f(c_n)=2-a$$

شرط اینکه $\lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n)$ موجود باشد آن است که $a=2-a$ یا $a=1$ پس $\lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n)=1$ و در نتیجه دنباله $\{f(a_n)\}$ به $f(1)=1$ همگراست و تابع f در نقطهٔ $x=1$ پیوسته است.

توضیح اینکه برای حل مثال بالا از قضیه زیر استفاده شده است.

قضیه: اگر دنباله $\{a_n\}$ همگرا به a باشد، هر زیر دنبالهٔ آن همگرا به a است و بالعکس.

به عنوان مثال دنباله $\{a_n\}$ با ضابطه $a_n=\dfrac{n}{n+1}$ که به ۱ همگراست، هر زیر دنباله آن مانند $\{a_{2n}\}$ و $\{a_{2n-1}\}$ نیز به ۱ همگراست ($\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2n}{2n+1}=1$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2n-1}{2n-1+1}=1$)

تمرین در کلاس

ثابت کنید تابع $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{گویا،}\ x \\ 0 & \text{گنگ،}\ x \end{cases}$ در نقطهٔ $x=0$ پیوسته است.

مسائل

۱ــ نقاط ناپیوستگی تابع f را پیدا کنید.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^۲-۱}{x-۱}, & x>۱\\ x^۲, & x\leq ۱\end{cases}$$

۲ــ تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[۳]{x+۸}-۲}{x}, & x\neq ۰\\ a, & x=۰\end{cases}$ داده شده است. مقدار a را چنان انتخاب کنید که تابع در $x=۰$ پیوسته باشد.

۳ــ به ازای چه مقدار a، تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x}\sqrt{|x|}, & x\neq ۰\\ a, & x=۰\end{cases}$ در $x=۰$ پیوسته است.

۴ــ عددهای a و b را چنان انتخاب کنید که تابع f در نقطه $x=۰$ پیوسته باشد.

$$f(x)=\begin{cases}a+[x] & ,x<۰\\ b & ,x=۰\\ \dfrac{\sin x}{\sqrt{۱-\cos x}} & ,x>۰\end{cases}$$

۵ــ تابع $f(x)=[\frac{x}{۲}]$ در چه نقاطی ناپیوسته است؟

۶ــ نقاط پیوستگی تابع $f(x)=[\sin x]$ را در بازهٔ $[-۲\pi,۲\pi]$ مشخص کنید.

۷ــ اگر تابع f در نقطه‌ای پیوسته باشد، ثابت کنید تابع $|f|$ نیز در آن نقطه پیوسته است. آیا عکس این مطلب نیز درست است؟

۸ــ دو تابع مثال بزنید که هر دو در یک نقطه ناپیوسته باشند ولی مجموع آنها در آن نقطه پیوسته باشد.

۹ــ دو تابع مثال بزنید که هر دو در یک نقطه ناپیوسته باشند ولی ضرب آنها در آن نقطه پیوسته باشد.

۱۰ــ با برهان خلف، ثابت کنید :

اگر تابع f در نقطهٔ a پیوسته و تابع g در نقطهٔ a ناپیوسته باشد آنگاه f+g در a ناپیوسته است.

۱۱ــ با استفاده از قضایای حد و پیوستگی ثابت کنید تابع $f(x) = [x] \sin\pi x$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته است.

۱۲ــ تابع $f(x)=[x^2]$ روی بازه $[2,2+k)$ پیوسته است، بزرگ‌ترین مقدار k را بیابید.

۱۳ــ تابع $f(x)=\begin{cases} 4 & ,x^2=|x| \\ x+2 & ,x^2\neq|x| \end{cases}$ در چند نقطه از دامنه‌اش ناپیوسته است؟

۱۴ــ تابع $f(x)=\dfrac{4-\sqrt{x+3}}{\sqrt[3]{x+1}-1}$ در چند نقطه از دامنه‌اش پیوسته است؟

۱۵ــ نمودار تابع $f(x)=[x]-x+\sin(\frac{\pi}{2}[x])$ را در بازهٔ $[2,5]$ رسم کرده و مشخص کنید، تابع در چند نقطه از این بازه ناپیوسته است.

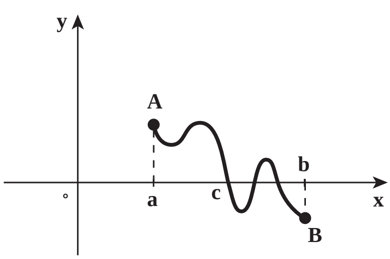
۱۶ــ پیوستگی تابع $f(x)=\begin{cases} x^2 & ,x^2\geq 2|x| \\ 2|x| & ,x^2<2|x| \end{cases}$ را روی $\mathbb{R}$ بررسی کنید.

۱۷ــ عددهای a و b را چنان انتخاب کنید که تابع $f(x)=(x^2-bx+a)\mathrm{sgn}(x^2+x-2)$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته باشد. (sgn تابع علامت است)

۲ــ۱۳ــ ویژگی‌های مهّم تابع‌های پیوسته

بیشتر ویژگی‌های تابع‌های پیوسته ناشی از این خصوصیت شهودی آنها است که نمودار تابع پیوسته بر یک بازه به صورتی ملموس دارای اتصال و یکپارچگی است.

اکنون فرض کنید تابع f بر بازه $[a,b]$ پیوسته باشد. و مقدار آن در a مثبت و مقدار آن در b منفی باشد، باید حداقل، در یک نقطه از این بازه مانند c مقدار صفر را اختیار کند.



چون تابع f بر بازه $[a,b]$ پیوسته است، (هموار و یکپارچه است) ناچار است در گذر از نقطه $A(a,f(a))$ بالای محور x به نقطه $B(b,f(b))$ پایین محور x حداقل در یک‌جا، محور x را قطع کند. (شکل بالا را ببینید)

طبق این ویژگی «اتصال و یکپارچگی» تابع، قضیه زیر را بیان می کنیم.

قضیه۴ : (قضیه بولزانو) اگر تابع f در بازه بستهٔ $[a,b]$ پیوسته و $f(a)f(b)<0$ آنگاه حداقل، یک عدد مانند c در بازهٔ باز (a,b) وجود دارد که $f(c)=0$

مثال : با استفاده از قضیه برلزانو ثابت کنید معادله $x^4+x-3=0$ ریشه‌ای در بازه $(1,2)$ دارد.

حل : تابع $f(x)=x^4+x-3$ را درنظر می گیریم, می‌دانیم که تابع چند جمله f که در هر نقطه از $\mathbb{R}$ یا بازه $(-\infty,+\infty)$ پیوسته است پس در بازه $[1,2]$ نیز پیوسته است از طرفی $f(1)\,f(2)<0$ (چرا؟) بنابراین طبق قضیه بولزانو دست کم یک عدد c در بازه باز $(1,2)$ وجود دارد که $f(c)=0$ یعنی c ریشه معادله $x^4+x-3=0$ است.

تمرین در کلاس

نشان دهید معادله $x-\cos x=0$، ریشه‌ای در بازه $(0,1)$ دارد.

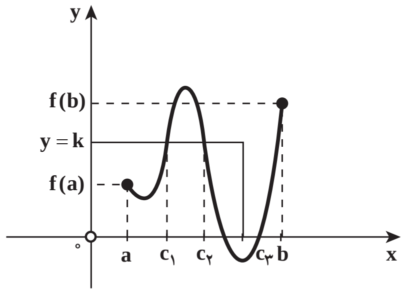
مثال: اگر تابع f در بازه $[a,b]$ پیوسته و k عددی بین $f(a)$ و $f(b)$، $(f(a)<f(b))$ و $g(x)=f(x)-k$. نشان دهید، وجود دارد $c\in(a,b)$ که $g(c)=0$

حل : طبق فرض داریم $g(a)=f(a)-k<0$ و $g(b)=f(b)-k>0$ و تابع g در بازه $[a,b]$ پیوسته است. (چرا؟) پس بنابر قضیه بولزانو وجود دارد $c\in(a,b)$ که $g(c)=0$ و یا $f(c)=k$ ایده مثال فوق قضیهٔ مقدار میانی است که در زیر بیان می‌شود.

قضیه۵ : (قضیهٔ مقدار میانی) : فرض کنید f روی بازهٔ بسته $[a,b]$ پیوسته باشد و k عددی بین $f(a)$ و $f(b)$ باشد، در این صورت حداقل یک عدد مانند c در بازه $[a,b]$ وجود دارد که $f(c)=k$.

قضیه مقدار میانی می گوید که برای تابع پیوسته f، اگر x همهٔ مقادیر بین a و b را بگیرد، $f(x)$ باید همهٔ مقادیر بین $f(a)$ و $f(b)$ را بگیرد. به عنوان مثال ساده‌ای از این قضیه، قد افراد را درنظر بگیریم. فرض کنید قد پسر بچه‌ای در ۱۳ سالگی ۱۵۰ سانتی‌متر و در ۱۴ سالگی ۱۶۵ سانتی‌متر باشد پس به‌ازای هر قد h سانتی‌متر بین ۱۵۰ سانتی‌متر و ۱۶۵ سانتی‌متر باید زمانی چون t باشد که قدش درست h سانتی‌متر بوده است. این امر معقول به نظر می‌رسد زیرا می‌دانیم رشد افراد پیوسته است و قد نمی‌تواند جهشی ناگهانی داشته باشد قضیه مقدار میانی وجود حداقل یک عدد c در بازهٔ بسته

$[a,b]$ را تضمین می‌کند، البته ممکن است بیش از یک عدد مـانند c که $f(c)=k$ وجود داشته باشد (شکل زیر را ببنید)



تعبیر هندسی قضیه مقدار میانی : شکل بالا نشان می‌دهد خط افقی $y=k$ بین خط‌های $y=f(a)$ و $y=f(b)$ می‌باشد. چون نمودار f بدون بریدگی و مانند یک ریسمان به هم پیوستگی و یکپارچگی دارد، برای رفتن از نقطهٔ $(a,f(a))$ به نقطهٔ $(b,f(b))$ باید خط $y=k$ را قطع کند.

و در شکل بالا خط $y=k$ نمودار f را در سه نقطه c_1 و c_2 و c_3 قطع کرده است.

مثال: نشان دهید که خط $y=۲$ نمودار تابع $f(x)=(x-۱)^۲(x-۳)^۲+x$ را قطع می‌کند.

حل: چون تابع چند جمله‌ای f در بازه $(-\infty,+\infty)$ پیوسته است پس f در بازه $[۱,۳]$ نیز پیوسته است. از طرفی $f(۱)=۱$ و $f(۳)=۳$

بنابراین طبق قضیه مقدار میانی خط $y=۲$ که بین خطوط $y=۱$ و $y=۳$ قرار دارد نمودار f را قطع می‌کند.

تمرین در کلاس

آیا تابع $f(x)=\frac{x^۳}{۴}+\sin\pi x+۴$ در بازه $[-۲,۲]$ مقدار ۵ را می‌تواند داشته باشد؟

۲ـ۴ـ۱ پیوستگی تابع وارون یک تابع پیوسته

فرض کنیم $f: D\to \mathbb{R}$ تابع باشد و $B=\{f(x): x\in D\}$ مجموعه مقادیر f باشد (D دامنهٔ f)

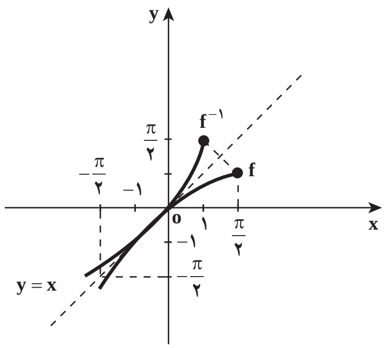
اگر f یک به یک باشد، به ازای هر عضو B مانند y یک و فقط یک x در D وجود دارد که $f(x)=y$

به این ترتیب، تابعی مانند $f^{-۱}: B\to \mathbb{R}$ تعریف می‌شود که $f^{-۱}(y)=x$، تابع $f^{-۱}$ را وارون f

می‌نامیم و دو حکم زیر درست‌اند.

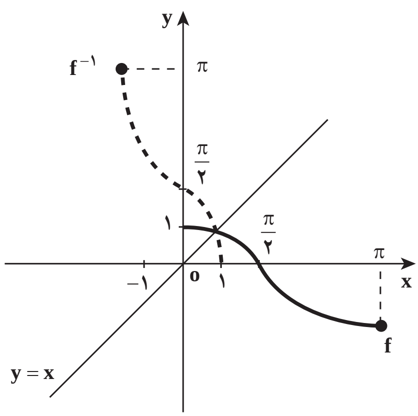
الف) به ازای هر $x\in D$، $f^{-1}(f(x))=x$

ب) به ازای هر $y\in B$، $f(f^{-1}(y))=y$



همان‌طور که در حسابان آموزش داده شده است، به‌خاطر اینکه f^{-1} نقش x و y نسبت به f را عوض می‌کند، نمودار f^{-1} قرینه نمودار f نسبت به خط $y=x$ است (شکل روبه‌رو را ببینید).

در این شکل نمودارهای $f(x)=\sin x$ و $f^{-1}(x)=\sin^{-1}(x)$ که نسبت به خط $y=x$ قرینه‌اند، دیده می‌شوند. تابع f دربازه $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ یک به یک و صعودی است همچنین تابع f^{-1} در بازه $[-1,1]$ یک به یک و صعودی می‌باشد.



و در شکل روبه‌رو نمودارهای $f(x)=\cos x$ و $f^{-1}(x)=\sin^{-1}(x)$ که نسبت به خط $y=x$ قرینه‌اند، دیده می‌شوند.

تابع f در بازه $[0,\pi]$ یک به یک و نزولی است. همچنین تابع f^{-1} در بازه $[-1,1]$ یک به یک و نزولی می‌باشد.

تمرین در کلاس

نمودار و دامنه تابع وارون، توابع زیر را در صفحهٔ مختصات رسم کنید.

الف) $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ ، $f(x)=\tan x$ ب) $0<x<\pi$ ، $g(x)=\cot x$

در مثال‌های بالا مشاهده می‌شود وقتی تابع f یک به یک و پیوسته است، تابع وارون آن نیز یک به یک و پیوسته است و این خود ایده‌ای است برای بیان قضیه زیر که کاربرد مهمّی از قضیه مقدار میانی است.

قضیه ۶: فرض کنید f تابعی یک به یک و پیوسته باشد که دامنه آن بازه بسته D است. اگر f^{-1} با دامنه B، تابع وارون f باشد، آنگاه تابع f^{-1} در هر نقطه از B پیوسته است.

مثال: می‌دانیم وارون تابع $f(x)=x^3$، تابع $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$ است. چون تابع f تابعی است یک به یک پیوسته، پس تابع $y=\sqrt[3]{x}$ نیز یک به یک و پیوسته است.

همچنین تابع $f(x)=\sin x$ با دامنه $D=[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ یک به یک و پیوسته است. پس طبق قضیه (۸) تابع $f^{-1}(x)=\sin^{-1}(x)$ با دامنه $B=[-1,1]$ یک به یک و پیوسته است.

مسائل

۱ـ فرض کنید $f(x)=\begin{cases} x-1 & ,1<x<2 \\ 2x-4 & ,3<x<4 \end{cases}$، تابع f^{-1} در چند نقطه از دامنه‌اش ناپیوسته است، نمودار f^{-1} را رسم کنید.

۲ـ نشان دهید که معادله $x^3-x-1=0$ در بازه $[1,2]$ جواب دارد.

۳ـ نشان دهید معادله $x^5+x^4+2x^3-x+2=0$ در بازه $[-2,0]$ دارای جواب است.

۴ـ ثابت کنید معادلهٔ $\sin x-x^2+x+1=0$ حداقل دو ریشه در بازه $[-\pi,\pi]$ دارد.

۵ـ ثابت کنید که اگر $P(x)$ یک چند جمله‌ای از درجهٔ فرد باشد، آنگاه معادله $P(x)=0$ حداقل دارای یک ریشه حقیقی است.

۲ـ۱۵ـ حدهای نامتناهی (حد بی‌نهایت)

می‌دانید در عبارت $\lim_{x\to a} f(x)=L$ (۱)

L عددی است حقیقی و چنین حدهایی را اصطلاحاً حدود متناهی نیز می‌نامند.

اکنون عبارت (۱) را برای وقتی $+\infty$ یا $-\infty$ جایگزین L می‌شوند، تعریف می‌کنیم. این تعریف‌ها به لحاظ منطقی همان تعریف قبلی حد هستند، با این تفاوت که نشانه نزدیکی $f(x)$ها به $+\infty$، بزرگ شدن دلخواه آنها است و نیز نشانه نزدیکی $f(x)$ها به $-\infty$، کوچک‌تر شدن دلخواه آنها است و در حقیقت نمادگذاری سودمندی برای توصیف رفتار توابعی است که مقادیرشان به دلخواه بزرگ یا کوچک می‌شوند.

هرگاه رفتار تابع $f(x)=\frac{۱}{(x-۱)^۲}$ را در نزدیکی یک بررسی نماییم (شکل زیر)، به این نتیجه می‌رسیم که وقتی x با مقادیر بزرگ‌تر و یا کوچک‌تر از ۱ به ۱ نزدیک می‌شود، $(x-۱)^۲$ با مقادیر مثبت به صفر نزدیک خواهد شد و مقدار $\frac{۱}{(x-۱)^۲}$ بدون هیچ محدودیتی افزایش می‌یابد و یا $f(x)=\frac{۱}{(x-۱)^۲}$ را می‌توان از هر عدد مثبتی بزرگ‌تر کرد (f(x)به $+\infty$ میل می‌کند) به شرطی که x را به اندازه کافی به ۱ نزدیک کنیم. به عنوان مثال اگر بخواهیم $\frac{۱}{(x-۱)^۲}$ بزرگ‌تر از ۱۰۰۰۰۰۰ باشد

و یا $\frac{۱}{(x-۱)^۲}>۱۰۰۰۰۰۰$ داریم : $(x-۱)^۲<\frac{۱}{۱۰۰۰۰۰۰}$

و یا

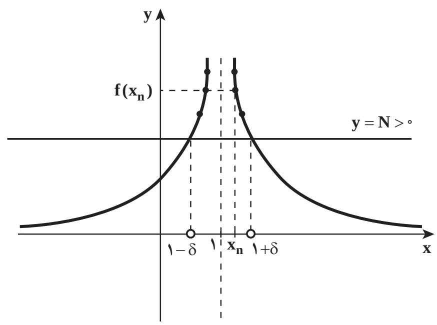
$$|x-۱|<\frac{۱}{۱۰۰۰}$$

$$۱-\frac{۱}{۱۰۰۰}<x<۱+\frac{۱}{۱۰۰۰}$$

یعنی اگر $۰<|x-۱|<\frac{۱}{۱۰۰۰}$ آنگاه : $(x-۱)^۲<\frac{۱}{۱۰۰۰۰۰۰}$

و یا

$$\frac{۱}{(x-۱)^۲}>۱۰۰۰۰۰۰$$



یعنی اگر بخواهیم f(x) بزرگ‌تر از عدد ۱۰۰۰۰۰۰ باشد کافی است x در همسایگی محذوف ۱ و به‌شعاع $\frac{۱}{۱۰۰۰}$ قرار گیرد.

بنابراین در یک همسایگی محذوف۱، f(x) می‌تواند از هر عدد مثبتی بزرگ‌تر شود. در این وضعیت گفته می‌شود، وقتی x به ۱ میل کند، f(x) به $+\infty$ میل می‌کند و از نمادگذاری $\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$ استفاده می‌کنیم.

برای درک بهتر، مطلب بالا را روی نمودار تابع توضیح می‌دهیم. (در مثال بالا N=۱۰۰۰۰۰۰ و $\delta=\frac{۱}{۱۰۰۰}$)

برای هر خط افقی $y=N>۰$ یک همسایگی محذوف ۱ و به شعاع $\delta>۰$ ایجاد می‌شود که به

ازای هر $x_n \in D_f$ که در این همسایگی صدق کند، $f(x_n)>N$ است (x_n مقدار جملهٔ nام دنباله $\{x_n\}$ است که به ۱ همگراست).

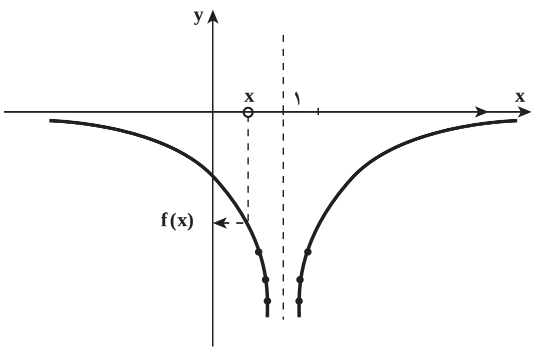
اکنون به صورت رسمی به تعریف حد نامتناهی (حد بی‌نهایت) می‌پردازیم.

تعریف ۱: فرض کنیم تابع D زیر مجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ و $f: D\to\mathbb{R}$ یک تابع باشد، در این صورت، گوییم حد تابع f در a، $+\infty$ است و می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$، هرگاه به ازای هر دنباله از نقاط دامنهٔ f مانند $\{x_n\}$ که همگرا به a است و $x_n\neq a$، $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)=+\infty$

مثال: به کمک تعریف ثابت کنید: $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{۱}{x^۲}=+\infty$

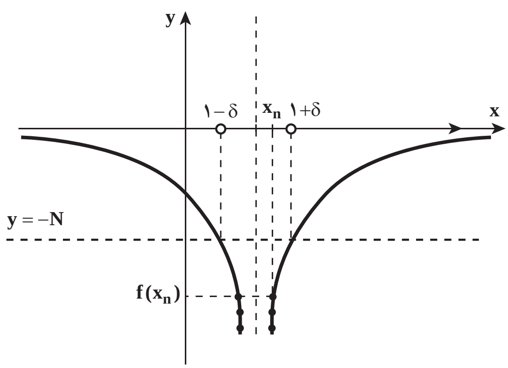
حل: به ازای هر دنباله $\{x_n\}$، $(x_n\neq ۰)$ همگرا به صفر، دنباله $\{f(x_n)\}$ واگرا به $+\infty$ است (چرا؟)

اگر رفتار تابع $f(x)=\frac{-۱}{(x-۱)^۲}$ را در نزدیکی ۱ بررسی نماییم (شکل زیر) به این نتیجه می‌رسیم که وقتی x با مقادیر بزرگ‌تر و یا کوچک‌تر از ۱ به ۱ نزدیک می‌شود، مقدار $\frac{-۱}{(x-۱)^۲}$ بدون هیچ محدودیتی و با مقادیر منفی کاهش می‌یابد.



و یا f(x) را می‌توان از هر عدد منفی کوچک‌تر کرد (f(x) به $-\infty$ میل می‌کند) به شرطی که x به اندازه کافی به ۱ نزدیک شود.

این وضعیت تابع را در مجاورت x=۱، روی نمودار تابع توضیح می‌دهیم. فرض کنید N یک عدد مثبت دلخواه است با رسم هر خط افقی y=−N در شکل روبه‌رو یک همسایگی محذوف ۱ و به شعاع $\delta>۰$ ایجاد می‌شود که برای هر $x_n\in D_f$ که در این همسایگی صدق کند، $f(x_n)<-N$ (x_n مقدار جملهٔ nام دنباله $\{x_n\}$ است که به ۱ همگراست)



اکنون به صورت رسمی به تعریف حدنامتناهی (حد منهای بی‌نهایت) می‌پردازیم.

تعریف ۲ : فرض کنید D زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ (مجموعه اعداد حقیقی)، دامنه تابع f باشد.

گوییم حد تابع f در a، $-\infty$ است و می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ اگر به ازای هر دنباله از نقاط

دامنه f مانند $\{x_n\}$ که همگرا به a است و $x_n \neq a$، $\lim\limits_{n\to +\infty} f(x_n) = -\infty$

مثال : به کمک تعریف (۲) ثابت کنید

$$\lim_{x\to ۲} \frac{-۱}{(x-۲)^۲} = -\infty$$

حل : برای هر دنباله دلخواه $\{x_n\}$ که همگرا به ۲ است و $x_n \neq ۲$ داریم

$$\lim_{n\to +\infty} f(x_n) = \lim_{n\to +\infty} \frac{-۱}{(x_n - ۲)^۲} = -\infty$$

زیرا وقتی دنباله $\{x_n\}$ به ۲ همگرا باشد، دنباله $\{(x_n-۲)^۲\}$ با مقادیر مثبت به صفر همگراست

بنابراین دنباله $\{f(x_n)\}$ به $-\infty$ واگراست.

عبارت‌های

$۱\_ \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$ $۲\_ \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$

$۳\_ \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty$ $۴\_ \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$

مشابه تعریف‌های ۱ و ۲، قابل تعریف هستند. به عنوان مثال عبارت (۲) به معنی آن‌است که : اگر

به ازای هر دنباله $\{x_n\}$ همگرا به a که $x_n > a$، $\lim\limits_{n\to +\infty} f(x_n) = -\infty$ آنگاه $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$

تمرین در کلاس

عبارت‌های ۱ و ۳ و ۴ را مشابه تعریف ۱ و ۲ تعریف کنید.

۲ـ۱۶ـ حد توابع کسری و مجانب قائم

با توجه به تعریف و مثال‌های حدهای مثبت بی‌نهایت و منفی بی‌نهایت مشخص می‌شود که در یک تابع کسری وقتی x به a میل کند و حد مخرج کسر صفر و حد صورت کسر عددی مخالف صفر باشد، حد تابع کسری $+\infty$ یا $-\infty$ است و این خود یک ایده‌ای است برای مطرح کردن قضیه مهّم صفحه بعد

قضیه ۱ : فرض کنید : $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L\neq ۰$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=۰$

الف) اگر $L>۰$ و $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a مثبت باشد آنگاه :

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=+\infty$$

ب) اگر $L>۰$ و $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a منفی باشد آنگاه :

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=-\infty$$

پ) اگر $L<۰$ و $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a منفی باشد آنگاه :

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=+\infty$$

ت) اگر $L<۰$ و $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a مثبت باشد آنگاه :

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=-\infty$$

توضیح اینکه این قضیه برای حدود یک طرفه (چپ یا راست) نیز برقرار است.

برای اینکه به کاربرد قضیه (۱) در محاسبه حدود نامتناهی بیشتر آشنا شویم به مثال‌های زیر توجه کنید.

مثال : حدهای نامتناهی زیر را مشخص کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\sqrt{x+۱}}{x^۲}$ ب) $\lim\limits_{x\to ۱^-}\frac{x^۲+x+۱}{x^۲+۳x-۴}$

حل :

الف) وقتی $x\to ۰$، حد صورت کسر و حد مخرج کسر صفر است و مخرج کسر یعنی $x^۲$ در یک همسایگی محذوف صفر مثبت است بنابراین طبق قسمت الف قضیه (۱) داریم : $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\sqrt{x+۱}}{x^۲}=+\infty$

ب) وقتی x با مقادیر بزرگ‌تر از ۱ به ۱ میل کند، حد صورت کسر ۳ است و حد مخرج کسر یعنی $(x+۴)(x-۱)$ صفر است و مخرج کسر به ازای $x<۱$، مثلاً در بازه باز $(۱-\delta,۱)$ منفی است بنابراین طبق قسمت ب قضیه (۱) داریم :

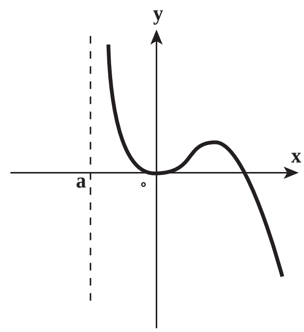
$$\lim_{x\to ۱^-}\frac{x^۲+x+۱}{x^۲+۳x-۴}=-\infty$$

تمرین در کلاس

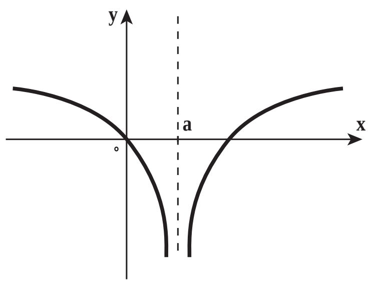
حدهای زیر را حدس زده و با استفاده از قضیه (۱) جواب حد را پیدا کنید.

۱ــ $\lim\limits_{x\to(-2)^+}\dfrac{x+1}{x+2}$ ‏ ۲ــ $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{[x]-1}{x^2-1}$ ‏ ۳ــ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\tan x$ ‏ ۴ــ $\lim\limits_{x\to 0^+}\cot x$

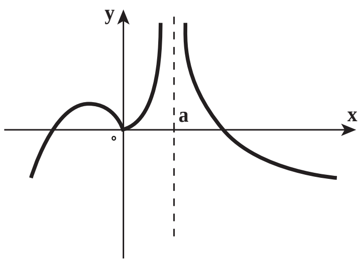
مجانب قائم تابع : به توصیف عبارت‌های $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$ در شکل زیر توجه می‌کنیم.



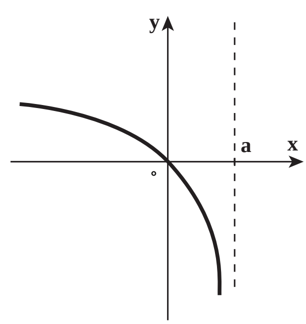
$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$



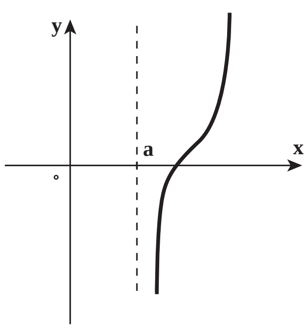
$\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$



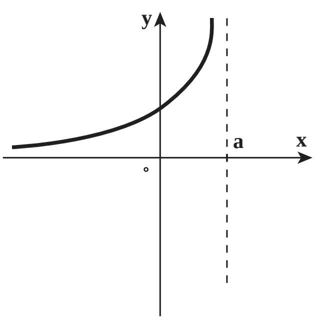
$\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$



$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$



$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$



$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$

در نمودارهای شکل صفحهٔ قبل دیده می‌شود که تابع f در x=a تعریف نشده است و وقتی x از هر دو طرف و یا از طرف راست و یا از طرف چپ به a میل کند، f(x) بی‌کران افزایش یا کاهش می‌یابد و این خود ایده‌ای است برای مطرح کردن مجانب قائم تابع که در رسم نمودارها بسیار مفید است.

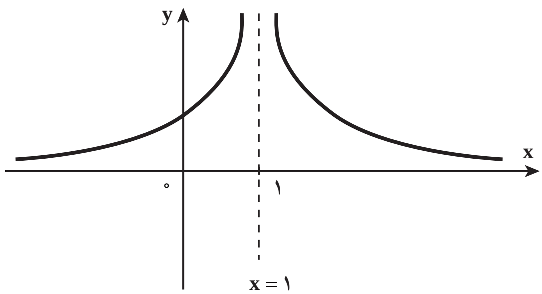
تعریف ۳: خط x=a را مجانب قائم نمودار تابع f می‌نامند، هرگاه حداقل یکی از حکم‌های زیر درست باشد.

۱ـ $\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$ ‌ ‌ ۲ـ $\lim_{x\to a^-} f(x)=+\infty$ ‌ ‌ ۳ـ $\lim_{x\to a^+} f(x)=+\infty$

۴ـ $\lim_{x\to a} f(x)=-\infty$ ‌ ‌ ۵ـ $\lim_{x\to a^-} f(x)=-\infty$ ‌ ‌ ۶ـ $\lim_{x\to a^+} f(x)=-\infty$

مثلاً خط x=a مجانب قائم هر یک از شش حالت نشان داده شده در شکل‌های صفحهٔ قبل

مثال: خط x=۱ مجانب قائم تابع $f(x)=\frac{1}{(x-1)^2}$ است زیرا $\lim_{x\to 1} f(x)=+\infty$



تمرین در کلاس

۱ـ مجانب‌های تابع $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x-1}}$ را در صورت وجود به‌دست آورید.

۲ـ مجانب‌های قائم تابع‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $f(x)=\frac{x+1}{x^2-1}$ ‌ ‌ ب) $g(x)=\tan x$ ، $-\pi\le x\le\pi$

۲ـ۱۷ـ حد در بی‌نهایت و مجانب افقی

تاکنون برای بررسی رفتار تابع f در نزدیکی نقطه مانند x=a، از «حد» استفاده کرده‌ایم و در آنجا x را به سمت a میل می‌دادیم

امّا هرگاه تابع f در بازه‌هایی مانند $(c,+\infty)$ و یا $(-\infty,c)$ تعریف شده باشد، علاقه‌مندیم که بدانیم، اگر x به دلخواه بزرگ (مثبت) و یا کوچک (منفی) می‌شود، و به بیان دیگر وقتی x به سمت $+\infty$ و یا به سمت $-\infty$ میل می‌کند، چه بر سر $f(x)$ می‌آید.

دانستن رفتار انتهایی تابع برای رسم نمودار آن بسیار مفید است.

تعریف ۴: فرض کنید f تابعی باشد که در بازه‌ای مانند $(c,+\infty)$ تعریف شده و L عددی حقیقی باشد. می‌گوییم حد تابع f وقتی x به $+\infty$ میل می‌کند برابر L است و می‌نویسیم

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=L$$

هرگاه به ازای هر دنباله از نقاط دامنه f مانند $\{x_n\}$، واگرا به $+\infty$، دنباله $\{f(x_n)\}$ به L همگرا باشد.

تمرین در کلاس

تعریف مشابه برای حد در منفی بی‌نهایت را فرمول‌بندی کنید.

مثال: ثابت کنید، اگر r یک عدد گویای مثبت باشد آنگاه :

الف) $\lim_{x\to+\infty}\frac{۱}{x^r}=۰$ ب) $\lim_{x\to-\infty}\frac{۱}{x^r}=۰$

حل:

الف) برای هر دنباله دلخواه $\{x_n\}$ که واگرا به $+\infty$ است داریم : $f(x_n)=\frac{۱}{(x_n)^r}$

دنباله $\{f(x_n)\}$ همگرا به صفر است (چرا؟) پس $\lim_{x\to+\infty}\frac{۱}{x^r}=۰$

ب) برای هر دنباله دلخواه $\{x_n\}$ که واگرا به $-\infty$ است داریم : $f(x_n)=\frac{۱}{(x_n)^r}$

و $\lim_{n\to+\infty} f(x_n)=۰$ (چرا؟) بنابر این $\lim_{x\to-\infty}\frac{۱}{x^r}=۰$

تذکر : اگر قوانینی که در مورد $\lim_{x\to a} f(x)$ ثابت کردیم در مورد حد در بی‌نهایت نیز برقرارند

مثلاً اگر $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L_1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L_2$ آنگاه :

۱ــ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\pm g(x)=L_1\pm L_2$

۲ــ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)g(x)=L_1L_2$

۳ــ $\lim\limits_{x\to+\infty} cf(x)=cL_1$ ، c یک عدد ثابت

۴ــ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{L_1}{L_2}$ ، $(L_2\neq 0)$

۵ــ $\lim\limits_{x\to+\infty} c=c$

این قوانین برای وقتی که x به $-\infty$ میل کند نیز برقرارند.

بدیهی است که نتایج قضیه‌های ۱ و ۲ و ۳ بخش دوّم با تغییرات جزئی در مورد حد در بی‌نهایت نیز برقرارند. (چرا؟)

مثال : مقدار $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2+5x+1}{3x^2-x}$ را حساب کنید.

حل : وقتی x بزرگ می‌شود، بدیهی است که صورت و مخرج کسر هر دو بزرگ می‌شوند، درنتیجه معلوم نیست چه بر سر مقادیر این کسر می‌آید بنابراین از معلومات جبری‌مان کمک می‌گیریم و تابع کسری را به شکل دیگری می‌نویسیم.

ابتدا صورت و مخرج را بر بزرگ‌ترین توانی از x که در مخرج وجود دارد تقسیم می‌کنیم، (چون مقدارهای بزرگ x برای محاسبه این حد به کار می‌روند پس می‌توان فرض کرد $x\neq 0$) در این کسر بزرگ‌ترین توان x در مخرج x^2 است، در نتیجه :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+5x+1}{3x^2-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{2x^2+5x+1}{x^2}}{\dfrac{3x^2-x}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+\dfrac{5}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{3-\dfrac{1}{x}}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2+\dfrac{5}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3-\dfrac{1}{x}\right)}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}2+5\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}+\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}}{\lim\limits_{x\to+\infty}3-\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}}$$

$$=\frac{2+0+0}{3-0}=\frac{2}{3}$$

مثال: $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^۲+x}-x)$ را حساب کنید.

حل: وقتی x بزرگ است، $\sqrt{x^۲+x}$ و x هر دو بزرگ‌اند و بسیار دشوار است که بدانیم چه بر سر تفاضل آنها می‌آید، لذا ابتدا از جبرمقدماتی استفاده می‌کنیم و تابع را به شکل دیگری می‌نویسیم. برای این کار صورت و مخرج را (می‌توانیم فرض کنیم که مخرج تابع ۱ است) در مزدوج صورت یعنی $(\sqrt{x^۲+x}+x)\neq ۰$ ضرب می‌کنیم.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x^۲+x}-x}{۱}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^۲+x}-x)(\sqrt{x^۲+x}+x)}{۱\times(\sqrt{x^۲+x}+x)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^۲+x}+x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\sqrt{۱+\frac{۱}{x}}+x}\qquad(|x|=x,x>۰)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{۱}{\sqrt{۱+\frac{۱}{x}}+۱}$$

$$=\frac{۱}{\sqrt{۱+۰}+۱}=\frac{۱}{۲}$$

تمرین در کلاس

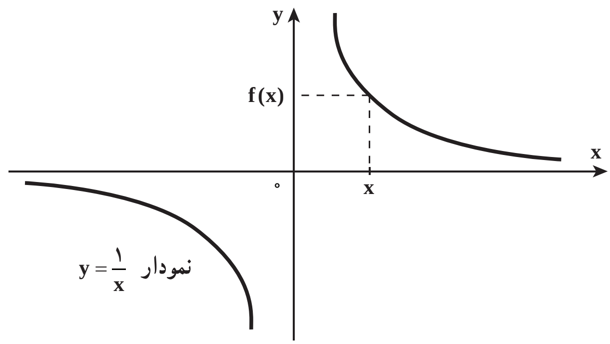
۱ــ مطلوبست محاسبه:

الف) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{۵x^۳+x+۱}{x^۳-x+۲}$ ب) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{۳x^۲+۱}}{۲x-۳}$ پ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\cos\frac{۱}{x}$

۲ــ اگر به ازای هر $x>۱۰$، $\frac{۲x^۲+۳x}{x^۲}<f(x)<\frac{۲x-۱}{x}$ آنگاه $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ را پیدا کنید.

مجانب افقی

نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ به شکل زیر است. در نمودار تابع f، وقتی x با مقادیر مثبت بی‌کران افزایش و یا با مقادیر منفی بی‌کران کاهش یابد، f(x) به ترتیب با مقادیر مثبت یا منفی به صفر نزدیک می‌شود و به عبارت دیگر نمودار تابع در بی‌نهایت دور مثبت یا منفی به خط افقی y=۰ بسیار نزدیک می‌شود و این توصیف، خود ایده‌ای است برای تعریف مجانب افقی.

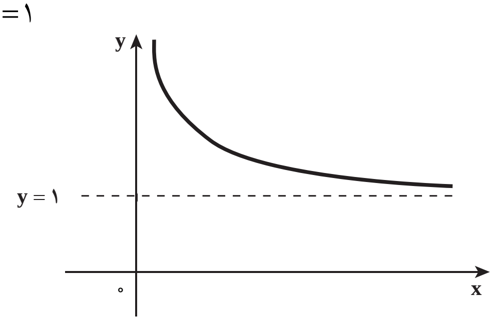


تعریف ۵: خط y=L را مجانب افقی نمودار تابع f می‌نامند به شرطی که $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=L$

یا $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=L$

مثال: خط y=۱ مجانب افقی تابع $f(x)=۱+\frac{۱}{\sqrt{x}}$ است که در شکل زیر نشان داده شده است، زیرا

$$\lim_{x\to +\infty}\left(۱+\frac{۱}{\sqrt{x}}\right)=۱$$



پرسش : خط مجانب قائم تابع $y=۱+\frac{۱}{\sqrt{x}}$ را به‌دست آورید.

تمرین در کلاس

مجانب‌های افقی تابع‌های زیر را به‌دست آورید.

$$۱\_\ y=\frac{۲x+۱}{x-۲} \qquad ۲\_\ y=\frac{x}{\sqrt{x^{۲}+۱}} \qquad ۳\_\ y=\frac{\sin x}{x}$$

۲ـ۱۸ـ حد بی‌نهایت در بی‌نهایت و مجانب مایل

در تابع $f(x)=x^{۳}$ وقتی x بزرگ می‌شود، $x^{۳}$ هم بزرگ می‌شود، مثلاً،

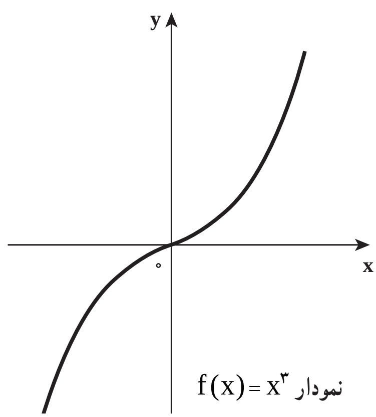
x	۱۰	۱۰۰	۱۰۰۰
$x^{۳}$	۱۰۰۰	۱۰۰۰۰۰۰	۱۰۰۰۰۰۰۰۰۰

در واقع می‌توانیم با بزرگ گرفتن x به اندازه کافی، $x^{۳}$ را به هر اندازه دلخواه بزرگ کنیم و می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

و به‌طور مشابه، وقتی x کوچک منفی می‌شود، $x^{۳}$ هم کوچک منفی می‌شود و می‌نویسیم

$$\lim_{x\to-\infty} x^{۳}=-\infty$$

درستی این حکم‌های حدی را می‌توان به‌صورت شهودی از روی نمودار تابع $f(x)=x^{۳}$ حدس زد.



نمودار $f(x)=x^{۳}$

اکنون به صورت رسمی به تعریف حد بی‌نهایت در بی‌نهایت می‌پردازیم.

تعریف ۶: می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ هرگاه به ازای هر دنباله از نقاط دامنه f مانند $\{x_n\}$ واگرا به $+\infty$، دنباله $\{f(x_n)\}$ واگرا به $+\infty$ باشد.

تمرین در کلاس

با توجه به تعریف ۶، نمادهای $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ را به‌طور مشابه تعریف کنید.

مثال: به کمک تعریف ثابت کنید: $\lim\limits_{x\to-\infty} cx^۲=-\infty$ ، (c عدد ثابت منفی)

حل: به ازای هر دنباله دلخواه $\{x_n\}$ از دامنه تابع $f(x)=cx^۲$ که واگرا به $-\infty$ است داریم

$$f(x_n)=cx_n^۲$$

می‌دانید که دنباله $\{f(x_n)\}$ واگرا به $-\infty$ است ($c<۰$ و دنباله $\{x_n^۲\}$ واگرا به $+\infty$ است)

بنابراین $\lim\limits_{x\to-\infty} cx^۲=-\infty$

مثال: $\lim\limits_{x\to-\infty} (\sqrt{x^۲+۱}-x)$ را محاسبه کنید.

حل:

$$\lim_{x\to-\infty} (\sqrt{x^۲+۱}-x)=\lim_{x\to-\infty} (|x|\sqrt{۱+\frac{۱}{x^۲}}-x)$$

$$=\lim_{x\to-\infty} -x(\sqrt{۱+\frac{۱}{x^۲}}+۱)$$

$$=\lim_{x\to-\infty} -۲x=+\infty$$

تذکر مهمّ: همواره نمی‌توان از قاعده‌های حدگیری برای حدهای نامتناهی استفاده کرد. زیرا $+\infty$ و یا $-\infty$ عدد نیستند.

مثلاً نوشتن اینکه $\lim\limits_{x\to+\infty} x^۳-x=\lim\limits_{x\to+\infty} x^۳-\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty-\infty$

غلط است ($+\infty -\infty$ را نمی‌توان تعریف کرد) با این وجود، می‌توان نوشت

$$\lim_{x\to+\infty} x^۳-x=\lim_{x\to+\infty} x(x^۲-۱)=+\infty$$

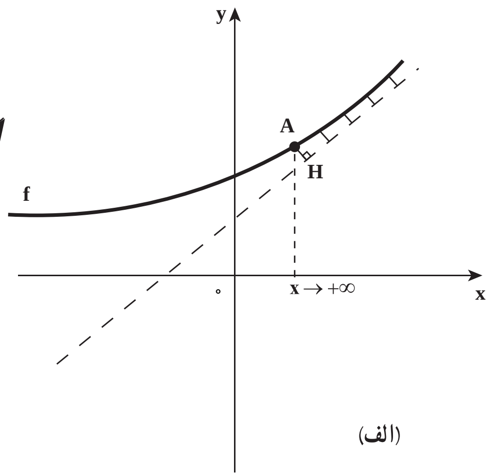
زیرا x و $x^{۲}-۱$ هر دو به دلخواه بزرگ می‌شوند در نتیجه حاصل‌ضرب آنها نیز بزرگ می‌شود

و یا نوشتن اینکه :

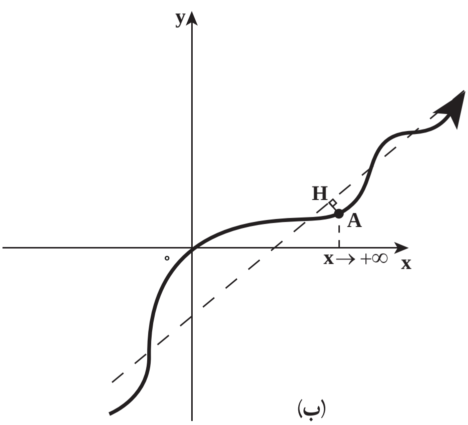
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{۲x+۱}{x-۱}=\frac{\lim\limits_{x\to-\infty}(۲x+۱)}{\lim\limits_{x\to-\infty}(x-۱)}=\frac{-\infty}{-\infty}$$

غلط است ($\frac{\infty}{\infty}$ را نمی‌توان تعریف کرد) و برای محاسبه این حد می‌نویسیم (صورت و مخرج کسر بر $x<۰$ تقسیم شده است) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{۲x+۱}{x-۱}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{۲+\frac{۱}{x}}{۱-\frac{۱}{x}}=\frac{۲}{۱}$

مجانب مایل : خط L به معادله $y=mx+b$ $(m\neq ۰)$ و تابع $y=f(x)$ را درنظر می‌گیریم. چنانچه فاصلهٔ نقطه متغیر $A(x,f(x))$ تا خط مستقیم L؛ وقتی $x\to+\infty$ یا $x\to-\infty$ به صفر نزدیک شود (شکل‌های الف و ب را در زیر ببینید) آنگاه خط L مجانب مایل نمودار f نامیده می‌شود.



(الف)



(ب)

تبصره : به بیان نادقیق اگر نمودار تابع f در دور دست‌ها ($+\infty$ یا $-\infty$) به خط نامتناهی L به دلخواه نزدیک شود، خط L یک مجانب f خواهد بود.

تعریف : خط $y=mx+b$ ،$m\neq ۰$ مجانب مایل نمودار تابع f است، هرگاه حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد.

الف) $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(mx+b)]=۰$ ب) $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(mx+b)]=۰$

❖ **مثال:** مجانب مایل تابع $f(x)=\dfrac{x^3-3x^2+1}{x^2+x-1}$ را (در صورت وجود) به‌دست آورید.

حل: چون درجه صورت یعنی ۳ بزرگ‌تر از درجه مخرج کسر است ابتدا عبارت صورت را بر مخرج تقسیم می‌کنیم.

$$\begin{array}{l|l} \cancel{x^3}-3x^2+1 & x^2+x-1 \\ \pm\cancel{x^3}\pm x^2\pm x & \overline{x-4} \\ \hline -\cancel{4x^2}+x+1 & \\ \pm\cancel{4x^2}\pm 4x\, 4 & \\ \hline 5x-3 & \end{array}$$

در نتیجه $f(x)=x-4+\dfrac{5x-3}{x^2+x-1}$

چون $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x-3}{x^2+x-1}=0$ (چرا؟) پس $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x-4)]=0$ (همین نتیجه برای حالت $x\to-\infty$ نیز درست است)

بنابراین خط $y=x-4$ مجانب مایل تابع f می‌باشد.

پرسش: با توجه به راه حل مثال بالا، آیا می‌توان نتیجه گرفت یک تابع کسری گویا با چه شرایطی مجانب مایل دارد؟ و سپس راه حلی کوتاه برای محاسبه مجانب مایل تابع کسری گویا بیان کنید.

مسأله: فرض کنید خط $y=mx+b$ مجانب مایل تابع $y=f(x)$ است. مقادیر m و b را حساب کنید.

فعالیت

۱ــ فاصله نقطه متغیر $A(x,f(x))$ تا خط $y-mx-b=0$ [1] را به‌دست آورید.

۲ــ اگر $h(x)$ فاصله نقطه $A(x,f(x))$ تا خط $y-mx-b=0$ باشد. مقادیر m و b را چنان تعیین کنید که $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=0$ یا $\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=0$

پس از انجام فعالیت بالا نتیجه می‌گیریم که اگر خط $y=mx+b$ مجانب مایل تابع $y=f(x)$ باشد آنگاه:

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} \quad \text{یا} \quad m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-mx] \quad \text{یا} \quad b=\lim_{x\to-\infty}[f(x)-mx]$$

۱ــ فاصله نقطه $M(x_1,y_1)$ از خط $ax+by+c=0$ برابر است با $d=\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

مثال: معادله مجانب مایل تابع $f(x)=2x+\sqrt{x^2+3}$ را وقتی $x\to+\infty$ به‌دست آورید.

حل: بنابر دستورالعمل‌های بالا داریم

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+\sqrt{x^2+3}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(2+\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}\right)=3$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to+\infty}(2x+\sqrt{x^2+3}-3x)$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+3}-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}+3-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+3}+x}=0$$

بنابراین خط $y=3x$ مجانب مایل تابع است.

تمرین در کلاس

در مثال بالا معادله مجانب مایل را وقتی $x\to-\infty$ ، به‌دست آورید.

مسائل مجانب‌ها :

الف) معادله مجانب‌های مایل و افقی تابع‌های زیر را به‌دست آورید.

۱ـ $y=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$ ۲ـ $y=x-\sqrt{x^2+2x}$

۳ـ $y=\dfrac{x^3+x+1}{x^2+3}$ ۴ـ $y=x+\sqrt{4x^2+x+1}$

ب) اندازه زاویه بین دو خط مجانب مایل تابع $y=\sqrt{x^2+4x}$ را حساب کنید.

مسائل

۱ــ حدهای زیر را به‌دست آورید.

الف) $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x-2}$ ب) $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{[x]-2}{x-2}$ پ) $\lim\limits_{x\to \pi^+} \cot x$

ت) $\lim\limits_{x\to \frac{3\pi}{2}^-} \tan x$ ث) $\lim\limits_{x\to 4^-} \dfrac{x-2}{x^2-2x-8}$ ج) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(-1)^{[x]+1}}{x^2-4}$

چ) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \dfrac{\tan x}{\cot x}$ ح) $\lim\limits_{x\to 0} (\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2})$

۲ــ در نظریهٔ نسبیت جرم ذره‌ای با سرعت V برابر است با $m=\dfrac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$ که در آن m_0 جرم سکون ذره است و c سرعت نور وقتی که $V\to c^-$ چه اتفاقی می‌افتد؟

۳ــ حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x+1}{x-3}$ ب) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2+5x-1}{2x^2-1}$

پ) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2x+1}{x^2+3x-1}$ ت) $\lim\limits_{x\to +\infty} (x-\sqrt{x^2+2x})$

ث) $\lim\limits_{x\to -\infty} (\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2-3x})$ ج) $\lim\limits_{x\to +\infty} [\dfrac{x^2+x+1}{x^2+x+3}]$

چ) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x\tan^{-1} x}{2-x}$ ح) $\lim\limits_{x\to -\infty} (\sqrt[3]{8x^3+2x^2}-2x)$

خ) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2+3}}$ د) $\lim\limits_{x\to +\infty} (\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$

۴ــ حدود زیر را پیدا کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2x^3-x+1}{x^2+x-1}$ ب) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2+x+1}{\sqrt{x^2+2x-1}}$

۵ــ ثابت کنید که اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ و g در یک همسایگی محذوف a کراندار باشد آنگاه $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))=+\infty$ و سپس $\lim\limits_{x\to 0^+}(\dfrac{1}{x}+[x])$ را پیدا کنید.

فصل ۳

مشتق و کاربرد آن

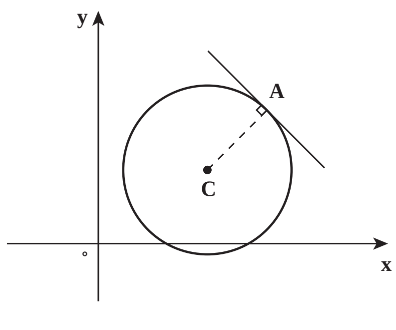
۳ـ۱ـ آهنگ تغییر و خط مماس

در این فصل به مطالعهٔ حساب دیفرانسیل که دربارهٔ تغییر یک کمیت به کمیتی دیگر است می‌پردازیم. مفهوم اصلی حساب دیفرانسیل، مشتق است که تعمیم سرعت و شیب خط مماس است که سال گذشته در حسابان آموزش داده شده است.

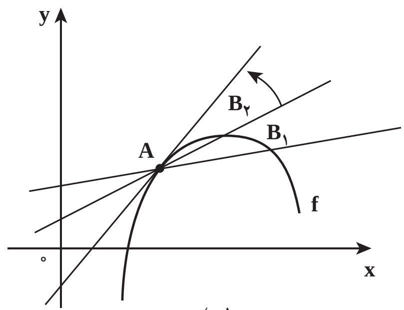
می‌دانید مسألهٔ پیدا کردن خط مماس بر منحنی و یافتن سرعت یک متحرک هردو منجر به یافتن یک نوع حد می‌شوند که این حد خاص را مشتق می‌نامند و خواهیم دید که می‌توان آن را در هر شاخه‌ای از علم و مهندسی به آهنگ تغییر تعبیر کرد.

مسألهٔ خط مماس : وقتی می‌گوییم یک خط بر یک منحنی در یک نقطه مماس است به چه معنی است؟

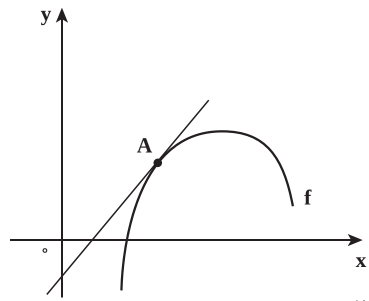
در دایره می‌توان خط مماس در نقطهٔ A را خط عمود بر خط شعاع در نقطه A بیان کرد (شکل زیر).



ولی مسأله برای یک منحنی، کلی مشکل‌تر است مثلاً، در شکل زیر قسمت (الف) خط مماس چگونه تعریف می‌شود؟



(ب)



(الف)

و امّا مسألهٔ یافتن خط مماس در نقطهٔ A به مسأله یافتن شیب خط مماس در A منجر می‌شود.
این شیب را می‌توان با شیب خطی که از نقطهٔ A و نقطهٔ دیگری از منحنی مثلاً B_1، می‌گذرد تقریب زد (قسمت ب شکل بالا) یک چنین خط را **خط قاطع** می‌نامیم.
هرگاه $A(a, f(a))$ نقطهٔ تماس و $B_1(a+\Delta x, f(a+\Delta x))$ نقطهٔ دیگری از نمودار f باشد، شیب خط قاطع که از دو نقطهٔ A و B_1 می‌گذرد عبارت است از :

$$m_{AB_1} = \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

طرف راست این تساوی را **خارج قسمت تفاضلی** می‌نامیم. Δx را تغییر x و صورت کسر $\Delta y = f(a+\Delta x) - f(a)$ را تغییر y می‌نامیم.
زیبایی این روند در آن است که با انتخاب دنباله‌ای از نقاط که به نقطهٔ تماس نزدیک می‌شوند (قسمت ب شکل بالا)، می‌توان تقریبات دقیق‌تری به شیب خط مماس به‌دست آورد.

تعریف خط مماس: اگر f بر بازهٔ بازی شامل a تعریف شده و حد زیر

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} = m$$

موجود باشد، آنگاه خطی که از نقطهٔ $(a,f(a))$گذشته و به شیب m می‌باشد، **خط مماس** بر نمودار f در نقطهٔ $(a,f(a))$ نامیده می‌شود.

اغلب شیب خط مماس بر نمودار f در نقطهٔ $(a,f(a))$ را شیب نمودار f در $x=a$ می‌گوییم.

مثال: معادله خط مماس بر نمودار $f(x)=x^{۲}$ را در نقطهٔ $A(۱,۱)$ پیدا کنید.

حل:

$$\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{f(۱+\Delta x)-f(۱)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{(۱+\Delta x)^{۲}-۱}{\Delta x}$$

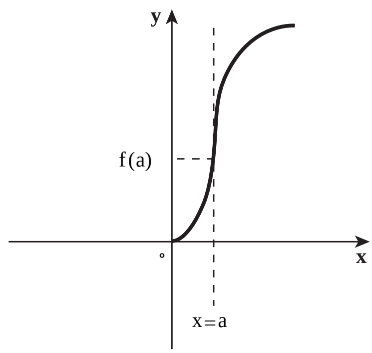
شیب خط مماس $=\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{\cancel{\Delta x}(\Delta x+۲)}{\cancel{\Delta x}}=۲$

بنابراین معاله خط مماس می‌شود :

$y-۱=۲(x-۱)$ یا $y=۲x-۱$

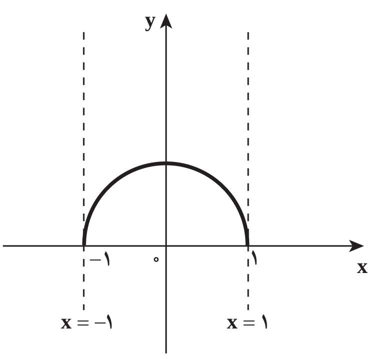
یادداشت : تعریف ما از خط مماس بر یک نمودار **خط مماس قائم** را در بر نمی‌گیرد. برای خطوط مماس قائم تعریف زیر را می‌آوریم.

اگر f در a پیوسته بوده و $\lim_{\Delta x\to ۰}\left|\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}\right|=+\infty$ ، آنگاه خط $x=a$ که از $(a,f(a))$ می‌گذرد، **خط مماس قائم** بر نمودار f است (شکل زیر را ببینید).



یادداشت : اگر دامنهٔ f بازهٔ بسته $[c, d]$ باشد، آنگاه تعریف خط مماس قائم را با توجه به پیوستگی f در نقاط انتهایی c و d طوری تعمیم می‌دهیم که نقاط انتهایی را در بر گیرد.

به‌عنوان مثال، خطوط $x=\pm ۱$، خطوط مماس قائم بر منحنی $f(x)=\sqrt{۱-x^{۲}}$ هستند.



تمرین در کلاس

نشان دهید خط $x=1$، مماس قائم بر منحنی $f(x)=\sqrt[3]{x-1}$ می‌باشد.

۳ـ۲ـ مشتق تابع

همان‌طور که گفته شد و نیز در حسابان دیده اید، برای پیدا کردن شیب خط مماس و سرعت یک متحرک به یک نوع از حد برمی‌خوریم. در حقیقت، حدهایی به صورت

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

هنگام محاسبه آهنگ تغییر در بسیاری از شاخه‌های علوم و مهندسی نظیر سرعت واکنش در شیمی یا سرعت ذره در فیزیک و یا هزینه نهایی در اقتصاد پیش می‌آیند.

چون به این نوع از حد، بسیار زیاد برمی‌خوریم، به این نوع حد نام خاصی داده‌اند و برای آن از نمادگذاری خاصی استفاده می کنند.

تعریف : فرض کنید a نقطه درونی از دامنه f است. در این صورت مشتق تابع f در $x=a$ که آن را به $f'(a)$ نشان می‌دهیم، برابر است با

$$f'(a)=\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

به شرطی که این حد وجود داشته باشد.

اگر فرض کنیم $x=a+\Delta x$ آنگاه $\Delta x=x-a$

بدیهی است که وقتی Δx به صفر میل کند، x هم به a میل می کند.

بنابراین

$$f'(a)=\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

فرایند یافتن مشتق یک تابع **مشتق‌گیری** نام دارد. گوییم تابع f در x مشتق‌پذیر است. اگر مشتق آن در x موجود باشد و بر بازهٔ باز I مشتق‌پذیر است اگر در هر نقطه از این بازه مشتق‌پذیر باشد.

مثال: مشتق تابع f با ضابطه $f(x)=x^{۲}+x+۱$ را به‌وسیلهٔ فرایند حد در $(x,f(x))$ بیابید.

حل: توجه داشته باشیم که x ضمن حدگیری (وقتی $\Delta x\longrightarrow ۰$) ثابت گرفته می‌شود. بنابراین

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{(x+\Delta x)^{۲}+x+\Delta x+۱-(x^{۲}+x+۱)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{\Delta x(\Delta x+۲x+۱)}{\Delta x}$$

$$=۲x+۱$$

توضیح اینکه به‌ازای هر $x\in D_f$، $f'(x)$ شیب خط مماس بر منحنی f است.

تمرین در کلاس

$f'(x)$ را برای تابع f با ضابطه $f(x)=\sqrt{x}$ به وسیلهٔ فرایند حد به‌ازای $x>۰$ بیابید و با استفاده از نتیجه به‌دست آمده، شیب خط مماس در نقطهٔ $(۱,۱)$ را به‌دست آورید.

مسائل

۱ــ معادلات خط‌های مماس و قائم بر منحنی $y=\sqrt{x}$ را در نقطهٔ $(۱,۱)$ بیابید. (با محاسبه شیب مماس به کمک تعریف)

۲ــ نقاطی از منحنی $y=\frac{۱}{x}$ را که در آنها خط مماس بر خط $y=۲x$ عمود است بیابید. (با محاسبه شیب مماس به کمک تعریف)

۳ــ آیا تابع‌های زیر در نقطهٔ مشخص شده خط مماس دارند؟
اگر پاسخ مثبت است معادلهٔ خط مماس را بیابید.

الف) $f(x)=\sin x$ در $x=۰$ ب) $g(x)=|\sin x|$ در $x=۰$

۴ــ آیا تابع‌های زیر در نقطهٔ مشخص‌شده خط مماس دارند؟
اگر پاسخ مثبت است معادلهٔ خط مماس را بیابید.

الف) $f(x)=|x|$ در $x=1$ — ب) $g(x)=|x^2-1|$ در $x=1$

پ) $e(x)=\sqrt[3]{x}$ در $x=0$ — ت) $t(x)=x\,\mathrm{sgn}(x)$ در $x=0$

راهنمایی : (تابع علامت $\mathrm{sgn}(x)=\begin{cases}-1 & , x<0\\ 0 & , x=0\\ 1 & , x>0\end{cases}$)

۳ـ۳ـ آهنگ تغییر

در این بخش چند مثال برای نمایش و تعبیر تغییرات و آهنگ تغییر پدیده‌های دنیای پیرامون می‌آوریم.

طبیعی است که مانند سرعت یک شیئی متحرک، تغییر را وابسته به زمان تلقی کنیم، ولی لزومی ندارد که خود را تا این اندازه مقید سازیم. تغییر نسبت به متغیرهایی غیر از زمان را نیز می‌توان به همان ترتیب مورد بررسی قرار داد. مثلاً یک پزشک می‌خواهد بداند چه تغییرات کوچکی در مقدار دارو می‌تواند واکنش بدن را به آن دارو برانگیزد، و یا اقتصاددانی می خواهد نحوهٔ تغییر سرمایه‌گذاری خارجی در کشور معینی را نسبت به نوسانات موجود در نرخ‌های بهرهٔ رایج در آن کشور را مورد مطالعه قرار دهد. همهٔ این مسائل را می‌توان برحسب آهنگ تغییر یک تابع نسبت به یک متغیر فرمول‌بندی کرد.

مثال : فرض کنیم $s=f(t)=t^3-5t^2+6t$ معادله حرکت (رابطهٔ بین مکان و زمان) ذره‌ای باشد که روی خطی راست حرکت می‌کند و مکان ذره در زمان‌های $t=1$ و $t=1+\Delta t$ مشخص است در این صورت اندازه جابجایی این ذره برابر است با

$$\Delta S=f(1+\Delta t)-f(1)=\Delta t(\Delta t^2-2\Delta t-1)$$

و در بازهٔ زمانی $[1, 1+\Delta t]$، از تقسیم اندازه جابجایی بر مدّت جابجایی (Δt)

آهنگ متوسط : تغییر مکان ذره به دست می‌آید، که آن را عموماً سرعت متوسط ذره در فاصله زمانی $t=1$ تا $t=1+\Delta t$ نیز می‌نامند، یعنی

$$\frac{\Delta S}{\Delta t}=\Delta t^2-2\Delta t-1$$

هرچه Δt کوچکتر شود این سرعت متوسط به سرعت ذره در حول و حوش لحظه $t=1$ نزدیکتر می‌گردد که در این حالت آن را سرعت لحظه‌ای می‌نامند، در واقع سرعت لحظه‌ای وقتی است که Δt به صفر میل کند، یعنی

$$\text{سرعت لحظه‌ای در لحظه } t=1 = \text{حد } \frac{\Delta S}{\Delta t} \quad \Delta t \to 0$$

بدین ترتیب سرعت لحظه‌ای را **آهنگ لحظه‌ای** تغییر مکان ذره در لحظه $t=1$ نیز می‌نامند و با استفاده از نمادگذاری ریاضی به شکل زیر نوشته می‌شود :

$$\frac{dS}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

براساس مثال بالا و این نمادگذاری می‌توان ایده اصلی این بخش را معرفی کرد.

تعریف :

الف) **آهنگ متوسط تغییر** تابع f نسبت به x روی بازه $[a, a+\Delta x]$ عبارت است از

$$\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

ب) **آهنگ آنی تغییر** تابع f نسبت به x در $x=a$ عبارت است از

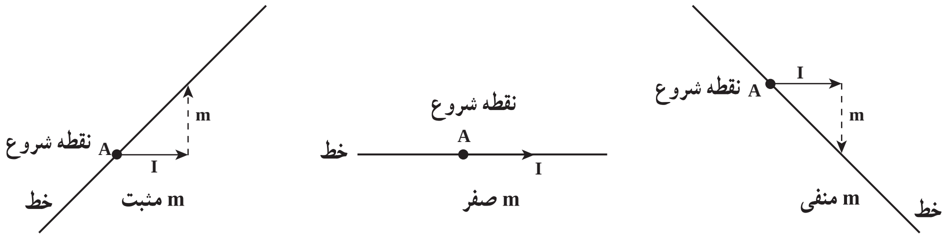
$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

مشروط بر اینکه این حد وجود داشته باشد.

برحسب قرارداد وقتی متغیر x بیانگر زمان باشد به جای کلمه «**آنی**» واژه «**لحظه‌ای**» را به‌کار می‌بریم و اغلب با حذف واژه «آنی» و یا «لحظه‌ای» وقتی می‌گوییم **آهنگ تغییر**، مقصودمان آهنگ آنی یا لحظه‌ای تغییر است.

ویژگی ضریب زاویهٔ یک خط : اگر از نقطه‌ای بر خطی با ضریب زاویهٔ m، یک واحد به سمت راست حرکت کنیم، در این صورت باید m واحد در جهت محور y حرکت نماییم تا به روی

خط بازگردیم.



بنابراین می‌توانیم شیب خط را این طور تعریف کنیم :

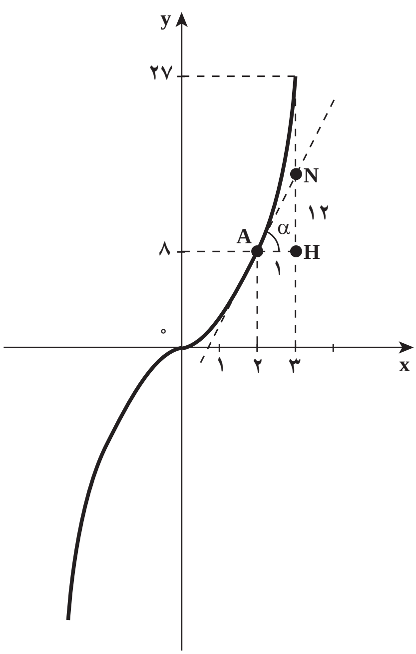
افزایش یا کاهش عرض نقطه شروع (A) را وقتی که طول آن را یک واحد در جهت مثبت محور x افزایش دهیم، شیب خط می‌نامیم.

رابطه بین آهنگ تغییر و مسأله مماس : می‌دانیم آهنگ تغییر تابع f با ضابطه $f(x)=x^3$ وقتی که $x=2$ است برابر است با

$$f'(x)=3x^2$$

$$f'(2)=12$$

در شکل زیر به تعبیر هندسی عدد ۱۲ می‌پردازیم.



$f'(2)=12$ یعنی در نقطهٔ $x=2$، وقتی یک واحد به $x=2$ اضافه شود تقریباً ۱۲ واحد به y اضافه می‌شود و امّا $f(2)=8$ بنابراین مقدار تابع (y) در نقطه $x=3$ تقریباً $8+12=20$ است. ولی مقدار واقعی y در نقطه ۳ می‌شود $f(3)=27$.

مثال: اگر هوا را به داخل بالونی بدمیم، آهنگ تغییر حجم بالون، وقتی که شعاع آن ۱۵سانتی‌متر است، چقدر است؟

حل: اگر V حجم بالون کروی شکل و r شعاع بالون باشد، آهنگ تغییر حجم نسبت به شعاع عبارت است از

$$\frac{dV}{dr}=\frac{d}{dr}(\frac{۴}{۳}\pi r^{۳})=۴\pi r^{۲}$$

وقتی r برابر ۱۵ سانتی‌متر است، حجم بالون با آهنگ $۴\pi\times۲۲۵=۹۰۰\pi$ سانتی‌مترمکعب بر سانتی‌متر تغییر می‌کند و به عبارت دیگر، وقتی که شعاع بالون ۱۵ سانتی‌متر است، اگر یک واحد (یک سانتی‌متر) دیگر به شعاع اضافه شود تقریباً ۹۰۰π سانتی مترمکعب به حجم بالون افزوده می‌گردد.

تمرین در کلاس

حجم آب یک منبع آب، t دقیقه پس از شروع تخلیه، برحسب لیتر برابر است با :

$$V(t)=۲۵۰(۱۶-t)^{۲}$$

آهنگ لحظه‌ای تخلیه آب بعد از ۴ دقیقه، چقدر است و آن را توصیف کنید.

آهنگ تغییر در علم اقتصاد : فرض کنید C(x) کل مبلغی باشد که کارخانه‌ای برای تولید x واحد از یک نوع کالا، هزینه می‌کند. تابع C را **تابع هزینه** می‌نامند. اقتصاددانان مقدار حد $\frac{\Delta C}{\Delta x}$ را وقتی که $\Delta x\to ۰$، یعنی آهنگ لحظه‌ای تغییر هزینه نسبت به تعداد کالای تولید شده را **هزینهٔ نهایی** تولید می‌نامند.

چون معمولاً مقدارهای x عددهایی صحیح‌اند، ممکن است بی‌معنی باشد که Δx را به ۰ میل دهیم. بنابراین **هزینه نهایی** تولید را سهواً به‌عنوان هزینه اضافی لازم برای تولید یک واحد دیگر از محصول تعریف می‌کنند. یعنی $\Delta C=C(x+۱)-C(x)$

برای بهتر فهمیدن این مطلب، رابطه بین آهنگ تغییر و مسأله مماس را دوباره بخوانید.

مثال: هزینه ساخت x یخچال c(x) تومان است که در آن

$$C(x)=۸۰۰۰۰۰۰+۴۰۰۰۰۰x-۵۰۰x^{۲}$$

می‌باشد. هزینه تولید ۱۰۱امین یخچال چقدر است و معنی آن را توضیح دهید.

حل: هزینه نهایی $C'(x)=400000-1000x$

$C'(100)=400000-100000=300000$

یعنی وقتی کارخانه ۱۰۰ یخچال تولید کرده و بخواهد ۱۰۱ امین یخچال را تولید کند تقریباً ۳۰۰۰۰۰ تومان هزینه می‌کند.

تمرین در کلاس

یک کارخانه پارچه‌بافی، طاقه‌هایی از پارچه‌ای به عرض ثابت تولید می‌کند. هزینه تولید x متر از این پارچه $C(x)$ تومان است.

الف) معنی $C'(x)$ چیست؟

ب) معنی $C'(1000)=900$ چیست؟

مسائل

۱ــ حجم یک مکعب به طول ضلع x عبارت است از $V=x^3$، آهنگ تغییر حجم مکعب نسبت به x را وقتی $x=4$ است بیابید.

۲ــ آهنگ تغییر مساحت دایره را نسبت به قطر آن بیابید.

۳ــ فرض کنید آنفلوانزا در یک منطقه شیوع پیدا کرده است و مسئولین ادارهٔ بهداری تعداد افراد مبتلا به بیماری در زمان t (برحسب روز از زمان شیوع) را برابر $P(t)=60t^2-t^3$ تخمین می‌زنند، با شرط اینکه $0\le t\le 40$.

الف) آهنگ تغییر پخش آنفلوانزا را در $t=30$ پیدا کنید.

ب) چه زمانی آهنگ پخش آنفلوانزا ۹۰۰ نفر در روز است؟

۴ــ فرض کنید تابع هزینه تولید x واحد از محصولی $C(x)=0/00x^3-3x$ و سطح تولید روزانه ۱۰۰ واحد است

الف) هزینهٔ افزایش تولید از ۱۰۰ به ۱۰۱ واحد در روز چقدر است؟

ب) هزینهٔ نهایی در این سطح تولید چقدر است؟

۵ــ فرض کنید که درآمد حاصل از تولید x واحد از محصولی $R(x)=0/1x^2-3x$، درآمد نهایی «آهنگ آنی تغییر درآمد» را در سطح تولید ۱۸۰۰ واحد حساب کنید.

۳ـ۴ـ تابع مشتق

می‌دانیم که مشتق تابع f در نقطه‌ای ثابت مانند $x_\circ$ (در صورت وجود) :

$$f'(x_\circ)=\lim_{x\to x_\circ}\frac{f(x_\circ+h)-f(x_\circ)}{h} \qquad (۱)$$

در این بخش دیدگاه خود را تغییر می‌دهیم و می‌گذاریم $x_\circ$ تغییر کند. اگر در رابطه (۱)، $x_\circ$ را با متغیر x جایگزین کنیم، داریم

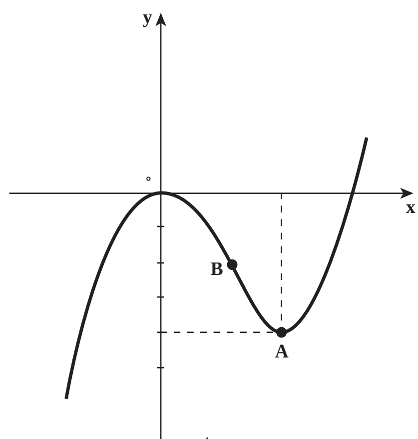
$$\boxed{f'(x)=\lim_{h\to\circ}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}} \qquad (۲)$$

به ازای هر xای که این حد وجود داشته باشد، x را به $f'(x)$ نظیر می‌کنیم. به این ترتیب **f'** را می‌توانیم تابع جدیدی در نظر بگیریم و آن‌را **تابع مشتق f** (مشتق f) بنامیم و می‌دانیم تعبیر هندسی مقدار f' به‌ازای x، یعنی $f'(x)$، شیب خط مماس بر نمودار f در نقطهٔ $(x,f(x))$ است.

نامیدن تابع f' به مشتق f به‌خاطر این است که به کمک حدگیری در رابطه (۲)، از f «مشتق» شده است.

دامنه f' مجموعه $\{x : \text{وجود دارد } f'(x)\}$ است که زیرمجموعه‌ای از دامنه f است.

مثال : نمودار تابع f در شکل زیر نشان داده شده است. با استفاده از آن نمودار تابع f' را به تقریب نشان دهید.



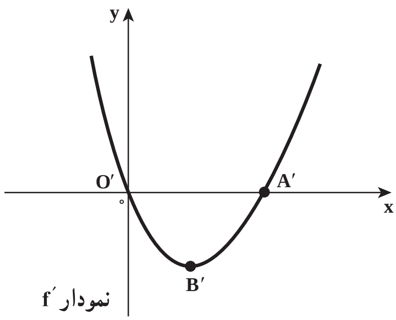
نمودار f

حل : شیب خط‌های مماس بر منحنی f قبل از نقطه O مثبت است پس در این‌جاها $f'(x)$ مثبت است و خط مماس در نقطه O افقی است پس به‌ازای طول این نقطه مقدار f' صفر است و بین O و A شیب خط‌های مماس منفی است پس در این جاها $f'(x)$ منفی است و نمودار f' زیر محور x

است و خط مماس در نقطه A افقی است پس به‌ازای طول این نقطه مقدار تابع f' صفر است درنتیجه نمودار f' محور x را در نقاط O' و A'

(O' با O و A' با A هم‌طول‌اند) قطع می‌کند.

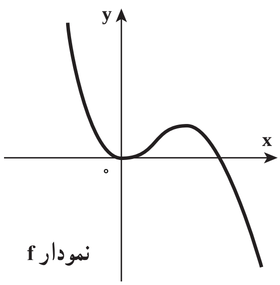
و بعد از نقطه A شیب خط‌های مماس مثبت است پس در این جاها $f'(x)$ مثبت است و نمودار f' بالای محور x است. بنابراین نمودار f' را می‌توان به‌صورت روبه‌رو نشان داد دقت کنید، نقطهٔ B' روی نمودار f' نقطه‌ای است هم‌طول با نقطهٔ B از نمودار f که بعداً در مورد آن توضیح خواهیم داد.



نمودار f'

تمرین در کلاس

نمودار تابع f به شکل روبه‌رو است، از روی آن نمودار f' را حدس زده و آن‌را رسم کنید.



نمودار f

مثال: اگر $f(x)=x^3$، ضابطهٔ $y=f'(x)$ را پیدا کنید.

حل: از رابطهٔ (۲) استفاده می‌کنیم، با این فرض که h متغیر است و ضمن محاسبهٔ حد موردنظر x را موقتاً ثابت در نظر می‌گیریم.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{x^3}+3x^2h+3h^2x+h^3-\cancel{x^3}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(3x^2+3hx+h^2)}{\cancel{h}}$$

$$= \lim_{h\to ۰}(۳x^۲ + ۳hx + h^۲) = ۳x^۲$$

بنابراین $f'(x) = ۳x^۲$

تمرین در کلاس

اگر $f(x) = \sqrt{x}$، ضابطه تابع f' را به‌دست آورده و به کمک نمودار f، نمودار f' را رسم کنید.

نقاط مشتق‌ناپذیر : وقتی $\lim_{h\to ۰} \frac{f(x_۰ + h) - f(x_۰)}{h}$ (و یا $\lim_{x\to x_۰} \frac{f(x) - f(x_۰)}{x - x_۰}$) وجود داشته باشد می‌گوییم f در $x_۰$ **مشتق‌پذیر است** و یا f در $x_۰$ مشتق دارد. در نقطه‌ای که f مشتق‌پذیر نیست، می‌گوییم f **مشتق‌ناپذیر است** و یا مشتق f وجود ندارد.

مثال : مشتق‌پذیری تابع $f(x) = |x^۲ - ۱|$ را در نقطه $x=۱$ بررسی کنید.

حل :

$$\lim_{x\to ۱} \frac{f(x) - f(۱)}{x - ۱} = \lim_{x\to ۱} \frac{|x^۲ - ۱|}{x - ۱}$$

و امّا

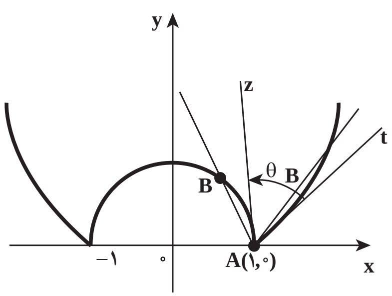
$$\lim_{x\to ۱^+} \frac{|x^۲ - ۱|}{x - ۱} = \lim_{x\to ۱^+} \frac{x^۲ - ۱}{x - ۱} = \lim_{x\to ۱^+} (x + ۱) = ۲$$

$$\lim_{x\to ۱^-} \frac{|x^۲ - ۱|}{x - ۱} = \lim_{x\to ۱^-} \frac{-(x^۲ - ۱)}{x - ۱} = -۲$$

ملاحظه می‌کنید که این حد وجود ندارد بنابراین تابع $f(x) = |x^۲ - ۱|$ در $x=۱$ مشتق‌پذیر نیست (و یا به عبارت دیگر در $(۱,۰)$ خط مماس وجود ندارد) نمودار تابع f در شکل زیر نشان داده شده است.

در این شکل مشاهده می‌شود وقتی B از سمت چپ به A میل کند قاطع AB به خط مماس AZ میل می‌کند که شیب آن -۲ است، در این صورت می‌گوییم تابع f دارای **مشتق چپ** است.

و اگر B از سمت راست به A میل کند قاطع AB به خط مماس At میل می‌کند که شیب آن ۲ است، در این صورت می‌گوییم تابع f دارای **مشتق راست** است.



در این وضعیت نقطه A، یک نقطهٔ «**گوشه**» برای تابع f است.

بنابراین اگر $A(x_\circ, f(x_\circ))$ یک نقطهٔ گوشه برای تابع f باشد و مشتق چپ یعنی

$$f'_-(x_\circ)=\lim_{x\to x_\circ^-}\frac{f(x)-f(x_\circ)}{x-x_\circ}$$

و مشتق راست یعنی

$$f'_+(x_\circ)=\lim_{x\to x_\circ^+}\frac{f(x)-f(x_\circ)}{x-x_\circ}$$

وجود داشته ولی با هم نابرابر باشند، آنگاه یک مماس چپ در نقطهٔ A به شیب $m_1=f'_-(x_\circ)$ وجود دارد که معادلهٔ آن می‌شود

$$\boxed{y=m_1(x-x_\circ)+f(x_\circ)}$$

و همین‌طور، در نقطه A یک مماس راست به شیب $m_2=f'_+(x_\circ)$ وجود دارد

به معادله :

$$\boxed{y=m_2(x-x_\circ)+f(x_\circ)}$$

و اگر زاویه بین دو مماس چپ و راست در نقطهٔ گوشه را به θ نشان دهیم، دو حالت برای محاسبه θ در نظر می‌گیریم :

۱) اگر $m_1 . m_2=-1$، آنگاه $\theta=90^\circ$

۲) اگر $m_1 . m_2\neq -1$ آنگاه θ از رابطه زیر به‌دست می‌آید.

$$\boxed{\tan\theta=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}}$$

که در مثال بالا اندازه زاویه بین دو مماس چپ و راست (θ) از رابطه زیر به‌دست می‌آید. (چرا؟)

$$\tan\theta=\frac{-2-2}{1-4}=\frac{4}{3}$$

تمرین در کلاس

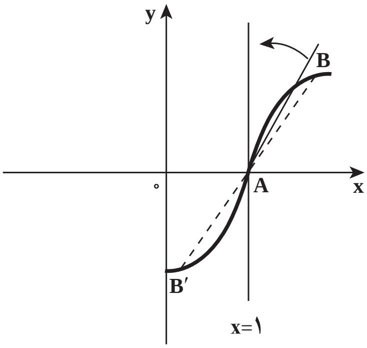
الف) با محاسبه مشتق چپ و مشتق راست تابع $f(x)=|x|$ در نقطه $x=0$، نشان دهید مبدأ مختصات یک نقطهٔ گوشه برای f است و سپس اندازه زاویه ایجاد شده در نقطهٔ گوشه را به‌دست آورید.

ب) نشان دهید مبدأ مختصات یک گوشه برای تابع $f(x)=\begin{cases}x\ , & x<0\\ x^2, & x\geq 0\end{cases}$، می‌باشد و اندازه زاویه ایجاد شده در گوشه را به‌دست آورید.

مثال: مشتق‌پذیری تابع $f(x)=\sqrt[3]{x-1}$ را در $x=1$ بررسی نمایید.

حل: تابع f در $x=1$ پیوسته است (چرا؟) و

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x-1}}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}=+\infty$$



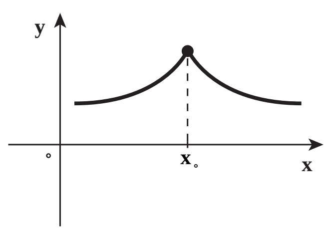
بنابراین تابع در $x=1$ مشتق‌پذیر نیست و امّا طبق تعریف مماس قائم، تابع در نقطهٔ $(1,0)$ مماس قائم دارد به معادله $x=1$ (شکل روبه‌رو را ببینید)

با مشاهده شکل روبه‌رو قاطع AB به خط مماس به معادله $x=1$ میل می‌کند.

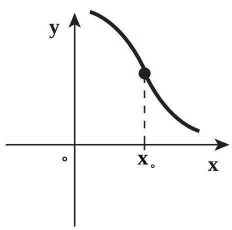
بنابراین تابع f که درنقطه $(x_0, f(x_0))$ **مماس قائم** داشته باشد، در آن نقطه مشتق‌ناپذیر است.

در سوّمین حالت، اگر تابع در نقطهٔ x_0 پیوسته نباشد، آن وقت در a مشتق‌پذیر نیست. بنابراین در هر نقطهٔ ناپیوستگی f مشتق‌پذیر نیست.

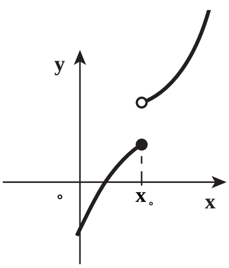
سه حالتی را که برای مشتق‌ناپذیری ذکر کردیم در شکل زیر دیده می‌شوند.



(الف) گوشه داشتن



(ب) مماس قائم داشتن



(پ) ناپیوستگی داشتن

تمرین در کلاس

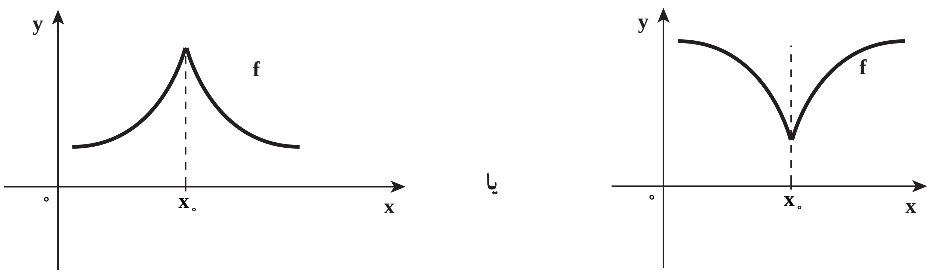
تابع $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ را در نظر بگیرید.

الف) ثابت کنید $f'(0)$ وجود ندارد.

ب) به ازای هر $x\neq 0$، $f'(x)$ را پیدا کنید (ضابطه تابع مشتق).

پ) نشان دهید که تابع f در $(0,0)$ مماس قائم دارد و نمودار f را رسم کنید.

یادداشت : اگر تابع f در نقطهٔ $(x_\circ, f(x_\circ))$ دارای مماس قائم با نموداری به شکل زیر باشد در آن صورت، $(x_\circ, f(x_\circ))$ نقطهٔ **بازگشتی** تابع نامیده می‌شود.



$$\lim_{x\to x_\circ^-}\frac{f(x)-f(x_\circ)}{x-x_\circ}=-\infty \qquad \lim_{x\to x_\circ^-}\frac{f(x)-f(x_\circ)}{x-x_\circ}=+\infty$$

$$\lim_{x\to x_\circ^+}\frac{f(x)-f(x_\circ)}{x-x_\circ}=+\infty \qquad \lim_{x\to x_\circ^+}\frac{f(x)-f(x_\circ)}{x-x_\circ}=-\infty$$

به عنوان نمونه در تمرین کلاسی بالا معلوم می‌شود که مبدأ مختصات نقطهٔ **بازگشتی** تابع $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ است.

۳ـ۵ـ نتایج اوّلیهٔ مشتق‌پذیری

اگر بنا باشد مشتق هر تابعی را با استفاده از تعریف مشتق حساب کنیم کار محاسبه مشتق، دشوار و عذاب‌آور است. خوشبختانه راه آسانتری نیز هست و آنهم به‌دست‌آوردن تعدادی قاعدهٔ مشتق‌گیری، این قواعد ما را قادر می‌سازند تا مشتق ترکیب‌های پیچیدهٔ توابع را به آسانی از مشتق توابع مقدماتی که این توابع را ساخته‌اند محاسبه کنیم، مثلاً قادر خواهیم بود مشتق تابع $y=\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}$ را به‌دست آوریم. با این فرض که مشتق توابع مقدماتی $y=x^2$ و $y=\sqrt{x}$ را بدانیم. درنتیجه می‌توانیم ردهٔ بزرگی از توابع مشتق را معرفی کنیم.

سپس به ذکر پاره‌ای از خواص ابتدایی مشتق و کاربردهای آن می‌پردازیم. و امّا برای اثبات بعضی از قواعد مشتق‌گیری، لازم است قضیه‌ای بدیهی ولی بسیار مهمّ زیر را بدانیم و صرف نظر از جزئیات، این قضیه بیان می‌کند که اگر نمودار یک تابع در نقطه‌ای هموار (مشتق‌پذیر) باشد، نمی‌تواند در آن نقطه ناپیوسته باشد.

قضیه ۱ : اگر تابع f در a مشتق‌پذیر باشد، آن وقت در a پیوسته است.

قضیه (۱) نشان می‌دهد که مشتق‌پذیری در یک نقطه، پیوستگی در آن نقطه را نتیجه می‌دهد، امّا، عکس این قضیه درست نیست. یعنی ممکن است یک تابع در یک نقطه پیوسته باشد ولی در آن نقطه مشتق‌پذیر نباشد. مانند تابع $f(x)=|x|$ که در $x=0$ پیوسته است ولی در این نقطه مشتق‌پذیر نیست ($f'_+(0)=1$ و $f'_-(0)=-1$)

برهان قضیه (۱) : چون f در a مشتق‌پذیر است داریم :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$$

برای اثبات پیوستگی f در a باید نشان دهیم که

$$\lim_{h\to 0} f(a+h)=f(a)$$

با استفاده از قضایا و قواعد حد، داریم

$$\lim_{h\to 0} f(a+h)=\lim_{h\to 0}\left(f(a)+\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\times h\right)$$
$$=f(a)+f'(a)\times 0=f(a)$$

مثال : مقادیر a و b را به قسمی تعیین کنید که تابع $f(x)=\begin{cases}(x+1)^3 & , x\leq 0\\ ax+a+b & , x>0\end{cases}$ در $x=0$ مشتق‌پذیر باشد.

حل : برای مشتق‌پذیربودن تابع f در $x=0$، ابتدا لازم است f در $x=0$ پیوسته باشد. یعنی تساوی‌های زیر برقرار باشند.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$$

$$1=a+b=1$$

$a+b=1$ و یا

و با به‌اجرا گذاشتن شرط مشتق‌پذیری، باید $f'_+(0)=f'_-(0)$ و امّا

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{(x+1)^3-1}{x}=\lim_{x\to 0}((x+1)^2+(x+1)+1)=3$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{ax+a+b-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{ax}{x}=a$$

بنابراین با انتخاب $a=3$ و $b=-2$ تابع f در $x=0$ مشتق‌پذیر است.

تمرین در کلاس

تابع f در نقطهٔ a پیوسته است، ثابت کنید تابع $g(x)=(x-a)f(x)$ در نقطهٔ a مشتق‌پذیر است.

همان‌طورکه گفته شد، محاسبه مشتق توابع به کمک تعریف در بعضی از موارد بسیار دشوار است، لذا قضیه زیر که محاسبه مشتق توابع را آسان می‌سازد، ارائه می‌شود.

قضیه ۲: هرگاه توابع f و g در نقطهٔ a مشتق‌پذیر باشند و c یک عدد ثابت باشد.

آن وقت توابع $f+g$ و $f.g$ و cf و $\frac{f}{g}\,(g(a)\neq 0)$ همگی در نقطه a مشتق‌پذیر هستند و

الف) $(f\pm g)'(a)=f'(a)\pm g'(a)$

ب) $(f.g)'(a)=f'(a)g(a)+g'(a).f(a)$

پ) $(cf)'(a)=cf'(a)$

ت) $(\frac{f}{g})'(a)=\dfrac{f'(a)g(a)-g'(a)f(a)}{g^2(a)}$

در قسمت (الف) قاعده مجموع را می‌توان به مجموع هر تعدادی از تابع‌ها تعمیم داد

مثال: معادلهٔ حرکت ذره‌ای $s=t^3-4t^2+2t+3$ است. (s برحسب سانتی‌متر و t برحسب ثانیه است)

شتاب این ذره را به‌عنوان تابعی از زمان پیدا کنید. پس از گذشت ۳ ثانیه شتاب چقدر است.

حل:

سرعت $V(t)=\dfrac{ds}{dt}=3t^2-8t+2$

شتاب $a(t)=\dfrac{dv}{dt}=6t-8$

پس از گذشت ۳ ثانیه شتاب برابر است با :

$a(3)=10\ cm/s^2$

تمرین در کلاس

معادله خط مماس بر منحنی $y=\dfrac{x}{x^2+6}$ را در نقطه $(2,0/2)$ پیدا کنید.

برهان قضیه (۲) : اثبات قسمت‌های (الف)، (ب)، (پ) قضیه (۲) در کتاب حسابان آموزش داده شده است. بنابراین به اثبات قسمت (ت) می‌پردازیم.

فرض کنیم $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ و a نقطه‌ای باشد که در آن f و g مشتق‌پذیر باشند و $g(a)\neq 0$ خارج قسمت تفاضلی مربوط به h در نقطهٔ a عبارت است از

$$\frac{h(x)-h(a)}{x-a}=\frac{1}{x-a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(a)}{g(a)}\right)=\frac{1}{x-a}\times\frac{f(x)g(a)-g(x)f(a)}{g(x)g(a)}$$

اکنون با افزودن و کاستن $f(a)g(a)$ در صورت کسر، داریم

$$\frac{h(x)-h(a)}{x-a}=\frac{g(a)f(x)-f(a)g(a)+f(a)g(a)-f(a)g(x)}{(x-a)g(x)g(a)}$$

$$=\frac{g(a)(f(x)-f(a))-f(a)(g(x)-g(a))}{(x-a)g(x)g(a)}$$

$$=\frac{1}{g(a)g(x)}\left[g(a).\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-f(a).\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right]$$

چون تابع g در a مشتق‌پذیر است، پس بنابر قضیه (۱) در a پیوسته و درنتیجه $\lim\limits_{x\to a}g(x)=g(a)$

از این‌رو با محاسبه حد کسر $\dfrac{h(x)-h(a)}{x-a}$ و با استفاده از قوانین حد مجموع، حد حاصل‌ضرب و حد خارج‌قسمت نتیجه می‌شود

$$\lim_{x\to a}\frac{h(x)-h(a)}{x-a}=\frac{1}{g^2(a)}\left[g(a)\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-f(a)\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right]$$

و یا

$$h'(a)=\frac{g(a)-f'(a)-f(a)g'(a)}{g^2(a)}$$

تمرین در کلاس

اگر تابع‌های f و g در نقطهٔ a مشتق‌پذیر باشند، در این صورت ثابت کنید تابع f.g در نقطهٔ a مشتق‌پذیر است و

$$(f.g)'(a)=f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$$

۳ـ۶ـ مشتق توابع مثلثاتی

همان‌طور که می‌دانید تابع‌های مثلثاتی سینوس و کسینوس در دامنهٔ تعریفشان پیوسته‌اند. اکنون مشتق‌پذیری این توابع را روی دامنهٔ تعریفشان ثابت می‌کنیم و دستورهایی برای مشتق آنها بدست می‌آوریم و بنابر قضیه (۲) کافی است مشتق‌پذیری توابع سینوس و کسینوس ثابت شود زیرا دو تابع دیگر tan و cot به‌صورت خارج‌قسمت این دو تابع تعریف می‌شوند.

یادآور می‌شویم که در عبارات sinx، cosx، tanx، cotx، x برحسب رادیان است. همچنین درفصل حد، نشان دادیم که $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{۱-\cos h}{h}=۰$ و $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{\sin h}{h}=۱$ ، (h برحسب رادیان)

اکنون ثابت می‌کنیم $\frac{d}{dx}(\sin x)=\cos x$ (x برحسب رادیان است)

برهان:

$$\frac{d}{dx}(\sin x)=\lim_{h\to ۰}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{\sin x\cos h+\sin h\cos x-\sin x}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\left[(\frac{\sin h}{h})\cos x-(\frac{۱-\cos h}{h})\sin x\right]$$

چون در محاسبهٔ حد وقتی h به صفر میل کند، x را ثابت می‌گیریم،

بنابراین

$$\lim_{h\to ۰}\sin x=\sin x\ ,\ \lim_{h\to ۰}\cos x=\cos x$$

درنتیجه

$$\frac{d}{dx}(\sin x)=\cos x\lim_{h\to ۰}\frac{\sin h}{h}-\sin x\lim_{h\to ۰}\frac{۱-\cos h}{h}$$

$$=\cos x\times ۱-(\sin x)(۰)=\cos x$$

تمرین در کلاس

به‌طور مشابه ثابت کنید : $\frac{d}{dx}(\cos x)=-\sin x$

مثال: اگر $f(x)=\tan x$، مطلوب است تعیین $\frac{dy}{dx}$

حل: چون $\frac{d}{dx}(\sin x)=\cos x$ و $\frac{d}{dx}(\cos x)=-\sin x$ داریم :

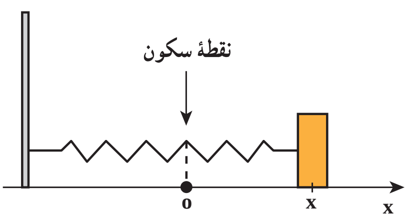
$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(\frac{\sin x}{\cos x})=\frac{\cos^۲ x-(-\sin x)\sin x}{\cos^۲ x}=\frac{\cos^۲ x+\sin^۲ x}{\cos^۲ x}=\frac{۱}{\cos^۲ x}$$

و یا $\frac{dy}{dx}=۱+\tan^۲ x$ (به‌ازای هر x عضو دامنه f)

تمرین در کلاس

برای تابع $y=\cot x$، $\frac{dy}{dx}$ را تعیین کنید.

مثال: جسمی که به انتهای فنری متصل است به‌طور افقی روی سطحی صاف نوسان می‌کند (شکل روبه‌رو) معادلهٔ حرکت این جسم $x(t)=۶\sin t$ است که در آن t برحسب ثانیه است و x برحسب سانتی‌متر



الف) سرعت و شتاب این جسم را در لحظه t بدست آورید.

ب) موقعیت، سرعت و شتاب جسم مورد نظر را در زمان $t=\frac{۲\pi}{۳}$ و جهت حرکت در این زمان چگونه است؟

حل: الف)

$$V(t)=\frac{dx}{dt}=۶\cos t \quad \text{سرعت}$$

$$a(t)=\frac{dv}{dt}=-۶\sin t \quad \text{شتاب}$$

ب) $$x(\frac{۲\pi}{۳})=۶\sin\frac{۲\pi}{۳}=۶\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۳\sqrt{۳}\ \text{cm}$$

در موقعیت $۳\sqrt{۳}$ سانتی‌متری از نقطه سکون است.

$$V(\frac{۲\pi}{۳}) = ۶(-\frac{۱}{۲}) = -۳\,cm/s$$ سرعت

چون سرعت منفی است، حرکت جسم به سمت چپ است.

$$a(\frac{۲\pi}{۳}) = -۶\times\frac{\sqrt{۳}}{۲} = -۳\sqrt{۳}\ cm/s^۲$$

قاعدهٔ توانی : یکی از فرمول‌های قابل توجه حسابان، فرمول

$$\boxed{\frac{d}{dx}(x^r) = rx^{r-۱}}$$

است، که به **قاعدهٔ توانی** معروف است. وقتی با استفاده از تعریف مشتق مثال‌هایی مانند :

$$\frac{d}{dx}(x^۲) = ۲x \quad ، \quad \frac{d}{dx}(x^۳) = ۳x^۲ \quad ، \quad \frac{d}{dx}(x^۴) = ۴x^۳$$

را حل می‌کنید، فرمول بالا تداعی می‌شود، آنچه جالب است این است که قاعده توانی برای هر عدد حقیقی r برقرار است. مثلاً، ثابت می‌کنیم

$$\frac{d}{dx}(x^{-۲}) = -۲x^{-۳} \quad ، \quad \frac{d}{dx}(x^{\frac{۲}{۳}}) = \frac{۲}{۳}x^{-\frac{۱}{۳}}$$

و یا در بحث نماهای گنگ ثابت می‌شود :

$$\frac{d}{dx}(x^{\pi}) = \pi x^{\pi-۱}$$

این قاعده طبعاً محدودیت‌هایی دارد، مثلاً در :

$$\frac{d}{dx}(x^{\frac{۱}{۲}}) = \frac{۱}{۲}x^{-\frac{۱}{۲}}$$

دامنه عبارت است از مجموعهٔ xهایی که مثبت‌اند.

با توجه به حالت‌های نمای r، قاعده توانی در چند مرحله ثابت می‌شود.

حالت اول : r=n، که در آن n عدد صحیح نامنفی است.

$(n=۰,۱,۲,۳,\ldots)$ ، وقتی n=۰ و n=۱، قاعده توانی می‌گوید $\frac{d}{dx}(x^{۰}) = ۰x^{-۱}$ و $\frac{d}{dx}(x^۱) = ۱x^{۰}$ ،

یا ساده‌تر $\frac{d}{dx}(۱) = ۰$ و $\frac{d}{dx}(x) = ۱$ وقتی $x \neq ۰$.

از این‌رو، در دامنه پذیرفته شده درست است. البته، هیچکس عملاً از آن در این حالات استفاده نمی‌کند، زیرا فرمول‌های $\frac{d}{dx}(۱) = ۰$ و $\frac{d}{dx}(x) = ۱$ بدون توسل به قاعدهٔ توانی (و در IR) برقرارند.

از این‌رو، فرض کنیم $n \geq ۲$ و $f(x)=x^n$، در این صورت

$$f'(x) = \lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to ۰}\frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(x^n+nx^{n-1}h+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2+\cdots+nxh^{n-1}+h^n)-x^n}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h+\cdots+nxh^{n-2}+h^{n-1})}{\cancel{h}}$$

با حذف عامل $h\neq 0$، همهٔ جملات باقی‌مانده جز جملهٔ اوّل دارای عامل h هستند درنتیجه وقتی $h\to 0$ خواهیم داشت:

$$\frac{d}{dx}(x^n)=nx^{n-1}$$

حالت دوّم: $r=n$، که در آن n عدد صحیح منفی است. با انتخاب $m=-n>0$ و $x\neq 0$،

$$f(x)=x^n=x^{-m}=\frac{1}{x^m}$$

لذا بنابرقضیه ۲ (مشتق خارج‌قسمت) و $\frac{d}{dx}(x^m)=mx^{m-1}$ داریم:

$$f'(x)=\frac{0\times x^m-mx^{m-1}\times 1}{(x^m)^2}=-mx^{m-1-2m}$$

$$f'(x)=nx^{n-1}$$

حالت سوم: وقتی r عدد گویای $\frac{p}{q}$ باشد و $f(x)=x^{\frac{p}{q}}$ ثابت می‌شود (در بخش بعدی) به‌ازای هر x از دامنه تابع مشتق

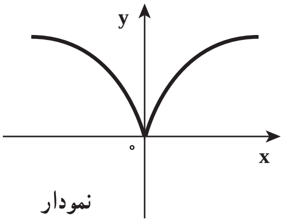
$$f'(x)=\frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1}$$

حالت چهارم: وقتی که r عدد گنگی باشد، مثل $\frac{d}{dx}(x^\pi)=\pi x^{\pi-1}$. فعلاً نمی‌توانیم به اثبات آن بپردازیم زیرا هنوز علامتی مانند x^π و یا $x^{\sqrt{2}}$ را تعریف نکرده‌ایم.

مثال: فرض کنید $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$،

الف) دامنه تابع مشتق f را تعیین کنید.

ب) ضابطه تابع مشتق f را به‌دست آورید.



نمودار

حل: الف) قبلاً نمودار f به شکل روبه‌رو رسم شده و در مبدأ نقطه بازگشتی دارد، پس تابع f در $x=0$ مشتق‌ناپذیر است.

بنابراین

$$D_{f'} = \mathbb{R} - \{۰\}$$

پ) به‌ازای هر x عضو دامنه تابع f' داریم.

$$\frac{d}{dx}(x^{\frac{۲}{۳}}) = \frac{۲}{۳}x^{\frac{۲}{۳}-۱} = \frac{۲}{۳}x^{-\frac{۱}{۳}}$$

بنابراین

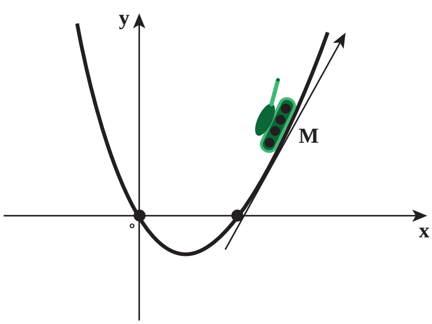
$$f'(x) = \frac{۲}{۳\sqrt[۳]{x}}$$

تمرین در کلاس

با فرض اینکه $f(x) = \sqrt[۹]{x^۲}$، حاصل $\lim_{h\to ۰}\frac{f^۳(۱+h)-f^۳(۱)}{h}$ را به‌دست آورید.

مثال: یک تانک دشمن در صفحهٔ مختصات خودی روی منحنی $f(x)=x^۲-x$ حرکت می‌کند و یک بسیجی با (آر ــ پی ــ جی ــ ۷) در نقطه $(۴,۸)$ منتظر شکار تانک است و زمان مطلوب وقتی است که مسیر گلوله خط راستی مماس بر منحنی f باشد، نقطه مطلوب مسیر تانک را تعیین کنید.

حل: فرض کنید $M(a\,,a^۲-a)$ نقطه مطلوب باشد. در این صورت، ابتدا معادله خط مماس بر منحنی را در نقطهٔ M به‌دست می‌آوریم.



$f'(x)=۲x-۱$

$y-(a^۲-a)=f'(a)(x-a)$

$y-a^۲+a=(۲a-۱)(x-a)$

خط مماس از نقطه $(۴,۸)$ می گذرد بنابراین

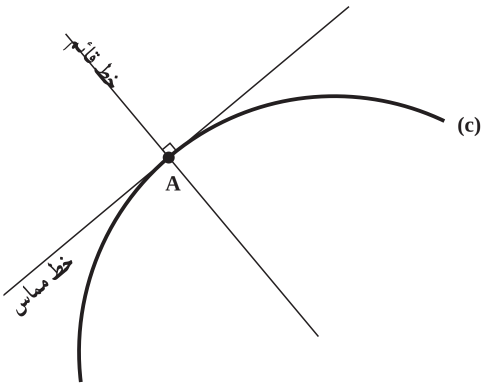
$۸-a^۲+a=(۲a-۱)(۴-a)$

$a^۲-۸a+۱۲=۰$

$a=۲$ یا $a=۶$

پس مسیر موشک در نقطه $(۲,۲)$ بر مسیر تانک مماس است.

یادداشت : مثال فوق نشان می‌دهد که از نقطهٔ $A(۴,۸)$ خارج منحنی $y=x^۲-x$، می‌توان دو خط مماس به شیب‌های $m_۱=f'(۲)=۳$ و $m_۲=f'(۶)=۱۱$ بر منحنی f رسم کرد، با نقاط تماس $M(۲,۲)$ و $B(۶,۳۰)$



یادداشت : به کمک قاعده‌های مشتق‌گیری و بدون مراجعه به تعریف مشتق علاوه‌بر خط‌های مماس، می‌توانیم خط‌های قائم را هم پیدا کنیم.
خط قائم بر منحنی (C) در نقطهٔ A خطی است که از A می‌گذرد و بر خط مماس بر منحنی در A عمود است (در فیزیک بخش نور، به زاویهٔ میان پرتوهای نور و خط عمود بر عدسی نیاز است (شکل روبه‌رو را ببینید).

تمرین در کلاس

۱ــ معادلهٔ خط‌های مماس و قائم بر منحنی $y=\frac{\cos x}{۲+\sin x}$ در نقطهٔ $(۰,\frac{۱}{۲})$ را پیدا کنید.

۲ــ از نقطه $A(۰,-۱)$ دو خط مماس بر منحنی $f(x)=x^۲+x$ رسم شده است معادلات این دو خط مماس را به‌دست آورید.

۳ــ خط $y=۲x+۱$ در نقطهٔ $x_۰=۱$ بر منحنی پیوسته $y=f(x)$ مماس است مقدار $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{f^۲(x)+۳f(x)-۱۸}{x-۱}$ را حساب کنید.

۳ـ۷ـ مشتق‌های مرتبه‌های بالاتر

برای به‌دست آوردن تابع شتاب، از تابع موقعیت (مکان)، باید از تابع موقعیت دوبار مشتق گرفت.

(تابع موقعیت) $S(t)$

(تابع سرعت) $V(t)=S'(t)$

(تابع شتاب) $a(t)=V'(t)=S''(t)$

$a(t)$ را مشتق دوم $s(t)$ نامیده و آن را با $s''(t)$ نشان می‌دهیم مشتق دوّم، مثالی است از مشتق مرتبه‌های بالاتر بنابراین اگر تابع مشتق یعنی f' مشتق‌پذیر باشد، تابع مشتق f' را با f'' نشان داده و آن را مشتق مرتبه دوم (و یا مشتق دوّم) f می‌نامیم.

تا آنجا که مشتق‌پذیری وجود دارد، می‌توان مشتق‌گیری از مشتقات را ادامه داد و در این صورت، مشتق‌های مرتبه‌های بالاتر تابع $y = f(x)$ را به‌صورت زیر نسبت به x نشان می‌دهیم :

مشتق اوّل f : $y', f'(x) \ , \ \dfrac{dy}{dx} \ , \ \dfrac{d}{dx}[f(x)], D_x(y)$

مشتق دوم f : $y'', f''(x) \ , \ \dfrac{d^۲y}{dx^۲} \ , \ \dfrac{d^۲}{dx^۲}[f(x)], D_x^۲(y)$

مشتق سوم f : $y^{(۳)}, f^{(۳)}(x) \ , \ \dfrac{d^۳y}{dx^۳} \ , \ \dfrac{d^۳}{dx^۳}[f(x)], D_x^۳(y)$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

مشتق n ام f : $y^{(n)}, f^{(n)}(x) \ , \ \dfrac{d^ny}{dx^n} \ , \ \dfrac{d^n}{dx^n}[f(x)], D_x^n(y)$

مثال: اگر $f(x)$ یک چندجمله‌ای درجهٔ n باشد، یعنی

$$f(x) = a_۰ + a_۱x + a_۲x^۲ + \dots + a_nx^n$$

که در آن $a_۰, a_۱, \dots, a_{n-۱}, a_n$ ثابت هستند، $(a_n \neq ۰)$ مشتق n ام $f(x)$، را حساب کنید.

حل: چون تابع چندجمله‌ای درجه n، از هر مرتبه مشتق‌پذیر است بنابراین :

$$f'(x) = a_۱ + ۲a_۲x + ۳a_۳x^۲ + ۴a_۴x^۳ + \dots + na_nx^{n-۱}$$

$$f''(x) = ۲a_۲ + ۶a_۳x + ۱۲a_۴x^۲ + \dots + n(n-۱)a_nx^{n-۲}$$

$$f^{(۳)}(x) = ۶a_۳ + ۲۴a_۴x + \dots + n(n-۱)(n-۲)a_nx^{n-۳}$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = n(n-۱)(n-۲) \times \dots \times ۲ \times ۱ \times a_n = n!a_n$$

و برای هر $k > n$ ، $f^{(k)}(x) = ۰$

تمرین در کلاس

مشتق چهارم تابع $f(x) = (x^۲ + ۱)(x^۲ + ۲)(x^۲ + ۳)$ را در $x = ۱$ حساب کنید.

مثال: مشتق‌پذیری تابع $f(x) = |x|$ و مشتق‌های مراتب بالاتر آن را روی $\mathbb{R}$ بررسی کنید.

حل: می‌دانیم

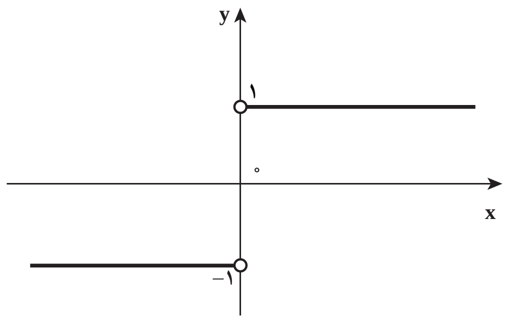
$$f(x) = \begin{cases} -x \ , & x < ۰ \\ x \ , & x \geq ۰ \end{cases}$$

چون

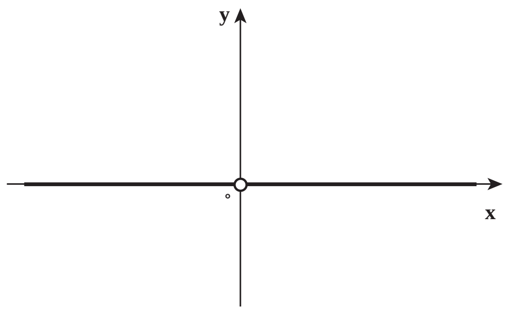
$$f'_-(\circ)=\lim_{x\to \circ^-}\frac{f(x)-f(\circ)}{x-\circ}=\lim_{x\to \circ^-}\frac{-x}{x}=-۱$$

$$f'_+(\circ)=\lim_{x\to \circ^+}\frac{f(x)-f(\circ)}{x-\circ}=\lim_{x\to \circ^+}\frac{x}{x}=۱$$

بنابراین تابع f در $x=\circ$ مشتق‌پذیر نیست و



$$f'(x)=\begin{cases}-۱ & , \ x<\circ \\ \text{تعریف نشده} & , \ x=\circ \\ ۱ & , \ x>\circ\end{cases}$$



$$f''(x)=\begin{cases}\circ & , \ x<\circ \\ \circ & , \ x>\circ\end{cases}$$

تابع f'' در $x=\circ$ تعریف نشده است.

و یا

$$f''(x)=\circ \quad , \quad x\neq \circ$$

و برای هر $n\geq ۳$

$$f^{(n)}(x)=\circ \ , x\neq \circ$$

تمرین در کلاس

فرض کنید $f(x)=|x^۲-۴|$

الف) مشتق‌پذیری تابع f را در ۲ و $x=-۲$ بررسی نمایید.

ب) ضابطه تابع مشتق و نمودار آن را رسم کنید.

پ) با تعیین ضابطه توابع f'' و $f^{(۳)}$، ضابطهٔ مشتق n ام تابع f را به‌دست آورید.

برای یافتن مشتق تابع‌های **قطعه قطعه** تعریف شده (نظیر تابع قدرمطلق و تابع جزء صحیح) قضیه زیر بسیار مؤثر است و حل مسأله را ساده‌تر می‌کند.

قضیه ۳:

الف) اگر f روی بازه $[a, x_\circ]$ پیوسته و روی بازهٔ باز $(a, x_\circ)$ مشتق‌پذیر بوده و $\lim\limits_{x\to x_\circ^-} f'(x)$ وجود داشته باشد، آنگاه :

$$f'_-(x_\circ) = \lim_{x\to x_\circ^-} f'(x)$$

ب) اگر f روی بازه $[x_\circ, b)$ پیوسته و روی بازهٔ باز $(x_\circ, b)$ مشتق‌پذیر بوده و $\lim\limits_{x\to x_\circ^+} f'(x)$ وجود داشته باشد، آنگاه :

$$f'_+(x_\circ) = \lim_{x\to x_\circ^+} f'(x)$$

مثال: مشتق چپ و مشتق راست تابع $f(x) = |x-۱| + ۲|x-۲|$ را در $x = ۱$ حساب کنید.

حل: تابع f روی IR پیوسته است و برای هر x از بازه $(\circ, ۱]$، $f(x) = -۳x + ۵$

پس برای هر x از بازه $(\circ, ۱)$، $f'(x) = -۳$

همچنین برای هر x از بازه $[۱, ۲)$، $f(x) = -x + ۳$

پس برای هر x از بازه $(۱, ۲)$، $f'(x) = -۱$

بنابراین $f'_-(۱) = \lim\limits_{x\to ۱^-} f'(x) = -۳$ $\quad$ $f'_+(۱) = \lim\limits_{x\to ۱^+} f'(x) = -۱$

در نتیجه تابع در $x = ۱$ مشتق‌پذیر نیست.

تمرین در کلاس

مشتق چپ و مشتق راست تابع f با ضابطه $f(x) = x[x^۳ + ۳]$ را در نقطهٔ $x = \circ$ را در صورت وجود به‌دست آورید ([ ] نماد جزء صحیح است).

مسائل

۱ــ فرض کنید تابع f در $x=۱$ مشتق‌پذیر و $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(۱+h)}{h}=۳$ ، مقدارهای $f(۱)$ و $f'(۱)$ را به‌دست آورید.

۲ــ فرض کنید $f(x)=\begin{cases} x^۳ & , |x|\geq ۱ \\ ۲x^۲-۱ & , |x|<۱\end{cases}$ ، حاصل $\lim\limits_{h\to ۰^-}\frac{f(۱+h)-۱}{h}$ را بیابید.

۳ــ فرض کنید $f(x)=\sin x\left[\cos\frac{x}{۲}\right]$ ، مشتق چپ و مشتق راست تابع f را در نقطه $x=\pi$ حساب کنید.

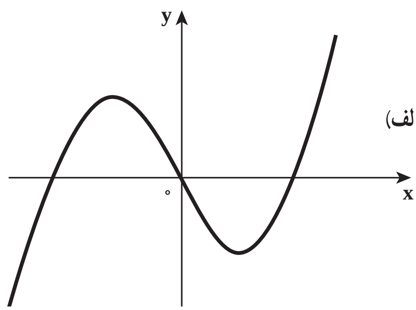
۴ــ الف) ثابت کنید : اگر f در a مشتق‌پذیر باشد، حد زیر موجود و برابر با $f'(a)$ است

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{۲h}=f'(a)$$

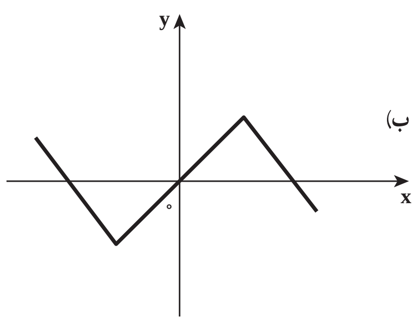
ب) نشان دهید که اگر حد در قسمت الف وجود داشته باشد، لزومی ندارد که تابع در نقطهٔ a مشتق‌پذیر باشد.

۵ــ نمودار هریک از تابع‌های قسمت‌های (الف) تا (ت) را به نمودار مشتقش در قسمت‌های (۱) تا (۴) متناظر کنید و ضمناً دلیل انتخاب خود را بیان کنید.

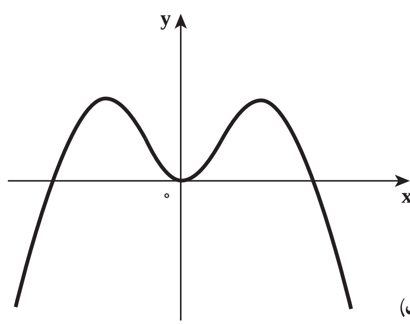
الف)



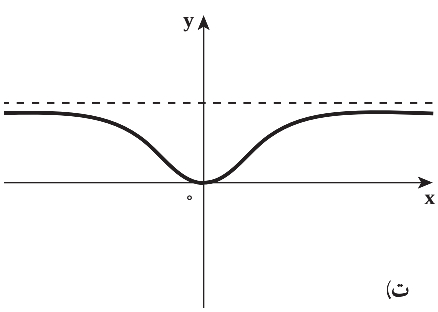
ب)

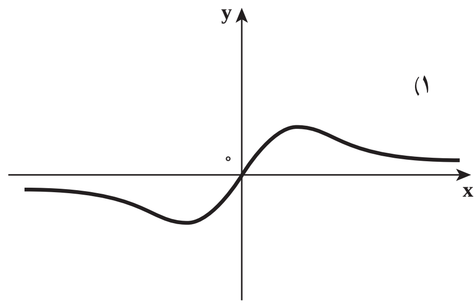


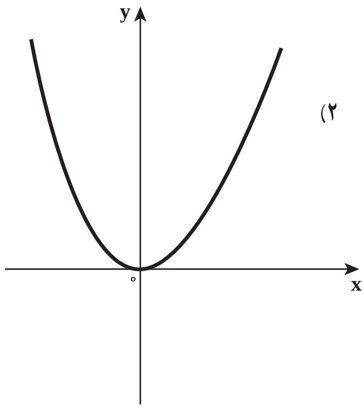
پ)

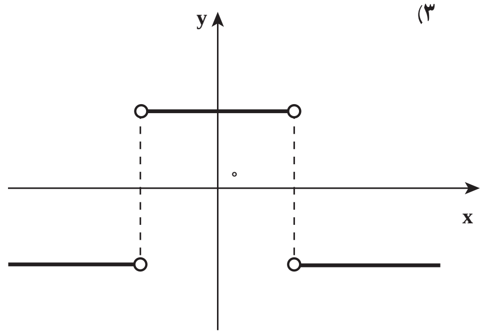


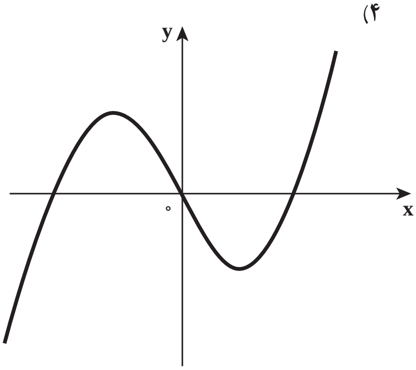
ت)



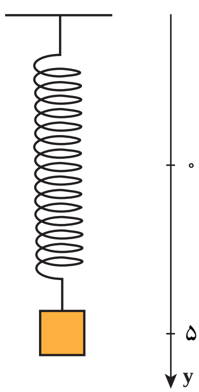
۱)


۲)


۳)


۴)


۶ــ فرض کنید $y = \dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$ ، حاصل عبارت $y^2 + 2y'y\,(1 + x)$ را به‌دست آورید.



۷ــ جسمی به انتهای فنری آویزان است، آن را به اندازه ۵ سانتی متر پایین کشیده و در لحظه $t = 0$ رهایش می‌کنیم (مطابق شکل رسم شده جهت روبه‌پایین، جهت مثبت است) موقعیت این جسم در زمان t از رابطه $y = f(t) = 5\cos t$ به‌دست می‌آید. سرعت و شتاب این جسم را در زمان t پیدا کنید و سپس به کمک نتایج به‌دست آمده حرکت جسم را تحلیل کنید.

۸ــ فرض کنید $f(x)\, x^6 - 2x^4 - x + 1$، حاصل $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f'(1+h) - f'(1)}{h}$ را به دست آورید.

۹ــ اگر $f(x)=\frac{x+۱}{x}sgn(x^۲-x+۱)$، $f'(x)$ را حساب کنید.

۱۰ــ ضابطه تابع درجه دوّم f را چنان انتخاب کنید که $f(۱)=۲$ و $f'(۱)=۳$ و $f''(۱)=۴$ باشد.

۱۱ــ نقطه‌ای روی نمودار تابع $y=x^۲+x$ پیدا کنید که در آن نقطه، خط مماس بر منحنی تابع، موازی قاطعی باشد که دو نقطه با طول‌های $x=۱$ و $x=۳$ واقع بر منحنی تابع را به‌هم وصل کند.

۱۲ــ معادله خط مماس بر منحنی تابع $f(x)=\frac{۱+۲\sin x}{\sin x}$ را در نقطه $(\frac{\pi}{۶},۴)$ به‌دست آورید.

۱۳ــ به ازای چه مقادیری از a، b و c تابع $f(x)=\begin{cases} x^۳ & , x<۱ \\ ax^۲+bx+c & , a\geq ۱ \end{cases}$ در نقطه $x=۱$ مشتق مرتبه دوّم دارد؟

۱۴ــ الف) با محاسبه مشتق اوّل و دوم و سوم تابع $f(x)=\sin x$، مشتق nام تابع f را حدس بزنید و سپس درستی حدس خود را به استقراء ثابت کنید.

ب) با استفاده از قسمت الف، دستور مشتق n ام تابع $f(x)=\cos x$ را به‌دست آورید.

۳ـ ۸ـ قاعدهٔ زنجیری

با وجود اینکه می‌توانیم مشتق $\sqrt{x}$ و $x^۴+۱$ را بیابیم ولی هنوز نمی‌توانیم مشتق $f(x)=\sqrt{x^۴+۱}$ را حساب کنیم.

توجه کنید که f تابعی ترکیبی است که اگر فرض کنیم $y=f(u)=\sqrt{u}$ و $u=g(x)=x^۴+۱$ می‌توانیم بنویسیم :

$$y=f(x)=f(g(x))$$

یعنی $f=fog$

قاعدهٔ محاسبه مشتق تابع‌های f و g را می‌دانیم، در نتیجه دانستن قاعده‌ای که براساس آن بدانیم چگونه مشتق $f=fog$ را برحسب مشتق‌های f و g پیدا کنیم، بسیار با اهمیت است. و این قاعده را **قاعدهٔ زنجیری** می‌نامند.

اکنون فرض کنید تابع $y=\frac{۱}{x^۲+۱}$ برابر است با تابع مرکب $y=f(g(x))$، که در آن $f(u)=\frac{۱}{u}$ و $u=g(x)=x^۲+۱$ و این توابع دارای مشتق‌های $g'(x)=۲x$، $f'(u)=\frac{-۱}{u^۲}$ هستند.

بنابر قاعدهٔ خارج قسمت (که حالت خاصی از قاعدهٔ زنجیری است)

$$\frac{d}{dx}f(g(x))=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2+1}\right)=\frac{-2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-1}{(x^2+1)^2}(2x)=f'(g(x))g'(x)$$

این مثال می‌گوید مشتق تابع مرکب $y=f(g(x))$ برابر است با مشتق f به ازای $g(x)$، ضرب در مشتق g به ازای x، این همان **قاعدهٔ زنجیری** است.

$$\frac{d}{dx}f(g(x))=f'(g(x))g'(x)$$

طرح این مثال ایده‌ای است برای بیان قضیه مشتق تابع مرکب (و یا **قاعده زنجیری**)

قضیه ۱: قاعده زنجیری : اگر تابع g در نقطهٔ x و تابع f در نقطهٔ $g(x)$ مشتق‌پذیر باشند، آنگاه تابع مرکب fog در نقطه x مشتق‌پذیر است و $(fog)'(x)=f'(g(x))\,g'(x)$

با استفاده از نمادگذاری لایبنیتس، اگر $y=f(u)$، که در آن $u=g(x)$ آنگاه $y=f(g(x))$ و

آهنگ تغییر y نسبت به u عبارت است از $\frac{dy}{du}$

آهنگ تغییر u نسبت به x عبارت است از $\frac{du}{dx}$

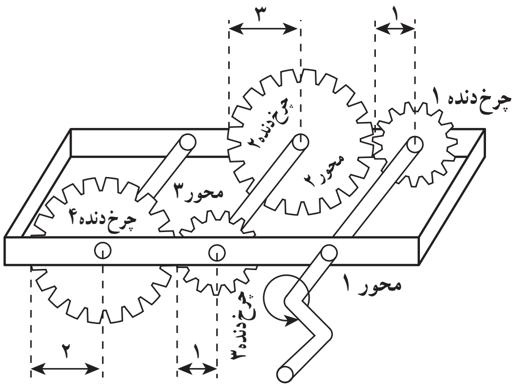
بنابراین، آهنگ تغییر $y=f(u)=f(g(x))$ نسبت به x عبارت است از $\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}$ یعنی

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}} \qquad (1)$$

که $\frac{dy}{du}$ در $u=g(x)$ محاسبه شده است.

به‌نظر می‌رسد که برای رسیدن به رابطه (۱)، نماد du را از صورت و مخرج حذف کرده‌ایم، ولی این کار معنی‌داری نیست زیرا $\frac{dy}{du}$ معرف خارج قسمت دو کمیت نیست، بلکه کل آن معرف کمیت واحدی به نام مشتق y نسبت به u است.

بیان یک مثال فیزیکی از مشتق تابع مرکب : در شکل صفحه بعد مجموعه‌ای از چرخ دنده‌ها را می‌بینید که چرخ‌دندهٔ دوم و سوم روی محور واحدی قرار دارند. وقتی محور اول می‌چرخد، محور دوّم را حرکت می‌دهد، و این محور خود محور سوم (چرخ‌دنده ۴) را حرکت خواهد داد. فرض کنیم y ، u و x تعداد دوران‌های محورهای اوّل، دوم، و سوم در دقیقه باشند. $\frac{du}{dx}$ و $\frac{dy}{du}$ و $\frac{dy}{dx}$ را یافته و نشان دهید $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}$



محور ۱ : y دوران در دقیقه

محور ۲ : u دوران در دقیقه

محور ۳ : x دوران در دقیقه

حل. چون محیط چرخ دندهٔ دوم ۳ برابر محیط چرخ دندهٔ اول است ($r_۲ = ۳r_۱$ شعاع)، چرخ دندهٔ اول باید ۳ دور بچرخد تا چرخ‌دندهٔ دوم یک‌بار دوران نماید. همچنین چرخ‌دندهٔ دوم باید ۲ دور بچرخد تا چرخ‌دندهٔ چهارم یک‌بار دوران نماید و داریم $\frac{dy}{du} = ۳$ و $\frac{du}{dx} = ۲$

با ادغام این دو نتیجه معلوم می‌شود که محور اوّل باید ۶ دور بچرخد تا محور سوم (چرخ‌دندهٔ ۴) یک‌بار دوران نماید. در نتیجه

$$\frac{dy}{dx} = (\frac{dy}{du})(\frac{du}{dx}) = (۳)(۲) = ۶$$

به عبارت دیگر، میزان تغییر y نسبت به x حاصلضرب میزان تغییر y نسبت به u در میزان تغییر u نسبت به x است.

مثال: مشتق تابع $f(x) = \sqrt{x^۴ + ۱}$ را با استفاده از قاعدهٔ زنجیری پیدا کنید.

حل اوّل: ابتدا ضابطه f را به شکل $f(x) = (fog)(x) = f(g(x))$ می‌نویسیم که در آن $u = g(x) = x^۴ + ۱$ و $f(u) = \sqrt{u}$ چون $f'(u) = \frac{۱}{۲\sqrt{u}}$ و $g'(x) = ۴x^۳$ پس بنابر قضیه ۴

$$f'(x) = f'(g(x)) \times g'(x) = \frac{۱}{۲\sqrt{x^۴ + ۱}} \times ۴x^۳ = \frac{۲x^۳}{\sqrt{x^۴ + ۱}}$$

حل دوم: با استفاده از تساوی (۱) اگر فرض کنیم $u = x^۴ + ۱$ و $y = \sqrt{u}$ ، آنگاه

$$f'(x) \text{ یا } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = \frac{۱}{۲\sqrt{u}} \times ۴x^۳ = \frac{۱}{۲\sqrt{x^۴ + ۱}} \times ۴x^۳ = \frac{۲x^۳}{\sqrt{x^۴ + ۱}}$$

تمرین در کلاس

اگر n عدد حقیقی باشد و تابع $u = g(x)$ مشتق‌پذیر، آن وقت $\frac{d}{dx}(u^n)$ را به‌دست آورید.

یادداشت : از فعالیت بالا که محاسبه $\frac{d}{dx}(u^n)$ موردنظر است قاعدهٔ مهم زیر به‌دست می‌آید و آن را قاعدهٔ **توانی کلی** می‌نامیم.

$$\boxed{\frac{d}{dx}(u^n)=nu^{n-1}\frac{du}{dx}=nu^{n-1}u'}$$

مثال : از توابع زیر مشتق بگیرید.

الف) $y=\sin(x^3)$ ب) $y=\cos^3(x)$

حل :

الف) فرض کنید $u=x^3$ و $y=\sin u$ پس بنابر قاعده زنجیری

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}$$

در نتیجه

$$\frac{dy}{dx}=(\cos u)\times 3x^2=3x^2\cos x^3$$

ب) فرض کنید $u=\cos x$ و $y=u^3$، پس بنابر قاعده توانی کلی

$$\frac{dy}{dx}=3u^2u'=3\cos^2x(-\sin x)=-3\sin x\cos^2x$$

تمرین در کلاس

فرض کنید $u=g(x)$ تابعی مشتق‌پذیر باشد.

الف) مشتق تابع‌های $y=\sin u$ و $y=\cos u$ را بیابید.

ب) مشتق تابع‌های $y=\tan u$ و $y=\cot u$ (با شرط اینکه tan و cot در u مشتق‌پذیرند) را بیابید.

۳ـ۹ـ مشتق‌گیری ضمنی

اکثر توابعی که با آنها سروکار داریم، دارای معادله‌ای هستند که y (مقدار تابع) را به‌طور صریح برحسب متغیر x بیان می‌کند مثلاً

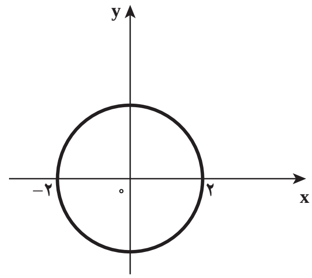
$$y=\sin x \quad , \quad y=x\sqrt{x^2+1}$$

یا در حالت کلی، $y=f(x)$

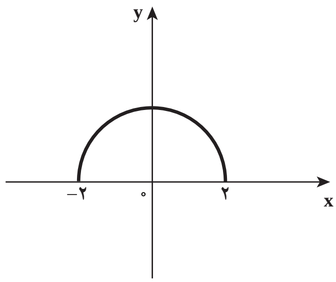
اما بعضی اوقات به معادلاتی نظیر $x^2+y^2-4=0$، $x^3+y^3=6xy$ برمی‌خوریم که y را به‌طور صریح برحسب متغیر x به دست نمی‌دهند. البته در برخی موارد می‌توان چنین معادله‌هایی را حل کرد تا y را به‌طور صریح برحسب x به‌دست آورد مثلاً در معادله $x^2+y^2=4$ (معادله دایره‌ای به مرکز مبدأ

مختصات و به شعاع ۲ $(R = ۲)$ جواب‌های y می‌شوند $y = \pm\sqrt{۴ - x^۲}$ در نتیجه $x^۲ + y^۲ - ۴ = ۰$، معادله ضمنی تابع‌های $f(x) = \sqrt{۴ - x^۲}$ و $g(x) = -\sqrt{۴ - x^۲}$ می‌باشد.

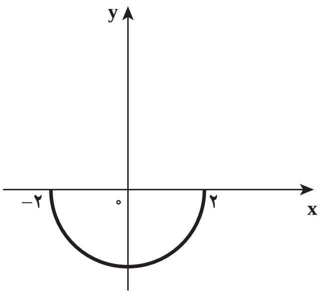
نمودارهای f و y نیم‌دایره‌های بالایی و پایینی دایرهٔ $x^۲ + y^۲ = ۴$ هستند. (شکل زیر)



الف) $x^۲ + y^۲ = ۴$

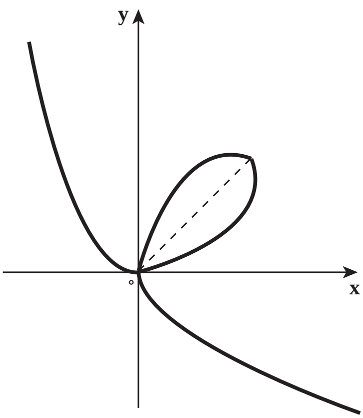


ب) $y = \sqrt{۴ - x^۲}$



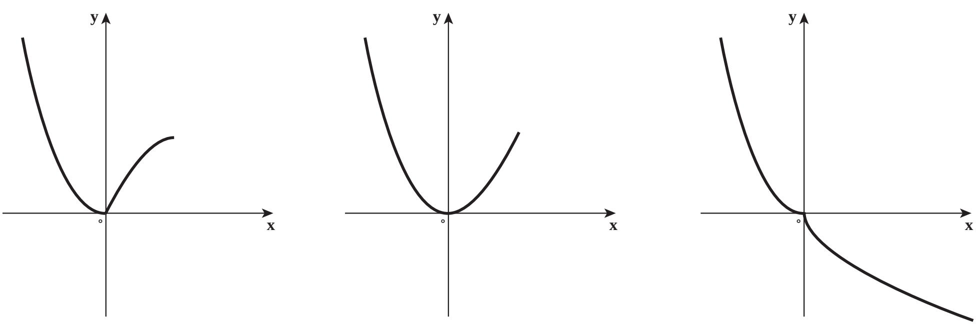
پ) $g(x) = -\sqrt{۴ - x^۲}$

حل کردن معادله $x^۳ + y^۳ = ۶xy$ برای یافتن y برحسب متغیر x کار ساده‌ای نیست (برای سیستم‌های جبری کامپیوتری چنین کاری دشوار نیست، امّا عبارتی که به‌دست می‌آید خیلی پیچیده است) به هرحال $x^۳ + y^۳ = ۶xy$ معادله یک منحنی است که آن را منحنی **برگی دکارت** می‌نامند. (شکل روبه‌رو)



نمودار $x^۳ + y^۳ = ۶xy$

و از این منحنی برگی دکارت می‌توان چندین تابع تعریف کرد که معادله ضمنی آن توابع همان $x^۳ + y^۳ = ۶xy$ است در شکل زیر سه تا از آن تابع‌ها نشان داده شده‌اند.



درخور توجه است که برای پیدا کردن $\frac{dy}{dx}$ نیازی نداریم که y را برحسب متغیر x پیدا کنیم، به جای این‌کار از **مشتق‌گیری ضمنی** استفاده می‌کنیم، برای این منظور از دوطرف معادله نسبت به x مشتق می‌گیریم و از معادلهٔ حاصل $y' = \frac{dy}{dx}$ را به‌دست می‌آوریم، با این فرض که همواره معادلهٔ داده شده، y را به‌طور ضمنی برحسب تابعی مشتق‌پذیر از x تعریف می‌کند.

مثال: الف) اگر $x^۲ + y^۲ = ۴$، $\frac{dy}{dx}$ را بیابید.

ب) معادله مماس بر دایره $x^۲ + y^۲ = ۴$ را در نقطه $(۱, \sqrt{۳})$ بیابید.

حل: از طرفین معادله $x^۲ + y^۲ = ۴$ نسبت به x مشتق می‌گیریم.

$$\frac{d}{dx}(x^۲ + y^۲) = \frac{d}{dx}(۴)$$

$$\frac{d}{dx}(x^۲) + \frac{d}{dx}(y^۲) = ۰$$

قابل توجه این که $y = f(x)$ تابعی است مشتق‌پذیر و بنابر قاعده «توانی کلی» در مشتق تابع مرکب داریم :

$$\frac{d}{dx}(y^۲) = ۲yy'$$

بنابراین

$$۲x + ۲yy' = ۰$$

اکنون از این معادله y' را پیدا می‌کنیم

$$\frac{dy}{dx} \quad \text{یا} \quad y' = \frac{-x}{y} \quad , \quad (y \neq ۰)$$

ب) در نقطه $(۱, \sqrt{۳})$ ، مشتق تابع (نیم‌دایره بالایی) برابر است با

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-۱}{\sqrt{۳}} = -\frac{\sqrt{۳}}{۳} \quad \text{شیب مماس}$$

بنابراین معادله خط مماس بر دایره در نقطه $(۱, \sqrt{۳})$ می‌شود

$$y - \sqrt{۳} = -\frac{\sqrt{۳}}{۳}(x - ۱)$$

یا

$$y = -\frac{\sqrt{۳}}{۳}x + \frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$$

تمرین در کلاس

الف) اگر $\cos\sqrt{y} = y^{۲}\sin x$ ، $\frac{dy}{dx}$ را پیدا کنید.

ب) اگر $x + y^{۴} + ۱ = y + x^{۲} + xy^{۲}$، $\frac{d^{۲}y}{dx^{۲}}$ را در نقطه (۱،۱) پیدا کنید.

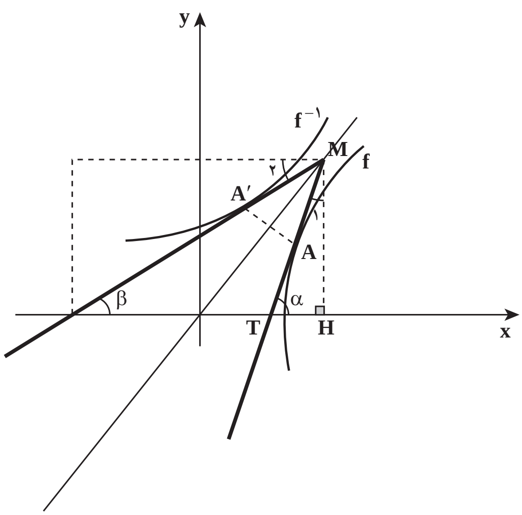
پ) معادله خط مماس بر منحنی $x^{۳} + y^{۳} = ۶xy$ را در نقطه $(\frac{۸}{۳},\frac{۴}{۳})$ پیدا کنید.

۳ـ۱۰ـ مشتق تابع وارون

فرض کنید f تابعی یک به یک و مشتق‌پذیر باشد. با یک رویکرد هندسی می‌توانیم تابع مشتق‌پذیر را تابعی بدانیم که نمودارش گوشه یا پیچ ندارد. در نتیجه نمودار $f^{-۱}$ که قرینه نمودار f نسبت به خط $y = x$ است، گوشه یا پیچ ندارد.

بنابراین انتظار داریم که $f^{-۱}$ نسبت به خط $y = x$ است، گوشه یا پیچ ندارد.

بنابراین انتظار داریم که $f^{-۱}$ نیز به‌جز در جاهایی که مماس‌ها قائم‌اند، مشتق‌پذیر باشد. و به‌صورت شهودی با یک استدلال هندسی مقدار مشتق $f^{-۱}$ را در نقطهٔ داده شده به‌دست آورید در شکل (روبه‌رو) نقطه $A\ (a, b)$ روی نمودار f و نقطه $A'(b, a)$ قرینه A نسبت به خط $y = x$ روی نمودار $f^{-۱}$ درنظر می‌گیریم



$f'(a) = \tan\alpha$ و $(f^{-۱})'(b) = \tan\beta$

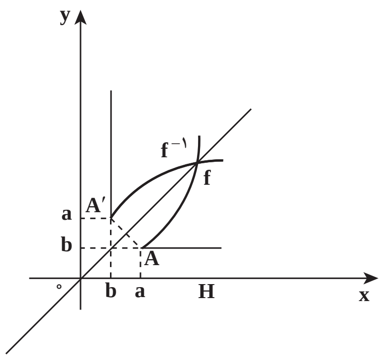
فعالیت

شکل (۶) را درنظر گرفته و رابطهٔ بین $f'(a)$ و $(f^{-۱})'(b)$ را به‌دست آورید.

نتیجه به‌دست آمده در این فعالیت یک ایده‌ای است برای بیان قضیه بعدی.

قضیه: فرض کنید I یک بازه و $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی باشد که در نقاط درونی بازه I مشتق‌پذیر و مشتق آن همه‌جا مثبت یا همه‌جا منفی است. در این صورت تابع f^{-1} (وارون f) نیز در همهٔ نقاط درونی دامنه‌اش مشتق‌پذیر است و به ازای هر نقطهٔ درونی از دامنه f^{-1} مانند b که $b = f(a)$

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$$



یادداشت: اگر $f'(a) = 0$ یعنی خط مماس بر نمودار f افقی باشد و به معادله $y = b$، آن وقت خط مماس در نقطه b از نمودار f^{-1} خطی است عمود بر محور x و به معادله $x = b$ و در این صورت تابع f^{-1} در نقطه b مشتق ندارد. (شکل روبه‌رو را ببینید)

مثال: فرض کنید $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 6x + 1$ مقدار $(f^{-1})'(1)$ را در صورت وجود پیدا کنید.

حل: تابع f همواره مشتق‌پذیر و مشتق آن همه‌جا مثبت است (چرا؟) و $b = 1$ پس از $2x^3+3x^2+6x+1 = 1$ نتیجه می‌شود فقط $x = 0$ یعنی $a = 0$

$$f'(x) = 6x^2 + 6x + 6 = f'(0) = 6$$

بنابراین

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(e)} = \frac{1}{6}$$

تمرین در کلاس

۱ــ فرض کنید f^{-1} تابع وارون تابع مشتق‌پذیر f باشد و $g(x) = \frac{1}{f^{-1}(x)}$ اگر $f(1) = 2$ و $f'(1) = \frac{1}{8}$، $g'(2)$ را بیابید.

۲ــ تابع $f(x) = \sin x$ را با دامنه $D = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ درنظر بگیرید. مشتق تابع $f^{-1} = \sin^{-1}$ را به

ازای هر x، عضو بازهٔ باز (۱،۱−) بیابید.

۳ـ۱۱ـ مشتق توابع نمایی و لگاریتمی طبیعی

وقتی سرمایه‌ای با آهنگ یکنواخت ۱۴درصد در سال افزایش می‌یابد به‌نظر منطقی است که انتظار داشته باشیم آهنگ رشد آن در هر **لحظه** با مقدار سرمایه در آن **لحظه** متناسب باشد و یا وقتی جمعیت یک جامعه با آهنگ یکنواخت ۳ درصد در سال افزایش می‌یابد، آهنگ رشد جمعیت متناسب با جمعیت است. اینها نمونه‌هایی از پدیده‌ای موسوم به **رشد نمایی** می‌باشند.

همانند رشد نمایی، می‌توان صحبت از **زوال نمایی** کرد مثلاً مقدار اورانیم رادیواکتیو U^{235} با آهنگی متناسب با مقدار موجود U^{235} زوال می‌یابد. زوال اورانیم (یا به‌طور کلی عنصرهای رادیواکتیو) نمونه‌ای از پدیده‌ای به نام زوال‌نمایی است.

اکثر مسائل رشد نمایی و زوال‌نمایی به مدل ریاضی $f(x)=e^x$ می‌انجامد که برخی از خواص این تابع را پیش از این به وسیله مفهوم حد و پیوستگی بررسی کرده‌ایم.

اکنون می‌خواهیم آهنگ تغییر تابع نمایی طبیعی $f(x)=e^x$ را بررسی کنیم و قاعده‌ای برای مشتق این تابع بیابیم.

مشتق تابع نمایی طبیعی : مشتق تابع $f(x)=e^x$ را با استفاده از تعریف مشتق پیدا می‌کنیم

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}=\lim_{h\to 0}e^x\times\frac{e^h-1}{h}$$

عامل e^x به h بستگی ندارد، بنابراین می‌توانیم آن را به پیش از حد ببریم :

$$f'(x)=e^x\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} \qquad (1)$$

از تعریف e (عدد نِپِر) داریم :

$$\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}=e$$

از این رابطه و مفهوم حد نتیجه می‌شود

$$(1+h)^{\frac{1}{h}}\approx e$$

و این رابطه ایجاب می‌کند که

$$((1+h)^{\frac{1}{h}})^h\approx e^h$$

و یا

$$(1+h)\approx e^h$$

این مقدار را در رابطه (۱) جایگزین می‌کنیم

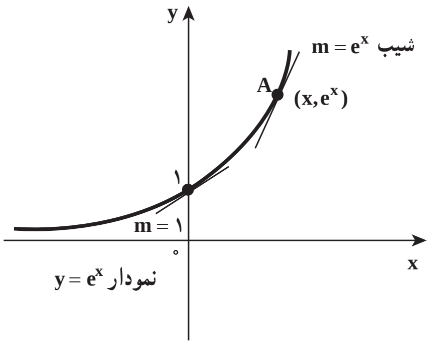
$$f'(x)=e^x\lim_{h\to 0}e^h=e^x\times 1=e^x$$

بنابراین

مشتق تابع نمایی طبیعی

$$\boxed{\frac{d}{dx}(e^x) = e^x}$$

در نتیجه تابع مشتق تابع نمایی طبیعی $f(x) = e^x$ خودش می‌باشد و با بیان هندسی شیب



خط مماس بر منحنی $y = e^x$ در هر نقطه برابر با مختص y همان نقطه است. (شکل روبه‌رو را ببینید)

یادداشت : $\lim\limits_{x\to -\infty} e^x = ۰$ و $\lim\limits_{x\to +\infty} e^x = +\infty$ خط $y = ۰$ مجانب افقی $y = e^x$ است.

مثال : فرض کنید $u = g(x)$ تابعی مشتق‌پذیر باشد، مشتق تابع $y = e^u$ را بیابید.

حل : با فرض $u = g(x)$ و $f(x) = e^x$ و $(fog)(x) = e^u$، بنابر قاعده زنجیری داریم :

$$(fog)'(x) = f'(g(x))\, g'(x)$$

چون $f'(x) = e^x$ پس $f'(u) = e^u$، بنابراین

$$\boxed{\frac{d}{dx}(e^u) = u'e^u}$$

تمرین در کلاس

معادلهٔ خط مماس بر منحنی $y = e^{۲x}\cos\pi x$ را در نقطهٔ $(۰, ۱)$ پیدا کنید.

مثال : مقدارهایی از λ را پیدا کنید که به ازای آنها $y = e^{\lambda x}$ در معادلهٔ دیفرانسیل $y'' + ۶y' + ۸y = ۰$ صدق کند.

(معادله‌ای که رابطه‌ای بین y و مشتقات اول یا بالاتر آن را بیان می‌کند، یک **معادله دیفرانسیل** نامیده می‌شود) .

حل :

$$y' = \lambda e^{\lambda x}$$

$$y'' = \lambda^۲ e^{\lambda x}$$

با جایگزین کردن y' و y'' در معادله دیفرانسیل داریم :

$$\lambda^۲ e^{\lambda x} + ۶\lambda e^{\lambda x} + ۸e^{\lambda x} = ۰$$

$$e^{\lambda x}(\lambda^۲+۶\lambda+۸)=۰$$

چون $e^{\lambda x}\neq ۰$، پس

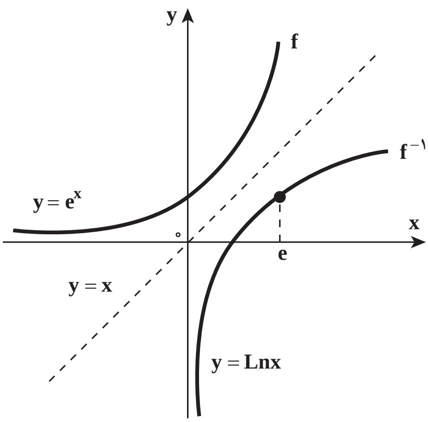
$$\lambda^۲+۶\lambda+۸=۰$$

$$\lambda=-۲,-۴$$

$y=e^{-۲x}$ و $y=e^{-۴x}$ جواب‌های معادله دیفرانسیل $y''+۶y'+۸y=۰$ می‌باشند.

تابع لگاریتمی طبیعی : با توجه به ویژگی‌های $f(x)=e^x$، تابع f پیوسته و یک به یک است بنابراین تابع وارون f موجود است و تابعی است پیوسته و یک به یک.

وارون تابع $y=e^x$ را می‌توان به صورت $x=e^y$ نوشت (y تابع x، f تابع $f^{-۱}$ است و بالعکس) و در عبارت $x=e^y$، y را لگاریتم x در پایهٔ e می‌خوانیم و با نماد $y=\text{Lnx}$ نشان می‌دهیم و این تابع را تابع **لگاریتمی طبیعی** می‌نامیم.



و با توجه به اینکه نمودار تابع وارون تابع f، قرینهٔ نمودار تابع f نسبت به نیمساز ربع اوّل و سوم است، به سادگی می‌توان نمودار تابع $y=\text{Lnx}$ را، به کمک نمودار $y=e^x$ رسم کرد. (شکل روبه‌رو)

دامنهٔ تابع $y=\text{Lnx}$، $(۰,+\infty)$ و برد آن $\mathbb{R}$ است

و $\lim\limits_{x\to+\infty}\text{Lnx}=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to۰^+}\text{Lnx}=-\infty$ بنابراین خط $x=۰$ مجانب قائم تابع $y=\text{Lnx}$ است.

مشتق تابع لگاریتمی طبیعی : تابع لگاریتم طبیعی $y=\text{Lnx}$ را درنظر می‌گیریم. می‌دانیم که این تابع مشتق‌پذیر است، زیرا وارون، تابع مشتق‌پذیر $y=e^x$ است.

فرض کنید $y=\text{Lnx}$ ، در این‌صورت $x=e^y$ اگر از طرفین معادله $e^y=x$ نسبت به متغیر x به صورت ضمنی مشتق بگیریم، به‌دست می‌آید :

$$e^y=\frac{dy}{dx}=۱$$

و یا

$$\frac{dy}{dx}=\frac{۱}{e^y}=\frac{۱}{x}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\mathrm{Ln}x)=\frac{۱}{x}} \qquad (۱)$$

در نتیجه

تمرین در کلاس

فرض کنید $u = g(x) > ۰$ تابعی مشتق‌پذیر باشد، به کمک قاعده (۱) و قاعدهٔ زنجیری ثابت کنید :

$$\frac{d}{dx}(\mathrm{Ln}u)=\frac{u'}{u}$$

مثال : اگر $f(x) = \mathrm{Ln}|x|$، $f'(x)$ را پیدا کنید.

حل : دامنه تابع f، $\mathrm{IR} - \{۰\}$ است پس

$$f(x)=\begin{cases}\mathrm{Ln}x & , \quad x>۰\\ \mathrm{Ln}(-x) & , \quad x<۰\end{cases}$$

بنابراین

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{۱}{x} & , \quad x>۰\\ \frac{۱}{-x}(-۱)=\frac{۱}{x} & , \quad x<۰\end{cases}$$

در نتیجه به ازای هر $x \neq ۰$ ، $f'(x)=\frac{۱}{x}$

نتیجه مثال (۷) ارزش به‌خاطرسپردن را دارد :

$$\frac{d}{dx}(\mathrm{Ln}|x|)=\frac{۱}{x}$$

تمرین در کلاس

۱ــ اگر $u = g(x) \neq ۰$ تابع مشتق‌پذیری باشد، به کمک نتیجه مثال ۷ و قاعده زنجیری نشان دهید :

$$\frac{d}{dx}(\mathrm{Ln}|u|)=\frac{u'}{u}$$

۲ــ از دوطرف تساوی $y = x^{\sqrt{x}}$ ،$x > ۰$ لگاریتم طبیعی بگیرید و با استفاده از مشتق‌گیری ضمنی، $\frac{dy}{dx}$ را پیدا کنید.

در یک آزمون ریاضی مسأله‌ای به شرح زیر مطرح شد.

مطلوب است مشتق تابع f با ضابطهٔ $f(x) = \mathrm{Ln}(\mathrm{Ln}\sin x)$.

در جریان تصحیح پاسخ‌نامه دانش‌آموزان شرکت‌کننده در آزمون مشخص شد که اکثریت

دانش‌آموزان مسأله را به‌صورت زیر حل کرده‌اند.

$$u(x) = \mathrm{Ln}(\sin x) \Rightarrow f(x) = \mathrm{Ln}(u(x))$$

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} \quad , \quad u'(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\mathrm{Ln}(\sin x)} = \frac{\cos x}{\sin x \mathrm{Ln}(\sin x)}$$

دسته‌ای دیگر از دانش‌آموزان که در اقلیت بودند راه حل گروه اول را انجام ندادند و به شیوه‌ای کاملاً متفاوت با این مسأله برخورد کرده بودند و پاسخی متفاوت به این مسأله داده بودند.

فعالیت

الف) راه حل گروه نخست دانش‌آموزان را تجزیه و تحلیل کنید.

ب) سعی کنید راه حل گروه دوم را حدس بزنید!

پ) مستقل از این راه حل‌ها و با تفکر و اندیشه خودتان این مسأله را بررسی و حل کنید.

ت) چه نتایجی از بررسی و حل این مسأله می‌توان گرفت؟

مسائل

۱ــ در هر مورد $f'(x)$ را پیدا کنید.

الف) $f(x) = \sqrt[4]{\frac{x}{x^2+1}}$ ب) $f(x) = \sqrt[3]{(x^2+x+1)^2}$

پ) $f(x) = \sin(\cos x)$ ت) $f(x) = \sin \sqrt[3]{x}$

ث) $f(x) = \sqrt{\tan x + \cot x}$

۲ــ نقاطی از منحنی $y = \tan(2x)$، $(-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4})$ ، را تعیین کنید که در آنها مماس بر منحنی با خط $y = 4x$ موازی باشد.

۳ــ ثابت کنید :

الف) اگر تابع f زوج و مشتق‌پذیر باشد آنگاه تابع مشتقش فرد است.

ب) اگر تابع f فرد و مشتق‌پذیر باشد آنگاه تابع مشتقش زوج است.

۴ــ با فرض اینکه تابع f زوج و تابع g فرد و $f'(۱) = ۲$ و $g'(۱) = ۳$ ، مقدار $(f+g)'(-۱)$ را حساب کنید.

۵ــ با فرض این که تابع $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ در $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر از مرتبه دوم باشد و به‌ازای هر عدد حقیقی x، $g(x) = f(۲ - x^۲)$ و $f'(۲) = ۲$ مقدار $g''(۰)$ را حساب کنید.

۶ــ اگر f تابعی چندجمله‌ای از درجه n و تابع fof' از درجه ۱۲ باشد مقدار $n^۲ + ۴n$ را حساب کنید.

۷ــ اگر $\lim\limits_{h \to ۰} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{۱}{\sqrt{۱ + x^۲}}$ ، آنگاه مشتق تابع باضابطه $y = f(\cot x)$ را با شرط $-\frac{\pi}{۲} < x < ۰$ حساب کنید.

۸ــ معادله خط مماس بر منحنی $y = \sin(x^\circ)$ در نقطه‌ای با طول $x = ۴۵^\circ$ را به‌دست آورید.
(از رابطه $\frac{D}{۱۸۰} = \frac{R}{\pi}$ نتیجه می‌شود، x مساوی $\frac{\pi}{۱۸۰}x^\circ$ رادیان است)

۹ــ با استفاده از استقرای ریاضی ثابت کنید، برای هر عدد صحیح مثبت n، تساوی‌های زیر برقرارند:

الف) $\frac{d^n}{dx^n}\sin(ax) = a^n \sin(ax + \frac{n\pi}{۲})$

ب) $\frac{d^n}{dx^n}\cos(ax) = a^n \cos(ax + \frac{n\pi}{۲})$

۱۰ــ معادله خط مماس بر نمودار تابع وارون، تابع $f(x) = \frac{x+۲}{x-۱}$ را در نقطه (۴،۲) به‌دست آورید.

۱۱ــ تابع $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ در $\mathbb{R}$ وارون‌پذیر و مشتق‌پذیر است و $f'(x) = \sqrt{۹ + f^۲(x)}$ ، مقدار $(f^{-۱})'(۴)$ را پیدا کنید.

۱۲ــ معادله خط مماس بر نمودار $x^۳ + y^۳ = ۳xy$ در نقطه $A(\frac{۳}{۲}, \frac{۳}{۲})$ را بیابید و نشان دهید خط قائم بر منحنی در نقطه A از مبدأ مختصات می‌گذرد.

۱۳ــ خط $y = ax + b$ نمودار $x^۲ + y^۲ - xy - ۱ = ۰$ را در نقاط M و N قطع می‌کند. a و b را چنان حساب کنید که مماس در نقاط M و N خط عمود بر محور x باشد.

۱۴ــ در هر مورد $f'(x)$ را پیدا کنید.

الف) $f(x) = e^{\tan x}$ ب) $f(x) = \mathrm{Ln}|x^۲ - ۱|$

پ) $f(x) = Ln|sinx|$ ت) $f(x) = Ln|cosx|$

۱۵ــ معادله خط مماس بر منحنی $y = \frac{Lnx}{x}$ را در نقطهٔ (۱،۰) پیدا کنید.

۱۶ــ مشتق دوم تابع f با ضابطه $f(x) = \lim_{n \to +\infty} (1 + \frac{x}{n})^n$ ، (به ازای هر عدد حقیقی x) را حساب کنید.

۱۷ــ در چه نقاطی نمودار $f(x) = x^2 e^{-x^2}$ دارای مماس افقی است.

۱۸ــ مشتق تابع وارون، تابع f با ضابطه : $f(x) = 3x + Lnx$ را به‌دست آورید.

۱۹ــ (مدلسازی یک بیماری همه‌گیر) تعداد (y) افرادی که به یک ویروس بسیار مسری مبتلا شده‌اند به وسیله منحنی **تدارکاتی** $y = \frac{L}{1 + Me^{-kt}}$ مدلسازی شده است که در آن t از لحظه بروز بیماری، برحسب ماه اندازه‌گیری می‌شود.

در ابتدا تعداد مبتلایان ۲۰۰ نفر بود و یک ماه بعد، این تعداد به ۱۰۰۰ نفر افزایش یافت. سرانجام تعداد مبتلایان در عدد ۱۰۰۰۰ ثابت ماند. پارامترهای L و M و K را تعیین کنید و مشخص کنید تعداد مبتلایان ۳ ماه بعد از بروز بیماری چند نفر هستند و آهنگ رشد در آن لحظه چقدر بوده است.

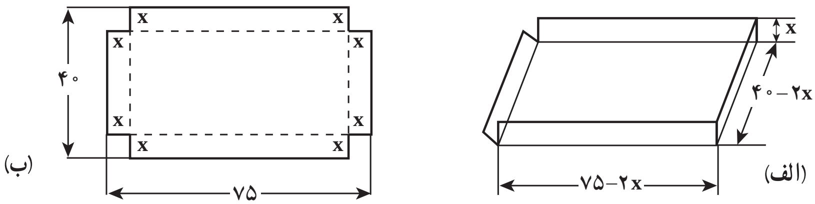
۳ـ۱۲ـ مقدارهای اکسترمم سراسری و مسائل بهینه‌سازی

اغلب در زندگی وقتی با مسأله‌ای روبرو می‌شویم، تلاش می‌کنیم بهترین راه حل را برای آن مسأله پیدا کنیم.

برای مثال یک کشاورز می‌خواهد ترکیبی از محصولات انتخاب کند که تا حدامکان تولیدش بیشترین سود را داشته باشد. و یا یک پزشک علاقمند است که کمترین مقدار دارو را در طول درمان یک بیمار معین تجویز کند.

همچنین یک کارخانه‌دار مایل است هزینه توزیع کالاهایش را به حداقل برساند. گاهی اوقات یک مسأله از این نوع را می‌توان با نمادگذاری، رابطه‌ای (به شکل معادله) به عنوان ضابطه تابعی از یک متغیر بیان کرد تا با استفاده از روش‌های حسابان با ماکسیمم کردن یا مینیمم کردن مقدار تابع روی یک مجموعهٔ خاص ابزار لازم برای حل این مسأله فراهم شود.

به عنوان نمونه با طرح مسألهٔ ساختن یک جعبه درباز که در صنعت بسیار کاربرد دارد، شروع می‌کنیم.



❖ **مثال:** می‌خواهیم یک جعبهٔ درباز از یک قطعه مقوای ۷۵ × ۴۰ سانتی‌متر بسازیم با این روش که مربع‌هایی با اندازه مساوی از چهارگوشهٔ این مقوا برش می‌زنیم و جدا می‌کنیم (شکل زیر).

اکنون می‌خواهیم بدانیم طول ضلع این مربع‌ها چقدر باشد تا جعبه ساخته شده بیشترین حجم ممکن را داشته باشد.

برای مدل‌سازی این مسأله نماد x را برای طول ضلع مربع‌هایی که باید از چهارگوشه مقوا بریده شود انتخاب می‌کنیم (قسمت الف شکل بالا) و نماد V را برای حجم جعبه‌ای که می‌خواهیم بسازیم، درنظر می‌گیریم (قسمت ب شکل بالا).

به بیان دیگر

x : طول (برحسب سانتی‌متر) ضلع‌های مربع‌هایی که باید بریده شود.

V : حجم (برحسب سانتی‌متر مکعب) جعبه دربازی که ساخته می‌شود.

چون از هر گوشه مقوا، یک مربع به ضلع x از هر گوشه مقوا برش می‌دهیم، ابعاد جعبهٔ در باز مطلوب عبارتند از x و (۲x − ۴۰) و (۲x − ۷۵)، (شکل فوق)

بنابراین حجم این جعبه که به شکل مکعب مستطیل است به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$V = (۴۰ - ۲x)(۷۵-۲x) \times x = ۴x^۳ - ۲۳۰x^۲ + ۳۰۰۰x \qquad (۱)$$

متغیر x در این معادله با محدودیت‌های معینی روبرو است، زیرا به دلیل اینکه x طول ضلع مربع است، نمی‌تواند منفی باشد. همچنین عرض مقوا ۴۰ سانتی‌متر است، پس x نمی‌تواند بیشتر از نصف آن باشد (چرا؟)

در نتیجه متغیر x از معادله (۱) باید در رابطه $۰ \leq x \leq ۲۰$ صدق کند (چرا؟)

بنابراین مسأله واقعی ما به یک مدل ریاضی تبدیل شد که در این مدل ریاضی باید مقادیری از x را در بازه [۰,۲۰] پیدا کنیم که مقدار V در معادله (۱) بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.

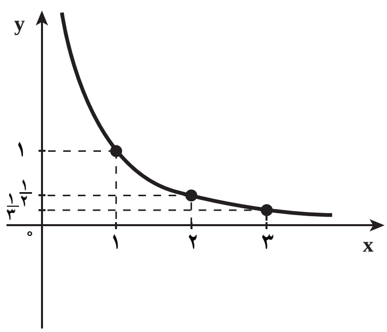
می‌توان این مسأله‌ها را به پیدا کردن مقدارهای ماکسیمم یا مینیمم تابع‌ها تبدیل کرد. ابتدا توضیح می‌دهیم که منظورمان از مقدارهای ماکسیمم و مینیمم چیست؟

تعریف ۱ : فرض کنیم D دامنه تابع f و نقطه c عضو دامنه باشد، می‌گوییم :

الف) f(c) **مقدار ماکسیمم** (ماکسیمم سراسری یا مطلق) تابع f روی D است، به شرطی که به ازای هر x عضو D داشته باشیم : $f(x) \leq f(c)$

ب) f(c) **مقدار مینیمم** (مینیمم سراسری یا مطلق) تابع f روی D است، به شرطی که به ازای هر x عضو D داشته باشیم : $f(c) \leq f(x)$

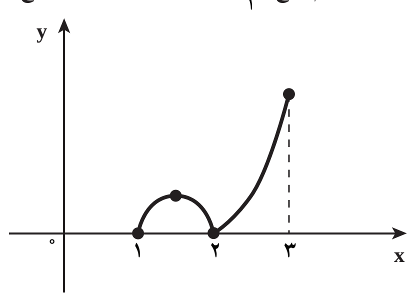
پ) f(c) **مقدار اکسترمم مطلق** تابع f روی D است که یا مقدار ماکسیمم مطلق و یا مقدار مینیمم مطلق تابع f روی D باشد.



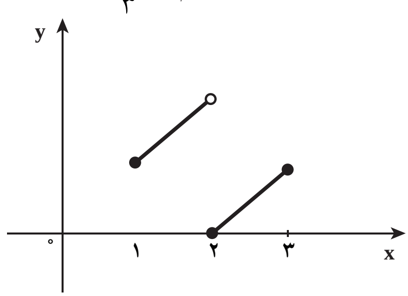
در این بخش از کتاب (۳ــ۱۲)، مقدار ماکسیمم مطلق، مقدار مینیمم مطلق ، مقدار اکسترمم مطلق تابع رابه اختصار مقدار ماکسیمم تابع، مقدار مینیمم تابع و مقدار اکسترمم تابع بیان می‌کنیم.

شکل روبه‌رو نمودار تابع f با دامنه $D = (۰, +\infty)$ و ضابطه $f(x) = (\frac{۱}{x})$ را نشان می‌دهد. تابع f در بازه $(۰, +\infty)$ نه دارای مقدار ماکسیمم است و نه مقدار مینیمم زیرا بُرد تابع مجموعه $R = (۰, +\infty)$ است و f(x) می‌تواند از هر عدد مثبتی بزرگتر شود (با نزدیک کردن x مثبت به صفر) و f(x) با مقادیر مثبت می‌تواند به صفر نزدیک شود (با انتخاب xهای مثبت و بزرگ) ازطرف دیگر تابع f در بازه [۱,۳] هم دارای ماکسیمم و هم دارای مینیمم است، مقدار ماکسیمم تابع f(۱) = و مقدار مینیمم تابع $f(۳) = \frac{۱}{۳}$ است و امّا تابع f در بازه (۱,۳] ، مقدار مینیمم آن $f(۳) = \frac{۱}{۳}$ و در

فعالیت



نمودار f



نمودار g

این بازه مقدار ماکسیمم ندارد (چرا؟)

فعالیت

در شکل زیر نمودارهای توابع f و g را درنظر بگیرید.

الف) پیوستگی توابع f و g را در بازه [۱,۳] بررسی نمایید.

ب) آیا توابع f و g در بازه [۱,۳] دارای مقدار ماکسیمم و مقدار مینیمم هستند و اگر جواب مثبت است آن مقادیر را مشخص کنید.

در مثال بالا دیدیم که تابع f با ضابطه $f(x)=(\frac{1}{x})$ در هر بازه بسته نظیر بازه [۱,۳] که پیوسته است دارای مقدار ماکسیمم و مقدار مینیمم است.

همچنین در این فعالیت تابع f در بازه بسته [۱,۳] پیوسته است. و تابع در این بازه دارای مقدار مینیمم و همچنین دارای مقدار ماکسیمم است. و اما تابع g در بازه [۱,۳] ناپیوسته است (چرا؟) و در این بازه مقدار ماکسیمم ندارد ولی مقدار مینیمم دارد.

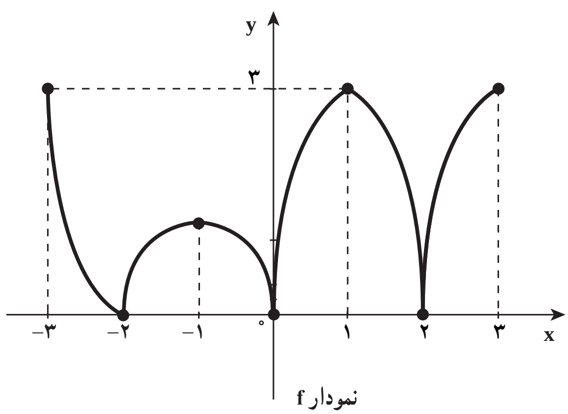
دیدیم که برخی تابع‌ها مقدار اکسترمم دارند و برخی ندارند. اکنون می‌خواهیم به این سؤال پاسخ دهیم که تحت چه شرایطی می‌توانیم تضمین کنیم تابع هم دارای ماکسیمم و هم دارای مینیمم است.

در قضیهٔ زیر شرط‌هایی را آورده‌ایم که به اعتبار آنها تابع هم مقدار ماکسیمم و هم مقدار مینیمم دارد.

۱ـ قضیه ۱ (مقدار اکسترمم مطلق): اگر تابع f در بازه بستهٔ [a, b] پیوسته باشد، آن وقت در این بازه هم مقدار ماکسیمم مطلق و هم مقدار مینیمم مطلق دارد.

برای درک بهتر قضیه مقدار اکسترمم، شکل زیر را درنظر بگیرید و به پرسش‌های زیر جواب دهید.

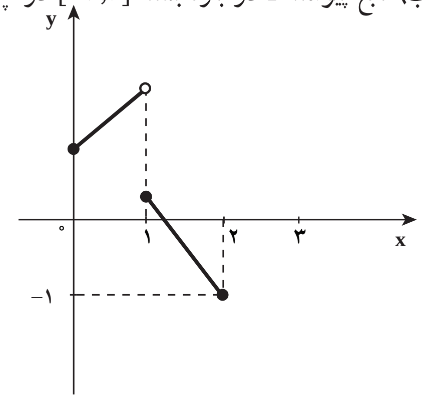
الف) تابع پیوسته f در بازه بسته [۳,۳−] در چه نقاطی مینیمم دارد؟ در صورت مثبت بودن



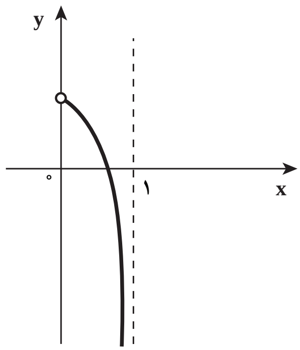
نمودار f

جواب، مقدار مینیمم تابع را به‌دست آورید.

ب) تابع پیوسته f در بازه بسته [۳,۳−] در چه نقاطی ماکسیمم دارد؟ در صورت مثبت بودن



الف) این تابع در دامنه‌اش که بازه بسته [۰,۲] است پیوسته نیست و مقدار ماکسیمم ندارد ولی مقدار مینیمم دارد که برابر f(۲) = −۱



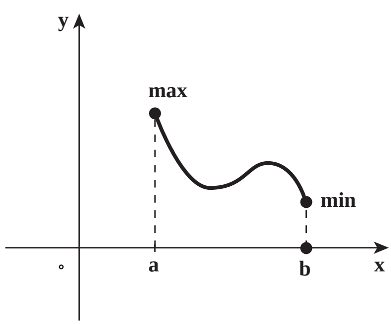
ب) این تابع در دامنه‌اش که بازه باز (۰,۱) است پیوسته است و نه ماکسیمم دارد و نه مینیمم

جواب، مقدار ماکسیمم تابع را به‌دست آورید.

پرسش: آیا شرایط قضیه مقدار اکسترمم در نمودارهای شکل زیر برقرار است (چرا؟)

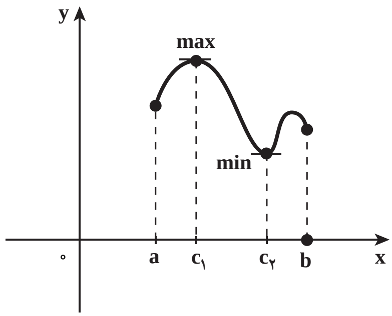
پرسش: می‌خواهیم بدانیم در چه نقاطی مقادیر اکسترمم رخ می‌دهند؟ معمولاً مقادیر اکسترمم یک تابع را در بازه‌ای مانند I از دامنهٔ آن جستجو می‌کنیم البته ممکن است بازه I شامل نقاط انتهایی خود باشد و نباشد.

برای نمونه بازه $I = [a, b]$ شامل هردو نقطهٔ انتهایی خود است. و بازه $I = [a, b)$ فقط شامل نقطه انتهایی چپ خود می‌باشد و بازه $I = (a, b)$ شامل نقطه انتهایی خود نیست. در سه حالت زیر



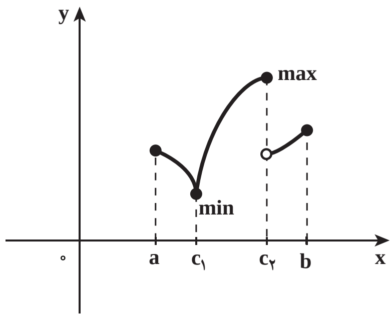
مقادیر اکسترمم تابع را بررسی می‌کنیم.

حالت اوّل : وقتی که مقادیر اکسترمم را در نقاط انتهایی بازه داشته باشیم. (شکل زیر)



حالت دوّم : وقتی که مقادیر اکسترمم را در نقاط درون بازه داشته باشیم و در آن نقاط مقدار مشتق صفر است. (شکل روبه‌رو)

حالت سوم : وقتی که مقادیر اکسترمم را در نقاط درون بازه داشته باشیم و در آن نقاط تابع مشتق‌پذیر نباشد.



(شکل روبه‌رو) که تابع در نقطهٔ c_1 بازگشتی است و در نقطهٔ c_2 پرشی و ناپیوسته است.

در سه حالت بالا نقاطی را مطرح کردیم که نقاط کلیدی قضیه **مقدار اکسترمم** هستند.

نقطه‌ای از دامنه f در هر یک از حالت‌های دوم و سوم بالا که تابع مقدار اکسترمم داشت «**نقطه بحرانی**» تابع f می‌نامیم.

تعریف ۲ : نقطهٔ درونی $c \in D_f$ را **نقطه بحرانی** تابع f می‌نامیم، هرگاه $f'(c)=0$ و یا $f'(c)$ موجود نباشد.

مثال : نقاط بحرانی تابع f با ضابطه $f(x)=-2x^3+3x^2$ را در بازه $[-\frac{1}{2},2]$ بیابید.

حل : تابع f به ازای هر x از بازهٔ باز $(-\frac{1}{2},2)$ مشتق‌پذیر است و $f'(x)=-6x^2+6x$ که به ازای $x=0$ و $x=1$ داریم $f'(0)=0$ و $f'(1)=0$ و در بازه $(-\frac{1}{2},2)$ نقطه‌ای وجود ندارد که تابع f مشتق نداشته باشد. بنابراین تابع f در نقاط ۱ و ۰ بحرانی است.

تمرین در کلاس

نقاط بحرانی تابع f با ضابطه $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ را در دامنه‌اش بیابید.

۲ـ قضیه نقطه بحرانی: فرض کنیم تابع f روی بازه I تعریف شده و c نقطه درونی بازه I است، اگر f(c) مقدار اکسترمم تابع، آنگاه باید c نقطه **بحرانی** باشد یعنی c یکی از موارد زیر باشد :

الف) c یک نقطهٔ درونی بازه I، به‌طوری که $f'(c)=0$

ب) c یک نقطهٔ درونی بازه I و $f'(c)$ موجود نباشد.

برهان: ابتدا فرض کنیم f(c) مقدار ماکسیمم f روی بازه I و c نقطه درونی بازه I و $f'(c)$ موجود باشد.

ثابت می‌کنیم $f'(c)=0$ است

چون f(c) مقدار ماکسیمم f است. پس برای هر x در I، $f(x)\le f(c)$ و یا $f(x)-f(c)\le 0$

اگر $x<c$ یا $x-c<0$ آن وقت

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\ge 0$$

و اگر $x>c$ آن وقت

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\le 0$$

و امّا $f'(c)$ موجود است بنابراین

$$\lim_{x\to c^-}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=f'_-(c)=f'^-(c)\ge 0 \quad (۱)$$

(چرا؟)

$$\lim_{x\to c^+}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=f'_+(c)=f'(c)\le 0 \quad (۲)$$

(چرا؟)

از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $f'(c)=0$

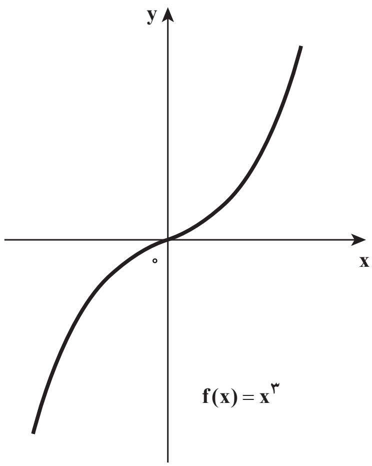
تمرین در کلاس

در حالتی که f(c) مقدار مینیمم تابع است، قضیه را ثابت کنید.

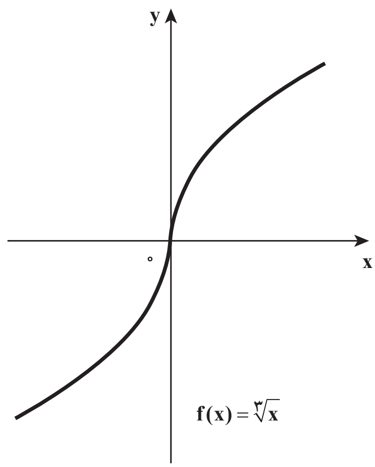
البته باید توجه داشت که هر نقطه بحرانی لزوماً نقطه اکسترمم نیست.

به‌عنوان نمونه برای تابع f با ضابطه $f(x)=x^3$ داریم $f'(0)=0$ پس $x=0$ نقطه بحرانی تابع f است و این تابع نه مقدار ماکسیمم و نه مقدار مینیمم دارد (شکل زیر قسمت الف)

همچنین نقطه $x=0$ نقطه بحرانی تابع f با ضابطه $f(x)=\sqrt[3]{x}$ است زیرا $f'(0)$ موجود نیست. (شکل زیر قسمت ب)



(الف)



(ب)

مسأله: چگونه می‌توانیم مقادیر اکسترمم تابع را پیدا کنیم.

با استفاده از قضایای ۱ و ۲ می‌توانیم مقادیر اکسترمم تابع f را که روی بازه بسته I پیوسته است به شرح زیر پیدا کنیم.

گام اوّل: پیدا کردن نقاط بحرانی f روی بازه بسته I

گام دوم: محاسبه مقدار f در هر یک از نقاط بحرانی و نقاط انتهایی در بازه بسته I و از بین مقادیر به‌دست آمده، بزرگ‌ترین آنها مقدار ماکسیمم و کوچک‌ترین آنها مقدار مینیمم تابع f روی بازه بسته I می‌باشد.

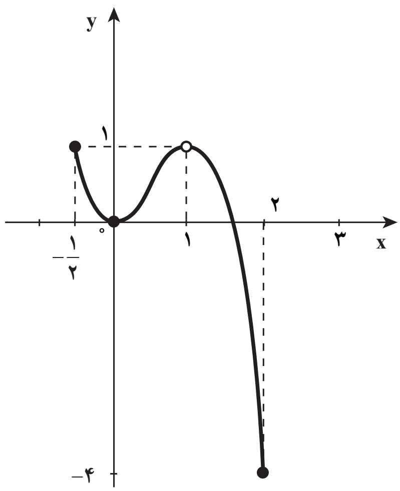
مثال: مقادیر ماکسیمم و مینیمم تابع f با ضابطه $f(x)=-2x^3+3x^2$ را روی بازه $[-\frac{1}{2},2]$ بیابید.

حل: در مثال (۲) نقاط بحرانی این تابع را که عبارت‌اند از ۱ و ۰ به‌دست آوردیم، و به‌ازای این اعداد داریم:

$f(\circ)=\circ$ و $f(۱)=۱$

مقادیر تابع در نقاط انتهایی عبارتند از :

$f(-\frac{۱}{۲})=۱$ و $f(۲)=-۴$



بنابراین مقدار ماکسیمم تابع برابر ۱ می‌باشد که در نقاط $x=-\frac{۱}{۲}$ و $x=۱$ رخ می‌دهد و -۴ مقدار مینیمم تابع است که در نقطهٔ ۲ اتفاق می‌افتد.

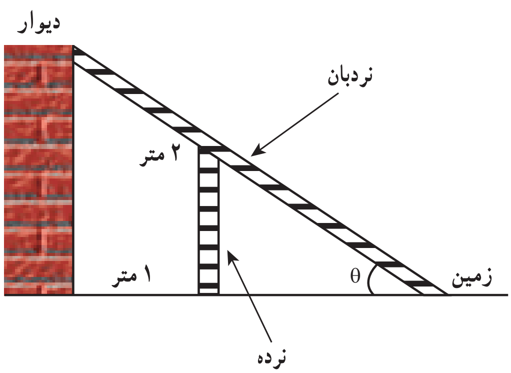
در شکل روبه‌رو نمودار تابع f روی بازه $[-\frac{۱}{۲},۲]$ رسم شده است.

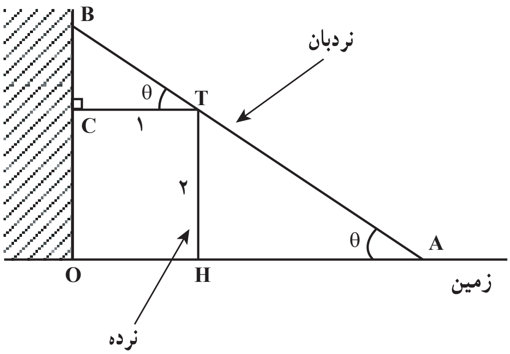
تمرین در کلاس

در مثال ۱، مقدار x را چنان حساب کنید که مقدار حجم (V) بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.

قابل ذکر است که یکی از مهم‌ترین کاربردهای مشتق در مسائل «**بهینه‌سازی**» است که در آنها کمیتی باید ماکسیمم یا مینیمم گردد (مانند مثال ۱ همراه با فعالیت)، مثال‌هایی از این نوع در زندگی روزمره فراوان است.

مثال : در شکل روبه‌رو یک نرده به ارتفاع ۲ متر و به‌طور قائم بر زمین، به فاصلهٔ ۱ متر از یک دیوار قائم قرار دارد. طول کوتاه‌ترین نردبانی را تعیین کنید که از روی نردهٔ به ارتفاع ۲ متر گذشته و یک سر آن روی زمین و خارج نرده و سر دیگر آن مماس بر دیوار قائم باشد.





حل: اندازهٔ زاویه AB (نردبان) با زمین را θ فرض می‌کنیم و طول نردبان (L) را به‌صورت تابعی از θ به‌دست می‌آوریم $(\circ<\theta<\frac{\pi}{۲})$.

$$AB=BT+TA$$

در مثلث‌های قائم الزاویه $\overset{\Delta}{AHT}$ و $\overset{\Delta}{TCB}$ داریم :

$$\sin\theta=\frac{۲}{AT} \text{ و } \cos\theta=\frac{۱}{BT}$$

بنابراین

$$L=L(\theta)=\frac{۱}{\cos\theta}+\frac{۲}{\sin\theta}$$

$$L'(\theta)=\frac{\sin\theta}{\cos^{۲}\theta}-\frac{۲\cos\theta}{\sin^{۲}\theta}=\frac{\sin^{۳}\theta-۲\cos^{۳}\theta}{\sin^{۲}\theta\cos^{۲}\theta}$$

$$L'(\theta)=\circ\Rightarrow\sin^{۳}\theta-۲\cos^{۳}\theta=\circ\Rightarrow\tan^{۳}\theta=۲ \text{ یا } \tan\theta=\sqrt[۳]{۲}$$

و یا $\theta_\circ=\tan^{-۱}(\sqrt[۳]{۲})$ که نقطهٔ بحرانی تابع L است.

θ	$\circ$		$\tan^{-۱}(\sqrt[۳]{۲})$		$\frac{\pi}{۲}$
$L'(\theta)$		$-$	$\circ$	$+$	
$L(\theta)$	$+\infty$	$\searrow$	$L(\theta_\circ)$ Min	$\nearrow$	$+\infty$

در نتیجه به ازای $\theta_\circ=\tan^{-۱}(\sqrt[۳]{۲})$ مقدار مینیمم $L(\theta)$ به‌دست می‌آید. و اگر بخواهیم طول کوتاه‌ترین نردبان را حساب کنیم، به‌صورت زیر عمل می‌کنیم :

$$\frac{۱}{\cos^{۲}\theta}=۱+\tan^{۲}\theta=۱+\sqrt[۳]{۴}$$

$$\cos\theta=\frac{۱}{\sqrt{۱+\sqrt[۳]{۴}}}$$

و

$$\sin\theta = \tan\theta.\cos\theta = \frac{\sqrt[3]{۲}}{\sqrt{۱+\sqrt[3]{۴}}}$$

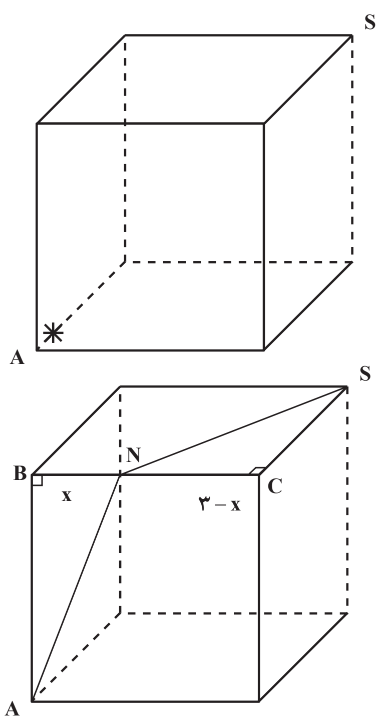
در نتیجه، مقدار مینیمم مطلق $L(\theta)$ روی بازه $(۰,\frac{\pi}{۲})$ عبارت است از

$$L(\theta_۰) = \sqrt{۱+\sqrt[3]{۴}} + \frac{۲\sqrt{۱+\sqrt[3]{۴}}}{\sqrt[3]{۲}} \approx ۴/۱۶$$

بنابراین طول کوتاه‌ترین نردبانی که بتوان یک سر آن را از بالای نرده به دیوار تکیه داد و سر دیگرش بر زمین و خارج نرده باشد، تقریباً ۴/۱۶ متر است.

تمرین در کلاس

نشان دهید که در بین همه مثلث‌های متساوی‌الساقینی که محیط یکسانی دارند، مثلث متساوی‌الاضلاع دارای بیشترین مساحت است.



مثال : (مسأله کوتاه‌ترین مسیر عنکبوت) مطابق شکل روبه‌رو یک عنکبوت در گوشه S از سقف اتاق مکعب شکل که هر ضلع آن ۳ متر است قرار دارد و می‌خواهد یک سوسک که در گوشه مقابل او (A) روی کف اتاق خوابیده است را شکار کند. عنکبوت مجبور است روی سقف اتاق حرکت کند (نمی‌تواند پرواز کند) و سپس روی دیوارها یا کف اتاق راه برود، او می‌خواهد کوتاه‌ترین مسیر برای شکار سوسک را پیدا کند. او را راهنمایی کنید. فراموش نکنید که معمولاً موجودات به‌طور غریزی کوتاه‌ترین مسیر را انتخاب می‌کنند.

حل : به کمک مشتق و تعیین کمترین مسیر فرض کنیم مسیر عنکبوت از S به N و از N به A باشد

طول مسیر $d=SN + NA$

اگر BN=x فرض کنیم، آنگاه NC=۳−x بنابراین

$$d(x)=\sqrt{(۳-x)^{۲}+۹}+\sqrt{x^{۲}+۹}$$ تابع طول مسیر

$$d'(x)=\frac{-۲(۳-x)}{۲\sqrt{۹+(۳-x)^{۲}}}+\frac{۲x}{۲\sqrt{x^{۲}+۹}}=\frac{-(۳-x)\sqrt{۹+x^{۲}}+x\sqrt{۹+(۳-x)^{۲}}}{\sqrt{۹+(۳-x)^{۲}}\times\sqrt{x^{۲}+۹}}$$

$$d'(x)=۰\Rightarrow x\sqrt{۹+(۳-x)^{۲}}=(۳-x)\sqrt{۹+x^{۲}}$$

طرفین معادله را به توان ۲ رسانده و پس از ساده کردن و حذف جمله‌های مساوی از طرفین معادله داریم :

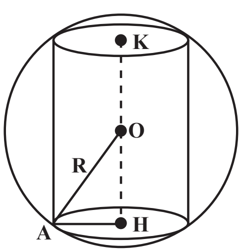
نقطه بحرانی بازه (۳و۰) $$۲x=۳\Rightarrow x=\frac{۳}{۲}$$

x	۰		$\frac{۳}{۲}$		۳
$d'(x)$		−	۰	+	
$d(x)$	$۳(۱+\sqrt{۲})$	↘	$۳\sqrt{۵}$	↗	$۳(۱+\sqrt{۲})$

بنابراین کوتاه‌ترین مسیر وقتی است که N وسط ضلع BC باشد. مقدار مینیمم طول مسیر $۳\sqrt{۵}$ است.

قابل ذکر است که این مسأله با یک راه حل کوتاه و سادهٔ هندسی حل می‌شود. حل مسأله را از راه هندسی انجام دهید.

مثال: می‌خواهیم در کره‌ای به شعاع R یک استوانه دوار قائم محاط کنیم که بزرگ‌ترین حجم را داشته باشد، در این صورت شعاع قاعده و ارتفاع استوانه را بیابید.



حل : فرض کنیم استوانه موردنظر دارای شعاع r و ارتفاع h می‌باشد و KH=h و AH=r و به علت تقارن مرکز کره نقطه O وسط KH است. بنابراین

$$O\overset{\Delta}{H}A:\frac{h^{۲}}{۴}+r^{۲}=R^{۲}$$

و حجم استوانه برابر است با :

$$V=\pi r^{۲}h=\pi h(R^{۲}-\frac{h^{۲}}{۴})\text{ ، }۰\le h\le ۲R$$

واضح است که اگر $h=0$ یا $h=2R$ باشد، $V=0$، بنابراین نقاط بحرانی تابع حجم استوانه را برحسب متغیر h در بازه $(0, 2R)$ پیدا می‌کنیم.

نقطه بحرانی $V'(h)=\pi(R^2-\frac{h^2}{4}-\frac{h^2}{2})=0 \Rightarrow h=\frac{2R}{\sqrt{3}}$

h	0		$\frac{2R}{\sqrt{3}}$		$2R$
$V'(h)$		$+$	0	$-$	
$V(h)$	0	$\nearrow$	$\frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}$	$\searrow$	0

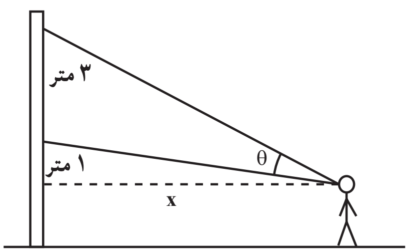
بنابراین تابع حجم استوانه در بازه $[0, 2R]$ به ازای $h=\frac{2R}{\sqrt{3}}$ و $r=\frac{\sqrt{2}R}{\sqrt{3}}$ مقدار ماکسیمم حجم آن $\frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}$ است.

مسائل بهینه‌سازی

۱ــ مجموع دو عدد مثبت برابر ۹ است. بزرگ‌ترین مقدار ممکن برای حاصل‌ضرب آنها را پیدا کنید.

۲ــ حاصل‌ضرب دو عدد مثبت برابر ۸ است. کمترین مقدار ممکن برای مجموع آنها را پیدا کنید.

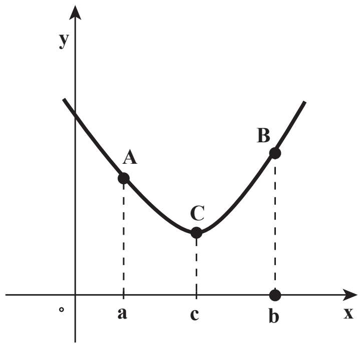
۳ــ مساحت بزرگ‌ترین مستطیلی را بیابید که در نیم دایره‌ای به شعاع R محاط شده است و یک ضلع مستطیل روی قطر نیم دایره قرار دارد.



۴ــ (بهترین دید از یک نقاشی دیواری) شخصی باید در چه فاصله‌ای از یک نقاشی دیواری به ارتفاع ۳ متر بایستد تا بهترین دید را از آن داشته باشد (شکل روبه‌رو)، با این فرض که پایین نقاشی ۱ متر بالاتر از خط دید شخص است.

۵ــ قرار است محوطه‌ای مستطیل شکل برای نگهداری گوسفندها ساخته شود، یک طرف این محوطه دیوار طویلی است که از قبل وجود داشته است و سه طرف دیگر آن‌را باید نرده‌گذاری کنیم. اگر ۱۵۰ متر نرده در اختیار داشته باشیم، بیشترین مساحت ممکن برای محوطه مورد نظر چقدر است؟

تابع‌های صعودی اکید و نزولی اکید : با مشاهده نمودار تابع f در شکل روبه‌رو وقتی نقطه‌ای در امتداد منحنی از A به C برود مقادیر تابع با افزایش طول کاهش می‌یابند، و وقتی نقطه در امتداد منحنی از C به B برود، مقادیر تابع با افزایش طول افزایش می‌یابند در این صورت گوییم f بر بازهٔ [a, c] نزولی اکید و بر بازه [c, b] صعودی اکید است.



ذیلاً تعاریف تابع‌های صعودی اکید و نزولی اکید و تابع ثابت بر یک بازه را بیان می‌کنیم.

تعریف ۳:

الف) تابع f روی بازه I **صعودی اکید** است، اگر برای هر دو عدد x_1 و x_2 در I،

$$x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

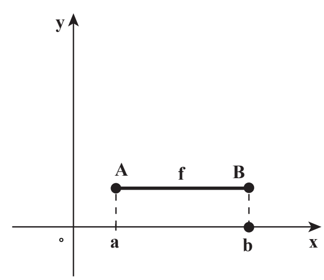
ب) تابع f روی بازه I **نزولی اکید** است، اگر برای هر دو عدد x_1 و x_2 در I،

$$x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

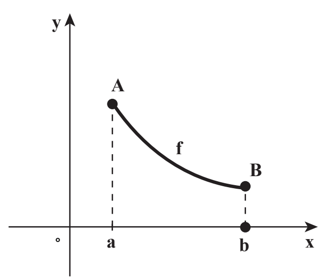
پ) تابع f روی بازه I ثابت است، اگر برای هر دو عدد x_1 و x_2 در I،

$$f(x_1)=f(x_2)$$

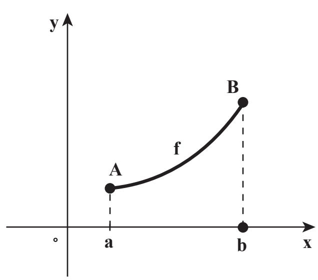
برای بهتر یادگیری تعریف بالا نمودارهای شکل زیر را ببینید. I=[a,b]



f ثابت است



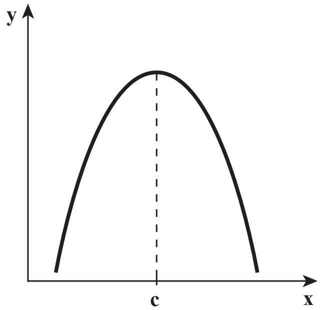
f نزولی اکید است



f صعودی اکید است

با توجه به تعریف بالا، تابع f روی بازه I **اکیداً یکنوا**ست، اگر روی بازه I یا صعودی اکید و یا نزولی اکید باشد.

فعالیت



نمودار تابع f در شکل روبه‌رو را درنظر بگیرید.

الف) با رسم مماس‌هایی در نقاط مختلف نمودار f تعیین کنید در چه بازه‌ای شیب مماس‌ها مثبت و در چه بازه‌ای شیب مماس‌ها منفی است.

ب) تعیین کنید در چه بازه‌ای مشتق f مثبت است و در چه بازه‌ای مشتق f منفی است.

پ) از اینکه $f'(x)$، میزان تغییر مقادیر $f(x)$ نسبت به x است، با درنظر گرفتن علامت $f'(x)$، معلوم کنید تابع f در چه بازه‌ای صعودی اکید است و در چه بازه‌ای نزولی اکید است.

نتایج به‌دست آمده در فعالیت بالا به ما کمک می‌کند که قضیه زیر را بیان کنیم.

۳ـ قضیه ۳: فرض کنیم تابع f بر بازهٔ بسته $[a,b]$ پیوسته و بر بازهٔ باز (a,b) مشتق‌پذیر باشد. در این‌صورت

الف) اگر به ازای هر x در (a,b)، $f'(x)>0$، آنگاه تابع f بر $[a,b]$ صعودی اکید است.

ب) اگر به ازای هر x در بازهٔ (a,b)، $f'(x)<0$، آنگاه تابع f، بر بازه $[a,b]$ نزولی اکید است.

پ) اگر به ازای هر x در بازهٔ (a,b)، $f'(x)=0$، آنگاه تابع f بر بازه $[a,b]$ ثابت است.

این قضیه به ما اجازه می‌دهد که بررسی کنیم، یک تابع در چه بازه‌هایی صعودی اکید و در چه بازه‌هایی نزولی اکید و در چه بازه‌ای ثابت است.

مثال: مشخص کنید تابع f با ضابطه $f(x)=2x^3-3x^2-12x+7$ در کجاها صعودی اکید و در کجاها نزولی اکید است.

حل: ابتدا مشتق تابع را حساب می‌کنیم :

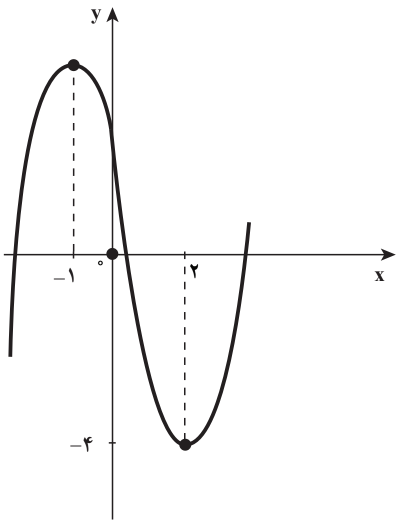
$$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$$

عبارت $f'(x)$ را تعیین علامت می‌کنیم :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	

طبق قضیه فوق تابع f در بازه $(-1,2)$ نزولی اکید و در هر یک از بازه‌های $(-\infty,-1)$ و $(2,+\infty)$ صعودی اکید است و نمودار f به شکل روبه‌رو است :

در نقاط ۱- و ۲ که مشتق تابع صفر است خط مماس افقی است.

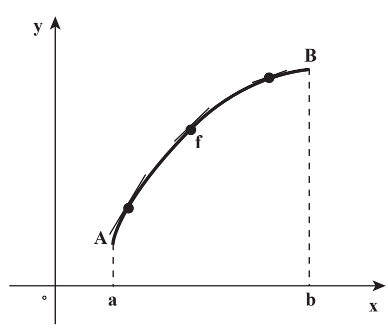


تمرین در کلاس

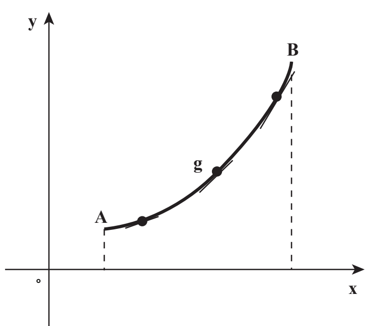
تابع f با ضابطه $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ در چه بازه‌ای صعودی اکید و در چه بازه‌ای نزولی اکید است؟

۳ـ۱۳ـ مشتق دوم و تقعر نمودار تابع

در شکل زیر نمودار دو تابع صعودی اکید روی بازه I رسم شده‌اند. هر دوی این نمودارها دو نقطه A و B را بهم وصل می‌کنند. امّا متفاوت به نظر می‌رسند زیرا نمودار f پایین خط‌های مماسی است که در نقاط مختلف f رسم شده‌اند و منحنی f را روی بازه I مقعر رو به پایین می‌نامیم. و امّا نمودار g بالای خط‌های مماسی است که در نقاط مختلف g رسم شده‌اند و منحنی g را روی بازه I مقعر رو به بالا می‌نامیم.



الف) مقعر رو به پایین



ب) مقعر رو به بالا

تعریف ۴:

الف) اگر نمودار f روی بازهٔ I بالای همهٔ مماس‌هایش باشد آنگاه نمودار f را **مقعر رو به بالا** می‌نامیم.

ب) اگر نمودار f روی بازهٔ I پایین همهٔ مماس‌هایش باشد، آنگاه نمودار f را **مقعر رو به پایین** می‌نامیم.

اکنون ببینیم مشتق دوم چه کمکی به مشخص کردن تقعر نمودار در یک بازه می‌کند.

فعالیت

با مشاهده شکل بالا به موارد زیر پاسخ دهید.

الف) در قسمت (الف) شکل بالا با حرکت از چپ به راست شیب مماس‌ها کم می‌شوند یا زیاد و در نتیجه تابع f' (تابع مشتق) تابعی است نزولی اکید یا صعودی اکید.

ب) در قسمت (ب) شکل بالا با حرکت از چپ به راست شیب مماس‌ها کم می‌شوند یا زیاد و در نتیجه تابع f' تابعی است نزولی اکید یا صعودی اکید.

پ) علامت $f''(x)$ و $g''(x)$ را در بازه (a,b) تعیین کنید. نتایج به‌دست آمده در فعالیت بالا به ما کمک می‌کند که قضیه زیر را بیان کنیم.

۴ـ قضیه تقعر: فرض کنیم $f''(x)$ به ازای هر x از بازهٔ باز I موجود باشد

الف) اگر به ازای هر x از I، $f''(x)>0$ آنگاه نمودار f روی بازه I تقعر رو به بالا دارد.

ب) اگر به ازای هر x از I، $f''(x)<0$ آنگاه نمودار f روی بازه I تقعر رو به پایین دارد.

مثال: تابع f با ضابطه $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+4$ روی چه بازه‌هایی صعودی اکید یا نزولی اکید است و روی چه بازه‌هایی نمودار f تقعر رو به بالا دارد یا مقعر رو به پایین است.

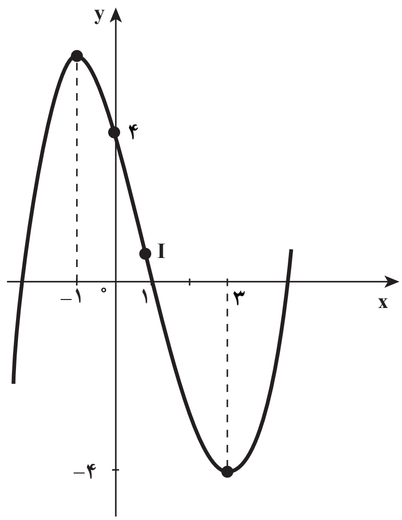
حل:

$$f'(x)=x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$$

$$f''(x)=2x-2=2(x-1)$$

با تعیین علامت عبارت $(x+1)(x-3)$ معلوم می‌شود تابع f روی بازه $[-1,3]$ نزولی اکید و روی هر یک از بازه‌های $(-\infty,-1]$ و $[3,+\infty)$ صعودی اکید است. و روی بازه $(-\infty,1)$، $f''(x)<0$ و تقعر

منحنی رو به پایین است و روی بازه $(۱,+\infty)$، $f''(x)>۰$ و تقعر منحنی رو به بالا است . شکل زیر نمودار تابع f است.



تمرین در کلاس

تابع f با ضابطه $g(x)=\frac{x}{۱+x^{۲}}$ روی چه بازه‌هایی صعودی اکید یا نزولی اکید و روی چه بازه‌هایی تقعر رو به بالا دارد یا مقعر رو به پایین است.

در مثال (۹) جهت تقعر نمودار f در نقطه $I(۱,\frac{۱}{۳})$ تغییر می‌کند، به‌طوری که روی بازه $(-\infty,۱)$ تقعر نمودار رو به پایین است و روی بازه $(۱,+\infty)$ تقعر رو به بالا است و خط مماس در نقطهٔ I به معادله

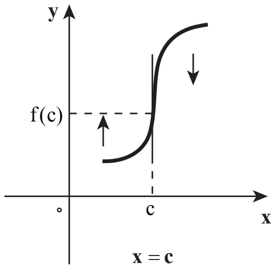
$y=-۴x+\frac{۱۳}{۳}$ می‌باشد چنین نقطه‌ای را نقطه عطف نمودار تابع می‌نامیم.

تعریف ۵ : فرض کنیم تابع f در x=c پیوسته باشد
در این‌صورت نقطهٔ $(c\,,f(c))$ **نقطهٔ عطف** نمودار تابع f است (یا تابع f در c نقطه عطف دارد) هرگاه دو شرط زیر برقرار باشند :

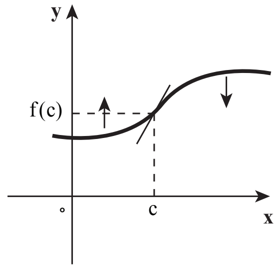
الف) نمودار f در نقطهٔ $(c\,,f(c))$ خط مماس داشته باشد.

ب) تقعر f در نقطه $(c\,,f(c))$ از رو به بالا به رو به پایین (یا به عکس) تغییر نماید.

توجه داشته باشید که از شرط (الف) نتیجه می‌شود که یا f در c مشتق‌پذیر است یا نمودار آن در این نقطه خط مماس قائم دارد (شکل زیر)

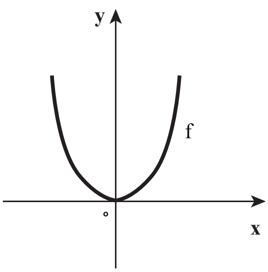


ب) x=c مماس قائم



الف) $m=f'(c)$ شیب خط مماس

از شرط (ب) نتیجه می‌شود که خط مماس بر نمودار تابع در c از نمودار عبور می‌کند. (شکل بالا) چون نقطهٔ عطف جایی است که تقعر نمودار تغییر می‌کند، باید علامت $f''(x)$ در این نقاط تغییر نماید. بنابراین در نقاط عطف تابع یا $f''(c)=0$ (شکل بالا قسمت الف) و یا $f''(c)$ تعریف نشده است (قسمت ب شکل بالا)



امّا شرط $f''(c)=0$ وجود نقطه عطف برای نمودار تابع f در c را نتیجه می‌دهد. به‌عنوان مثال در تابع f با ضابطه $f(x)=x^4$ داریم $f''(x)=12x^2$ و $f''(0)=0$ ولی $f''(x)$ در ۰ تغییر علامت نمی‌دهد و در دامنه‌اش تقعر آن رو به بالا است پس $(0,0)$ نقطه عطف f نیست.

مثال: جهت تقعر نمودار تابع f با ضابطه $f(x)=x^4-4x^3$ را در دامنه‌اش بررسی نموده و نقاط عطف آن‌را به‌دست آورید.

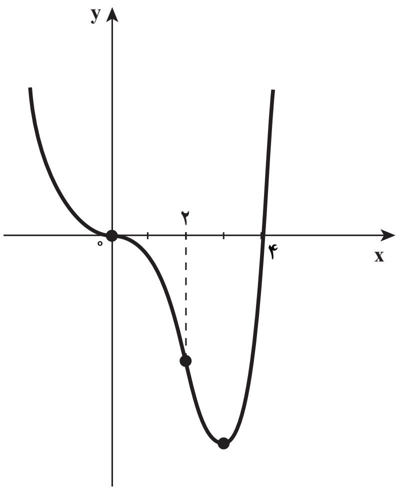
حل:

$$f'(x)=4x^3-12x^2$$

$$f''(x)=12x^2-24x=12x(x-2)$$

x	$-\infty$		۰		۲		$+\infty$
علامت $f''(x)$		+	○	−	○	+	
جهت تقعر f		روبه بالا		روبه پایین		روبه بالا	

$m=f'(0)=0$ شیب خط مماس بر منحنی f در نقطهٔ ۰ و $m=f'(2)=-16$ شیب خط مماس بر منحنی f در نقطهٔ ۲



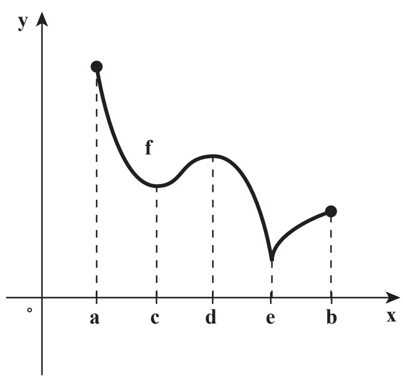
چون در نقاط (۰,۰) و (۲,–۱۶) خط مماس وجود دارد و در این نقاط جهت تقعر منحنی عوض می‌شود، لذا (۰,۰) و (۲,–۱۶) نقاط عطف f هستند. و نمودار f به شکل روبه‌رو است.

تمرین در کلاس

جهت تقعر نمودار تابع f با ضابطه $f(x)=2+\sqrt[3]{x}$ را در دامنه‌اش بررسی نموده و نقطه عطف آن‌را به‌دست آورید.

۳ـ۱۴ـ ماکسیمم و مینیمم موضعی (نسبی)

می‌دانید که مقدار ماکسیمم تابع (درصورت وجود) روی مجموعه $D=[a,b]$ به‌عنوان دامنه، بزرگ‌ترین مقدار تابع روی مجموعه D است که آن‌را مقدار ماکسیمم (و یا مقدار ماکسیمم سراسری یا مطلق) می‌نامیم.



در شکل روبه‌رو، f(a) مقدار ماکسیمم مطلق f روی بازه [a,b] است.

با توجه به مطالب بالا در مورد f(d) چه می‌توان گفت؟

اگر f(a) را به عنوان قهرمان دوی ۱۰۰ متر در سراسر کشور ایران تصور کنیم، f(d) را می‌توان قهرمان دو ۱۰۰ متر در یک منطقه از کشور تصور کرد و به زبان ریاضی f(d) مقدار ماکسیمم موضعی (نسبی) تابع f در یک همسایگی به مرکز d نامیده می‌شود.

به طریق مشابه f(e) مقدار مینیمم سراسری مجموعه D است و آن‌را مقدار مینیمم مطلق f روی مجموعه D نیز می‌گویند. و f(c) مقدار مینیمم موضعی (نسبی) تابع f در یک همسایگی به‌مرکز c است بدیهی است که f(e) نیز مقدار مینیمم موضعی (نسبی) تابع f در یک همسایگی به‌مرکز e می‌باشد.

تعریف ۶: فرض کنیم D دامنه تابع f که شامل نقطهٔ c است، می‌گوییم :

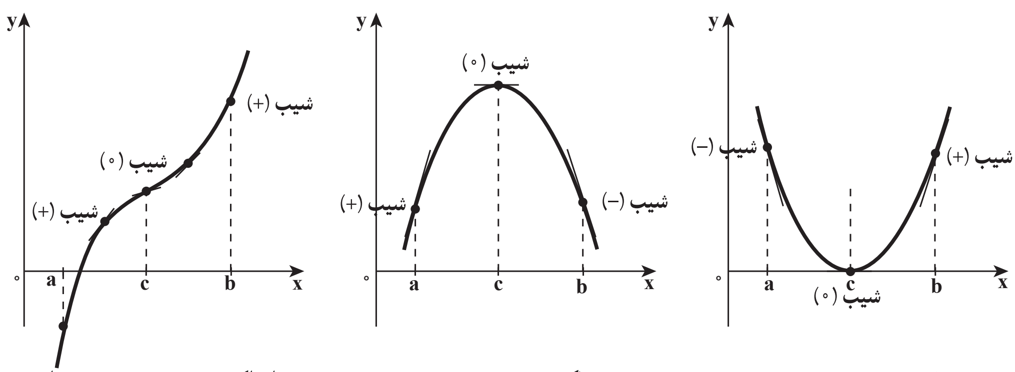
الف) f(c) یک مقدار **ماکسیمم موضعی** تابع f است، هرگاه عددی مانند $r>0$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که به ازای هر x متعلق به دامنه f و $|x-c|<r$، $f(x)\le f(c)$

ب) f(c) یک مقدار **مینیمم موضعی** تابع f است، هرگاه عددی مانند $r>0$ وجود داشته باشد به‌طوری که به ازای هر x متعلق به دامنه f و $|x-c|<r$، $f(x)\ge f(c)$

پ) f(c) یک مقدار **اکسترمم موضعی** (نسبی) تابع f است که یا مقدار ماکسیمم موضعی و یا مقدار مینیمم موضعی تابع f باشد.

و امّا ببینیم در کجا مقدار اکسترمم موضعی رخ می‌دهد؟

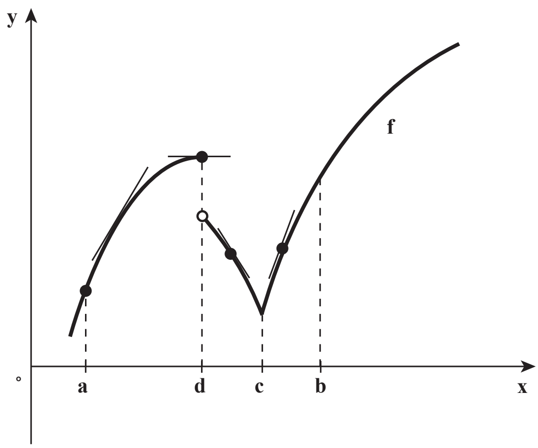
شکل بالا این نکته را القا می‌کند که تابع f فقط می‌تواند در نقاط **بحرانی** درون بازه [a,b]، اکسترمم موضعی داشته باشد. به عبارت دیگر از بین نقاط بحرانی درون بازه، نقاط اکسترمم موضعی به‌دست می‌آیند ولی ادعا نمی‌کنیم که هر نقطه بحرانی، یک اکسترمم موضعی است. شکل زیر قسمت (پ) این را روشن می‌کند.



(پ) مقدار اکسترمم موضعی وجود ندارند　　(ب) ماکسیمم موضعی　　(الف) مینیمم موضعی

از شکل بالا معلوم است که در قسمت (الف) روی بازه (a,c) مشتق منفی است و روی بازه

(c,b) مشتق مثبت است و در نقطهٔ c مینیمم موضعی داریم و در قسمت (ب) که روی بازه (a,c) مشتق مثبت و روی بازه (c,b) مشتق منفی است در نقطهٔ c ماکسیمم موضعی داریم و البته در نقاط اکسترمم موضعی شکل بالا، $f'(c)=0$ است. و امّا قابل ذکر است که لزومی ندارد در نقاط اکسترمم موضعی تابع مشتق داشته باشد (شکل روبه‌رو را ببینید).



در این شکل، روی بازه (c,b) مشتق مثبت و روی بازه (d,c) مشتق منفی است و $f'(c)$ موجود نیست (تابع در نقطه c بازگشتی است) و $f(c)$ مقدار مینیمم موضعی است. روی بازه (d,c) مشتق تابع منفی و روی بازه (a,d) مشتق مثبت است و $f(d)$ مقدار ماکسیمم موضعی است ضمن اینکه تابع در نقطهٔ d ناپیوسته و در نتیجه مشتق ندارد.

این تجربیات مبنای آزمون زیر است.

آزمون مشتق اوّل

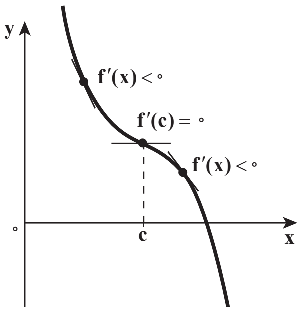
فرض کنیم c نقطهٔ بحرانی تابع f باشد که بر بازهٔ باز $I=(a,b)$ شامل c پیوسته است. هرگاه بر این بازه، جز احتمالاً در نقطه c، مشتق‌پذیر باشد، در این صورت :

الف) اگر به ازای تمام مقادیر x در بازه (a,c)، $f'(x)>0$ و به ازای تمام مقادیر x در بازه (c,b)، $f'(x)<0$، آنگاه $f(c)$ یک مقدار ماکسیمم موضعی f است.

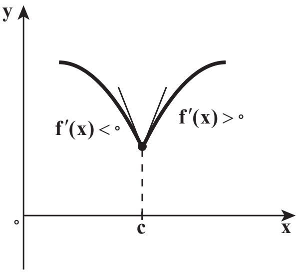
ب) اگر به ازای تمام مقادیر x در بازه (a,c)، $f'(x)<0$ و به ازای تمام مقادیر x در بازه (c,b)، $f'(x)>0$، آنگاه $f(c)$ یک مقدار مینیمم موضعی f است.

پ) اگر f' در c تغییر علامت ندهد آنگاه $f(c)$، نه مقدار مینیمم موضعی است و نه مقدار ماکسیمم موضعی است.

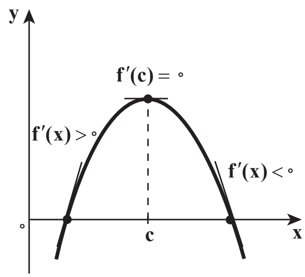
با تجسم کردن نمودارهای شکل‌های صفحه قبل و شکل زیر به سادگی می‌توان آزمون مشتق اوّل را به‌خاطر سپرد.



اکسترمم موضعی ندارد



f(c) مقدار مینیمم موضعی f′(c) موجود نیست



f(c) مقدار ماکسیمم موضعی

مثال: مقادیر اکسترمم موضعی تابع f با ضابطه $f(x)=\sqrt[۳]{\sin^۲ x}$ را روی بازه $(-\frac{\pi}{۶},\frac{۲\pi}{۳})$ پیدا کنید.

حل:

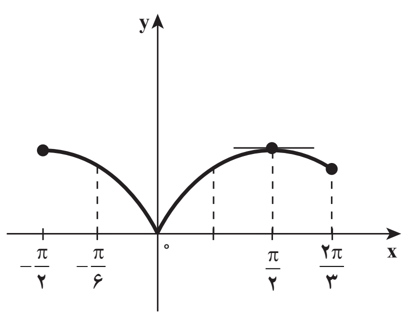
$$f'(x)=\frac{۲\cos x}{۳\sqrt[۳]{\sin x}}\ ،\ x\neq ۰$$

به ازای $x=\frac{\pi}{۲}$ که در بازهٔ $(-\frac{\pi}{۶},\frac{۲\pi}{۳})$ است، $f'(x)=۰$ پس $x=\frac{\pi}{۲}$ یک نقطه بحرانی تابع f است و $x=۰$ ریشهٔ مخرج کسر $f'(x)$ است پس $f'(۰)$ موجود نیست و $x=۰$ نقطهٔ بحرانی f است.

که در بازه $(-\frac{\pi}{۶},\frac{۲\pi}{۳})$ قرار دارد.

به ازای هر x از بازه $(-\frac{\pi}{۶},۰)$ ، $f'(x)<۰$ و برای هر x از بازه $(۰,\frac{\pi}{۲})$ ، $f'(x)>۰$ بنابراین طبق آزمون مشتق اوّل $f(۰)=۰$ یک مقدار مینیمم موضعی تابع f است.

چون به ازای هر x از بازه $(۰,\frac{\pi}{۲})$ ، $f'(x)>۰$ و برای هر x از بازه $(\frac{\pi}{۲},\frac{۲\pi}{۳})$ ، $f'(x)<۰$ پس بنابر آزمون مشتق اوّل $f(\frac{\pi}{۲})=۱$ یک مقدار ماکسیمم موضعی تابع f است. نمودار f روی بازه $[-\frac{\pi}{۲},\frac{۲\pi}{۳}]$ به شکل روبه‌رو است.

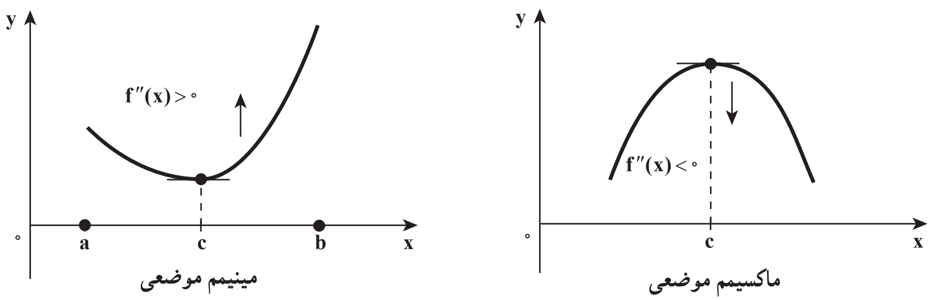


تمرین در کلاس

مقدارهای ماکسیمم و مینیمم موضعی تابع f با ضابطه $f(x)=\sqrt{3}x-2\cos x$ را روی بازه $(0,2\pi)$ پیدا کنید.

آزمون مشتق دوم : گاهی می‌توان از مشتق دوم برای انجام آزمون ساده‌ای برای مقادیر ماکسیمم و مینیمم موضعی استفاده کرد.

این آزمون مبتنی بر این است که اگر تابع f چنان باشد که $f'(c)=0$ و بازهٔ بازی شامل نقطه c باشد که نمودار f بر آن تقعر رو به بالا داشته باشد، $f(c)$ یک مقدار مینیمم موضعی f است و به همین نحو، اگر تابع f چنان باشد که $f'(c)=0$ و بازهٔ بازی شامل c باشد که نمودار f بر آن تقعر رو به پایین داشته باشد، $f(c)$ یک مقدار ماکسیمم موضعی f است. (شکل زیر را ببینید)



آزمون مشتق دوم برای اکسترمم‌های موضعی

فرض کنیم $(c,f(c))$ نقطهٔ بحرانی تابع f باشد که در آن $f'(c)=0$ و f' به ازای جمیع xهای بازهٔ باز I، شامل c موجود باشد. هرگاه $f''(c)$وجود داشته و

الف) $f''(c)<0$، آنگاه f در c ماکسیمم موضعی دارد.

ب) $f''(c)>0$، آنگاه f در c مینیمم موضعی دارد.

مثال : به فرض آنکه $f(x)=x^2e^{-x}$، با اِعمال آزمون مشتق اکسترمم‌های موضعی f را بیابید و نمودار f را رسم کنید.

حل: ابتدا نقاط بحرانی f را به‌دست می‌آوریم :

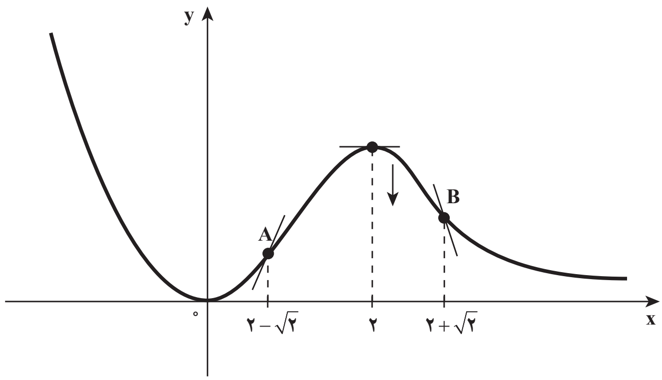
$$f'(x)=2xe^{-x}-e^{-x}\times x^2=x(2-x)e^{-x}=0\Rightarrow x=0 \text{ یا } x=2$$

نقاط بحرانی ۲ و $c=0$ که $f'(0)=0$ و $f'(2)=0$ و f' به ازای هر x از بازه $I=(-\infty,+\infty)$ موجود است.

$$f''(x)=(x^2-4x+2)e^{-x}$$

چون $f''(0)=2>0$ پس $f(0)=0$ مقدار مینیمم موضعی f است و $f''(2)=-2e^{-2}<0$ پس $f(2)=4e^{-2}$ مقدار ماکسیمم موضعی f است و نمودار f به شکل زیر است.

A و B نقاط عطف f هستند.



تمرین در کلاس

به فرض آنکه $f(x)=x^4-2x^3$، با اعمال آزمون مشتق دوم، مقادیر اکسترمم‌های موضعی f را بیابید و نمودار f را رسم کنید.

مسائل

۱ــ اگر تابع f دارای ماکزیمم مطلق بوده و $g(x)=|f(x)|$ باشد، آیا g حتماً ماکزیمم مطلق دارد؟ برای پاسخ خود دلیل بیاورید.

۲ــ نقاط بحرانی تابع f با ضابطه $f(x)=x|x^2-1|$ را پیدا کنید.

۳ــ نقاط بحرانی تابع f با ضابطه $f(x)=|x-1|\sqrt[3]{x^2}$ را پیدا کنید.

۴ــ نقاط بحرانی و نقاط اکسترمم مطلق توابع زیر را به‌دست آورید.

الف) $f(x)=x^3-3x+1$ ، $-\frac{3}{2}\leq x\leq 3$

ب) $f(x)=\sin^2x+2\cos x$ ، $0\leq x\leq 2\pi$

۵ــ ارتفاع یک توپ (به متر) در لحظهٔ t (به ثانیه) از تابع مکان به معادله $S(t)=30t-5t^2$ به‌دست می‌آید. بازهٔ زمانی بازی را بیابید که بر آن توپ به بالا می‌رود و بازهٔ زمانی بازی را بیابید که بر آن توپ پایین می‌آید. ارتفاع ماکسیمم توپ چقدر است؟

۶ــ جهت تقعر منحنی f با ضابطه $f(x)=\sqrt[3]{x-1}$ را به کمک قضیه تقعر بررسی نموده و نقطه عطف تابع را در صورت وجود پیدا کنید.

۷ــ به ازای چه مقادیری از a، تقعر منحنی f با ضابطه $f(x)=x^4+ax^3+3x^2$ همواره رو به بالا است.

۸ــ نشان دهید که نقطه عطف تابع f با ضابطه $f(x)=x(x-6)^2$ وسط پاره‌خطی است که نقاط ماکسیمم و مینیمم موضعی تابع را به هم وصل می‌کند.

۹ــ در یکنوایی و مقادیر اکسترمم تابع f با ضابطه $f(x)=x\sqrt{4-x^2}$ بحث کنید. چرا در $x=\pm 2$ مماس‌های عمود بر محور طول‌ها وجود دارند؟

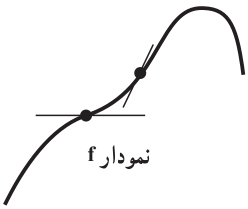
۱۰ــ غلظت c یک داروی شیمیایی در جریان خون t ساعت پس از تزریق در ماهیچه مساوی است با :

$$c=\frac{3t}{27+t^3}$$

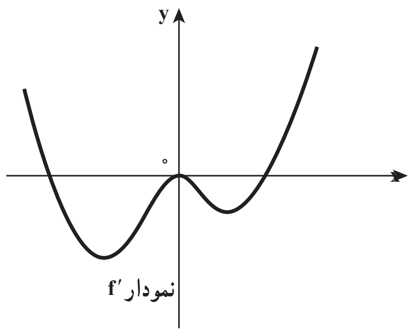
چه وقت غلظت ماکزیمم است؟

۱۱ــ یک تابع چند جمله‌ای از درجه ۳ بیابید که در (۲,۴) ماکسیمم نسبی، در (۴,۲) مینیمم نسبی، و در (۳,۳) نقطهٔ عطف داشته باشد.

۱۲ــ شکل مقابل نمودار تابع f است در مورد مقادیر اکسترمم نسبی f' (تابع مشتق f) بحث کنید.

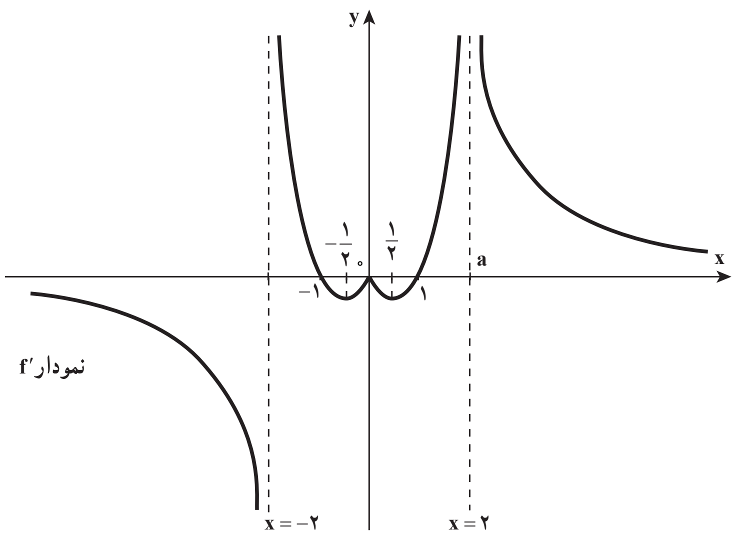


۱۳ــ شکل مقابل نمودار تابع مشتق، تابع f است
تابع f چند نقطه عطف دارد؟ دلیل خود را بیان کنید.



۱۴ــ تابع f با ضابطه $f(x)=xe^x$ را در نظر بگیرید
با استفاده از هر نوع اطلاعاتی که می‌توانید از خود تابع و مشتق‌های اوّل و دوم آن به‌دست آورید، نمودار f را رسم کنید.

۱۵ــ نمودار تابع f' (تابع مشتق، تابع همواره پیوسته f) به شکل زیر می‌باشد. تابع f در چه نقاطی ماکسیمم نسبی و یا مینیمم نسبی دارد؟ و نقاط عطف تابع f را در صورت وجود مشخص کنید.



۳ـ۱۵ـ آهنگ‌های تغییر وابسته

اگر هوا را به درون بالن بدمیم و تغییرات حجم بالن را وابسته به تغییر شعاع بدانیم، وقتی که اندازه شعاع $r_۰$ سانتی‌متر است و یک سانتی‌متر به شعاع بالن افزوده شود، آهنگ تغییر حجم بالن به صورت زیر حساب می‌شود.

$$V(r)=\frac{۴}{۳}\pi r^{۳}$$

$$V'(r)=۴\pi r^{۲}$$

وقتی اندازه شعاع بالن $r_۰$ است و یک سانتی‌متر به شعاع بالن افزوده شود، آهنگ تغییر حجم بالن $۴\pi r_۰^{۲}$ است. (به حجم بالن تقریباً $۴\pi r_۰^{۲}$ سانتی‌متر مکعب افزوده می‌شود)

در مثال بالا کمیت حجم وابسته به کمیت شعاع است، اکنون اگر کمیت شعاع وابسته به زمان (متغیر t) باشد، آنگاه کمیت حجم نیز به زمان وابسته خواهد شد.

بنابراین حجم و شعاع بالن دو کمیت وابسته به هم هستند که نسبت به متغیر سومی به‌نام زمان تغییر می‌کنند.

و امّا محاسبه مستقیم آهنگ افزایش حجم بالن از محاسبهٔ آهنگ افزایش شعاع بالن ساده‌تر است، لذا برای مطالعه پدیده‌های طبیعی و مسائل واقعی مربوط به آهنگ‌های وابسته، ایده این است که آهنگ تغییر کمیتی را که حساب کردن آن ساده‌تر است، برحسب کمیت دیگر حساب می‌کنیم.

و برای انجام این عمل، معادله‌ای پیدا می‌کنیم که این دو کمیت را به هم مرتبط کند و سپس با استفاده از قاعدهٔ زنجیری از طرفین این معادله نسبت به زمان مشتق می‌گیریم.

بررسی این ایده را همراه با حل کردن مثال‌های زیر توضیح می‌دهیم.

مثال: بالنی را از هوا پر می‌کنیم، به‌طوری که حجم آن با آهنگ ۸۰ سانتی‌متر مکعب بر ثانیه افزایش می‌یابد، وقتی شعاع بالن ۲۰ سانتی‌متر است، شعاع بالن با چه آهنگی افزایش می‌یابد؟

حل : خواندن دقیق صورت مسأله و تشخیص معلوم و مجهول و استفاده از نمادگذاری مناسب.

معلوم : آهنگ افزایش حجم هوا ۸۰ سانتی‌متر مکعب بر ثانیه است.

مجهول : آهنگ افزایش شعاع وقتی که شعاع ۲۰ سانتی‌متر است کمیت‌های حجم و شعاع را با نماد ریاضی می‌نویسیم.

V حجم بالن و r شعاع آن

می‌دانید که آهنگ تغییر، مشتق است و در این مثال کمیت‌های حجم و شعاع وابسته به زمان (t) هستند.

بنابراین:

معلوم : $\frac{dv}{dt}=۸۰\frac{cm^۳}{s}$

مجهول : $\frac{dr}{dt}$، وقتی که $r=۲۰^{cm}$ است.

برای اینکه $\frac{dv}{dt}$ و $\frac{dr}{dt}$ را به هم مربوط کنیم، ابتدا V و r را با دستور حجم کره به هم مربوط می‌کنیم:

$$V=\frac{۴}{۳}\pi r^۳$$

برای اینکه از معلوم مسأله استفاده کنیم از دو طرف این معادله نسبت به t مشتق می‌گیریم (مشتق‌گیری از سمت راست با استفاده از قاعده زنجیری انجام می‌شود)

$$\frac{dv}{dt}=۴\pi r^۲\frac{dr}{dt}$$

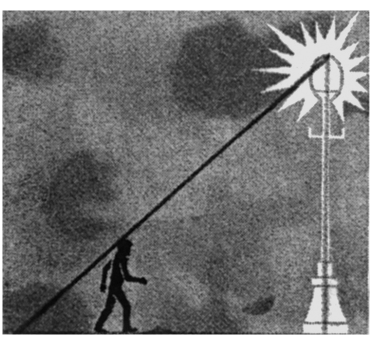
$$۸۰=۴\pi\times۴۰۰\times\frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dr}{dt}=\frac{۱}{۲۰\pi}\approx۰/۰۱۶$$

بنابراین شعاع بالن با آهنگی در حدود ۰/۰۱۶ سانتی‌متر بر ثانیه افزایش می‌یابد.

برای اینکه به ظرافت‌های بیشتر در بررسی این‌گونه مسائل پی ببریم، نیاز به تجربه واقعی است که فعالیت زیر این فرصت را فراهم می‌کند.

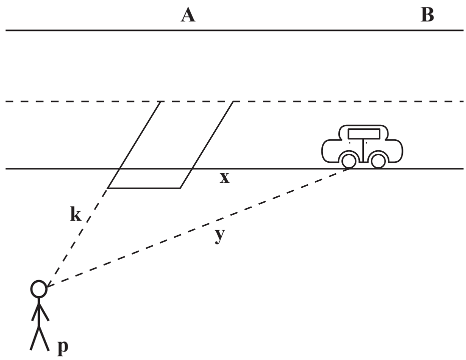
تمرین در کلاس



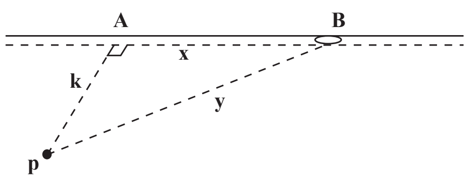
مردی که قدش ۱۸۰ سانتی‌متر است با سرعت ۰/۴ متر بر ثانیه روی زمین مسطحی به سمت تیر چراغ برق قدم می‌زند. اگر لامپ چراغ برق از زمین ۴ متر ارتفاع داشته باشد طول سایه مرد وقتی که در فاصله ۲/۴ متری تیر چراغ برق قرار دارد با چه سرعتی کاهش می‌یابد؟ در این زمان سایه سر او با چه سرعتی حرکت می‌کند؟

همان‌گونه که در فعالیت (۱) دیده شد، مدل‌سازی این‌گونه مسأله‌ها از اهمیت بالایی برخوردار است و نیازمند مهارت در استفاده از مشتق یا آهنگ تغییر است که در مثال بعدی فرصت را برای هر دو هدف فراهم می‌کند.

مثال: (دوربین راداری) پلیس راهنمایی در نزدیک بزرگراهی ایستاده است. و از یک دوربین راداری برای ثبت سرعت‌های غیرمجاز استفاده می‌کند (شکل زیر را ببینید) و دوربین را به سمت اتومبیلی نشانه می‌رود که در همین لحظه از جلوی او می‌گذرد. وقتی راستای دوربین با راستای بزرگراه زاویه 45° می‌سازد، ملاحظه می‌کند که فاصله بین اتومبیل و دوربین با آهنگ ۹۰ کیلومتر بر ساعت افزایش می‌یابد. اتومبیل با چه سرعتی در حرکت است؟



حل: شکل را به صورت مقابل درنظر می‌گیریم در مثلث قائم‌الزاویه PAB می‌توان نوشت:



$$x^2 + k^2 = y^2 \quad (1)$$

از طرفین رابطه (۱) نسبت به زمان (t) مشتق می‌گیریم.

$$2x\frac{dx}{dt} + 0 = 2y\frac{dy}{dt}$$

و یا

$$x\frac{dy}{dt} = y\frac{dy}{dt}$$

در مثلث قائم‌الزاویه PAB، $\hat{P} = \hat{B} = 45^\circ$ سپس $x=k$ و $y = k\sqrt{2}$

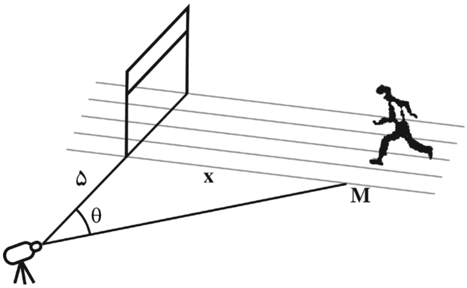
طبق صورت مسأله دوربین رادار نشان می‌دهد که $\frac{dy}{dt} = 90\ {km}/{h}$

بنابراین

$$\frac{dx}{dt} = \frac{k\sqrt{2}\times 90}{k} = 90\sqrt{2} \approx 127\ {km}/{h}$$

پس سرعت اتومبیل در حدود ۱۲۷ کیلومتر بر ساعت است.

تمرین در کلاس

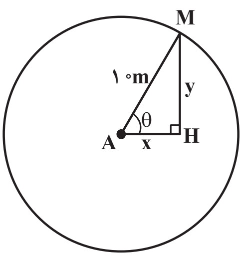


مطابق شکل مقابل، یک دوربین تلویزیون را (که در ۵ متری خط پایان روی یک مسیر مستقیم قرار دارد) نشان می‌دهد که دونده المپیک M راتعقیب می‌کند.

وقتی دونده در ۵ متری خط پایان است با سرعت ۱۰ متر بر ثانیه می‌دود. سرعت چرخش دوربین در این لحظه چقدر است؟

برای یادگیری و تسلط بیشتر در حل مسائل آهنگ‌های وابسته مثال دیگری را مطرح می‌کنیم.

مثال: (چرخ و فلک) شخصی بر چرخ و فلکی به شعاع ۱۰ متر سوار شده است که در هر دقیقه یک دور می‌زند. وقتی فاصلهٔ افقی آن شخص از خط قائم گذرنده از مرکز چرخ و فلک برابر ۵ متر است، سرعت بالا رفتن یا پایین آمدن آن شخص چقدر خواهد بود؟



حل: فرض کنیم M محل نشستن شخص روی چرخ و فلک باشد و x فاصله افقی شخص در لحظهٔ t، از خط قائمی که از مرکز می‌گذرد و y ارتفاع نقطهٔ M از خط افقی که از مرکز می‌گذرد (طبق شکل رسم شده) و θ زاویه نشان داده شده در شکل باشد.

در مثلث قائم‌الزاویه AHM داریم :

$x=۱۰\cos\theta$ و $y=۱۰\sin\theta$

اکنون از دو طرف معادله $y=۱۰\sin\theta$ نسبت به زمان (t) مشتق می‌گیریم.

$$\frac{dy}{dt}=۱۰\cos\theta\frac{d\theta}{dt}$$

و امّا بنابرصورت مسأله معلوم می‌شود :

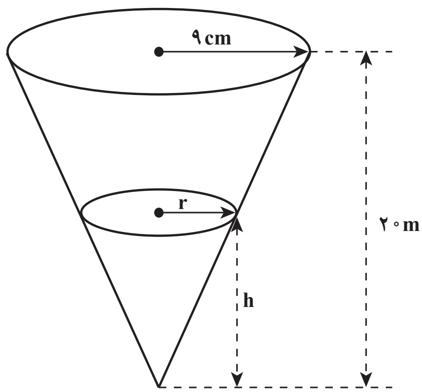
$$\frac{d\theta}{dt}=۱ \text{ دور بر دقیقه } =۲\pi \text{ رادیان بر دقیقه}$$

و در لحظه‌ای که، x برابر ۵ متر است، داریم $\cos\theta=\frac{۵}{۱۰}=\frac{۱}{۲}$

بنابراین $\frac{dy}{dt}=۱۰\times\frac{۱}{۲}\times۲\pi=۱۰\pi\approx۳۱/۴\,{}^{m}\!/_{min}$

یعنی در لحظه‌ای که x برابر ۵ متر است، سرعت بالا یا پایین رفتن حدود ۳۱/۴ متر بر دقیقه است.

تمرین در کلاس



ظرف قیفی شکل با ارتفاع ۲۰ سانتی‌متر و شعاع قاعده ۹ سانتی‌متر چنان قرار گرفته است که رأس آن در پایین است و ظرف به شکل مخروط دوار است. (شکل روبه‌رو)

فرض کنید آب با سرعت ۱/۸ سانتی‌متر مکعب بر ثانیه در این ظرف ریخته شود آهنگ افزایش ارتفاع آب را وقتی ارتفاع آب ۶ سانتی‌متر است پیدا کنید.

آنالیز ریاضی به اندازه خود طبیعت گسترده است (فوریه ۱۸۲۰ــ۱۷۶۸)

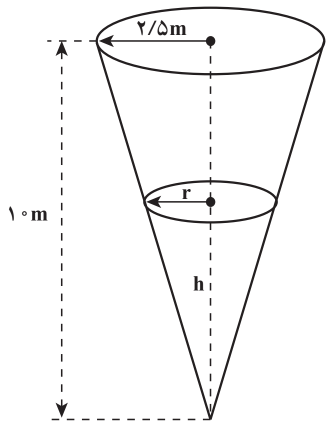
مسائل

۱ــ جسمی با سرعت ۸ سانتی‌متر بر ثانیه به عدسی نزدیک می‌گردد، اگر نسبت فاصله‌های جسم و تصویر آن از عدسی $\frac{۲}{\sqrt{۲}}$ باشد، تصویر جسم با چه سرعتی و در کدام جهت تغییر می‌کند؟ (در عدسی‌های نازک رابطهٔ $\frac{1}{f}=\frac{1}{S}+\frac{1}{s}$ برقرار است، که در آن s فاصلهٔ جسم از عدسی و S فاصلهٔ تصویر از عدسی و f فاصلهٔ کانونی عدسی است)

۲ــ مخزنی استوانه‌ای به شعاع ۳ متر را با آهنگ ۲ متر مکعب بر دقیقه از آب پر می‌کنند. ارتفاع آب با چه آهنگی بالا می‌آید؟

۳ــ شعاع کره‌ای با آهنگ ۳ میلی‌متر بر ثانیه بزرگ می‌شود. در لحظه‌ای که قطر کره ۶۰ میلی‌متر است، حجم کره با چه آهنگی افزایش می‌یابد.

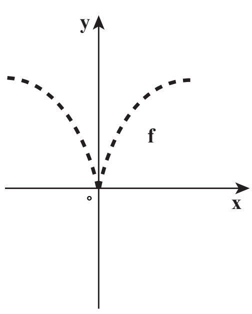
۴ــ اگر ارتفاع بادبادک شما از زمین ۲۰ متر باشد و فاصله افقی آن از شما ۳۰ متر و با آهنگ ۸ متر در دقیقه به‌طور افقی از شما دور شود طول ریسمان با چه آهنگی افزایش می‌یابد؟



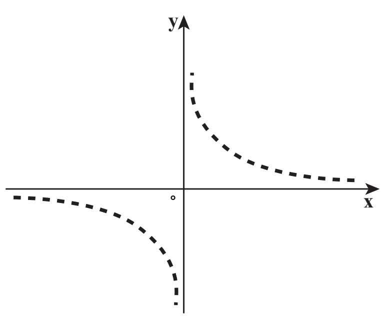
۵ــ آب با سرعت ۹ متر مکعب بر ساعت وارد منبعی می‌شود که نشتی دارد. این منبع به شکل مخروطی است که رأس آن به طرف پایین است و عمق آن ۱۰ متر و قطر قاعده آن ۵ متر است. وقتی عمق آب ۵ متر است، سطح آن با آهنگ ۱۸ سانتی‌متر بر ساعت بالا می‌رود، در این لحظه آب با چه آهنگی به خارج نشت می‌کند؟

۳ـ ۱۶ـ رسم نمودار توابع

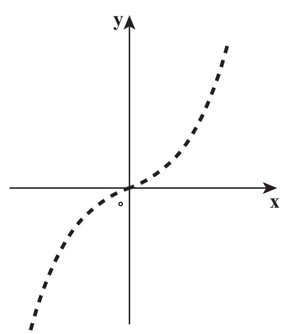
تاکنون نمودار توابعی به‌صورت خط راست و یا خط شکسته مانند نمودار تابع $y=|x-1|$ در کتاب‌های ریاضی سال‌های قبل دیده‌اید. نمودار توابعی نظیر $y=x^3$ و $y=\frac{1}{x}$ و یا $y=\sqrt[3]{x^2}$ را می‌توانیم با نقطه‌یابی در یک صفحه مختصات شطرنجی شناسایی و ترسیم کنیم. امّا مشکلی که در اینجا وجود دارد، از پیش نمی‌توانیم رفتار این‌گونه توابع را پیش‌بینی کنیم، در نتیجه فقط با افزایش نقاطی از صفحه که مختصات آنها در معادلهٔ این توابع صدق می‌کند، شکل دقیق‌تری از نمودار ترسیم می‌گردد. (شکل زیر را ببینید)



$y=\sqrt[3]{x^2}$



$y=\frac{1}{x}$



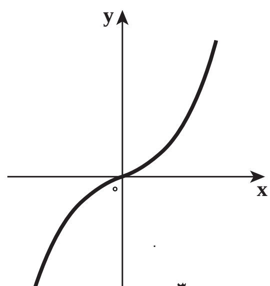
$y=x^3$

رایانه‌ها با یافتن نقاط بیشتری از توابع نمودار نسبتاً دقیق‌تری از توابع مربوطه به‌دست می‌دهند.

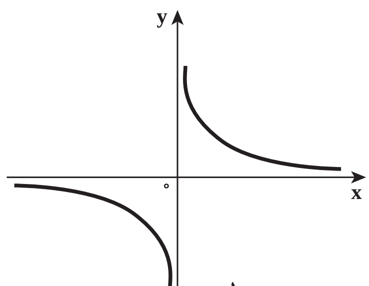
اکنون که مفهوم مشتق و شگردهای مربوط به آن را در بخش‌های پیشین بیان کردیم، به کمک آن می‌توانیم به آسانی رفتار بسیاری از توابع را مشخص کرده و حتی بدون رسم نمودار هندسی خواص آن را تعیین کنیم. برای نمونه با استفاده از حد تابع، پیوستگی، مجانب‌ها، مشتق و کاربرد آن، می‌توان نمودار هندسی توابع زیر را با دقت بیشتری در صفحهٔ مختصات رسم کرد.

الف) تابع f با ضابطه $y = x^۳$ در تمام نقاط دامنه‌اش پیوسته است و $\lim\limits_{x\to +\infty} x^۳ = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to -\infty} x^۳ = -\infty$ و شیب‌های خط مماس در تمام نقاط $x \neq ۰$، مثبت‌اند و در $x=۰$ شیب مماس بر منحنی صفر است در نتیجه نمودار تابع در مبدأ بر محور طول‌ها مماس است.

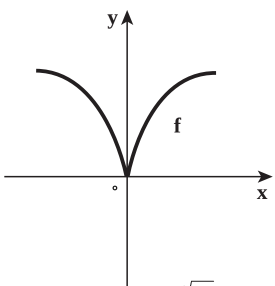
در بازه $(۰ , +\infty)$، $f''(x) = ۶x > ۰$، پس تقعر منحنی در این بازه رو به بالا است و در بازه $(-\infty , ۰)$ ، $f''(x) < ۰$، پس تقعر منحنی در این بازه رو به پایین است بنابراین $(۰و۰)$ نقطه عطف تابع است. (شکل زیر قسمت الف)



(الف) نمودار $y = x^۳$



(ب) نمودار $y = \frac{۱}{x}$



(پ) نمودار $y = \sqrt[۳]{x^۲}$

ب) تابع f با ضابطه $y = \frac{۱}{x}$ در $x=۰$ تعریف نشده است و $\lim\limits_{x\to ۰^+} \frac{۱}{x} = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to ۰^-} \frac{۱}{x} = -\infty$، پس خط $x=۰$ مجانب قائم تابع است و $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{۱}{x} = ۰$ ، $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{۱}{x} = ۰$ پس خط $y=۰$ مجانب افقی تابع است در بازه $(۰ , +\infty)$، $f''(x) = \frac{۲}{x^۳} > ۰$ و تقعر منحنی در این بازه رو به بالا است در بازه $(-\infty و ۰)$، $f''(x) < ۰$ و تقعر منحنی در این بازه رو به پایین است (شکل بالا قسمت ب را ببینید)

پ) تابع f با ضابطه $y = \sqrt[۳]{x^۲}$ در IR پیوسته است و $\lim\limits_{x\to ۰^+} \frac{f(x) - f(۰)}{x - ۰} = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to ۰^-} \frac{f(x) - f(۰)}{x - ۰} = -\infty$ پس نمودار تابع در $x=۰$ نقطهٔ بازگشتی دارد و در این نقطه تابع مشتق‌پذیر نیست و $(۰و۰)$ نقطه مینیمم نسبی و در این نقطه مینیمم مطلق خود را می‌گیرد.

در بازه $(-\infty , 0)$، $f''(x) = \frac{-2}{9x\sqrt[3]{x}} < 0$ ، و تقعر منحنی در این بـازه رو بـه پایین است. و در بازه $(0 , +\infty)$، $f''(x) < 0$ و تقعر منحنی در این بازه رو به پایین است. (شکل صفحهٔ قبل قسمت پ را ببینید.)

تاکنون اکثر موارد مربوط به رسم نمودارها را بررسی کرده‌ایم : دامنه تابع، تقارن، حد و پیوستگی، مجانب‌ها، مشتق و مماس، نقاط ماکسیمم و مینیمم نسبی و مطلق، صعودی و نزولی بودن تابع در یک بازه، جهت تقعر و نقاط عطف منحنی. همهٔ این اطلاعات را به شرح زیر جمع‌بندی کرده تا بتوانیم با استفاده از آنها نمودار تابع را با دقت نسبتاً خوبی رسم کنیم.

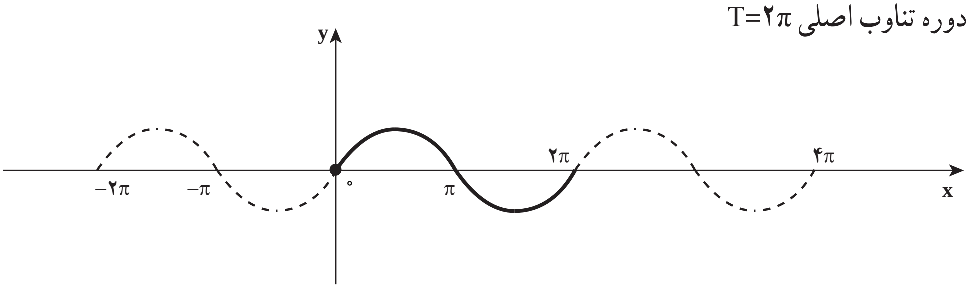
الف) دامنه تابع را مشخص می‌کنیم.

ب) تقارن

۱) اگر تابع زوج باشد، نموار نسبت به محور y تقارن دارد. بنابراین کافی است ابتدا نمودار را به ازای $x \geq 0$ رسم کنیم و سپس قرینهٔ آن را نسبت به محور y پیدا کنیم تا نمودار تابع کامل شود.

۲) اگر تابع فرد باشد، نمودار نسبت به مبدأ تقارن دارد. در این حالت نمودار را به ازای $x \geq 0$ رسم کرده و سپس قرینهٔ آن را نسبت به مبدأ مختصات پیدا می‌کنیم تا نمودار تابع کامل شود.

۳) اگر تابع f متناوب و با دوره تناوب اصلی T باشد. ابتدا نمودار تابع را در یک دوره تناوب مثلاً در بازه $[0,T]$ یا $[\alpha , \alpha+T]$ رسم می‌کنیم و اگر بدانیم نمودار تابع در بازه‌ای به طول T چه شکلی است، آن وقت می‌توانیم کل نمودار را با انتقال رسم کنیم. مانند شکل زیر برای تابع $f(x) = \sin x$ با دوره تناوب اصلی $T=2\pi$



پ) نقطه برخورد با محورهای مختصات

ت) مجانب‌های قائم و افقی و مایل تابع را در صورت وجود پیدا می‌کنیم.

ث) بازه‌هایی که تابع در آنها صعودی یا نزولی است، پیدا می‌کنیم (با استفاده تعیین علامت $f'(x)$ در بازه‌های بدست آمده)

ج) نقاط ماکسیمم و مینیمم نسبی را پیدا می‌کنیم (نقاط بحرانی درون بازه را پیدا کرده و از آزمون مشتق اوّل استفاده کرده تا نقاط ماکسیمم و یا مینیمم نسبی تابع به‌دست آیند)

چ) تقعر و نقطه‌های عطف تابع f را به‌کمک $f''(x)$ و آزمون تقعر مشخص می‌کنیم.

ح) تنظیم یک جدول به‌نام جدول رفتار تابع که کلیه اعمال انجام شده در قسمت‌های بالا در آن درج شده باشد

خ) رسم نمودار تابع با استفاده از اطلاعات قسمت‌های الف تا چ و یا با استفاده از جدول رفتار تابع

مثال: جدول رفتار و نمودار تابع f با ضابطهٔ $f(x)=3x^3-9x$ را رسم کنید.

حل: دامنه تابع مجموعه اعداد حقیقی است و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$، $(0,0)$ نقطه برخورد نمودار تابع با محور y است و $(0,0)$ و $(-\sqrt{3},0)$ و $(\sqrt{3},0)$ نقاط برخورد نمودار تابع با محور x هستند. از طرفی مشتق تابع برابر است با $f'(x)=9x^2-9$ به ازای $x<-1$، $f'(x)>0$ و به ازای $-1<x<1$، $f'(x)<0$ و به ازای $x>1$، $f'(x)>0$ در بازه‌هایی که $f'(x)>0$، تابع صعودی اکید است و در بازه‌هایی که $f'(x)<0$، تابع نزولی اکید است.

با $f'(x)=0$ داریم $x=-1$ و $x=1$ که نقاط بحرانی تابع‌اند. چون f' در $x=-1$ از مثبت به منفی تغییر علامت می‌دهد، لذا بنابر آزمون مشتق اوّل $(-1\,,\,6)$ نقطه ماکسیمم نسبی تابع است. و f' در $x=1$ از منفی به مثبت تغییر علامت می‌دهد، پس بنابر آزمون مشتق اوّل، $(1\,,\,-6)$ نقطه مینیمم نسبی است.

مشتق دوم تابع f برابر است با

$$f''(x)=18x$$

به ازای هر $x>0$، $f''(x)>0$ و به ازای هر $x<0$، $f''(x)<0$ و به ازای $x=0$، $f''(x)=0$

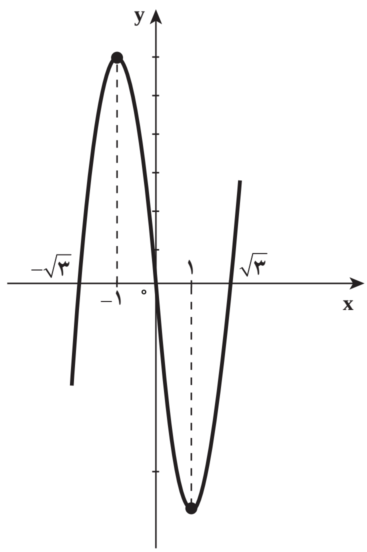
منحنی تابع در بازه $(-\infty,0)$ تقعرش روبه پایین است. و در بازه $(0,+\infty)$ تقعر منحنی رو به بالا است.

و در نقطه $(0,0)$ مماس وجود دارد با شیب $m=f'(0)=-9$ پس $(0,0)$ نقطه عطف منحنی است.

نتیجه محاسبات و اعمال فوق را در جدول رفتار تابع درج می‌کنیم.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		+	0	−		−	0	+	
y''		−		−	0	+		+	
y	$-\infty$	↗	6	↘	0	↘	-6	↗	$+\infty$
			Max		نقطهٔ‌عطف		Min		

با استفاده از جدول رفتار تابع، نمودار تابع را رسم می‌کنیم.



تمرین در کلاس

جدول رفتار و نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = x^۴ - ۸x^۲ + ۷$ را رسم کنید.

مثال: جدول رفتار و نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{x+۱}{x-۲}$ را رسم کنید.

حل:

الف: دامنه تابع $D_f = IR - \{۲\}$

ب) در نقاط $(۰, \frac{-۱}{۲})$ و $(-۱$ و $۰)$ نمودار تابع محورها را قطع می‌کند.

پ) چون $x=۲$ ریشه مخرج کسر است، حدهای زیر را حساب می‌کنیم.

$$\lim_{x \to ۲^-} f(x) = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \to ۲^+} f(x) = +\infty$$

بنابراین $x=۲$ مجانب قائم تابع است.

چون $\lim_{x \to -\infty} f(x) = ۱$ و $\lim_{x \to +\infty} f(x) = ۱$

پس خط ۱=y مجانب افقی تابع است.

ت) مشتق تابع برابر است با :

$$f'(x)=\frac{-۳}{(x-۲)^{۲}}\ ,\ x\neq ۲$$

به ازای هر x از بازه‌های $(-\infty ,۲)$ و $(۲,+\infty)$، $f'(x)<۰$ تابع f در هر کدام از بازه‌های $(-\infty ,۲)$ و $(۲,+\infty)$ نزولی است.

ث) مشتق دوّم تابع f برابر است با

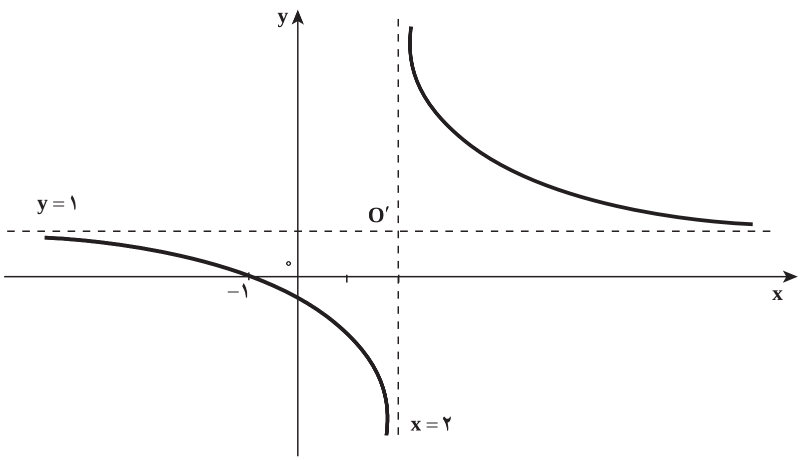
$$f''(x)=\frac{۶}{(x-۲)^{۳}}\ ,\ x\neq ۲$$

به ازای هر x از بازه $(-\infty ,۲)$، $f''(x)<۰$ پس تقعر منحنی f در این بازه رو به پایین است و برای هر x از بازه $(۲,+\infty)$، $f''(x)>۰$ پس تقعر منحنی f در این بازه رو به بالا است.

ج) جدول رفتار تابع

x	$-\infty$	-۱	۰	۲	$+\infty$
y'	$-$			‖	$-$
y''	$-$			‖	$+$
y	$۱ \searrow$	$۰ \searrow$	$-\frac{۱}{۲} \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow ۱$

چ) با استفاده از جدول رفتار تابع، نمودار تابع را رسم می‌کنیم.



یادداشت : مانند تابع بالا، تابعی با ضابطه $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ را که $c\neq ۰$ و $\frac{a}{c}\neq\frac{b}{d}$ تابع هموگرافیک می‌نامیم و o' نقطه تلاقی مجانب‌ها مرکز تقارن نمودار تابع است. در مثال بالا $o'(۲,۱)$ مرکز تقارن نمودار تابع $y=\frac{x+۱}{x-۲}$ است.

تمرین در کلاس

جدول رفتار و نمودار تابع $y=\frac{x-۲}{x}$ را رسم کنید.

مثال : جدول رفتار و نمودار تابع $f(x)=\frac{x^۲}{x^۲-۱}$ را رسم کنید.

حل :

الف) دامنه تابع $D_f=IR-\{-۱,۱\}$

ب) طول و عرض نقطه برخورد منحنی با محورها هر دو صفرند.

پ) چون $x=\pm۱$ ریشه‌های مخرج کسر هستند، حدهای زیر را حساب می‌کنیم.

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x)=+\infty \ , \ \lim_{x\to ۱^-} f(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to (-۱)^+} f(x)=-\infty \ , \ \lim_{x\to (-۱)^-} f(x)=+\infty$$

بنابراین $x=۱$ و $x=-۱$ مجانب‌های قائم تابع هستند.

چون $\lim_{x\to -\infty} f(x)=۱$ ، $\lim_{x\to +\infty} f(x)=۱$

پس خط $y=۱$ مجانب افقی تابع است.

ت) $f'(x)=\frac{-۲x}{(x^۲-۱)^۲}$

به ازای $x<۰$ $(x\neq -۱)$، $f'(x)>۰$ و به ازای $x>۰$ $(x\neq ۱)$، $f'(x)<۰$، در بازه‌هایی که $f'(x)>۰$، تابع f صعودی اکید است و در بازه‌هایی که $f'(x)<۰$، تابع f نزولی اکید است.

ث) با $f'(x)=۰$ داریم $x=۰$ پس تنها نقطه بحرانی $x=۰$ است.

چون f' در ۰ از مثبت به منفی تغییر علامت می‌دهد، لذا بنا بر آزمون مشتق اوّل $f(0)=0$، مقدار ماکسیمم نسبی است.

ج) مشتق دوّم تابع f برابر است با $f''(x)=\dfrac{6x^2+2}{(x^2-1)^3}$

چون به ازای هر x، $6x^2+2>0$ پس:

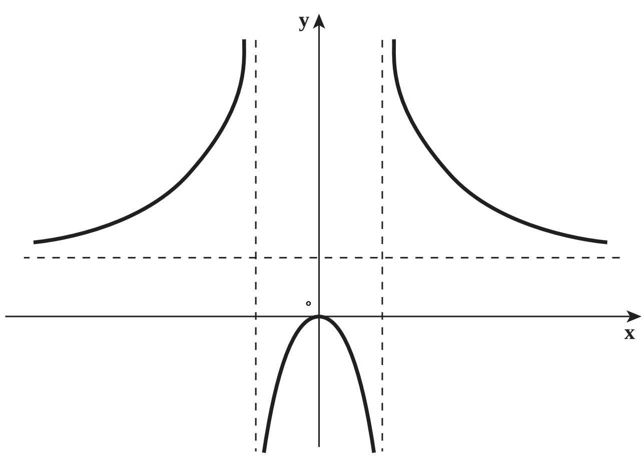
به ازای هر x که $|x|>1$ داریم $f''(x)>0$ و به ازای هر x که $|x|<1$ داریم $f''(x)<0$

بنابراین منحنی تابع (در بازه‌های $(-\infty,-1)$ و $(1,+\infty)$) تقعرش رو به بالا است و در بازه $(-1,1)$ تقعر منحنی رو به پایین است. و تابع نقطه عطفی ندارد.

چ) جدول رفتار تابع

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	¦	$+$	0	$-$	¦	$-$	
y''		$+$	¦		$-$		¦	$+$	
y	1	$\nearrow$	$+\infty$ ¦ $-\infty$	$\nearrow$	0 Max	$\searrow$	$-\infty$ ¦ $+\infty$	$\searrow$	1

ح) نمودار تابع



تمرین در کلاس

جدول رفتار نمودار تابع $y=\dfrac{x^2-3x}{x-4}$ را رسم کنید.

مثال: جدول رفتار و نمودار تابع $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$ را رسم کنید.

حل: الف) دامنه تابع f، $\{x|x\in \mathbb{R}, x\neq 0\}$ است. پس برای مجانب‌های قائم حدهای چپ و راست تابع را وقتی $x\to 0$ حساب می‌کنیم با انتخاب $t=\dfrac{1}{x}$ وقتی که $x\to 0^+$، داریم $t\to +\infty$ در نتیجه :

$$\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to +\infty} e^t = +\infty$$

بنابراین $x=0$ مجانب قائم است.

وقتی که $x\to 0^-$، داریم $t\to -\infty$ در نتیجه :

$$\lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to -\infty} e^t = 0$$

از طرفی دیگر $\lim\limits_{x\to +\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$ ، $\lim\limits_{x\to -\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$

که این هم نشان می‌دهد $y=1$ مجانب افقی است.

ب) مشتق تابع را با استفاده از قاعده زنجیری به‌دست می‌آوریم.

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$$

به ازای هر x از بازه‌های $(0,+\infty)$ و $(-\infty,0)$، $f'(x)<0$ پس تابع f در این بازه‌ها نزولی اکید است و هیچ نقطه بحرانی وجود ندارد، در نتیجه تابع f ماکسیمم یا مینیمم ندارد.

پ) مشتق دوم تابع f برابر است با :

$$f''(x) = -\frac{x^2e^{\frac{1}{x}}(-\frac{1}{x^2}) - e^{\frac{1}{x}}(2x)}{x^4} = \frac{e^{\frac{1}{x}}(2x+1)}{x^4}$$

$$f''(x)=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}$$

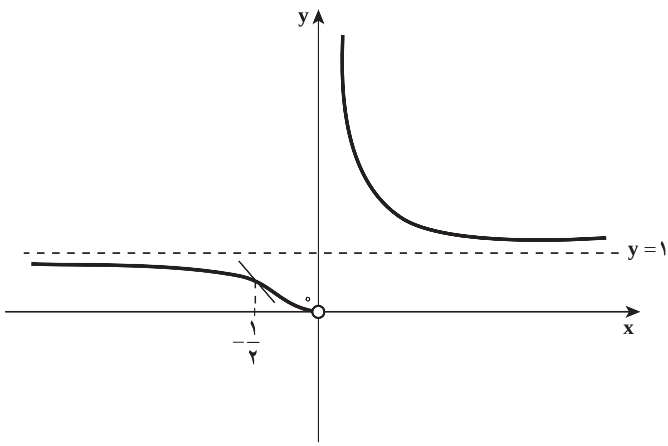
به ازای $x>-\frac{1}{2}$ $(x\neq 0)$، $f''(x)>0$ و به ازای $x<-\frac{1}{2}$، $f''(x)<0$ بنابراین تقعر منحنی در بازه‌های $(-\frac{1}{2},0)$ و $(0,+\infty)$ روبه بالا است. و تقعر منحنی روی بازه $(-\infty,-\frac{1}{2})$ روبه پایین است.

پس $(-\frac{1}{2},e^{-2})$ نقطه عطف منحنی است.

ت) جدول رفتار تابع

x	$-\infty$		$-\frac{۱}{۲}$		۰		$+\infty$
y'		$-$		$-$	‖	$-$	
y''		$-$	۰	$+$	‖	$+$	
y	۱	$\searrow$	$e^{-۲}$	$\searrow$	۰ ‖ $+\infty$	$\searrow$	۱

ث) با استفاده از جدول رفتار تابع، نمودار تابع را رسم می‌کنیم.



توجه کنید که تابع در $x = ۰$ تعریف نشده است و امّا $\lim\limits_{x \to ۰^-} f(x) = ۰$

تمرین در کلاس

جدول رفتار و نمودار تابع $f(x) = \dfrac{۱}{۱ + e^{-x}}$ را رسم کنید.

مثال: جدول رفتار و نمودار تابع $f(x) = \dfrac{x^۳}{(x-۱)^۲}$ را رسم کنید.

حل:

الف) دامنه تابع تمام اعداد حقیقی به‌جز $x = ۱$، چون $\lim\limits_{x \to ۱} \dfrac{x^۳}{(x-۱)^۲} = +\infty$

بنابراین $x = 1$ مجانب قائم f است.

چون $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ و f تابع کسری گویا است به‌طوری که درجه صورت یک واحد بیشتر از درجه مخرج کسر است، بنابراین تابع f مجانب مایل دارد که از تقسیم صورت بر مخرج کسر به‌دست می‌آید.

مجانب مایل

$$
\begin{array}{l|l}
x^3 & x^2-2x+1 \\ \cline{2-2}
 & x+2 \\
\mp x^3 \pm 2x^2 \mp x & \\ \cline{1-1}
\pm 2x^2 - x & \\
\mp 2x^2 \pm 4x \mp 2 & \\ \cline{1-1}
\quad 3x-2 &
\end{array}
$$

ب) مشتق تابع f برابر است با

$$f'(x) = \frac{x^2(x^2-4x+3)}{(x-1)^4} = \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3} \ ، \ x \neq 0$$

اگر $f'(x) = 0$ داریم $x = 0$ و $x = 3$ پس $(0،0)$ و $(3,\frac{27}{4})$ نقاط بحرانی تابع‌اند و در بازه $(1،3)$، $f'(x) < 0$ پس f نزولی اکید و در بازه $(3,+\infty)$ ، $f'(x) > 0$ پس f صعودی اکید است و بنابر آزمون مشتق اول $(3,\frac{27}{4})$ نقطه مینیمم نسبی f است.

و در بازه‌های $(-\infty , 0)$ و $(0،1)$، $f'(x) > 0$ پس f صعودی اکید است در نتیجه $(0,0)$ نه نقطه ماکسیمم است و نه نقطهٔ مینیمم.

پ) مشتق دوّم تابع f برابر است با

$$f''(x) = \frac{(3x^2-6x)(x-1)^3 - 3(x-1)^2(x^3-3x^2)}{(x-1)^6} = \frac{6x}{(x-1)^4} \ ، x \neq 1$$

به ازای $x = 0$ ، $f''(x) = 0$ است.

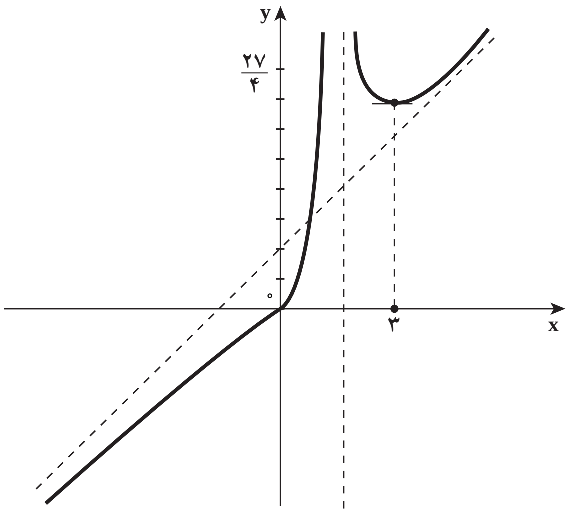
در بازه $(-\infty , 0)$، $f''(x) < 0$ لذا تقعر منحنی روبه پایین است. و در بازه $(0,1)$، $f''(x) > 0$ پس تقعر منحنی روبه بالا است.

و منحنی در $(0،0)$ بر خط $y = 0$ مماس است بنابراین $(0،0)$ نقطه عطف منحنی است.

ت) جدول رفتار

x	$-\infty$		0		1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$+$	|	$-$	0	$+$	
y''		$-$	0	$+$	|		$+$		
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$ | $+\infty$	$\searrow$	$\frac{27}{4}$ Min	$\nearrow$	$+\infty$

ث) با اطلاعات جدول رفتار تابع، نمودار آن را رسم می‌کنیم.



تمرین در کلاس

جدول رفتار و نمودار تابع $y = x + \sqrt{x^۲ - ۱}$ را رسم کنید.

مثال: جدول رفتار تابع $f(x) = \tan^{-۱}(\frac{۱}{x})$ را تنظیم کرده و به کمک آن نمودار تابع را رسم کنید.

حل:

الف) دامنه تابع $IR - \{۰\}$ است با انتخاب $U = \frac{۱}{x}$ داریم:

$$\lim_{x \to ۰^+} f(x) = \lim_{U \to +\infty} \tan^{-۱}(U) = \frac{\pi}{۲}$$

$$\lim_{x \to ۰^-} f(x) = \lim_{U \to -\infty} \tan^{-۱}(U) = -\frac{\pi}{۲}$$

تابع f در نقاط $(۰, \frac{\pi}{۲})$ و $(۰, -\frac{\pi}{۴})$ تعریف نشده است و امّا $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{U \to ۰^+} \tan^{-۱}(U) = ۰$

و $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{U \to ۰^-} \tan^{-۱}(U) = ۰$

بنابراین خط $y=0$ مجانب افقی تابع است.

ب) مشتق تابع $y=\tan^{-1}(x)$ می‌شود $y'=\dfrac{1}{1+x^2}$ پس با استفاده از قاعده زنجیری مشتق تابع $f(x)=\tan^{-1}(\dfrac{1}{x})$ برابر است با :

$$f'(x)=\frac{-\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{1}{x^2}}=\frac{-1}{1+x^2}<0$$

تابع در هریک از بازه $(-\infty\,,0)$ و $(0,+\infty)$ نزولی اکید است و نقطه بحرانی ندارد.

پ) مشتق دوّم تابع برابر است با :

$$f''(x)=\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

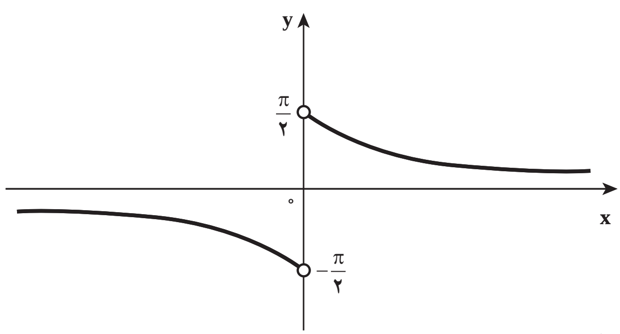
در بازه $(-\infty\,,0)$ ، $f''(x)<0$ و تقعر منحنی روبه پایین است.

و در بازه $(0,+\infty)$ ، $f''(x)>0$ پس تقعر منحنی روبه بالا است.

ت) جدول رفتار تابع

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$			$-$
y''		$-$			$+$
y	0	$\searrow$	$-\frac{\pi}{2}$ | $\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	0

ث) نمودار تابع به‌صورت زیر است.



تمرین در کلاس

جدول رفتار و نمودار تابع f با ضابطه $y=\sin^{-1}(\dfrac{1}{x})$ را رسم کنید.

مسائل

۱ــ جدول رفتار و نمودار توابع با ضابطه‌های زیر را رسم کنید.

الف) $y=\dfrac{x^{۲}-۴x+۸}{x-۲}$

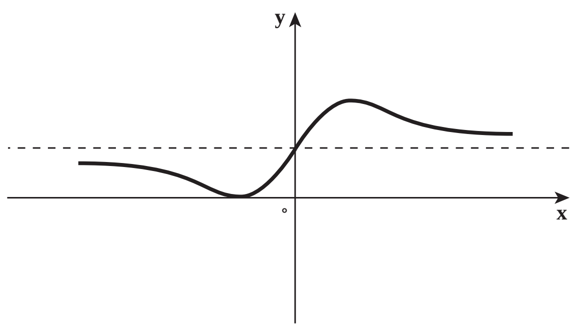
ب) $y=\dfrac{x^{۲}+۲x}{x^{۲}+۲x-۳}$

پ) $y=x+\sqrt{x^{۲}-۳x+۲}$

ت) $y=\sin x+\sqrt{۳}\cos x$ ، $۰\le x\le ۲\pi$

ث) $y=\dfrac{۱-\sin x}{۱+\cos x}$ ، $۰\le x\le ۲\pi$

۲ــ a و b را چنان اعدادی انتخاب کنید که نمودار تابع f با ضابطه $y=\dfrac{x^{۲}+ax+۱}{۲x^{۲}+b}$ به‌صورت زیر باشد.



فصل ۴

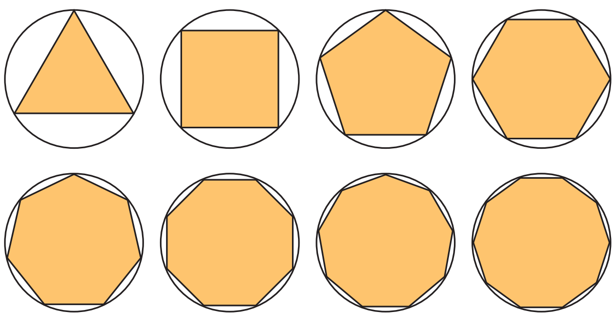
انتگرال

۴ـ۱ـ مسأله مساحت

فرمول‌های مربوط به مساحت چندضلعی‌ها، نظیر مربع، مستطیل، مثلث و ذوزنقه از زمان‌های شروع تمدن‌های نخستین به خوبی شناخته شده بوده است. با این‌حال، مسأله یافتن فرمولی برای بعضی نواحی که با مرزهای منحنی‌الخط هستند (که دایره ساده‌ترین آنهاست) برای ریاضیدانان اولیه در خور مشکلاتی بوده است.

اولین پیشرفت واقع‌بینانه محاسبه چنین مساحت‌هایی توسط ریاضیدان یونانی به نام ارشمیدس صورت گرفت. ارشمیدس توانست مساحت ناحیه‌هایی با مرزهای محدود به قوس‌های دایره، سهمی، و میخ و منحنی‌های دیگر را با استفاده از روش خارق‌العاده‌ای، که امروزه به روش اِفنا مشهور است، محاسبه کند. در چنین روشی برای محاسبه دایره از درج چندضلعی‌های منتظم در درون دایره استفاده می‌شود و تعداد اضلاع این چندضلعی‌ها متوالیاً زیاد و زیادتر شده و به نحو نامحدودی افزایش می‌یابد (شکل ۴ــ۱)

۳,۱۳۹۵۲۵۹۷۶۴۷	۱۰۰
۳,۱۴۱۰۷۵۹۰۷۸۱	۲۰۰
۳,۱۴۱۳۶۲۹۸۲۵۰	۳۰۰
۳,۱۴۱۴۶۳۴۶۲۳۶	۴۰۰
۳,۱۴۱۵۰۹۹۷۰۸۴	۵۰۰
۳,۱۴۱۵۷۱۹۸۲۷۸	۱۰۰۰
۳,۱۴۱۵۸۷۴۸۵۸۸	۲۰۰۰
۳,۱۴۱۵۹۰۳۵۶۸۳	۳۰۰۰
۳,۱۴۱۵۹۱۳۶۱۶۶	۴۰۰۰
۳,۱۴۱۵۹۱۸۲۶۷۶	۵۰۰۰
۳,۱۴۱۵۹۲۴۴۶۸۸	۱۰,۰۰۰



جدول و شکل ۴ــ۱ــ هرچه تعداد اضلاع چندضلعی بیشتر شود مساحت چندضلعی به مساحت دایره نزدیک و نزدیک‌تر می‌گردد.

همچنان که تعداد اضلاع چنین چندضلعی‌هایی افزایش می‌یابد، چندضلعی به پرکردن ناحیه درون دایره متمایل شد و در نتیجه مساحت این چندضلعی‌ها تقریب‌های بهتر و بهتری از مساحت دقیق دایره به دست می‌دهد.

برای آنکه ملاحظه کنیم که چگونه این روش کار می‌کند، فرض می‌کنیم نمایش مساحت چندضلعی با n ضلع بوده باشد که درون دایره به شعاع واحد محاط شده است.

جدول ۴ــ۱ مقادیر $A(n)$ را برای انتخاب‌های مختلف n نشان می‌دهد. می‌بینیم که برای مقادیر بزرگ n مساحت $A(n)$ ظاهراً به عدد نزدیک می‌گردد و این چیزی است که انتظارش را داریم. این تجربه به ما می‌گوید که برای مساحت دایره‌ای به شعاع ۱، می‌توانیم روش افنا را معادل تساوی حدی ارزیابی کنیم.

$$\lim_{n\to\infty} A(n) = \pi$$

اما یونانیان باستان از مفهوم «بینهایت» خوششان نمی‌آمد و لذا در بررسی‌های مربوط به ریاضیات از آن احتراز می‌کردند؛ در نتیجه محاسبه مساحت با استفاده از روش افنا یک فرایند سرانگشتی به حساب می‌آمد. در واقع این روش تا زمان نیوتن و لابنیتز باقی ماند ــ کسانی که روشی کلی برای محاسبه مساحت با استفاده ضمنی از مفهوم حد ارائه کردند. ما روش این دانشمندان را در بررسی مسأله زیر به‌کار خواهیم گرفت.

مسأله مساحت : با داشتن تابع پیوسته و نامنفی f که بر بازه $[a , b]$ تعریف شده است، مساحت بین نمودار f و بازه $[a , b]$ بر محور x را پیدا کنید (شکل ۴ــ۲)

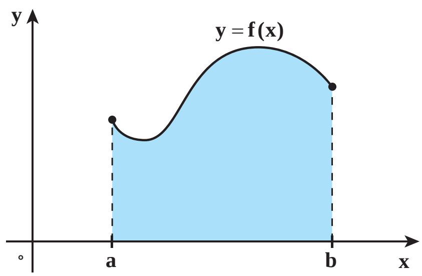
پرسش : همچنان که در شکل ۴ــ۱ ملاحظه می‌کنیم تعدادی چندضلعی منتظم در درون دایره به شعاع واحد محاسبه شده‌اند. در جدول سمت راست برای مقادیر بزرگ n که تعداد اضلاع چندضلعی را نشان می‌دهد، مساحت چندضلعی‌ها با نماد $A(n)$ نشان داده شده است. آیا می‌توان گفت که وقتی n بزرگ و بزرگ‌تر می‌شود مساحت n ضلعی محاطی با مساحت دایره برابر می‌گردد؟

به زبان دنباله‌ها، برای هر $n \geq ۳$ ،$A(n)$ که مساحت n ضلعی است عددی است حقیقی. در نتیجه $\{A(n)\}_{n=۱}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی است که جمله n ام آن مساحت n ضلعی منتظم محاط در درون دایره است. می‌دانیم که مساحت دایره $S = \pi r^۲ = \pi \times ۱ = \pi$ می‌باشد. آیا به زبان حدی می‌توانیم بگوییم که :

$$\lim_{n\to+\infty} A(n) = \pi$$

یونانیان باستان از مفهوم «بی‌نهایت» خوششان نمی‌آمد و لذا در بررسی‌های مربوط به ریاضیات از آن احتراز می‌کردند، در نتیجه محاسبه مساحت با استفاده از روش افنا برایشان یک فرآیند

سرانگشتی به حساب می‌آمد. در واقع این روش تا زمان نیوتن و لایبنیتز باقی ماند ــ کسانی که روش کلی‌تر برای محاسبه مساحت با استفاده ضمنی از مفهوم حد ارایه کردند. ما روش این دانشمندان را در بررسی مسأله مساحت به‌کار خواهیم گرفت.



شکل ۴ــ۲ــ ناحیه تحت نمودار

تابع f محدود به محور x و دو خط x = a و x = b

ما در این فصل به مطالعه و بررسی مسأله مساحت می‌پردازیم و لذا این طریق مفهوم مهمّ انتگرال معین را فرمول‌بندی خواهیم کرد. امّا ذکر این نکته نیز جالب است که گرچه انتگرال در رابطه با مسأله مساحت مفهوم‌سازی شده است، لکن از این مفهوم برای بررسی و مطالعه مسأله‌های دیگری در ریاضیات، فیزیک و سایر علوم دقیقه استفاده می‌شود، نظیر مسأله پتانسیل الکتریکی، مسأله کار انجام شده توسط نیروها، مطالعه و تعیین معادله مسیر متحرک‌ها با استفاده از سرعت‌های داده شده و نظایر این‌ها.

قبل از آن که به مطالعه و بررسی مساحت بپردازیم لازم است با مجموع‌های متناهی و نماد سیگما آشنا شویم.

مجموع‌ها و نماد سیگما : در محاسبه و مطالعه مساحت‌ها که در بخش بعدی با آن درگیر می‌شویم، با مجموع‌هایی متناهی از مقدارهای یک تابع سروکار خواهیم داشت. در این بخش برآنیم تا نماد مناسبی برای نمایش یک مجموع با تعداد متناهی جمله معرفی کنیم. همچنین به روش‌هایی برای محاسبه حاصل جمع چنین مجموع‌هایی محتاج خواهیم بود. از نماد Σ (سیگما) برای نمایش یک مجموع استفاده می‌کنیم.

تعریف ۱ : نماد سیگما هرگاه m و n دو عدد صحیح $m \le n$ و همچنین f تابعی باشد که بر اعداد صحیح تعریف شده باشد، نماد $\sum_{i=m}^{n} f(i)$ نشانگر حاصل جمع مقادیر تابع f در این اعداد می‌باشد : $m, m+۱, m+۲, \ldots, m$

$$\sum_{i=m}^{n} f(i) = f(m) + f(m+۱) + \ldots + f(n)$$

مجموع سمت راست این تساوی بسط مجموع تأثیر داده شده با سیگمای سمت چپ نامیده می‌شود.

❖ **مثال:** $\sum_{i=1}^{5} i^2 = 1^2+2^2+3^2+4^2+5^2=55$

حرف i ظاهر شده در نماد $\sum_{i=m}^{n} f(i)$ را **اندیس جمع‌بندی** می‌نامیم.

پس برای محاسبه $\sum_{i=m}^{n} f(i)$ ، اندیس i را با اعداد $m, \ldots, m+1, \ldots, n$ متوالیاً جایگزین کرده و مقادیر حاصله را جمع می‌کنیم. ملاحظه می‌کنیم که مقدار حاصل جمع به اندیس جمع‌بندی بستگی ندارد؛ چرا که این اندیس در سمت راست تعریف وجود ندارد.

برای هر k:

$$\sum_{i=m}^{n} f(i) = \sum_{k=m}^{n} f(k)$$

$$\sum_{k=1}^{5} k^2 = 1^2+2^2+3^2+4^2+5^2=55$$

لکن حاصل جمع $\sum_{i=m}^{n} f(i)$ به دو عدد جمع m و n بستگی تام دارد، این دو عدد را حدود جمع‌بندی می‌نامیم؛ m را **حد پایین** و n را **حد بالا** می‌نامیم.

❖ **مثال:** نمایش حاصل جمع‌ها با استفاده از نماد سیگما

$$\sum_{j=1}^{20} j = 1+2+3+\cdots\cdots+18+19+20$$

$$\sum_{i=0}^{n} x^i = x^0+x^1+x^2+\cdots\cdots+x^{n-1}+x^n$$

$$\sum_{m=1}^{n} i = \underbrace{1+1+1+\cdots\cdots+1}_{\text{بار } n}$$

$$\sum_{k=-2}^{3} \frac{1}{k+8} = \frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}$$

نکته: در اکثر اوقات به‌جای استفاده از نماد تابعی $f(i)$ از یک متغیر اندیس‌دار مانند a_i برای نمایش جمله iام یک حاصل جمع عمومی استفاده می‌کنیم:

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n$$

به‌خصوص وقتی تعداد جملات نامتناهی باشد. چنین مجموعی را یک **سری نامتناهی** می‌نامیم:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

پس وقتی جمله‌ای به‌عنوان جمله آخر به دنبال سه نقطه ... نمی‌آید، باید این معنی را داشته باشد که جملات برای همیشه و به‌طور نامتناهی ادامه دارند.

پرسش : اکنون این پرسش پیش می‌آید که وقتی تعداد جملات متناهی باشد، استفاده از نماد سیگما چه ویژگی‌هایی دارد؟

چون نماد سیگما تعمیم عمل جمع به تعداد متناهی جمله است، پس ویژگی‌های اساسی عمل جمع را به ارث می‌برد. برای مثال، وقتی تعداد متناهی عدد را جمع می‌کنیم، ترتیب قرار گرفتن جملات تأثیری در مقدار حاصل جمع ندارد و یا آن که هرگاه همه جملات دارای عامل مشترک باشند، این عامل مشترک را می‌توان از جملات جدا کرده و به صورت فاکتور ضرب در نماد سیگما لحاظ کرد همانند وقتی که تعداد جملات فقط ۲ جمله است : $ca + cb = c(a + b)$

لذا قوانین اولیه حساب ویژگی‌هایی به نماد سیگما می‌دهد که اینک اهم آن را بیان می‌کنیم.

الف) $$\sum_{i=m}^{n} (Af(i)+Bg(i)) = A\sum_{i=m}^{n} f(i) + B\sum_{i=m}^{n} g(i)$$

که B، A اعدادی ثابت و مستقل از اندیس i هستند.

ب) دو عبارت $\sum_{i=m}^{m+n} f(i)$ و $\sum_{i=o}^{n} f(i+m)$ دارای یک بسط هستند؛ در واقع هر یک برابر $f(m) + f(m+۱) + \ldots + f(m+n)$ هستند (امتحان کنید!). پس

د) $$\sum_{i=m}^{m+n} f(i) = \sum_{i=o}^{n} f(i+m)$$

این قانون را **قانون لغزاندن اندیس‌ها** می‌نامیم.

مثال: $\sum_{i=۳}^{۱۷} \sqrt{۱+i^۲}$ را به صورت $\sum_{i=۱}^{n} f(i)$ بنویسید.

حل: باید در عبارت داده شده اندیس‌های پایین و بالا را ۲ واحد کم کنیم تا اندیس پایین از ۱ شروع گردد؛ در عین حال به همان مقدار، یعنی ۲ واحد به اندیس عبارت تحت Σ باید اضافه کنیم :

$$\sum_{i=۳}^{۱۷} \sqrt{۱+i^۲} = \sum_{i=۱}^{۱۵} \sqrt{۱+(i+۲)^۲}$$

نکته: ملاحظه کنید که $\sum_{i=m+۱}^{n} f(i) = \sum_{i=۱}^{n} f(i) - \sum_{i=۱}^{m} f(i)$ (چرا؟)

تمرین در کلاس

اکنون شما عبارت $\sum_{i=a+۱}^{۱۲} f(b+i)^۳$ را به‌صورت $\sum_{i=۱}^{n} f(i)$ بنویسید.

محاسبه مجموع‌ها : وقتی یک مجموع مانند $S=\sum_{i=۱}^{n} i=۱+۲+۳+\cdots+n$ داده می‌شود که درگیر تعداد زیادی جمله می‌باشد، داشتن فرمولی که مقدار این مجموع را به شکلی بسته نشان دهد بسیار ضروری می‌باشد.

منظورمان از شکل بسته چنین فرمولی آن است که از شکل بسط آن (شامل سه نقطه) استفاده نشده باشد. برای مجموع بالا فرمول به‌صورت $S=\sum_{i=۱}^{n} i=\frac{n(n+۱)}{۲}$ می‌باشد.

دانش‌آموزان، در این مورد خاص، مشکلی ندارند. می‌توانید به شکل زیر عمل کنید.

$$S=۱+۲+۳+\ldots+(n-۱)+n$$

$$S=n+(n-۱)+(n-۲)+\ldots+۲+۱$$

پس جمع را یک بار به صورت معمولی به جلو هریک بار به‌صورت عقب‌گرد نوشته‌ایم. دو ردیف را همچنان که زیر هم نوشته شده‌اند با هم جمع می‌کنیم :

$$۲S=(n+۱)+(n+۱)+(n+۱)+\ldots+(n+۱)+(n+۱)=n(n+۱)$$

فرمول S فوق الاشاره با تقسیم طرفین تساوی اخیری بر ۲ به‌دست می‌آید.

امّا همیشه محاسبه یک مجموع و یافتن فرمولی برای آن به این آسانی نخواهد بود. این مسأله یکی از مسأله‌های چالش‌برانگیز در مباحث ریاضیات است. لیکن چنین فرمول‌هایی که در بخش بعدی بدان نیاز داریم، فرمول‌هایی سرراست و ساده بوده که در قضیه بعدی گردآوری شده‌اند.

قضیه ۱ : فرمول‌های جمع‌بندی

الف) $\sum_{i=۱}^{n} ۱=\underbrace{۱+۱+۱+\cdots+۱}_{n}=n$

ب) $\sum_{i=۱}^{n} i=۱+۲+۳+\cdots+n=\frac{n(n+۱)}{۲}$

ج) $\sum_{i=\circ}^{n} i^۲=۱^۲+۲^۲+۳^۲+\cdots+n^۲=\frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}$

د) $\sum_{i=۱}^{n} r^{i-۱}=۱+r+r^۲+r^۳+\cdots+r^{n-۱}=\frac{r^n-۱}{r-۱}\ ,\ (r\neq ۱)$

برهان :

الف) بدیهی است حاصل جمع n بار عدد ۱ برابر n است. یک راه حل برای (ب) قبلاً ارایه گردید. برای اثبات (ج) n بار اتحاد زیر را

$$(k+۱)^۳-k^۳=۳k^۲+۳k+۱$$

به ازای هر k که $۱ \leq k \leq n$ نوشته و جمع می‌کنیم.

$$\begin{array}{llllll}
k=۱ & ۲^۳-۱^۳ & =۳\times۱^۲ & + & ۳\times۱ & +۱ \\
k=۲ & ۳^۲-۲^۳ & =۳\times۲^۲ & + & ۳\times۲ & +۱ \\
k=۳ & ۴^۳-۳^۳ & =۳\times۳^۲ & + & ۳\times۳ & +۱ \\
\vdots & \vdots & & & & \\
k=n-۱ & n^۳-(n-۱)^۳ & =۳(n-۱)^۲ & + & ۳(n-۱) & +۱ \\
\underline{k=n} & \underline{(n+۱)^۳-n^۳} & \underline{=۳n^۲} & \underline{+} & \underline{۳n} & \underline{+۱}
\end{array}$$

با استفاده از (ب) $\quad (n+۱)^۳-۱=۳(\sum\limits_{i=۱}^{n} i^۲)+\frac{۳n(n+۱)}{۲}+n$

در نتیجه به آسانی $\sum\limits_{i=۱}^{n} i^۲$ از تساوی اخیر به‌دست می‌آید.

$$۳\sum_{i=۱}^{n} i^۲=(n+۱)^۳-\frac{۳n(n+۱)}{۲}-n-۱$$

$$=n^۳+۳n^۳+۲n-\frac{۳n(n+۱)}{۲}$$

$$\sum_{i=۱}^{n} i^۲=\frac{n(n^۲+۳n+۲)}{۳}-\frac{n(n+۱)}{۲}=\frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}$$

د) همان مجموع جملات یک تصاعد هندسی با قدرنسبت r می‌باشد که از قبل با آن آشنایی دارید.

فعالیت

در برهان قسمت ج، قسمت‌های سمت چپ n تساوی را باهم جمع کردیم و هر جمله اول یک تساوی با جمله دوم تساوی بعدی حذف گردید (به دلیل قرینه بودن) و از همه جملات، فقط جمله اول تساوی n ام (آخر) و جمله دوم تساوی اول باقی ماندند که همان عبارت $(n+۱)^۳-۱^۳$ سمت چپ، حاصل جمع تساوی ظاهر گردید. در واقع می‌توانستیم از نماد سیگما استفاده کنیم: هر عبارت در سمت چپ به شکل کلی $(k+۱)^۳-k^۳$ است که در آن $۱ \leq k \leq n$. پس جمع آن به شکل $\sum\limits_{k=۱}^{n}((k+۱)^۳-k^۳)$ است. اما حاصل آن، با حذف جملات قرینه، برابر $(n+۱)^۳-۱^۳$ شد. بنابراین:

$$\sum_{k=۱}^{n}((k+۱)^۳-k^۳)=(n+۱)^۳-۱^۳ \qquad (۱)$$

فعالیت

این یک مثال از حالت کلی جمعی است که **جمع تلسکوپی** نامیده می‌شود.

فرم جمع تلسکوپی به‌صورت کلی:

$$\sum_{i=m}^{n}(f(i+1)-f(i))=f(n+1)-f(m) \qquad (2)$$

می‌باشد، زیرا همه جملات آن به‌جز اولی و آخری حذف می‌شوند. قاعده جمع تلسکوپی را برخی **قاعده ادغام** نیز می‌نامند.

ابتدا تساوی (۱) را به استقراء ثابت کنید. سپس (۲) را به استقراء ابتدا از m ثابت کنید.

مثال: محاسبه کنید:

$$\sum_{k=m+1}^{n}(6k^2-4k+3)$$

که در آن $1\leq m\leq n$

حل: از قواعد جمع‌بندی و فرمول‌های قضیه قبل استفاده می‌کنیم:

$$\sum_{k=1}^{n}(6k^2-4k+3)=6\sum_{k=1}^{n}k^2-4\sum_{k=1}^{n}k+3\sum_{k=1}^{n}1$$

$$=6\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-4\frac{n(n+1)}{2}+3n$$

$$=2n^3+n^2+2n$$

بنابراین

$$\sum_{k=m+1}^{n}(6k^2-4k+3)=\sum_{k=1}^{n}(6k^2-4k+3)-\sum_{k=1}^{m}(6k^2-4k+3)$$

$$=2n^3+n^2+2n-2m^3-m^2-2m$$

نکته: برنامه‌ریزی میپل (Maple) شکل بسته فرمولی برخی از جمع‌ها را به دست می‌دهد. برای مثال:

```
> Sum(i^4, i=1..n); factor(%);
```

$$=\frac{1}{5}(n+1)^5-\frac{1}{2}(n+1)^4+\frac{1}{3}(n+1)^3-\frac{1}{30}n-\frac{1}{30}$$

$$=\frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$$

مسائل

در تمرین‌های ۸ـ۱ جمع را بسط دهید :

۱ـ $\sum_{i=1}^{4} i^3$ ۲ـ $\sum_{j=1}^{100} \frac{j^3}{j+1}$ ۳ـ $\sum_{j=1}^{n} 3i$

۴ـ $\sum_{i=1}^{n-1} \frac{(-1)^i}{i+1}$ ۵ـ $\sum_{i=3}^{n} \frac{(-2)^i}{(i+2)^2}$ ۶ـ $\sum_{j=1}^{n} \frac{j^2}{n^3}$

۷ـ $\sum_{n=1}^{k} \sin\frac{n\pi}{3k}$ ۸ـ $\sum_{k=2}^{n} \frac{e^{-k}}{nk}$

جمع‌های زیر را با استفاده از نِماد Σ بنویسید.(متذکر می‌شویم که جواب منحصر به‌فرد نمی‌باشد)

۹ـ $5+6+7+8+9$ ۱۰ـ $2+2+2+2- \ldots +2$ (۲۰۰ بار)

۱۱ـ $2^2-3^2+4^2-5^2+\ldots-99^2$ ۱۲ـ $1+2x+3x^2+4x^3+ \ldots +100x^{99}$

۱۳ـ $1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n$ ۱۴ـ $1-x+x^2-x^3+\ldots+x^{2n}$

۱۵ـ $1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{\pi^2}$ ۱۶ـ $\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+\cdots+\frac{n}{2^n}$

۴ـ۲ـ مساحت به‌عنوان حد مجموع

در فصل ۳ با استفاده از تعریف حد، مماس بر یک منحنی خاص به مطالعه و بررسی مشتق پرداختیم. در اینجا نیز بیشتر دوست داشتیم تا با استفاده از تعریفی از مساحت یک ناحیه در صفحه به مطالعه انتگرال بپردازیم. امّا ارائه تعریفی از مساحت بسیار مشکل‌تر از تعریفی برای مماس است.

بنابراین فرض می‌کنیم که منظورمان از مساحت به گونه‌ای ملموس بر ما معلوم بوده و از این‌رو برخی از ویژگی‌های آن را یادآوری می‌شویم.

الف) مساحت یک ناحیه در صفحه عددی حقیقی و نامنفی برحسب واحدهای سطح (مربع‌ها) می‌باشد.

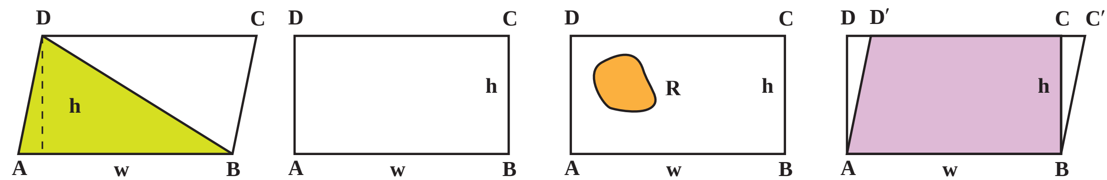
ب) مساحت یک مستطیل با عرض w و ارتفاع h برابر $A=wh$ است.

ج) مساحت ناحیه‌های صفحه‌ای که برابر باشند یکی است.

د) هرگاه ناحیه S درون ناحیه R باشد، مساحت S کمتر از مساحت R است.

هـ) هرگاه ناحیه R اجتماعی متناهی از ناحیه‌های مجزا باشد، مساحت R برابر مجموع مساحت‌های این ناحیه‌های مجزا است.

با استفاده از این ویژگی‌های شهودی مساحت می‌توانیم مساحت خیلی از اشکال هندسی را بررسی و یا محاسبه کنیم. شما در شکل‌های زیر می‌توانید بگویید که نتیجه حاصله که درزیر هر شکل نوشته شده است بر طبق کدام یک از ویژگی‌های (الف) ــ (هـ) می‌باشد.

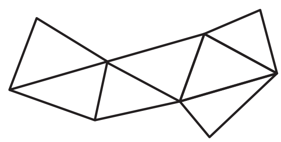


مساحت مثلث ABC $= \frac{1}{2}$ wh

مساحت ABCD = w.h

مساحت S < مساحت R

مساحت ABC′D′ = w.h



مجموع مساحت مثلث‌ها مساوی مساحت چندضلعی

شکل ۴ــ۳ــ ویژگی‌مساحت‌ها

امّا فراتر از چندضلعی‌ها نمی‌توان رفت، مگر آنکه از مفهوم حد کمک بگیریم. شما با مفهوم حد در سال قبل و همچنین در فصل ۲ این کتاب به خوبی آشنا شده‌اید. هرگاه یک مساحت دارای مرزی منحنی‌وار بوده باشد، محاسبه ساده آن فقط می‌تواند به‌صورت تقریبی با استفاده از مساحت مثلث‌ها و مستطیل‌ها به دست آید؛ محاسبه دقیق این گونه مساحت‌ها محتاج محاسبه یک حد است.

روش مستطیل برای محاسبه مساحت : در این بخش قصدمان این است که نشان دهیم چگونه می‌توان مساحت یک ناحیه مانند R را که تحت نمودار تابع پیوسته و نامنفی $y=f(x)$ و محدود به دو خط قائم $x=a$, $x=b$ است به‌دست آوریم.

برای این کار به طرز زیر عمل می‌کنیم. بازه $[a,b]$ را به n زیر بازه جزء با استفاده از نقاط افرازی

$$a=x_۰<x_۱<x_۲<\dots<x_{n-۱}<x_n=b$$

$(n+۱)$ نقطه تقسیم می‌کنیم، طول بازه iام $[x_{i-۱},x_i]$ را به Δx_i نشان می‌دهیم :

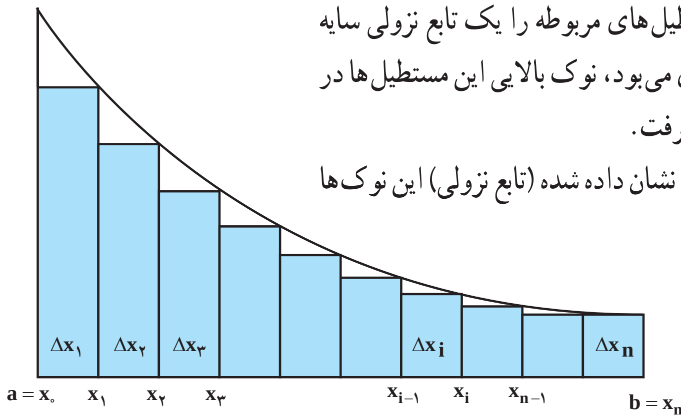
$$\Delta x_i=x_i-x_{i-۱} \quad , \quad (i=۱,۲,۳,\dots n)$$

بر روی هر بازه جز $[x_{i-1}, x_i]$ مستطیلی با عرض Δx_i و ارتفاع $f(x_i)$ می‌سازیم. پس مساحت این مستطیل برابر $f(x_i)\Delta x_i$ می‌باشد. مجموع این مساحت‌ها را تشکیل می‌دهیم.

$$S_n = f(x_1)\Delta x_1 + f(x_2)\Delta x_2 + \ldots + f(x_n)\Delta x_n$$
$$= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$

در شکل ۴ــ۴ مستطیل‌های مربوطه را یک تابع نزولی سایه زده‌ایم، اگر تابع‌مان صعودی می‌بود، نوک بالایی این مستطیل‌ها در بالای نمودار تابع قرار می‌گرفت.

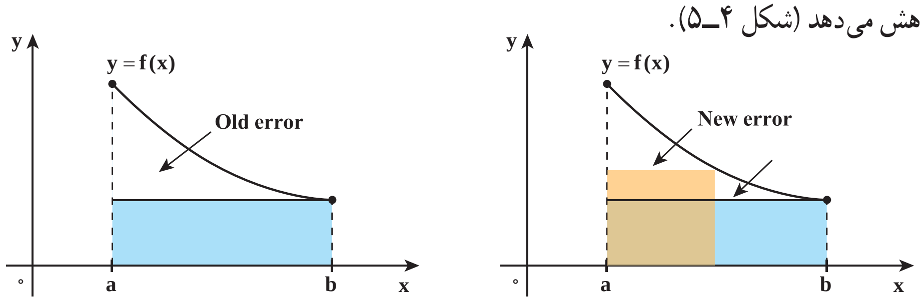
در حالی که در شکل نشان داده شده (تابع نزولی) این نوک‌ها در زیر نمودار قرار دارد.



شکل ۴ــ۴ــ حاصل جمع مساحت مستطیل‌ها برابر $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$ است.

واقع است که S_n تقریبی از مساحت ناحیه R است و با افزایش n این تقریب به مقدار واقعی مساحت R نزدیک‌تر می‌شود، مشروط بر آنکه نقاط $x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ را چنان انتخاب کنیم که عرض Δx_iها نیز به صفر میل کند.

برای مثال، در شکل بعدی، ملاحظه می‌کنیم که تقسیم یک بازه جزء، به دو بازه کوچک‌تر خطای این تقریب را، با کاهش قسمتی از مساحت تحت نمودار که مشمول در مستطیل‌ها شده است، کاهش می‌دهد (شکل ۴ــ۵).



شکل ۴ــ۵ــ استفاده از مستطیل‌ها بیشتر خطای محاسبه را کوچکتر می‌کند.

بنابراین برای یافتن مساحت R معقول آن است که حد دنباله S_n را وقتی $n \to \infty$ به دست آوریم (با این شرط که طول بزرگترین Δx_iها نیز به صفر میل کند).

$$\text{مساحت } R = \lim_{n\to\infty} S_n$$

نکته مهم : برای آنکه، درحدگیری Δx_iها همگی به صفر میل کنند، اغلب اوقات مناسب‌تر آن است که عرض همه بازه‌های جز مساوی اختیار شوند. در این صورت داریم :

$$\Delta x_i = \frac{b-a}{n} = \Delta x \quad , \quad x_i = a + i\Delta x = a + \frac{1}{n}(b-a)$$

که در آن، چون همه Δx_iها را مساوی اختیار کرده‌ایم و طول مشترک را به Δx نشان داده‌ایم.

از این نوع تقسیم بازه، به بازه‌های جزء مساوی، به عنوان افراز منظم یاد خواهیم کرد.

معلوم است که در مورد افرازهای منظم، وقتی $n \to \infty$ ، $\Delta x \to 0$ و دیگر نیازی به شرط آن که طول بزرگترین بازه جزء به صفر میل کند، نمی‌باشد.

محاسبه برخی مساحت‌ها : در این بخش به‌عنوان نمونه به محاسبه تقریبی برخی مساحت‌ها با استفاده از روش فوق می‌پردازیم. ابتدا با ناحیه‌ای شروع می‌کنیم که مساحت آن را از قبل می‌دانیم و از این راه بیشتر قانع می‌شویم که روش توصیف شده‌مان مقدار دقیق را به دست می‌دهد.

مثال : مساحت ناحیه‌ای را بیابید که تحت خط مستقیم به معادله $y=x+1$ بوده و محدود به خطوط $x=0$, $x=2$ می‌باشد.

حل : ناحیه مورد نظر در شکل زیر هاشور زده شده است. این ناحیه یک ذوزنقه است. به‌علاوه می‌دانیم که مساحت این ناحیه ۴ واحد سطح است (چرا؟). اینک مساحت این ناحیه را به‌عنوان حد مجموع مساحت مستطیل‌هایی که به روش فوق ساخته می‌شوند به روش زیر می‌توانید حساب کنید.

۱ــ بازه $[0,2]$ را به n بازه جزء با طول مساوی تقسیم کنید :

$$x_0 = 0, x_1 = \frac{2}{n}, x_2 = \frac{4}{n}, x_3 = \frac{6}{n}, x_n = \frac{2n}{n} = 2$$

۲ــ پس مقدار تابع $f(x)=x+1$ در نقطه دلخواه x_i برابر است با $\quad x_i + 1 = \frac{2i}{n} + 1$

و بازه جزء iام $\left[\frac{2(i-1)}{n} = \frac{2i}{n}\right]$ دارای طولی برابر $\Delta x_i = \frac{2}{n}$ است.

۳ــ ملاحظه می‌کنیم که وقتی $n \to \infty$ ، $\Delta x \to 0$ مجموع مساحت‌های مستطیل‌های نشان داده

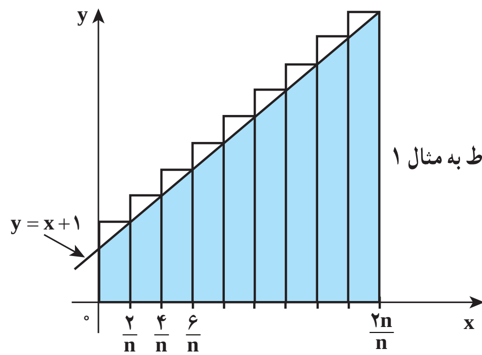
در شکل ۴ـ۶ را محاسبه کنید.

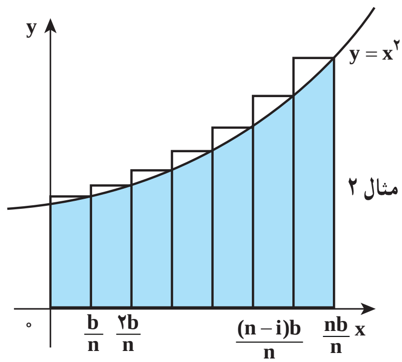
$$S_n=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2i}{n}+1\right)\frac{2}{n}$$

$$=\frac{2}{n}\left[\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} i+\sum_{i=1}^{n} 1\right]$$

$$=\left(\frac{2}{n}\right)\left[\frac{2}{n}\frac{n(n+1)}{2}+n\right]$$

$$=2\frac{n+1}{n}+2$$





شکل ۴ـ۶

قضیه: بنابراین مساحت A با حدگیری از این دنباله به‌دست می‌آید.

$$A=\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\left(2\frac{n+1}{n}+2\right)=2+2=4$$ واحد سطح

مثال: مساحت ناحیه‌ای را که محدود به سهمی $y=x^2$ و خطوط $y=0$ ، $x=0$ ، $x=b>0$، می‌باشد به دست آورید.

حل: هرگاه مساحت ناحیه مورد بررسی را A بنامیم، A برابر حد مجموع‌های S_n (دنباله $\{S_n\}_{n=1}$) مربوط به مساحات مستطیل‌های نشان داده شده در شکل ۴ـ۶ می‌باشد. با استفاده از افراز منظمی با $n+1$ نقطه افرازی، طول هریک از بازه‌ای جزء، برابر $\frac{b}{n}$ می‌شود. پس ارتفاع مستطیل i ام برابر $\left(\frac{ib}{n}\right)^2$ است. بنابراین بنابر قضیه(ج)

$$S_n=\sum_{n=1}^{n}\left(\frac{ib}{n}\right)^2\frac{b}{n}=\frac{b^3}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2=\frac{b^3}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

از این‌رو مساحت موردنظر با حدگیری به‌دست می‌آید :

$$A=\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty} b^{۳}\frac{(n+۱)(۲n+۱)}{۶n^{۲}}=\frac{b^{۳}}{۳}$$ واحد سطح

تمرین در کلاس

۱ــ وقتی k افزایش می‌یابد یافتن مساحت زیر منحنی $y=x^k$ به مراتب مشکل و مشکل‌تر می‌گردد. در این مورد شاید تقسیم بازه به زیربازه‌ای مساوی کمتر کارساز باشد. در عوض هرگاه طول بازه‌ای جزء را به نسبت یک تصاعد هندسی اختیار کنیم، کار محاسبه ساده‌تر خواهد شد.

مثلاً اگر $b>a>۰$ و مراد محاسبه مساحت زیر منحنی محدود به $x=a$ و $x=b$ بوده باشد، قرار می‌دهیم $t=(\frac{b}{a})^{\frac{۱}{n}}$ و $x_۰=a, x_۱=at, x_۲=at^{۲}, x_۳=at^{۳}, \dots, x_n=at^n=b$

در این‌صورت طول بازه i ام را (برحسب t و البته a و b) حساب کنید و همانند مثال پیش دنباله S_n را به‌دست آورده و حدگیری نمایید. هرگاه جواب واحد سطح $A=\frac{b^{k+۱}-a^{k+۱}}{k+۱}$ را به‌دست آورده باشید از حل این مثال لذت ببرید، در غیراین‌صورت محاسبات خود را یک بار دیگر چک کنید و یا از دبیر درس برای **راهنمایی** کمک بخواهید.

۲ــ با استفاده از اتحاد $(k+۱)^{۴}-k^{۴}=۴k^{۳}+۶k^{۲}+۴k+۱$ و قاعده تلسکوپی نشان دهید که $\sum_{i=۱}^{k} i^{۳}=(\frac{k(k+۱)}{۲})^{۲}$

۳ــ مساحت ناحیه‌ای را که محدود به نمودار $y=x^{۳}$ و خطوط $x=b>۰, x=۰, y=۰$ می‌باشد به‌دست آورید.

> گرچه ممکن است به‌نظر باطل‌نما جلوه کند، امّا همه علوم دقیق (علوم محض) تحت تسلط ایدهٔ تقریب هستند. (برتراندراسل ــ ریاضی‌دان انگلیسی)

یک پرسش اساسی

به لحاظ هندسی کاملاً مشهود است که مساحت تحت نمودار تابع f به شکل نمودار f بستگی

دارد. نمودار هر تابع در واقع رفتار هندسی مقادیر تابع را نمایان می‌سازد.

پس مقدار مساحت در مرحله اول به تابع موردنظر بستگی دارد. درمرحله بعد البته مقدار مساحت به بازه $[a,b]$ که تابع در آن تعریف شده است، یعنی خطوط $x=a$ و $x=b$ که مرزهای عمودی ناحیه را می‌سازند نیز بستگی خواهد داشت. برای آنکه بیشتر وارد جزئیات جبری مسأله شویم، به مثال ۲ مراجعه می‌کنیم. ملاحظه کردیم که مساحت ناحیه محدود به نمودار $y=x^{۲}$ و خطوط $x=۰$ و $x=b$ (یعنی بازه $[۰, b]$) برابر است با :

$$A=\frac{b^{۳}}{۳}$$

پس هرگاه بخواهیم مساحت محدود به نمودار $y=x^{۲}$ را با پایه $x=۰$ حساب کنیم، این مساحت برابر

$$A(x)=\frac{x^{۳}}{۳}$$

خواهد شد. حال سؤال اساسی در این‌جا چنین است که مدل $A(x)$ چه رابطه‌ای با تابع $y=x^{۲}$ دارد؟

همین سؤال را در مورد مثال ۱ نیز می‌توان مطرح کرد. در این‌جا $f(x)=x+۱$ و برای محاسبه مساحت آن بر بازه $[۰, b]$ (به‌جای $[۰,۲]$ در مثال) داریم :

$$x_{۰}=۰\ ,\ x_{۱}=\frac{b}{n}\ ,\ x_{۲}=\frac{۲b}{n}\ ,\ \cdots\ ,\ x_{n}=\frac{nb}{n}=b$$

داریم :

$$f(x_i)=x_i+۱=\frac{ib}{n}+۱$$

بنابراین :

$$S_n=\sum_{i=۱}^{n}\left(\frac{ib}{n}+۱\right)\frac{b}{n}$$

$$=\frac{b}{n}\left[\frac{b}{n}\sum_{i=۱}^{n} i+\sum_{i=۱}^{n} ۱\right]$$

$$=\frac{b}{n}\left[\frac{b}{n}\frac{n(n+۱)}{۲}+n\right]$$

$$=\frac{(n+۱)}{n}\times\frac{b^{۲}}{۲}+b$$

و با حدگیری به‌دست می‌آوریم :

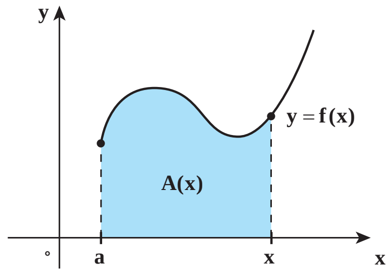
$$A(b)=\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{b^{۲}}{۲}\times\frac{n+۱}{n}+\lim_{n\to\infty} b$$

$$=\frac{b^{۲}}{۲}+b$$

و هرگاه بخواهیم به‌جای بازه را منظور کنیم مساحت موردنظر به عنوان تابعی از x به‌دست

خواهد آمد :

$$A(x)=\frac{x^{2}}{2}+x$$



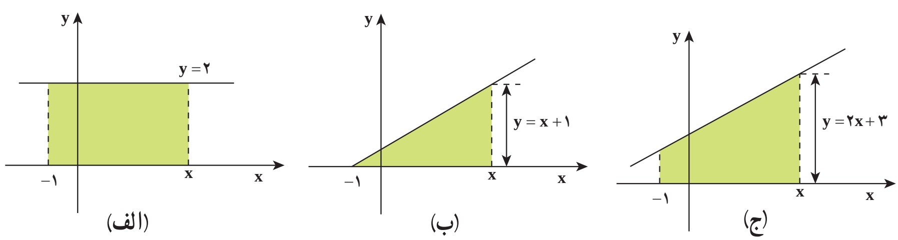
شکل ۴ــ۷ــ وقتی a ثابت باشد A(x) به x بستگی خواهد داشت.

فعالیت

برای هریک از توابع f، مساحت $A(x)$ محصور به نمودار f و بازه $[-1\,,x]$ را به‌دست آورید. سپس مشتق تابع A یعنی $A'(x)$ را محاسبه کرده و با تابع f مقایسه کنید.

الف) $f(x)=2$ ب) $f(x)=x+1$ ج) $f(x)=2x+3$

برای راهنمایی نمودار تابع f و بازه $[-1\,,x]$ در هر مورد در شکل زیر نشان داده شده است.



شکل ۴ــ۸

مسائل

با استفاده از افرازهای مناسب همانند مثال‌های ۱ و ۲ این درس مساحت نواحی را که در تمرین‌های ۷ــ۱ آمده‌اند محاسبه کنید :

۱ــ ناحیه تحت $y=3x$، بالای $y=0$ از $x=0$ تا $x=1$.

۲ــ ناحیه تحت $y=2x+1$، بالای $y=0$ از $x=0$ تا $x=3$.

۳ــ ناحیه تحت $y=2x-1$، بالای $y=0$ از $x=1$ تا $x=3$.

۴ــ ناحیه تحت $y=3x+4$، بالای $y=0$ از $x=-1$ تا $x=2$.

۵ــ ناحیه تحت $y = x^۲$، بالای $y = ۰$ از $x = ۱$ تا $x = ۳$.

۶ــ ناحیه تحت $y = x^۲ + ۱$، بالای $y = ۰$ از $x = ۰$ تا $x = a > ۰$.

۷ــ ناحیه تحت $y = x^۲ + ۲x + ۳$، بالای $y = ۰$ از $x = -۱$ تا $x = ۲$.

در تمرین‌های ۱۱ــ ۸ مساحت‌ها را محاسبه کنید. به‌خاطر داشته باشید که مساحت همواره عددی مثبت خواهد بود.

۸ــ ناحیه بالای $y = x^۲ - ۱$ زیر $y = ۰$.

۹ــ ناحیه بالای $y = ۱ - x$، زیر $y = ۰$ از $x = ۲$ تا $x = ۴$.

۱۰ــ ناحیه بالای $y = x^۲ - ۲x$، زیر $y = ۰$.

۱۱ــ ناحیه تحت $y = ۴ - x^۲ + ۱$ بالای $y = ۱$.

۱۲ــ مساحت ناحیه محدود به $y = x^۳$ را که بالای محور x بوده و بین خطوط $x = ۰$ و $x = b > ۰$ است به‌دست آورید (راهنمایی از فرمول $\sum_{i=۱}^{n} i^۳ = \frac{n^۲(n+۱)^۲}{۴}$ استفاده کنید.)

۱۳ــ مساحت تحت منحنی به معادله $y = \frac{۱}{x}$ را که بالای $y = ۰$ و محدود به $x = a > ۰$ و $x = b > a$ است به‌دست آورید.

۴ـ۳ـ انتگرال معین

هدفمان در این بخش تعمیم آن چیزی است که در بخش قبلی برای محاسبه مساحت‌ها به‌کار بردیم. با استفاده از چنین تعمیمی مفهوم انتگرال معین تابعی مانند f را که بر بازه I تعریف شده است تعریف می‌کنیم. دربخش قبلی با استفاده از روش مستطیل‌ها و تشکیل دنباله $\{S_n\}$ و حدگیری به محاسبه مساحت پرداختیم. در این بخش برای محاسبه مساحت از دو راه وارد می‌شویم : از یک طریق مستطیل های کوچک را طوری انتخاب می‌کنیم که همگی زیر نمودار f واقع شوند و در طریق دیگر مستطیل‌های کوچک را طوری می‌گیریم که همگی بالای نمودار f قرار گیرند. این روش به ما این امکان را می‌دهد که با تقریبات نقصانی و همچنین تقریبات اضافی به مساحت تحت نمودار نگاه کنیم.

در سرتاسر این بخش فرض می‌کنیم که تابع f کراندار باشد امّا به این فرض که مقادیر f نامنفی باشند نیازی نخواهیم داشت. در واقع از ایده اولیه محاسبه مساحت عدول کرده و به تابع f بر بازه $[a , b]$ عددی وابسته خواهیم کرد که انتگرال معین f بر بازه $[a , b]$ نامیده خواهد شد. در این‌جا، گرچه هنوز شهود و نگرش هندسی کمک‌ساز خواهد بود اما استدلال و فرایند جبری نقش مهم‌تری را عهده‌دار خواهد بود؛ و این چاشنی تعمیم در ریاضیات است که به تجربه و جبر نقش اساسی‌تری می‌دهد تا با

موارد مجردتر بهتر و مؤثرتر برخورد گردد.

فرض کنیم P افرازی از بازه $[a , b]$ باشد. بنابراین P مجموعه‌ای از اعداد $\{x_0 , x_1 , x_2 , \ldots , x_{n-1} , x_n\}$ است که در آن $x_{i-1} < x_i$ ، $x_0 = a$ ، $x_n = b$. عدد n که نشانگر تعداد بازه‌های جزء $[x_{i-1} , x_i]$ است به افراز P بستگی دارد. درشت‌ترین افراز.

بازه $[a , b]$ افرازی است که فقط شامل یک بازه جزء یعنی خود بازه $[a , b]$ است. در این صورت عدد n برابر ۱ است. هرچه تعداد نقاط افراز بیشتر باشد، افراز ظریف‌تر خواهد بود و عدد n افزایش خواهد یافت. ضمناً یادآوری می‌کنیم که عدد $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

طول بازه جزء i ام می‌باشد. چون تابع f بر هر بازه جزء $[x_{i-1} , x_i]$ نیز است، پس ماکسیمم و مینیمم (مطلق) خود را در این بازه اختیار می‌کند. یعنی نقاطی مانند I_i و U_i از $[x_{i-1} , x_i]$ است که برای هر $x_{i-1} \le x \le x_i$ و $f(L_i) \le f(x) \le f(u_i)$

هرگاه $f(x) \ge 0$ بر $[a , b]$، آنگاه $f(L_i)\Delta x_i$ و $f(u_i)\Delta x_i$ نشانگر مساحت مستطیل‌های با قاعده (عرض) $[x_{i-1} , x_i]$ بوده که نوک مستطیل اول زیر نمودار f و نوک مستطیل دوم بالای نمودار f قرار دارند (شکل ۴ــ۹) به عبارت دیگر هرگاه ناحیه با قاعده $[x_{i-1} , x_i]$ محدود به نمودار تابع f از A_i بنامیم، $f(I_i)\Delta x_i$ نمایشگر مساحت مستطیلی است که درون A_i محاط شده، در حالی که $f(u_i)\Delta x_i$ نمایشگر مساحت مستطیلی است که محیط بر A_i می‌باشد. به زبان جبری :

$$f(L_i)\Delta x_i \le A_i \le f(u_i)\Delta x_i \qquad (۱)$$

هرگاه f مقادیر منفی نیز اختیار کند آنگاه $f(L_i)\Delta x_i$ و یا $f(u_i)\Delta x_i$ و یا هردوی آنها ممکن است منفی باشند، در چنین صورتی این عبارت‌ها نمایشگر قرینه مساحت مستطیلی هستند که زیر محور x واقع است، در هر صورت که f همواره مقادیر نامنفی اختیار کند و یا مقادیر منفی نیز بگیرد نامساوی $f(L_i) \le f(u_i)$ برقرار بوده و لذا همواره $f(L_i)\Delta x_i \le f(u_i)\Delta x_i$ برقرار است.

مجموع‌های بالا و پایین : اکنون به تعریف مجموع‌های بالا و پایین می‌پردازیم. قبل از این، برای ساده‌تر کردن نمادهایمان همواره فرض می‌کنیم که افراز چنان باشد که طول همه بازه‌های جزء حاصله مساوی باشند، پس هرگاه افراز P شامل $n + 1$ نقطه بوده و در نتیجه n بازه جزء پدید آورد طول هر بازه جزء برابر $\frac{b-a}{n}$ می‌باشد.

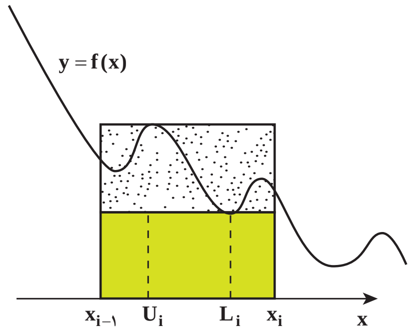
این‌گونه افرازها را **افرازهای منظم** می‌نامیم. عدد طبیعی n مشخص کننده افرازی با $n + 1$ نقطه با طول بازه‌ای جزء $\frac{b-a}{n}$ است. پس به‌جای آن‌که از افرازها به عنوان متغیر یاد کنیم از عدد طبیعی n یاد می‌کنیم. در سرتاسر بحث f نمایشگر یک تابع است که در طول بحث ثابت فرض می‌شود.

الف) **مجموع پایین** که با نماد $L(f, p)$ و یا نماد ساده‌تر L_n نشان داده می‌شود چنین تعریف می‌گردد.

$$L_n = f(l_1)\Delta x_1 + f(l_i)\Delta x_1 + \ldots + f(l_n)\Delta x_n$$

یعنی

$$L_n = \sum_{i=1}^{n} f(l_i)\Delta x_i$$



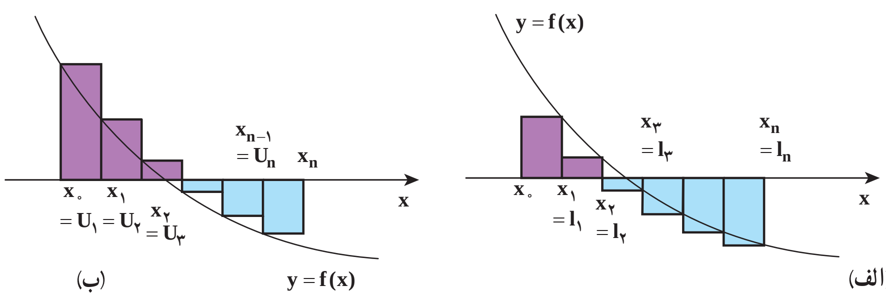
شکل ۴ــ ۹ــ مستطیل کوچک‌تر سهم $f(l_i)\Delta x_i$ و مستطیل بزرگ‌تر سهم $f(u_i)\Delta x_i$ متناظر با بازه جزء $[x_{i-1}, x_i]$ را نشان می‌دهد.

ب) **مجموع بالا** که با نماد $U(f, p)$ و یا نماد ساده شده U_n[1] نشان داده می‌شود چنین تعریف می‌گردد.

$$U_n = f(u_1)\Delta x_1 + f(u_1)\Delta x_1 + \ldots + f(u_n)\Delta x_n$$

$$U_n = \sum_{i=1}^{n} f(u_i)\Delta x_i$$

در شکل زیر یک حاصل جمع پایین (سمت چپ) و یک حاصل جمع بالا (سمت راست) برای یک تابع نزولی نشان داده شده است. مساحت مستطیل‌های رنگی به‌صورت مثبت و مساحت مستطیل‌های با رنگ خاکستری هاشور زده شده به‌صورت منفی در مقدار انتگرال لحاظ خواهند شد.



شکل ۴ــ۱۰ــ الف) یک مجموع پایین و ب) یک مجموع بالا را برای یک تابع نزولی نشان می‌دهند. ناحیه‌های رنگی سهم‌های مثبت و ناحیه‌های خاکستری سهم‌های منفی به مقدار مجموع‌ها می‌دهند.

۱ــ L حروف اول Lower به معنی پایین و U حرف اول Upper به معنی بالا می‌باشد.

❖ **مثال:** مجموع‌های پایین و بالا را برای تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ بر بازه $[۱,۲]$ با افراز منظم P مستطیل از ۵ نقطه و ۴ بازه جزءِ محاسبه کنید.

حل: چنین افرازی می‌بایست مشتمل بر نقاط به طول‌های $x_۰=۱$ و $x_۱=\frac{۵}{۴}$ و $x_۲=\frac{۳}{۲}$ و $x_۳=\frac{۷}{۴}$ و $x_۴=۲$ بوده باشد. (چرا؟)

چون تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ بر این بازه نزولی است مینیمم و ماکزیمم آن بر بازه به ترتیب برابر $\frac{۱}{x_i}$ و $\frac{۱}{x_{i-۱}}$ می‌باشد. سپس مجموع‌های پایین و بالا چنین‌اند:

$$L_۴=\frac{۱}{۴}(f(\frac{۵}{۴})+f(\frac{۳}{۲})+f(\frac{۷}{۴})+f(۲))$$

$$=\frac{۱}{۴}(\frac{۴}{۵}+\frac{۲}{۳}+\frac{۷}{۴}+\frac{۱}{۲})=\frac{۵۳۳}{۸۴۰}\approx ۰/۶۳۴۵$$

$$U_۴=\frac{۱}{۴}(f(۱)+f(\frac{۵}{۴})+f(\frac{۳}{۲})+f(\frac{۷}{۴}))$$

$$=\frac{۱}{۴}(۱+\frac{۴}{۵}+\frac{۲}{۳}+\frac{۴}{۷})=\frac{۳۱۹}{۴۲۰}\approx ۰/۷۵۹۵$$

❖ **مثال:** مجموع‌های پایین و بالا را برای تابع $f(x)=x^۲$ بر بازه $[۱,۲]$ به ازای $n=۱$، $n=۲$، $n=۴$، $n=۸$ محاسبه کنید.

حل: می‌دانیم تابع f بر $[۱,۲]$ صعود است، پس بر هر بازه جزءِ آن نیز صعودی است. لذا برای بازه جزءِ iام یعنی $[x_{i-۱},x_i]$ و $l_i=x_{i-۱}$ و $u_i=x_i$.

وقتی $n=۱$، فقط یک بازه جزءِ وجود دارد و آن هم بازه $[۱,۲]$ است:

$L_۱=(۲-۱)f(۱)=۱$ و $U_۱=(۲-۱)f(۲)=۴$

برای $n=۲$، دو بازه جزءِ $[۱,\frac{۳}{۲})$ و $[\frac{۳}{۲},۲)$ خواهیم داشت. پس

$$L_۲=\frac{۱}{۲}(f(۱)+f(\frac{۳}{۲}))=\frac{۱}{۲}(۱+\frac{۹}{۴}))=۱/۶۲۵$$

$$U_۲=\frac{۱}{۲}(f(\frac{۳}{۲})+f(۲))=\frac{۱}{۲}(\frac{۹}{۴}+۴)=۳/۱۲۵$$

برای $n=۳$، سه بازه جزء داریم $[۱,\frac{۴}{۳}]$ $[\frac{۴}{۳},\frac{۵}{۳}]$ $[\frac{۵}{۳},۲]$

$$L_۳=\frac{۱}{۳}(f(۱)+f(\frac{۴}{۳})+f(\frac{۵}{۳}))=\frac{۱}{۳}(۱+\frac{۱۶}{۹}+\frac{۲۵}{۹})=\frac{۵۰}{۲۷}=۱/۸۵۱$$

$$U_۳=\frac{۱}{۳}(f(\frac{۴}{۳})+f(\frac{۵}{۳})+f(۲))$$

$$=\frac{۱}{۳}(\frac{۱۶}{۹}+\frac{۲۵}{۹}+۴)=\frac{۷۷}{۲۷}=۲/۶۵۱$$

با انتخاب $n=۴$ مشابهاً مقادیر $U_۴=۲/۷۱۸$ و $L_۴=۱/۹۶۸$ را به دست می‌آوریم.

بالاخره با انتخاب $n=۸$ مقادیر $U_۸=۲/۱۴۸$ و $L_۸=۲/۵۳۴$ را به دست می‌آوریم.

تمرین در کلاس

در رابطه با تابع مثال ۲، $L_۳$، $L_۵$، $L_۶$، $L_۷$ و همچنین $U_۳$، $U_۵$، $U_۶$، $U_۷$ را محاسبه کنید.

نکته: مقادیر $L_۱$ تا با $L_۸$ نشانگر آنند که دنباله $\{L_n\}_{n=۱}$ دنباله‌ای صعودی است، در حالی که مقادیر $U_۱$ تا با $U_۸$ نشان می‌دهند که دنباله $\{U_n\}_{n=۱}$ دنباله‌ای نزولی است. البته این حدسی بیش نیست، امّا می‌توانید آن را به طریق ملموس و شهودی با استفاده از مستطیل‌های محاطی و محیطی برای یک نمودار دلخواه از تابعی پیوسته و به تعیین نزدیک نمایید. کافی است دو جمله متوالی مانند L_n، $L_{n+۱}$ را با هم مقایسه کنید.

پرسش: آیا می‌توانیم بگوییم که دنباله‌های U_n، L_n به یک عدد همگرا هستند؟

فعالیت

مجموع‌های پایین و بالا را برای تابع $f(x)=x^۲$ بر بازه $[۰,\alpha]$ محاسبه کنید؛ مجموع‌هایی که متناظر افرازی منظم از این بازه متشکل از $n+۱$ نقطه و n بازه جزءِ بوده باشند. بدین‌سان جملات عمومی دنباله‌ای $\{L_n\}$، $\{U_n\}$ را محاسبه خواهید کرد. سپس $\lim_{n\to\infty} U_n$ و $\lim_{n\to\infty} L_n$ را به دست آورید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

این مثال‌ها و بررسی‌ها ما را به صورت‌بندی تعریف مهم زیر رهنمون می‌کند :

هرگاه دنباله‌های عددی مجموع‌های بالا و پایین تابع f به یک عدد مانند A همگرا باشند، عدد A را انتگرال معین این تابع بر بازه $[\alpha,b]$ می‌نامیم و می‌نویسیم.　$A=\int_a^b f(x)dx$

$\int$ که صورت کشیده حرف S است از حرف اول کلمه مجموع (Sum) اقتباس شده است و آن معادل حرف سیگما Σ یونانی است. بنابراین $A=\int_a^b f(x)dx$ را انتگرال یعنی f بر $[a,b]$ و یا انتگرال معین f از a تا b می‌نامیم.

باید توجه کنیم وقتی f تابعی نامنفی است تعبیر هندسی انتگرال معین مساحت تحت نمودار f و محدود به بازه $[a,b]$ است امّا ما این شرط را نداشته‌ایم، بنابراین انتگرال معین، در حالت کلی عددی حقیقی است که می‌تواند مثبت، منفی و یا برابر صفر باشد.

مثال : ثابت کنید تابع $f(x)=x^2$ بر بازه $[0,a]$، $a>0$، انتگرال‌پذیر است و مقدار $\int_0^a x^2dx$ را به‌دست آورید.

حل : قبلاً دنباله‌های L_n، U_n را محاسبه کردیم. کافی است حد این دنباله‌ها را به‌دست آوریم.

$$\lim_{n\to\infty} L_n=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)(2n-1)a^3}{6x^2}=\frac{a^3}{3}$$

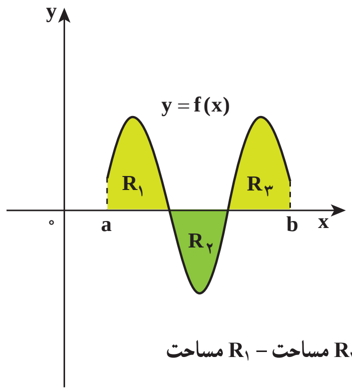
$$\lim_{n\to\infty} U_n=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(2n+1)a^3}{6x^2}=\frac{a^3}{3}$$

بنابراین :

$$\int_0^a x^2dx=\frac{a^3}{3}$$

نکته : باید توجه داشته باشیم که تعریف انتگرال به شکل فوق مستقل از مفهوم مساحت است، گرچه این مفهوم در آغاز از مفهوم مساحت به‌وجود آمده است. وقتی تابع f بر بازه $[0,a]$ تابعی نامنفی باشد، یعنی نمودار آن بالای محور x باشد، مقدار انتگرال معین برابر مساحت محدود به نمودار تابع f و خطوط $x=a$ و $x=b$ است. برای وقتی که همواره $f(x)\leq 0$، یعنی نمودار تابع پایین محور x است، $\int_a^b f(x)dx$ برابر قرینه مساحت محدود به نمودار f و خطوط می‌باشد. در حالت کلی، $x=a$ و $x=b$ برابر است. در حالت کلی، $\int_a^b f(x)dx$ برابر است با مساحت قسمتی از ناحیه R (یعنی ناحیه تحت نمودار و محدود به خطوط $x=a$ و $x=b$) که بالای محور x است منهای مساحت بخشی از R که زیر

محور x است. (شکل ۴ــ۱۱)



شکل ۴ــ۱۱ــ $\int_a^b f(x)dx$ برابر است با R_3 مساحت + R_2 مساحت − R_1 مساحت

تمرین در کلاس

۱ــ $\int_0^a xdx$ را که در آن $a>0$ ، محاسبه کنید.

۲ــ $\int_a^b dx$ را محاسبه کنید. توجه کنید که در اینجا $f(x)=1$ تابع ثابت با مقدار ۱ است.

۳ــ $\int_a^b cdx$ را، که در آن $f(x)=c$ تابع ثابت با مقدار c است، محاسبه کنید.

تعمیم : در تعریف انتگرال معین فرض کردیم که تابع f بر [a,b] پیوسته است. اکنون یک گام به جلو بر می‌داریم و فرض می‌کنیم که تابع f بر [a,b] کراندار بوده امّا لزوماً پیوسته نباشد. می‌دانیم که هر تابع پیوسته بر یک بازه بسته کراندار است امّا عکس این حکم در حالت کلی برقرار نمی‌باشد. قصدمان این است که انتگرال معین را برای توابع کراندار نیز تعریف کنیم.

فرآیند تعریف را که برای توابع پیوسته به‌کار گرفتیم در اینجا نیز می‌توانیم اعمال کنیم. تنها یک تفاوت کوچک وجود دارد که در نتیجه کار بلااثر می‌باشد. فرض کنیم P یک افراز [a,b] باشد. f بر [a,b] کراندار است پس بر هر بازه جزء $[x_{i-1},x_i]$ نیز کراندار است. چون f (مقادیر) بر این بازه یک مجموعه کراندار است، پس از بالا کراندار است. پس دارای سوپریممی مانند M_i است. مشابهاً چون f بر این بازه کراندار است از پایین کراندار بوده و در نتیجه دارای اینفیممی مانند m_i است.

واضح است که برای هر $x\in[x_{i-1},x_i]$، $m_i\le f(x_i)\le M_i$. در نتیجه $m_i\Delta x_i\le f(x_i)\Delta x_i\le M_i\Delta x_i$

اکنون مجموع‌های بالا و پایین را چنین تعریف می‌کنیم.

$$U_n=\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta x_i \quad ، \quad L_n=\sum_{i=1}^{n}m_i\Delta x_i$$

هرگاه دنباله‌های $\{L_n\}$ و $\{U_n\}$ هر دو به یک عدد مانند A همگرا باشند گوییم تابع f بر $[\alpha,b]$ انتگرال‌پذیر است و عدد A را مقدار انتگرال معین f بر این بازه می‌نامیم. به زبان نمادی می‌نویسیم.

$$\int_a^b f(x)dx = A$$

اینک این تعریف را با تعریف قبلی در باب توابع پیوسته مقایسه کنید.

وقتی تابع پیوسته است، m_i به ازای نقطه‌ای مانند l_i از $[x_{i-1},x_i]$ حاصل می‌شود.

$$m_i=f(l_i)$$

همچنین M_i به ازای u_i از $[x_{i-1},x_i]$ به دست می‌آید.

$$(M_i=f(u_i$$

و ماجرا عیناً به حالت قبل برمی‌گردد.

امّا تعریف اخیر کلی است و نیازی ندارد که f پیوسته فرض شود، بلکه کافی است f کراندار فرض گردد.

تعمیم‌های دیگری نیز می‌توان صورت‌بندی کرد لیکن از حوصله این درس خارج است. به مثال ۲ توجه کنید.

مثال: تابع f بر بازه $[\circ,۱]$ چنین تعریف شده است.

$$f(x)=\begin{cases} ۱ & , x\in Q \\ \circ & , x\notin Q \end{cases}$$

ثابت کنید انتگرال معین $\int_\circ^۱ f(x)dx$ وجود ندارد.

حل: فرض کنیم P افرازی دلخواه از $[\circ,۱]$ با $n+۱$ نقطه افرازی باشد.

بنابراین

$$\Delta x\frac{۱}{n}$$

هرگاه m_i و M_i را به ترتیب مینیمم و ماکزیمم تابع f بر بازه جزء iام بنامیم، چون در هر بازه اعداد گویا و ناگنگ وجود دارد،

$$m_i=\circ \text{ ، } ۱\le i\le n$$

$$M_i=۱ \text{ ، } ۱\le i\le n$$

در نتیجه :

$$L_n=\sum_{i=۱}^{n} m_i\Delta x_i=\sum_{i=۱}^{n}\circ\times\frac{۱}{n}=\circ$$

$$U_n=\sum_{i=۱}^{n} M_i\Delta x_i=\sum_{i=۱}^{n}۱\times\frac{۱}{n}=\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}۱=\frac{۱}{n}\times n=۱$$

بنابراین $\lim_{n\to\infty} L_n=\circ$ ، $\lim_{n\to\infty} U_n=۱$ زیرا L_n دنباله ثابت صفر و U_n دنباله ثابت ۱ است. در نتیجه تابع f بر $[\circ,۱]$ انتگرال‌پذیری نمی‌باشد.

تمرین در کلاس

تابع f را بر بازه $[-۱,۱]$ چنین تعریف می‌کنیم.
$$f(x)=\begin{cases} x & ,x\geq ۰ \\ ۱-x & ,x<۰ \end{cases}$$

ثابت کنید $\int_{-۱}^{۱} f(x)dx$ وجود دارد و مقدار آن را به دست آورید. (نمودار تابع را رسم کنید).

قضیه زیر را بدون اثبات می‌پذیریم.

قضیه ۱ : هر تابع پیوسته بر یک بازه بسته، انتگرال‌پذیر است.

نتیجه : هرگاه f پیوسته باشد می‌توانیم با یکی از دنباله‌های $\{L_n\}$ یا $\{U_n\}$ کار کنیم و با حدگیری مقدار انتگرال را به‌دست آوریم.

نکته : در حساب مقدماتی آموخته‌اید که نامساوی‌های هم‌جهت را می‌توان با هم جمع کرد؛

یعنی هرگاه $a_۱\leq b_۱$ ، $a_۲\leq b_۲$ آنگاه $a_۱+a_۲\leq b_۱+b_۲$

و اگر یکی از نامساوی‌های فرض اکید باشد، نامساوی به‌دست آمده نیز اکید است. این ویژگی نامساوی‌ها به آسانی قابل تعمیم است :

هرگاه $\alpha_i\leq b_i$ $(۱\leq i\leq n)$ n نامساوی باشند آنگاه $\sum_{i=۱}^{n} a_i\leq \sum_{i=۱}^{n} b_i$. از این ویژگی نامساوی‌ها استفاده می‌کنیم و یکی از خواص توابع پیوسته را در رابطه با مقدار انتگرال به آسانی به دست می‌آوریم؛ در مابقی این بخش مجدداً همه‌جا f را پیوسته فرض می‌کنیم.

قضیه ۲ : هرگاه تابع f بر بازه $[a,b]$ پیوسته باشد و m و M به ترتیب مقادیر مینیمم و ماکزیمم مطلق f بر این بازه باشند، آنگاه
$$m(b-a)\leq \int_a^b f(x)dx\leq M(b-a)$$

برهان : فرض کنیم P افرازی منظم با n بازه جزء از بازه $[a,b]$ باشد.

برای هر i، $u_i\leq M$ ، $m\leq l_i$ (چرا).

پس :
$$L_n=\sum_{i=۱}^{n}\frac{b-a}{n}l_i=\frac{b-a}{n}\sum_{i=۱}^{n}l_i$$
$$\geq \frac{b-a}{n}\sum_{i=۱}^{n}m=\frac{b-a}{n}\times m\sum_{i=۱}^{n}۱$$
$$=\frac{b-a}{n}\times m\times n=m(b-a)$$

همچنین :

$$U_n = \sum_{i=۱}^{n} \frac{b-a}{n} u_i$$

$$= \frac{b-a}{n} \sum_{i=۱}^{n} u_i \le \frac{b-a}{n} \sum_{i=۱}^{n} M = (b-a)M$$

در نتیجه، با حدگیری،

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{x\to\infty} L_n \ge m(b-a)$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} U_n \le M(b-a)$$

اکنون دو نامساوی را با هم می‌نویسیم

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a) \qquad (۱)$$

آیا می‌توانید این نامساوی‌ها را در شکل ۴ــ۱۲ تعبیر کنید؟ مستطیل‌های با پایه $b-\alpha$ و ارتفاع m و M را درنظر بگیرید.

نامساوی‌های (۱) را به‌صورت زیر نیز می‌توان نوشت

$$m \le \frac{۱}{b-a} \int_a^b f(x)dx \le M$$

تعریف : قرار می‌دهیم

$$\bar{f} = \frac{۱}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

$\bar{f}$ را **مقدار متوسط** یا **میانگین تابع f** بر بازه [a,b] می‌نامیم.

میانگین تابع f برابر ارتفاع مستطیلی با پایه b−a است که مساحت آن برابر مساحت ناحیه تحت f (برای $f \ge ۰$) محدود به خطوط x=a و x=b می‌باشد.

قضیه زیر یکی دیگر از خواص اساسی انتگرال معین است که در واقع خواص قدرمطلق را برای مجموع چند عدد به ارث می‌برد.

قضیه۳: هرگاه f تابعی انتگرال‌پذیر باشد،

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx \qquad (*)$$

برهان: ابتدا یادآور می‌شویم که نامساوی فوق متناظر نامساوی $|x+y| \le |x|+|y|$

و یا در حالت کلی :

$$\left|\sum_{i=۱}^{n} x_i\right| \le \sum_{i=۱}^{n} |x_i|$$

می‌باشد، برای اثبات (*) فرض کنیم P افرازی منظم از بازه [a,b] با n بازه جزء باشد. می‌دانیم

برای هر $x\in[x_{i-۱},x_i]$، $-|f(x)|\le f(x)\le |f(x)|$

لذا هرگاه M_i، m_i به ترتیب مینیمم و ماکزیمم f بر $[x_{i-۱},x_i]$ و همچنین M'_i، m'_i به ترتیب مینیمم و ماکزیمم $|f|$ بر این بازه جزء باشند، داریم.

$$-m'_i\le m_i\le m'_i \qquad (۱\le i\le n)$$

و

$$-M'_i\le M_i\le M'_i \qquad (۱\le i\le n)$$

بنابراین

$$-m'_i\Delta x\le m_i\Delta x\le m'_i\Delta x \qquad (۱\le i\le n)$$

از جمع این نامساوی‌ها به‌دست می‌آوریم :

$$-\sum_{۱}^{n} m'_i\Delta x\le \sum_{۱}^{n} m_i\Delta x\le \sum_{۱}^{n} m'_i\Delta x$$

یعنی

$$-L'_n\le L_n\le L'_n$$

با حدگیری به دست می‌آوریم

$$-\int_a^b |f(x)|dx\le \int_a^b f(x)dx\le \int_a^b |f(x)|dx$$

امّا این نامساوی‌ها معادلند با نامساوی قدرمطلق

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le \int_a^b |f(x)|dx$$

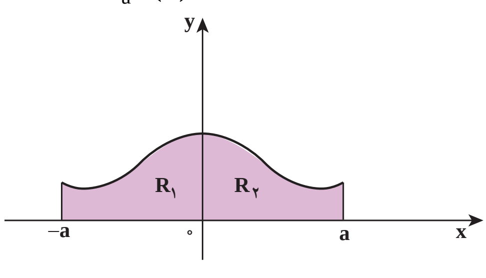
فعالیت

۱ــ فرض کنیم f تابعی زوج بر $[-a,a]$ باشد، یعنی برای هر x از این بازه ثابت کنید

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx=۲\int_{\circ}^{a} f(x)dx$$

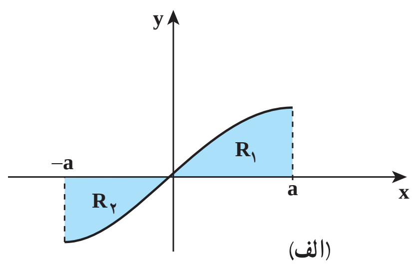
۲ــ فرض کنیم f تابعی فرد بر $[-a,a]$ باشد، یعنی برای هر x از این بازه $f(-x)=-f(x)$ ثابت کنید.

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx=\circ$$



(ب)

شکل (ب) تابع f زوج است.



(الف)

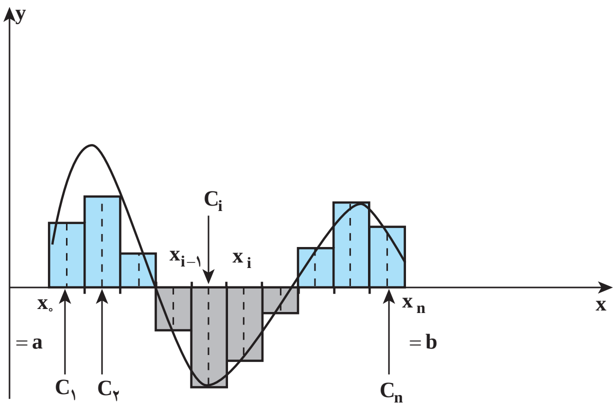
شکل الف تابع f فرد است.

(تعبیری دیگر از انتگرال معین)ــ فرض کنیم تابع f بر بازه $[\alpha,b]$ پیوسته باشد؛

همچنین $P:\ x_\circ=\alpha<x_۱<x_۲<\ldots<x_{i-۱}<x_i<\ldots<x_n=b$

افرازی دلخواه از این بازه باشد. هرگاه $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ $(1 \le i \le n)$ نقطه دلخواهی از بازه جزء iام باشد، ثابت کنید.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$



$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$ مجموع مساحت مستطیل‌های رنگی منهای حاصل جمع مستطیل‌های با رنگ خاکستری است.

راهنمایی : از اینکه f بر هر بازه جزء پیوسته است استفاده کنید. سپس با استفاده از حاصل‌جمع‌های بالا و پایین و قضیه فشردگی، تساوی فوق به آسانی به‌دست می‌آید.

مسائل

در تمرین‌های ۱ـ۶، P_n یک افراز منظم از بازه $[a,b]$ است به‌طوری که $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. برای این تمرین‌ها، L_n، U_n را برای مقدار مفروض n به دست آورید.

۱ــ $f(x)=x$ بر $[0,2]$، با انتخاب $n=8$.

۲ــ $f(x)=x^2$ بر $[0,4]$، با انتخاب $n=4$.

۳ــ $f(x)=e^x$ بر $[-2,2]$، با انتخاب $n=4$.

۴ــ $f(x)=L_n x$ بر $[1,2]$، با انتخاب $n=5$.

۵ــ $f(x)=\sin x$ بر $[0,\pi]$، با انتخاب $n=6$. مقدار انتگرال را با مساحت توضیح دهید.

۶ــ $f(x)=\cos x$ بر $[0,2\pi]$، با انتخاب $n=4$. مقدار انتگرال را با مساحت توضیح دهید.

در تمرین‌های ۷ــ۸ ابتدا L_n، U_n را برای افراز منظم با n بازه جزءِ محاسبه کنید.

سپس ثابت کنید که $\lim_{n\to\infty} L_n = \lim_{n\to\infty} U_n$ از این‌رو انتگرال معین مربوطه را به‌دست آورید.

۷ــ $f(x)=1-x$ بر $[a,b]=[0,2]$

۸ــ $f(x)=$ بر $[a,b]=[0,1]$

۹ــ انتگرال را محاسبه کنید. $\int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}\,dx$

۱۰ــ فرض کنیم f تابعی پیوسته و صعودی اکید بر [a,b] و P افراز منظم با n بازه جزءِ از این بازه بوده باشد. ثابت کنید.

$$U_n - L_n = \frac{(b-a)(f(b)-f(a))}{n}$$

چون سمت راست این عبارت را می‌توانیم n با انتخاب n به قدر کافی بزرگ از هر عدد مثبتی کوچک‌تر کنیم، تابع f می‌بایست بر [a,b] انتگرال‌پذیر باشد. (این مسأله اثباتی ساده از قضیه به‌دست می‌دهد.)

۱۱ــ دو تمرین جفت برای تمرین‌های ۵ و ۶ به شکل زیر می‌تواند مطرح شود:

$\int_0^{2\pi}\sin x\,dx$ و $\int_0^{\pi}\cos x\,dx$. این مقادیر را حساب کرده و آنها را به ترتیب با اعداد به‌دست آمده در ۵ و ۶ مقایسه کنید.

۴ـ۴ـ ویژگی‌های انتگرال معین

ریاضیدانان را عادت بر این است که وقتی مفهومی را برای موارد ملموس و فیزیکی فرمول‌بندی می‌کنند، آن را به‌صورتی کلی‌تر و در واقع در نهایت کلی آن، تعمیم دهند. ما انتگرال معین $\int_a^b |f(x)|\,dx$ را با محدودیت‌هایی مطرح و بررسی کردیم:

ابتدا فرض کردیم f تابعی پیوسته بر بازه [a,b] باشد، سپس آن را به توابع کراندار تعمیم دادیم.

چون بازه [a,b] نقش کلیدی در تعریف انتگرال داشت (افرازها چنین نقشی داشتند) پس $a<b$؛ و این یک فرض الزام‌آور به حساب آمده است!

سخن از وقتی که f ناپیوسته باشد و یا آنکه f بر [a,b] بی‌کران باشد خارج از برنامه این درس است.

امّا برای وقتی که $a=b$ و یا $a>b$، به آسانی می‌توانیم مفهوم انتگرال معین را تعمیم دهیم.

(الف) قرار می‌دهیم $\int_a^a f(x)dx = 0$

در واقع در چنین صورتی هر افراز از بازه $[a,b]$ فقط شامل یک نقطه است و لذا طول بر بازه جزءِ $\Delta x_i=0$ است. x_iها به شکل ضریب در Σ ظاهر می‌شدند، پس تعریف فوق که حالت خاص از انتگرال معین است، طبیعی می‌نماید.

ب) هرگاه $a>b$، تعریف می‌کنیم.
$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

قضیه ۴ (خواص خطی انتگرال): فرض کنیم f و g توابعی انتگرال‌پذیر $[a,b]$ و c_1 و c_2 دو عدد ثابت باشند. در این صورت تابع c_1f+c_2g نیز بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر است؛ به‌علاوه
$$\int_a^b (c_1 f(x)+c_2 g(x))dx = c_1\int_a^b f(x)dx + c_2\int_a^b f(x)dx \qquad (1)$$

عبارت c_1f+c_2g را اصطلاحاً یک ترکیب خطی از g و f می‌نامیم.

رابطه (۱) را با رابطه مشابه در خصوص سیگماها مقایسه کنید.
$$\sum_{i=1}^{n}(c_i a_i + c_2 b_i) = c_1\sum_{i=1}^{n} a_i + c_2\sum_{i=1}^{n} b_i \qquad (2)$$

اثبات (۱) نیز اساساً براساس مفهوم انتگرال و خواص مشابه برای Σ انجام می‌شود.

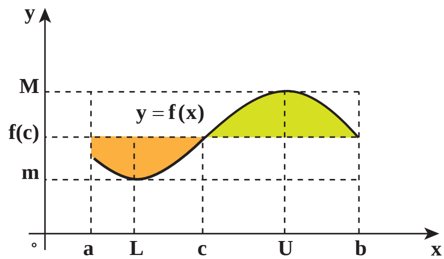
مثال:
$$\int_0^1 (x^3+4x^3)dx = \int_0^1 x^3dx + 4\int_0^1 x^2dx$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{4}{3}=\frac{7}{12}$$

زیرا قبلاً ملاحظه کرده‌ایم که $\int_0^1 x^3=\frac{1}{4}$ ، $\int_0^1 x^2=\frac{1}{3}$.

قضیه ۵: فرض کنیم g،f توابعی انتگرال‌پذیر و برای هر $\alpha\le x\le b$
$$f(x)\le g(x)$$
در این‌صورت
$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$$

قضیه زیر که به کمک قضیه مقدار میانی اثبات می‌گردد، قضیهٔ مقدار میانگین در انتگرال‌ها نامیده می‌شود.

قضیه ۶: (قضیه مقدار میانگین در انتگرال‌ها) هرگاه f بر $[a,b]$ تابعی پیوسته باشد، نقطه‌ای مانند c از این بازه هست به قسمی که
$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c)$$



شکل ۴ــ۱۲ــ مقدار انتگرال برابر مساحت مستطیلی به ارتفاع f(c) و قاعده b−a

برهان: می‌دانیم :
$$m < \frac{۱}{b-a}\int_a^b f(x)dx < M$$
که در آن M و m به ترتیب ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع f بر [a,b] هستند.

(قضیه ۲) چون f پیوسته است، بنابرقضیه مقدار میانی فصل ۲، هر مقدار بین ماکزیمم و مینیمم خود را در نقطه‌ای مانند c∈[a,b] می‌گیرد، یعنی :
$$\frac{۱}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(c)$$
و یا
$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c)$$

۴ـ۵ـ قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال

همچنان که در فصل ۳ خوانده‌ایم، هرگاه تابع مشتق‌پذیر F بر بازه [a,b] چنان باشد که F′(x)=f(x) ، F را یک **پادمشتق** و یا یک **تابع اولیه** تابع f می‌نامیم. در این بخش سعی‌مان این است تا ارتباطی بین دو مفهوم انتگرال معین، که در بخش پیشین تعریف گردید، و مفهوم پادمشتق برقرار سازیم. چنان که قبلاً نیز گفته‌ایم، خواهیم دید که این ارتباط به نحوی چشمگیر محاسبه بسیاری از انتگرال‌های معین را میسر می‌سازد. این ارتباط که در واقع ارتباطی بین مفهوم‌های مشتق و انتگرال معین برقرار می‌کند، به‌طرزی شایسته به عنوان قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال نامگذاری شده است.

قضیه ۷: (قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال) فرض کنیم تابع f بر بازه I که شامل نقطه a است پیوسته باشد، در این صورت احکام ذیل برقرارند.

الف) هرگاه تابع F را بر I با ضابطه :
$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$
تعریف کنیم آنگاه تابع F مشتق‌پذیر است و F′(x)=f(x)، یعنی F یک تابع اولیه f می‌باشد؛

به عبارت دیگر :
$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)dt\right) = f(x)$$

اگر I در یک طرف یا دو طرف بسته باشد، در هر نقطهٔ انتهایی مشمول بازه، مشتق یک طرفه (مشتق راست، مشتق چپ) منظور می‌شود.

ب) هرگاه G تابع اوّلیه دیگری برای f باشد، به‌طوری که $G'(x)=f(x)$، آنگاه برای هر دو نقطه از I مانند a و b، $(a<b)$،

$$\int_a^b f(x)dx = G(b)-G(a)$$

برهان: با استفاده از تعریف مشتق، مشتق F را محاسبه می‌کنیم:

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt\right)$$

بنا بر قضیه ۴

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_a^{x+h} f(t)dt$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}h.f(c)$$

که در آن $c=c(h)$ به h بستگی داشته امّا بین x و x+h می‌باشد (قضیه ۶) بنابراین:

$$F'(x)=\lim_{c\to x} f(c)$$

$$=f(x)$$

زیرا وقتی $h\to 0$، $c\to x$ و f پیوسته می‌باشد.

ب) چون $G'(x)=f(x)$، $F(x)=G(x)+C$ برای هر $x\in I$ که در آن C مقدار ثابتی است. از این‌رو

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) = G(x)+C$$

اکنون فرض کنیم $x=a$، پس

$$0=G(a)+C$$

یعنی $C=-G(a)$. بار دیگر، فرض می‌کنیم $x=b$؛ به‌دست می‌آوریم.

$$\int_a^b f(t)dt = G(b)+C = G(b)-G(a)$$

البته می‌توانیم t را با x (و یا با هر متغیر دلخواه دیگری) در سمت چپ تساوی فوق تعویض کنیم.

نکته: هر دو قسمت قضیه اساسی را باید به خوبی به‌خاطر داشت. قسمت الف به شما می‌گوید که چگونه می‌توان از یک انتگرال نسبت به حد بالایی آن مشتق‌گیری کرد. قسمت (ب) راه محاسبه

یک انتگرال معین را به دست می‌دهد مشروط بر آنکه بتوان یک تابع اولیه برای تابع تحت انتگرال‌گیری پیدا کرد.

نماد محاسباتی : برای آنکه محاسبه انتگرال‌های معین را با استفاده از قضیه اساسی تسهیل کنیم نِماد محاسباتی زیر را معرفی می‌کنیم.

$$F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

بنابراین اگر $F(x)$ را با نِماد $\int f(x)dx$ نشان دهیم.

$$\int_a^b f(x)dx = \left(\int f(x)dx\right)\Big|_a^b$$

$\int f(x)dx$ را **انتگرال نامعین** یا اختصاراً انتگرال f نیز می‌نامیم. هر تابع اولیه را که برای محاسبه انتگرال معین به‌کار گیریم تأثیری در مقدار انتگرال معین نخواهد داشت زیرا مقدار ثابت در محاسبه حذف خواهد شد.

زیرا فرض کنیم به جای $F(x)$ از $G(x)=F(x)+C$ استفاده کنیم :

$$(F(x)+C)\Big|_a^b = F(b)+C-(F(a)+C) = F(b)-F(a)$$

$$= F(x)\Big|_a^b$$

پس از هر تابع اولیه برای محاسبه انتگرال معین می‌توان استفاده کرد.

به چند مثال ذیل توجه کنید. آیا قبل از آنکه حل آنها را ملاحظه کنید می‌توانید خودتان به حل آنها بپردازید، کوشش کنید!

مثال : انتگرال‌های معین زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int_0^a x^2 dx$ ب) $\int_{-1}^{2}(x^2-3x+2)dx$

حل :

(الف)

$$\int_0^a x^2dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^a = \frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{3}0^3$$

$$= \frac{a^3}{3}$$

زیرا

$$\frac{d}{dx}\frac{x^3}{3} = x^2$$

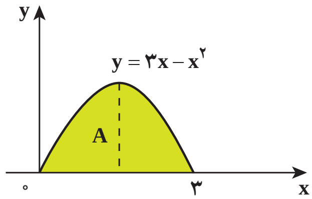
(ب)

$$\int_{-1}^{2}(x^2-3x+2)dx = \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x\right)\Big|_{-1}^{2}$$

$$= \left(\frac{1}{3}(8) - \frac{3}{2}(4) + 4 - \left(\frac{1}{3}(-1) - \frac{3}{2}(1) + (-2)\right)\right)$$

$$= \frac{9}{2}$$

مثال: مساحت ناحیه‌ای از صفحه را که تحت نمودار تابع $y=۳x-x^۲$ بوده و در نقاط تقاطع با محور xها به این محور محدود می‌باشد محاسبه کنید.



حل: ابتدا لازم است نقاط تقاطع منحنی نمودار تابع را با محور xها مشخص کنیم

$$۰=۳x-x^۲=-x(۳-x)$$

ریشه‌های این معادله $x=۰$ و $x=۳$ می‌باشند (شکل فوق). پس مساحت ناحیه مورد تقاضا برابر است با:

$$A=\int_۰^۳ (۳x-x^۲)dx=(\frac{۳}{۲}x^۲-\frac{۱}{۳}x^۳)\Big|_۰^۳$$

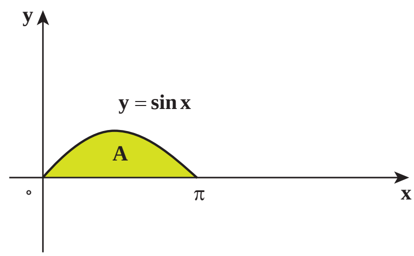
$$=\frac{۲۷}{۲}-\frac{۲۷}{۳}-(۰-۰)$$

$$=\frac{۲۷}{۶}=\frac{۹}{۲}$$ واحد سطح

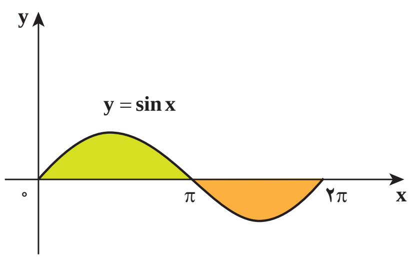
تمرین در کلاس

الف) مساحت یک طاق تحت $y=\sin x$ را محاسبه کنید. (شکل زیر)

ب) در شکل (ب) مساحت ناحیه A را با استفاده از انتگرال به‌دست آورید.



الف) یک طاق تحت نمودار تابع y=sinx



شکل (ب)

آیا حدس می‌زنید که مساحت یک طاق برابر ۲ واحد سطح باشد؟

توجه دارید که در حالی‌که انتگرال معین یک عدد است، مساحت یک کمیت هندسی است که به‌طور ضمنی با واحدهای اندازه‌گیری مربوط می‌شود، هرگاه واحدهای اندازه محورهای x و y برحسب متر باشد، واحد سطح مساحت مربوطه بر حسب متر مربع خواهد بود. در صورتی‌که واحد محورهای x و y مشخص نباشد، اندازه مساحت ناحیه را می‌بایست به‌صورت **واحد سطح** بیان کرد.

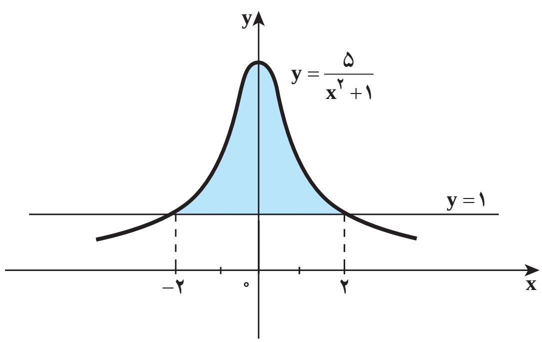
ج) مساحت ناحیه R را که بالای خط $y=۱$ و تحت نمودار $y=\frac{۵}{x^۲+۱}$ می‌باشد به‌دست آورید (شکل ...)

راهنمایی : ناحیه R مورد بحث در شکل زیر هاشور زده شده است. برای آنکه نقاط تقاطع $y=۱$ و $y=\frac{۵}{x^۲+۱}$ را بیابیم باید معادله زیر را حل کنیم.

$$۱=\frac{۵}{x^۲+۱}$$

پس $x^۲+۱=۵$ و یا $x^۲=۴$، در نتیجه طول نقاط تقاطع $x=\pm۲$ می‌باشد.

مساحت ناحیه R برابر است با مساحت زیر نمودار تابع



شکل ناحیه مورد محاسبه و به‌صورت رنگی مشخص شده است.

$y=\frac{۵}{x^۲+۱}$ و محدود به خطوط به معادله‌های $x=-۲$ و $x=۲$ منهای مساحت مستطیل به عرض ۴ و ارتفاع ۲. اکنون معادله مساحت را برحسب انتگرال نوشته و به محاسبه آن بپردازید.

هرگاه جواب $A=۱۰\tan^{-۱}(۱)-۴$ (واحد سطح) را به‌دست آورده باشید، کاملاً موفق شده‌اید.

نکته : توجه دارید که با استفاده از تقارن تابع (تابع زوج) می‌توانید حد پایین را صفر گرفته و ضریب ۲ را در انتگرال لحاظ کنید؛ قطعاً کار با صفر در محاسبه انتگرال معین ساده‌تر است از کار با ۲−

مثال : مقدار میانگین تابع $f(x)=e^{-x}+\cos x$ را بر بازه $[-\frac{\pi}{۲},۰]$ به دست آورید.

حل: طبق تعریف، عمل می‌کنیم

$$\bar{f}=\frac{۱}{۰-(-\frac{\pi}{۲})}\int_{-\frac{\pi}{۲}}^{۰}(e^{-x}+\cos x)dx$$

$$\bar{f}=\frac{۲}{\pi}(-e^{-x}+\sin x)\Big|_{-}^{۰}$$

$$=\frac{۲}{\pi}(-۱+۰+e^{\frac{\pi}{۲}}+۱)=\frac{۲}{\pi}e^{\frac{\pi}{۲}}$$

یک پرسش مهم

چون $\frac{۱}{x}=\frac{d}{dx}(L_n|x|)$ برای $x\neq۰$، آیا می‌توانیم نتیجه بگیریم که

$$\int_{-۱}^{۱}\frac{dx}{x}=\operatorname{Ln}|x|\Big|_{-۱}^{۱}=۰-۰=۰$$

به قضیه اساسی یک بار دیگر توجه کنید و رفتار تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ را در بازه $[-۱,۱]$ درنظر بگیرید. پاسخ خود را با دلیل منطقی با دبیر خود مطرح کنید.

مثال: مشتق توابع زیر را به‌دست آورید.

الف) $F(x)=\int_{x}^{۳}e^{-t^{۲}}dt$ ب) $G(x)=x^{۲}\int e^{-t^{۲}}dt$

حل:

الف) داریم $F(x)=-\int_{۳}^{x}e^{-t^{۲}}dt$

طبق قضیه اساسی $F'(x)=-e^{-x^{۲}}$

ب) بنابر قاعده زنجیری داریم

$$G'(x)=۲x\int_{-۴}^{۵x}e^{-t^{۲}}dt+x^{۲}\frac{d}{dx}\int_{-۴}^{۵x}e^{-t^{۲}}dt$$

$$=۲x\int_{-۴}^{۵x}e^{-t^{۲}}dt+x^{۲}(e^{-(۵x)^{۲}})\times۵$$

$$=۲x\int_{-۴}^{۵x}e^{-t^{۲}}dt+۵x^{۲}e^{-۲۵x^{۲}}$$

مسائل

انتگرال‌های معین ۹ــ۱ را محاسبه کنید :

۱ــ $\int_{۰}^{۲}x^{۳}dx$ ۲ــ $\int_{۰}^{۴}\sqrt{x}dx$ ۳ــ $\int_{۰}^{۲\pi}(۱+\sin t)dt$

۴ــ $\int_{\frac{۱}{۲}}^{۱}\frac{dx}{x}$ ۵ــ $\int_{-۲}^{-۱}(\frac{۱}{x^{۲}}-\frac{۱}{x^{۳}})dx$ ۶ــ $\int_{۱}^{۲}(\frac{۲}{x^{۳}}-\frac{x^{۳}}{۲})dx$

۷ــ $\int_{-\frac{\pi}{۴}}^{-\frac{\pi}{۶}}\cos x dx$ ۸ــ $\int_{۰}^{\frac{۴\pi}{۳}}|\sin x|dx$ ۹ــ $\int_{-\pi}^{\pi}e^{x}dx$

بعضی انتگرال‌های مقدماتی : چنانچه ملاحظه کرده‌ایم انتگرال معین را به ساده‌ترین شکل ممکن می‌توان محاسبه کرد مشروط بر آنکه بتوانیم تابع اوّلیه (انتگرال نامعین) تابع تحت علامت انتگرال را محاسبه کنیم. در آنالیز مقدماتی روش‌هایی برای محاسبه انتگرال‌ها ارائه می‌گردد. معهذا باید اذعان کرد که عمل انتگرال‌گیری برخلاف مشتق‌گیری، همیشه کار آسانی نمی‌باشد، این امر از آنجا ناشی می‌شود که می‌توان به آسانی توابعی عرضه کرد که برای آنها نتوان تابع اوّلیه‌ای پیدا کرد. برای مثال می‌توانیم از تابع $f(x)=e^{x^2}$ نام ببریم که نمی‌توان تابعی مانند F پیدا کرد به قسمی که $F'(x)=f(x)$

در اینجا برای تسهیل بیشتر کار، تابع اوّلیه برخی از توابع را عرضه می‌کنیم. از این به بعد از تابع اوّلیه به عنوان انتگرال نامعین یا به‌طور خلاصه انتگرال نام برده و از علامت انتگرال (S کشیده) ولی بدون حدود بالا و پایین برای انتگرال استفاده می‌کنیم و با فرض اینکه C عدد ثابتی است داریم :

۱ـ $\int 1dx = x + c$

۲ـ $\int xdx = \frac{1}{2}x^2 + c$

۳ـ $\int x^2dx = \frac{1}{3}x^3 + c$

۴ـ $\int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x} + c$

۵ـ $\int \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c$

۶ـ $\int x^r dx = \frac{1}{1+r}x^{r+1} + c \ ، \ r \neq -1$

۷ـ $\int \frac{1}{x}dx = L_n|x| + c$

۸ـ $\int \sin axdx = -\frac{1}{a}\cos ax + c$

۹ـ $\int \cos axdx = \frac{1}{a}\sin ax + c$

۱۰ـ $\int \tan axdx = \frac{-1}{a}L_n|\cos ax| + c$

۱۱ـ $\int \cot axdx = \frac{1}{a}L_n|\sin ax| + c$

۱۲ـ $\int e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax} + c$

تمرین در کلاس

اکنون با استفاده از خواص خطی انتگرال و جدول انتگرال فوق بسیاری از انتگرال‌ها را می‌توانید محاسبه کنید. برای نمونه انتگرال‌های $\int(x^5 - 3x + e^{3x} - 3)dx$ و $\int(\sin 3x - \cos 2x)dx$ را محاسبه کنید.

فعالیت

درستی تساوی‌های فوق را در جدول انتگرال‌ها با مشتق‌گیری از طرف دوم محقق سازید.

مسائل

۱ــ پرسش‌های مفهومی

الف) معنی انتگرال نامعین $\int f(x)dx$ را توضیح دهید.

ب) کدام‌یک از گزینه‌های زیر درست و کدام نادرست است؟

ب) ۱ــ انتگرال نامعین یک عدد و انتگرال معین یک تابع است.

ب) ۲ــ انتگرال نامعین یک تابع و انتگرال معین یک عدد است.

ب) ۳ــ انتگرال معین و انتگرال نامعین فرقی با هم ندارند و تفاوت آنها فقط در یک عدد ثابت است.

ب) ۴ــ برای محاسبه انتگرال معین، در بیشتر موارد، از انتگرال نامعین استفاده می‌کنیم. مجوز این‌کار در قضیه ... آمده است.

ج) فرض کنیم f تابعی انتگرال‌پذیر بر بازه [a,b] باشد، میانگین آن، یعنی

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

را تفسیر هندسی کنید.

د) فرض کنیم تابع f بر بازه [a,b] تعریف شده و جزء در تعداد متناهی نقطه از این بازه در سایر نقاط آن پیوسته باشد. چنین تابعی را یک تابع **قطعه‌ای پیوسته** می‌نامند. آیا f بر [a,b] انتگرال‌ناپذیر است. در صورتی که جوابتان مثبت است، مقدار انتگرال f را توضیح دهید.

۲ــ انتگرال‌های معین زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int_0^4 x\sqrt[3]{x}dx$ ب) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin 2x + \tan x)dx$

پ) $\int_0^2 |\sqrt{x}-1|\, dx$ ت) $\int_0^1 |3x-1|[3x]dx$

۳ــ انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int \sin ۴x \cos ۲x dx$ ب) $\int \frac{x^۲+\sqrt{x}+۱}{۲x^۲}dx$

پ) $\int \sqrt{(۱-\sqrt{x})^۲+۴\sqrt{x}}\,dx$ ت) $\int \frac{۱+e^{۲x}}{e^x}dx$

۴ــ مقدار میانگین تابع f با ضابطه $f(x)=\sqrt{\frac{۱+\cos x}{۲}}$ را بر بازه $[۰,\pi]$ حساب کنید.

۵ــ انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int \frac{(x+۲)^۳}{x}dx$ ب) $\int \frac{x^۲+۱}{\sqrt{x}}dx$

۶ــ با مشتق‌گیری از طرف دوم تساوی‌های زیر درستی آنها را محقق کنید.

الف) $a>۰$ $\int \frac{۱}{\sqrt{a^۲+x^۲}}dx=\sin^{-۱}\frac{x}{a}+c$

ب) $a>۰$ $\int \frac{۱}{a^۲+x^۲}dx=\frac{۱}{a}\tan^{-۱}\frac{x}{a}+c$

۷ــ فرض کنیم که f و g انتگرال‌پذیر بوده و برای هر x از بازه $[a,b]$، $f(x)\le g(x)$. ثابت کنید $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$. (قضیه ۵)

خواندنی

ملاحظه کردیم که در تعریف انتگرال معین افراز بازه انتگرال‌گیری و عبارت‌های $\int m_i\Delta x_i$ و یا $M_i\Delta x_i$ نقش اساسی داشتند. وقتی تعداد نقاط افراز زیاد و زیادتر می‌شود Δx_i کوچک و کوچک‌تر می‌گردد زیرا $\Delta x_i = \dfrac{b-a}{n}$. بنابراین هر یک از m_i یا M_i را می‌توان با عرض هر نقطه در بازه جزءِ $[x_{i-1}, x_i]$ مانند l_i تقریب کرد. در نتیجه مثلاً $\sum\limits_{i=1}^{n} m_i.\Delta x_i$ به صورت $\sum\limits_{i=1}^{n} f(l_i).\Delta x_i$ در خواهد آمد. از طرف دیگر وقتی n به ∞ میل می‌کند $\Delta x_i \to 0$، پس سیگمای مورد بحث ما که در حد به $\int_a^b f(x)dx$ میل می‌کند. شامل تعداد بسیار زیاد جمله به‌صورت $f(l_i)\,\Delta x_i$ است که در آنها Δx_i فوق‌العاده کوچک‌اند (زیرا حد آنها صفر است). اما عرض‌ها یعنی $f(l_i)$ها محدودند پس $f(l_i)\,\Delta x_i$ نیز فوق‌العاده کوچک‌اند. ریاضیدانانی که در آغاز انتگرال را کشف کردند. بدان، بدین‌گونه می‌نگریستند :

مجموعی با بی‌نهایت جمله از جملات بی‌نهایت کوچک : در واقع نیوتن و لایبنیتز که هر دو واضعان حساب مشتقات و حساب انتگرال (حسابان) به شمار می‌روند، این حساب را با حساب بی‌نهایت کوچک‌ها و عبارت‌هایی از این دست سامان دادند.

به دلیل مشکلات و نابسامانی‌هایی که در حساب دیفرانسیل و انتگرال با مفاهیم بی‌نهایت کوچک‌ها بروز کرد، ریاضیدانان بعد از نیوتن و لایبنیتز کوشیدند تا این نابسامانی‌ها را از آنالیز بزدایند. سرانجام پس از حدود یکصد سال از کشف حساب دیفرانسیل و انتگرال، ریاضیدان آلمانی به نام کارل و ایراشتراس توانست حسابان را به شکل امروزی با استفاده از مفهوم حد سامان دهد.

درواقع خیلی پیش از نیوتن ولایبنیتز حدود سال ۱۰۴۱ میلادی ابن الهیثم (Ibn al– Haitam) یک ریاضیدان مسلمان به کشف حساب بی‌نهایت کوچک‌ها نایل شده بود و متعاقب وی ابوسهل کوهی و ثابت بن قره در مطالعه و بررسی‌های مربوط به محاسبه حجم سهوی با انتگرال $\int_0^a t^4 dt$ درگیر شدند.

مراجع

۱ــ زنگنه؛ حمیدرضا؛ نادری؛ امیر؛ حساب دیفرانسیل و انتگرال توابع یک متغیره انتشارات دانشگاه صنعتی اصفهان

۲ــ مدقالچی، علیرضا؛ آنالیز ریاضی ۱، انتشارات دانشگاه پیام نور تهران ۱۳۸۶

۳ــ جیمز استوارت، حساب دیفرانسیل و انتگرال، انتشارات فاطمی چاپ اوّل ۱۳۸۸

۴ــ رولاند ای لارسن، رابرت پی هوستتلر، حساب دیفرانسیل و انتگرال جلد اوّل، ترجمه ــ علی اکبر عالم زاده ــ نشر اتحاد

۵ــ سیاوش شهشهانی، حساب دیفرانسیل و انتگرال (جلد اوّل) انتشارات فاطمی چاپ اوّل ۱۳۸۶

6ــ Adams, Robert A. Calculus, A complete Course, Pearson Education Canada Inc, Toronto,2003

7ــ Anton, Howard; Bivens, Irl; Davis, Stephen; Calculus, 9th edition, Wiley (Asia) Pte Ltd, 2010.