بسم الله الرحمن الرحیم

استاتیک و دینامیک مقدماتی

رشتهٔ مکانیک موتورهای دریایی

زمینهٔ صنعت

شاخهٔ آموزش فنی و حرفه‌ای

شمارهٔ درس ۲۳۴۳

۶۲/ ۱ میریانی، فرهاد
الف۹۶۷م/ استاتیک و دینامیک مقدماتی/ مؤلف : فرهاد میریانی ــ تهران : شرکت چاپ ونشر کتاب‌های
۱۳۹۲ درسی ایران، ۱۳۹۲
۱۶۳ص : مصور ــ (آموزش فنی و حرفه‌ای؛ شمارهٔ درس ۲۳۴۳)
متون درسی رشتهٔ مکانیک موتورهای دریایی ، زمینهٔ صنعت
برنامه‌ریزی و نظارت، بررسی و تصویب محتوا : کمیسیون برنامه‌ریزی و تألیف کتاب‌های درسی رشتهٔ مکانیک موتورهای دریایی دفتر برنامه‌ریزی و تألیف آموزش‌های فنی و حرفه‌ای و کاردانش وزارت آموزش و پرورش
۱ استاتیک و دینامیک مقدماتی الف ایران وزارت آموزش و پرورش کمیسیون برنامه‌ریزی و تألیف کتاب‌های درسی رشتهٔ مکانیک موتورهای دریایی ب عنوان ج فروست

۱۳۹۲

همکاران محترم و دانش‌آموزان عزیز :
پیشنهادها و نظرهای خود را دربارهٔ محتوای این کتاب به نشانی
تهران ـ صندوق‌پستی‌شمارهٔ ۴۸۷۴/۱۵ دفتربرنامه‌ریزی و تألیف‌آموزش‌های
فنی و حرفه‌ای و کاردانش، ارسال فرمایند
پیام‌نگار(ایمیل) **tvoccd@medu ir**
وب‌گاه (وب‌سایت) **www.tvoccd medu.ir**

محتوای این کتاب در کمیسیون تخصصی رشتهٔ مکانیک موتورهای دریایی دفتر برنامه‌ریزی و تألیف آموزش‌های فنی وحرفه‌ای و کاردانش تأیید شده است

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

برنامه‌ریزی محتوا و نظارت بر تألیف : **دفتر برنامه‌ریزی و تألیف آموزش‌های فنی و حرفه ای و کاردانش**

نام کتاب : **استاتیک و دینامیک مقدماتی ـ ۴۶۳/۹**

مؤلف : **فرهاد میریانی**

نظارت بر چاپ و توزیع : **ادارهٔ کل نظارت بر نشر و توزیع مواد آموزشی**

تهران : خیابان ایرانشهر شمالی ـ ساختمان شمارهٔ ۴ آموزش و پرورش (شهید موسوی)

تلفن : ۹ـ ۸۸۸۳۱۱۶۱ ، دورنگار : ۸۸۳۰۹۲۶۶ ، کد پستی : ۱۵۸۴۷۴۷۳۵۹،

وب سایت : **www.chap.sch.ir**

رسام : **نازنین میریانی، رضا تاجر محمد قزوینی**

صفحه‌آرا و طراح جلد : **نسرین اصغری**

ناشر : **شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران : تهران، کیلومتر ۱۷ جادّهٔ مخصوص کرج، خیابان ۶۱ (دارو پخش)**

تلفن : ۵ـ ۴۴۹۸۵۱۶۱ ، دورنگار : ۴۴۹۸۵۱۶۰ ، صندوق پستی : ۱۳۹ـ ۳۷۵۱۵

چاپخانه : **سهند**

سال انتشار و نوبت چاپ : **چاپ دوم ۱۳۹۲**

ISBN 964-05-1880-8 شابک ۸ ۱۸۸۰ ۰۵ ۹۶۴

شما عزیزان کوشش کنید که از این وابستگی بیرون آیید و احتیاجات کشور خودتان را برآورده سازید، از نیروی انسانی ایمانی خودتان غافل نباشید و از اتکای به اجانب بپرهیزید.

امام خمینی « قدس سره الشریف»

فهرست

مقدمه

کتاب حاضر با توجه به الزامات سازمان بین‌المللی دریانوردی و توانایی دانش‌آموزان رشته مکانیک موتورهای دریایی و برنامه‌ریزی درسی گروه علوم و فنون دریایی تدوین شده است .

هدف کلی

فراگیران پس از آموزش این درس قادر خواهندبود مسائل کاربردی نیروها،بردارها و ماشین‌های جابجایی و بالابر را به خصوص در کاربری‌های دریایی تجزیه و تحلیل کنند.

فرازهایی از فرهنگ و تمدن اسلامی و ایران

« ای نوح غیر از همین‌هایی که ایمان آورده‌اند کس دیگری از قوم تو ایمان نخواهد آورد. پس از کارهایی که می کردند ناراحت مباش و کشتی بساز. نوح گفت :پروردگارا کشتی چیست ؟ خدا گفت: خانه‌ای است از چوب که روی آب جاری می شود. نوح مردی درودگر بود. بعدا خدا او را به پیغمبری برگزید و نوح اولین کسی بود که کشتی ساخت که روی آب حرکت می‌کرد.»

آنچه که درباره حضرت نوح (ع) در قرآن و تفاسیر آمده است با تحقیقات غربی‌ها در مورد اینکه حضرت نوح(ع) اولین کشتی‌ساز جهان بوده است و فرزندان او کشتی‌سازان ماهری شدند اشتراکات زیادی دارد .

فصل یکم

استفاده از ریاضیات در مکانیک کاربردی

هدف کلی : بهره برداری از ریاضیات در مکانیک کاربردی

هدف های رفتاری: فراگیر پس از آموزش این فصل قادر خواهد بود

۱- هدف های کلی علم مکانیک را بیان کند.

۲- استاتیک و دینامیک را توضیح دهد.

۳- عملا از ریاضیات برای تعیین اندازه اضلاع و زوایا بهره‌برداری کند.

پیش آزمون (۱)

۱- سینوس زوایای ۱۵، ۳۰، ۴۵ ، ۶۰ و ۹۰ درجه را با استفاده از جداول مثلثاتی تعیین کنید.

۲- کسینوس و تانژانت زوایای ۳۰ و ۴۵ درجه را با استفاده از جداول مثلثاتی تعیین کنید.

۳- اندازه وتر را در مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین با اضلاع به طول ۳۰ سانتی متر محاسبه کنید.

فصل یکم

استفاده از ریاضیات در مکانیک کاربردی

۱-۱ - مکانیک :

شاید هنوز دانش مکانیک از اصلی‌ترین شاخه های علوم برای درک طبیعت باشد. مطابق نوشته های باقیمانده از قدیمی ترین دوران زندگی بشر در کره خاکی، سیصد و پنجاه سال قبل از تولد مسیح(ع)، ارسطو فیلسوف یونانی کوشید تا توضیحی درباره اهرم بنویسد و آغازگر معرفی مکانیک و کاربرد آن شود.

مکانیک به وسیله ریاضی‌دانها و فیزیک دانها توسعه یافت. این گروه از دانشمندان عمدتا به توضیح منطقی مشاهده‌های خود پرداختند و به مطالعه اهرم، قرقره، سقوط آزاد و حرکت سیاره‌ها مبادرت کردند. نتیجه کار هر محقق در قالب یک تئوری جدید یا تصحیح تئوری پیشینیان به گنجینه دانش بشر افزوده شد. در سال ۱۶۸۷ میلادی با کشف نیروی جاذبه و اعلام قوانین حرکت به وسیله اسحاق نیوتون دانش مکانیک در موقعیتی جدید قرار گرفت.

اهمیت علوم را می توان با نوع کاربرد آنها ارزیابی کرد. ملاحظه می شود طراحی و ساخت ساختمان، پل، خودرو، هواپیما و کشتی با تحلیل‌های اولیه بر مبنای اصول مکانیک انجام می شود. بنابراین مکانیک و کاربرد آن نقشی بزرگ در زندگی بشر دارد. استاتیک و دینامیک دو شاخه مکانیک هستند که در این کتاب معرفی می شوند و کاربرد آنها به طور مجزا و توام بررسی می شود.

استاتیک مطالعه اجسام در حالت سکون (در شرایط موازنه با پیرامون خود) است. هدف نهایی استاتیک تحلیل نیروهاست. با کاربرد اصول استاتیک پاسخ اینگونه سوالات داده می شود.

- چه مقدار بار باید به وسیله یک ستون تحمل می‌شود؟
- کشش کابل یک پل چقدر است؟
- چه مقدار بار به وسیله یک جرثقیل تحمل می شود؟
- مزایای مکانیکی طناب و قرقره چیست؟

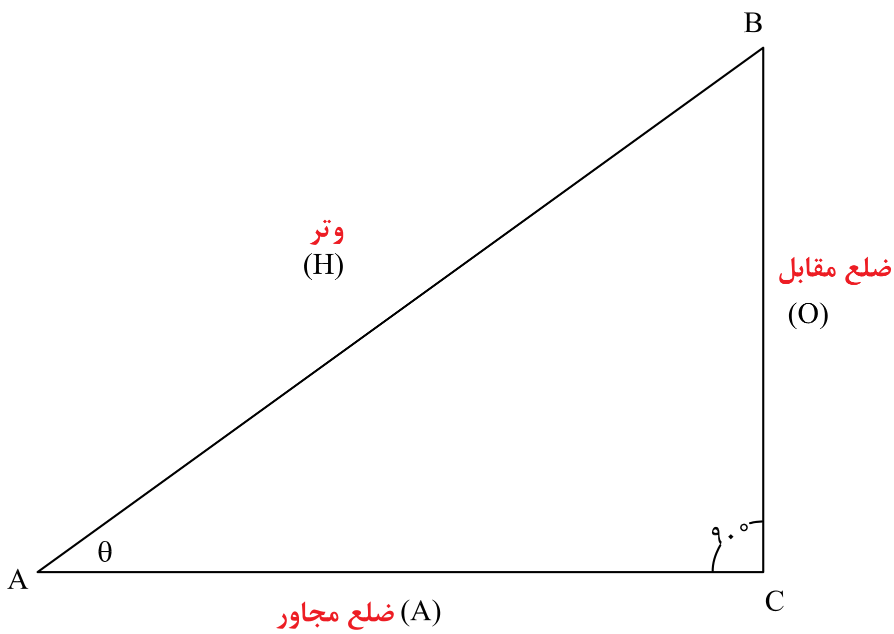
دینامیک شامل مطالعه هندسی حرکت (سینماتیک) و نیروهای لازم برای ایجاد حرکت (سینتیک) است. هدف‌نهایی دینامیک تعیین نیروهای لازم برای ایجاد حرکت و تغییر حرکت است.

۲–۱ – استفاده از ریاضیات در مکانیک

مکانیک موضوعی تحلیلی اســت. در مکانیک به طوری وســیع از شــاخه‌های مختلف ریاضیات مانند جبر، هندسه و مثلثات اســتفاده می شود. هدف این کتاب آموختن ریاضیات نیست ولی یک شاخه آن یعنی مثلثات کاربرد فراوانی در این کتاب دارد و لذا توجه ویژه‌ای به آن می‌شود.

۱–۲–۱ – مثلث های راست گوشه

مثلث راست گوشه شکل سه ضلعی بستــه ای است که یک زاویه نود درجه دارد، ضلعی که مقابل زاویه نود درجه است وتر نامیده می شود. دو ضلع دیگر با توجه به سایر زوایا نامگذاری می شوند. مثلا اگر θ (تتا) زاویه مورد نظر باشد ضلع BC در شکل ۱–۱ به عنوان ضلع مقابل و ضلع AC به عنوان ضلع مجاور نامگذاری می شوند.



H معرف hypotenuse (وتر)

A معرف adjacent side (ضلع مجاور)

O معرف opposite side (ضلع مقابل)

شکل ۱–۱

برای اضلاع این مثلث راست گوشه شش نسبت می‌توان نوشت:
این نسبت ها روابط مثلثاتی نام دارند و به صورت زیر نشان داده می شوند.

$$\frac{O}{H} = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}} = \text{(سینوس)}\ \sin\theta$$

$$\frac{A}{H} = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}} = \text{(کسینوس)}\ \cos\theta$$

$$\frac{O}{A} = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \text{(تانژانت)}\ \tan\theta$$

$$\frac{A}{O} = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{ضلع مقابل}} = \text{(کتانژانت)}\ \cot\theta$$

$$\frac{H}{A} = \frac{\text{وتر}}{\text{ضلع مجاور}} = \text{(سکانت)}\ \sec\theta$$

$$\frac{H}{O} = \frac{\text{وتر}}{\text{ضلع مقابل}} = \text{(کسکانت)}\ \mathrm{cosec}\,\theta$$

از این شـــش رابطه مثلثاتی مشـــخص می شود که برای یک زاویه معین θ، نسبت های طولی اضلاع در یک مثلث راست گوشـــه مقادیری ثابت هســـتند. مقادیر سینوس،کســـینوس و تانژانت زوایایی که کاربرد بیشـــتری نسبت به سایر زوایا دارند (زوایای صفر، ۳۰ ، ۴۵ ، ۶۰ و ۹۰ درجه) در جدول ۱-۱ درج شـــده اســـت. مقادیر مثلثاتی کلیه زوایا در جداول پایانی کتاب وجود دارد.

زاویه (درجه)	Sin	Cos	tan
۰	۰	۱	۰
۳۰	۰/۵	۰/۸۶۶	۰/۵۷۷
۴۵	۰/۷۰۷	۰/۷۰۷	۱
۶۰	۰/۸۶۶	۰/۵	۱/۷۳۲
۹۰	۱	۰	بی نهایت

جدول ۱-۱

یک مثلث راست گوشه دارای پنج متغیر است (سه ضلع و دو زاویه). اگر مقدار دو متغیر معین باشد سه متغیر دیگر به آسانی قابل تعیین می شود.

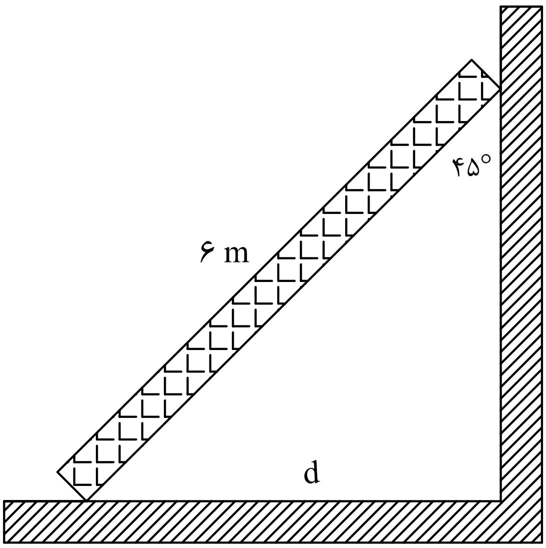
مثال ۱: یک نردبان ۶ متری مطابق شکل ۲-۱ قرار داده شده است.

فاصله d از پایه نردبان تا دیوار چقدر است؟

راه حل: سینوس ۴۵ درجه نسبت طول d و وتر را تعیین می‌کند.

$$\sin = \frac{d}{۶}$$

$$d = ٦\sin ٤٥^{\circ} = ٦(٠/٧٠٧) = ٤/٢٤٢m$$

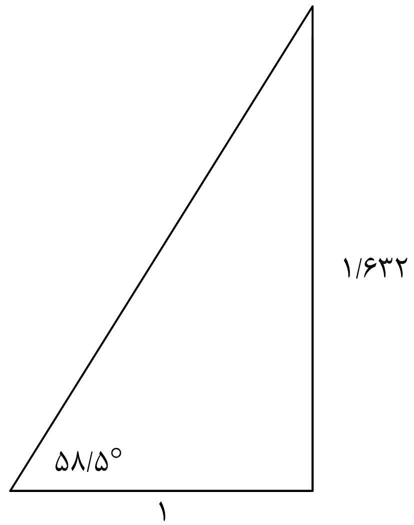


شکل ۲-۱

از رابطه تانژانت برای رسم و یا اندازه گیری دقیق زوایا استفاده می‌شود. مثلا برای رسم زاویه ۵۸/۵ درجه ابتدا مقدار تانژانت زاویه ۵۸/۵ درجه از جداول مثلثات یادداشت می‌شود (برابر ۱/۶۳۲) و سپس یک مثلث راست گوشه (مانند شکل ۳-۱) رسم می‌شود طوری که نسبت ضلع مقابل به ضلع مجاور برابر با تانژانت زاویه ۵۸/۵ درجه باشد (در این مثال نسبت عدد ۱/۶۳۲ به عدد یک).

دقت زاویه رسم شده به دقت رسم طول اضلاع بستگی دارد. مثلا دقت زاویه مثلثی که اضلاع آن به ترتیب برابر با ۱۶/۳۲ و ۱۰ می‌باشد بسیار بیشتر از زاویه مثلثی است که اضلاع آن به ترتیب برابر ۱/۶۳۲ و یک است.

برای تعیین اندازه یک زاویه، طول مناسبی برای ضلع مجاور انتخاب می شود و ضلع مقابل اندازه گیری می‌شود. از نسبت طول دو ضلع اندازه تانژانت به دست می آید. با مراجعه به جداول مثلثات اندازه زاویه مقابل قابل تعیین است.



شکل ۳-۱

۲-۲-۱- قانون کسینوس

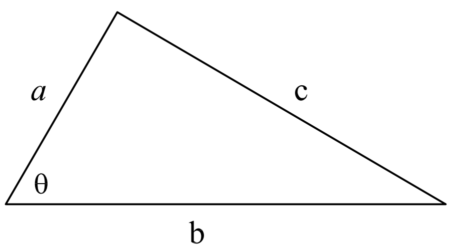
در مکانیک کاربردی در اکثر موارد اندازه دو ضلع یک مثلث و زاویه بین آنها مشــخص اســت و ضرورت دارد اندازه ضلع ســوم محاســبه شود. مناسب ترین روش برای محاسبه ضلع سوم استفاده از قانون کسینوس است. مطابق این قانون اگر a و b اندازه دو ضلع معین و θ زاویه بین آنها باشد می توان اندازه ضلع سوم (c) را با استفاده از رابطه :

$$c^۲ = a^۲ + b^۲ - ۲ab\cos\theta$$

یا

$$c = \sqrt{a^۲ + b^۲ - ۲ab\cos\theta}$$

به دست آورد. (به شکل ۴-۱ نگاه کنید)



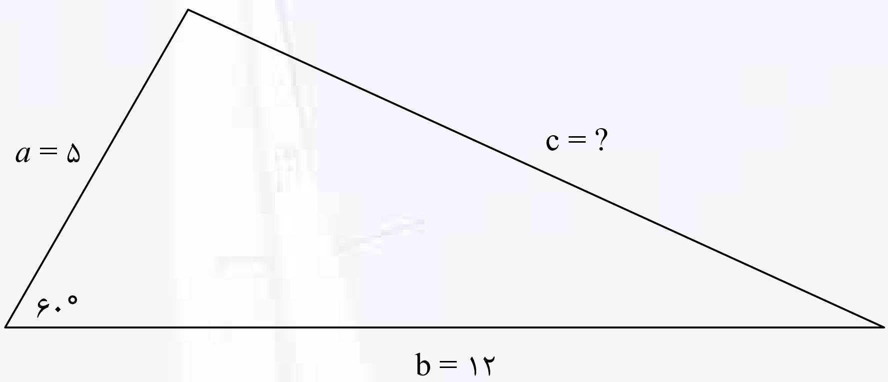
شکل ۴-۱

اگر $\theta = ۹۰^{\circ}$ باشد قانون کسینوس به قضیه معروف فیثاغورث تغییر می‌یابد که درآن $c^{۲} = a^{۲} + b^{۲}$ یا $c^{۲} = \sqrt{a^{۲} + b^{۲}}$ می‌باشد.

مثال۲: اندازه ضلع c در مثلث شکل ۵-۱ چقدر است؟

راه حل:

$$\begin{aligned} c &= \sqrt{a^{۲} + b^{۲} - ۲ab\cos\theta} \\ &= \sqrt{۵^{۲} + ۱۲^{۲} - ۲(۵)(۱۲)\cos ۶۰} \\ &= \sqrt{۲۵ + ۱۴۴ - ۲\times ۵\times ۱۲\times ۰/۵} = \sqrt{۱۰۹} = ۱۰/۴ \end{aligned}$$



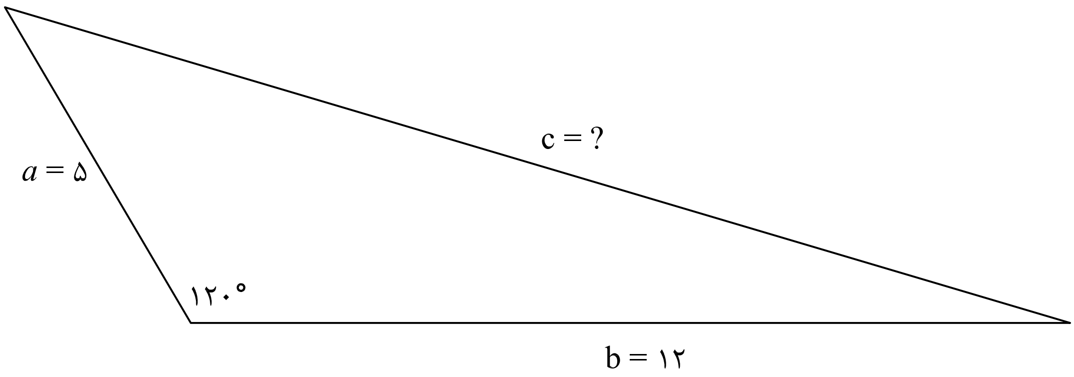
شکل ۵-۱

مثال ۳ : اندازه ضلع c در مثلث شکل ۶-۱ چقدر است؟

راه حل : کسینوس زوایای ۹۰ الی ۱۸۰ درجه منفی است لذا:

$$\cos\theta = -\cos(۱۸۰ - \theta)$$
$$\cos ۱۲۰ = -\cos ۶۰ = -۰/۵$$

$$\begin{aligned} c &= \sqrt{a^{۲} + b^{۲} - ۲ab\cos\theta} \\ &= \sqrt{۵^{۲} + ۱۲^{۲} - ۲\times ۲۴\times ۱۲\times(-۰/۵)} \\ &= \sqrt{۲۵ + ۱۴۴ - (۶۰)} \\ &= \sqrt{۲۵ + ۱۴۴ + ۶۰} \\ &= \sqrt{۲۲۹} = ۱۵/۱ \end{aligned}$$



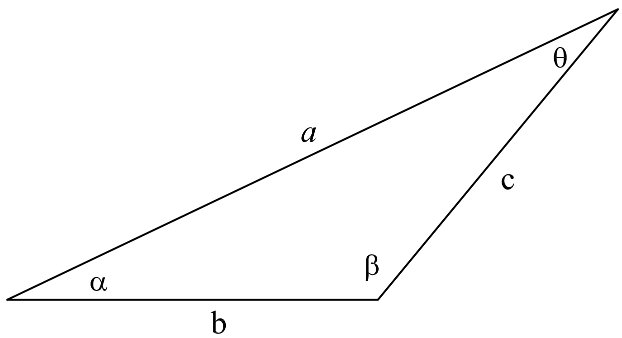
شکل ۶-۱

۳-۲-۱- قانون سینوس:

این قانون کاربرد وســیعی در مکانیک دارد. مطابق این قانون در مثلثی مانند مثلث شــکل ۷-۱ ارتباط و تناسب اندازه اضلاع و زوایا به شرح زیر می‌باشد.

$$\frac{a}{\sin\beta}=\frac{b}{\sin\theta}=\frac{c}{\sin\alpha}$$

از قانون ســینوس برای تعیین اندازه ضلع ســوم یک مثلث وقتی که اندازه دو ضلع دیگر و یک زاویه مقابل معین هستند استفاده می‌شود. همچنین وقتی که دو زاویه و یک ضلع معین هستند اندازه ضلع سوم را می توان تعیین کرد.



شکل ۷-۱

مثال ۴: اندازه اضلاع a و c در مثلث شکل ۸-۱ چقدر است؟

راه حل: مجموع زوایای یک مثلث برابر با ۱۸۰ درجه است.

$$\theta + ۳۵ + ۴۳ = ۱۸۰$$
$$\theta = ۱۰۲$$

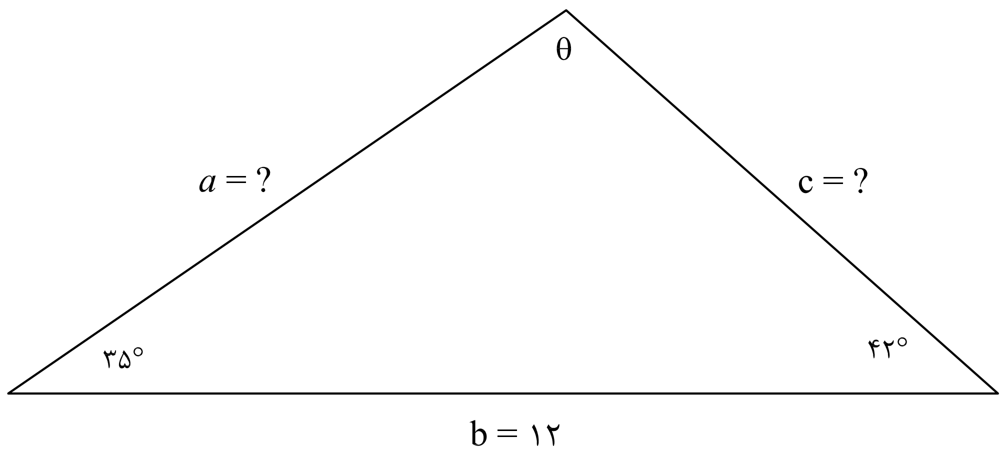
مطابق قانون سینوس :

$$\frac{a}{\sin ۴۳} = \frac{c}{\sin ۱۰۲}$$

در صورتی که اندازه زاویه θ بین ۹۰ و ۱۸۰ درجه باشد علامت سینوس مثبت است که به صورت زیر بدست می آید:

$$\sin\theta = \sin(۱۸۰ - \theta)$$
$$\sin ۱۰۲ = \sin(۱۸۰ - ۱۰۲) = \sin ۷۸$$

مقادیر سینوس زاویه ۷۸ و ۴۳ درجه از جداول مثلثات یادداشت می‌شود که به ترتیب برابر با ۰/۹۷۸ و ۰/۶۸۲ می‌باشد.



شکل ۸-۱

$$\frac{a}{۰/۶۸۲} = \frac{۱۲}{۰/۹۷۸}$$

$$a = \frac{۱۲ \times ۰/۶۸۳}{۰/۹۷۸} = ۸/۳۷$$

با تکرار همین روش برای تعیین c خواهیم داشت:

$$\frac{a}{\sin ۴۳}=\frac{c}{\sin ۳۵}$$

$$c=\frac{۸/۳۷\sin ۳۵}{\sin ۴۳}=\frac{۸/۳۷\times ۰/۵۷۴}{۰/۶۸۲}=۷/۰۴$$

۳–۱– دستگاه بین المللی یکاها*

دستگاه بین المللی یکاها با علامت اختصاری SI به طور کامل در کتاب درسی فیزیک مکانیک معرفی شده است. ولی با توجه به کاربردهای آن در این کتاب مواردی به طور مختصر توضیح داده می شود.

در این دستگاه از حاصل ضرب یا تقسیم کمیت دو یکا، کمیت سوم در یکای دیگر حاصل می‌شود. این دستگاه بر مبنای شش یکای اصلی ایجاد شده است که به ترتیب عبارتند از متر(واحد طول) ، کیلوگرم (واحدجرم)، ثانیه (واحدزمان)، کلوین (واحد دما)، آمپر(واحد شدت جریان برق) و شمع (واحد شدت روشنایی).

از حاصل ضرب یک واحد طول (یک متر) در یک واحد طول (یک‌متر)، واحد سطح (یک مترمربع) حاصل می شود. از تقسیم یک واحد طول یا فاصله (یک‌متر) بر یک واحد زمان (یک ثانیه) یک واحد سرعت (یک متر بر ثانیه) حاصل می شود.

از حاصلضرب یک واحد جرم (یک کیلوگرم) با یک واحد شتاب (یک‌متر بر مجذورثانیه) یک واحد نیوتون (یک‌نیوتون) حاصل می‌شود. از نتیجه اعمال یک واحد نیرو (یک نیوتون) در یک واحد فاصله (یک‌متر) یک واحد کار (یک ژول) حاصل می شود.

یکاهای مورد استفاده در این کتاب اعم از یکاهای اصلی و یکاهای مشتق و مرتبط با یکاهای اصلی در جدول ۲- ۱ معرفی می‌شوند.

یکاهایی که یادآور اشخاص معروف می‌باشند با حروف بزرگ لاتین نشان داده می شوند (مانند N برای نیوتون، W برای وات، Hz برای هرتز، J برای ژول) و سایر یکاها با حروف کوچک لاتین نشان داده می‌شوند.

*در این کتاب پیرامون دما، شدت جریان برق و شدت روشنایی بحث نمی‌شود ولی به منظور شرح کامل دستگاه بین‌المللی یکاها به‌طور خلاصه معرفی شدند.

۱–۳–۱– توان های ۱۰

عامل ضرب، نگارش استاندارد، پیشوند و علامت توان های ۱۰ به شرح زیر می‌باشد.

عامل ضرب	نگارش استاندارد	پیشوند	علامت
۱/۰۰۰/۰۰۰/۰۰۰/۰۰۰	$۱۰^{۱۲}$	tera (ترا)	T
۱/۰۰۰/۰۰۰/۰۰۰	$۱۰^{۹}$	giga (گیگا)	G
۱/۰۰۰/۰۰۰	$۱۰^{۶}$	mega (مگا)	M
۱۰۰۰	$۱۰^{۳}$	kilo (کیلو)	K
۱۰۰	$۱۰^{۲}$	hecto (هکتو)	h
۱۰	$۱۰^{۱}$	deca (دکا)	da
۰/۱	$۱۰^{-۱}$	deci (دسی)	d
۰/۰۱	$۱۰^{-۲}$	centi (سانتی)	c
۰/۰۰۱	$۱۰^{-۳}$	milli (میلی)	m
۰/۰۰۰۰۰۱	$۱۰^{-۶}$	micro (میکرو)	µ
۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۱	$۱۰^{-۹}$	nano (نانو)	n
۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۱	$۱۰^{-۱۲}$	pico (پیکو)	p

۲–۳–۱– مقایسه کمیت‌ها در دستگاههای مختلف

با وجود گسترش تجهیزات و سیستم‌های متریک هنوز در برخی کشتی‌ها تجهیزاتی وجود دارند که بر مبنای واحدهای اندازه‌گیری غیرمتریک طراحی و ساخته شده‌اند.

بســیاری از اوقات ضرورت دارد واحدهای اندازه‌گیری به یکدیگر تبدیل شــوند. برخی مقایسه‌ها و تبدیل ها به شرح زیر است.

طول:

۱اینچ (۱ in) = ۲/۵۴ cm = ۲۵/۴ mm

۱فوت (۱ ft)= ۰/۳۰۴۸ m

۱یارد (۰/۱ yd)= ۰/۹۱۴۴ m

۱مایل (۱ mile)= ۱/۶۰۹ km

۱مایل دریایی (بین‌المللی) = ۱/۸۵۲ km

نیرو:

۱پوند نیرو (۱ lbf) = ۲/۴۴۸ N

۱تن نیرو (۱ tonf) = ۹/۹۶۴ kN

فشار:

۱پوند نیرو بر اینچ مربع (۱ $lbf/in^۲$) = ۶/۸۹۵ $kN/m^۲$ = ۰/۰۶۸۹۵ bar

۱ اتمسفر (۱ atm) = ۱/۰۱۳ bar

حجم:

۱فوت مکعب (۱ $ft^۳$) = ۰/۰۲۸۳۲ $m^۳$

۱گالن انگلیسی (۱ gal) = ۴/۵۴۶ litre

انرژی :

۱ فوت پوند نیرو (۱ ft lbf) = ۱/۳۵۶ J

یک بی تی یو (۱ BTU) = ۱/۰۵۵ kJ

جرم:

۱ پوند (۱ lb) = ۰/۴۵۳۶ kg

۱تن (۱ ton) = ۱/۰۱۶ tonne

توان :

۱ اسب بخار (۱ hp) = ۰/۷۴۵۶ kN

کمیت	یکاهای اصلی یا ترکیبی و علامت	سایر یکاها
طول	متر - m	میلی متر-mm، کیلومتر- km
مساحت	متر مربع – $m^۲$	میلی متر مربع - $mm^۲$
حجم	متر مکعب – $m^۳$	لیتر - l
زمان	ثانیه - S	روز- day ، ساعت – h ، دقیقه- min
سرعت خطی	متر بر ثانیه – m/s	کیلومتر در ساعت – km/h گره بین المللی (دریایی) knot (nautical mile/h)
سرعت زاویه ای	رادیان بر ثانیه- rad/s	
شتاب خطی	متر بر مجذور ثانیه – $m/s^۲$	
شتاب زاویه ای	رادیان بر مجذور ثانیه – $rad/s^۲$	
جرم	کیلوگرم - kg	مگا گرم – Mg
نیرو	نیوتون - N	کیلو نیوتون – kN
ممان نیرو	نیوتون متر - Nm	کیلو نیوتون متر - kNm
کار، انرژی	ژول – J = Nm	کیلوژول – kJ کیلووات ساعت - kWh
توان	وات - W - J/s = Nm/s	کیلووات - kW
اندازه حرکت	کیلوگرم متربرثانیه – kgm/s	
گشتاور زاویه‌ای	کیلوگرم مجذور متربرثانیه $kgm^۲/s$	
ممان دوم سطح	متر به توان ۴ - $m^۴$	سانتی متر به توان ۴ - $cm^۴$
گشتاور ماند	کیلوگرم مجذور متر – $kgm^۲$	

جدول ۲-۱

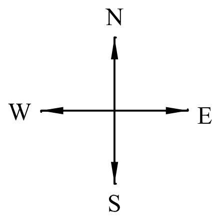
خودآزمایی:

۱- طول وتر یک مثلث راست گوشه ۲۰ سانتی متر و یک زاویه آن ۶۰ درجه است طول ضلع مجاور و مقابل این زاویه چقدر است؟

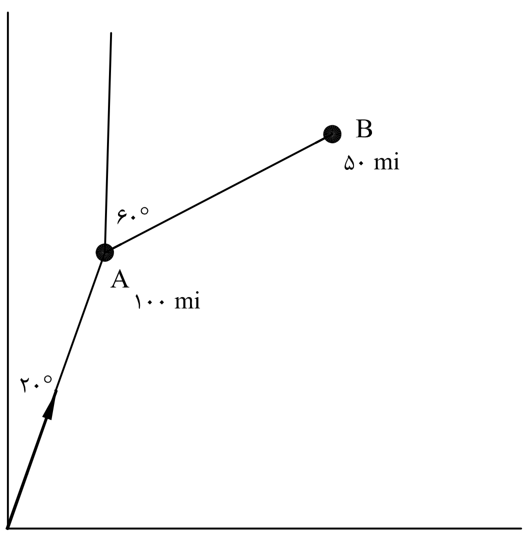
۲- دو ضلع یک مثلث راست گوشه به ترتیب ۶ و ۴ متر است. زاویه بین وتر و ضلع کوتاه تر چقدر است؟

۳- در صورتی که دو ضلع عمود بر هم یک مثلث راست گوشه مساوی و برابر ۱۲ سانتی متر باشد اندازه وتر چقدر است؟

۴- یک نردبان ۵ متری با زاویه ۳۵ درجه به دیوار قرار داده شده است. فاصله نقطه بالایی نردبان تا کف زمین چقدر است؟

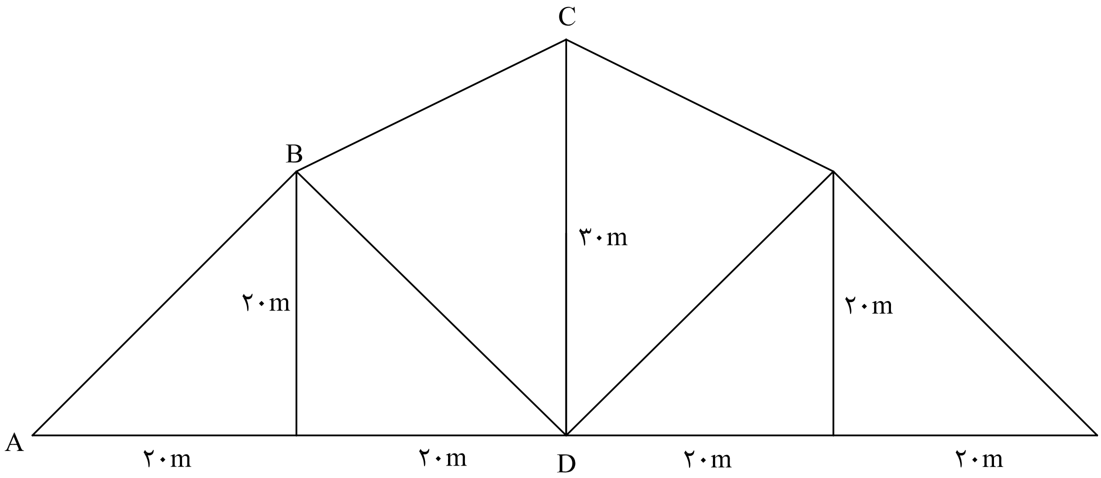


۵- یک کشتی فاصله ۱۰۰ مایل را در مسیر $N20^\circ E$ (۲۰ درجه شمال شرقی) و سپس فاصله ۵۰ مایل را در مسیر $N60^\circ E$ (۶۰ درجه شمال شرقی) مطابق شکل ۹-۱ دریانوردی می کند. فاصله کشتی از نقطه شروع چقدر است؟



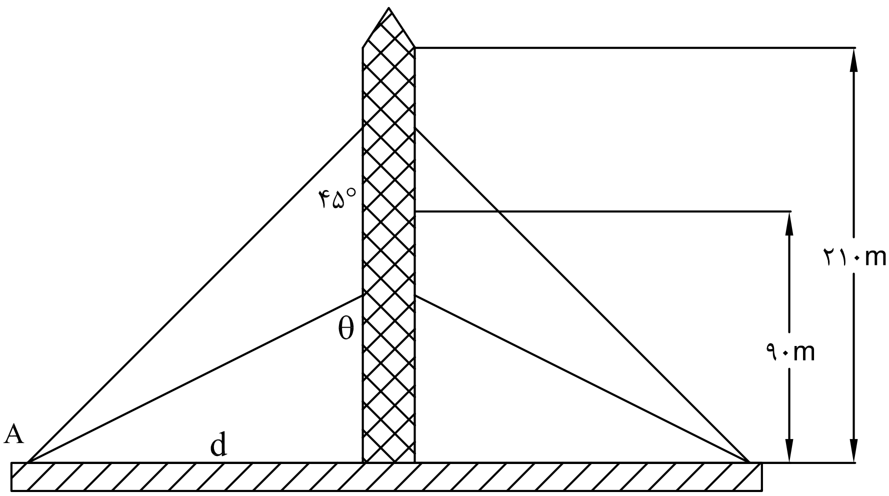
شکل ۹-۱

۶- خرپای یک سقف دارای اعضایی با اندازه‌های شکل ۱۰-۱ است. اندازه زوایای DBC و BCD چقدر است؟



شکل ۱۰-۱

۷- یک آنتن فرستنده تلویزیون به ارتفاع ۳۰۰ متر مطابق شکل ۱۱-۱ با کابل‌های فلزی مهار شده است. فاصله تکیه‌گاه A تا آنتن (فاصله d) و اندازه زاویه θ (زاویه بین کابل‌های مهار تحتانی و آنتن) چقدر است؟

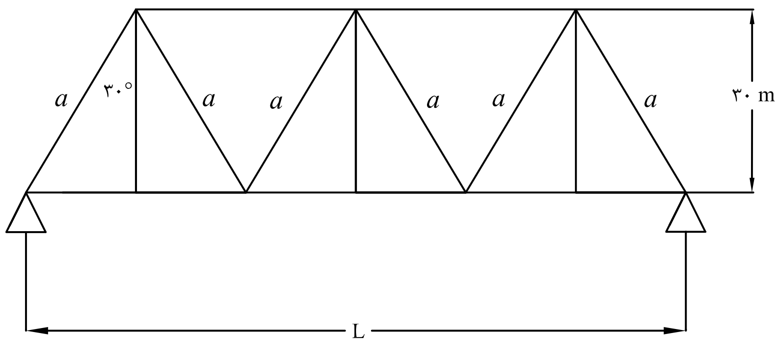


شکل ۱۱-۱

۸- ارتفاع یک مثلث راست گوشه ۴۰ سانتی متر و قاعده آن ۹۰ سانتی‌متر است. طول وتر و زاویه بین وتر و قاعده چقدر است؟

۹- چنانچه ارتفاع یک مثلث متساوی الساقین ۵۰ سانتی متر و اندازه قاعده آن ۲۵ سانتی‌متر باشد اندازه دو ضلع مساوی و زاویه آنها با قاعده چقدر است؟

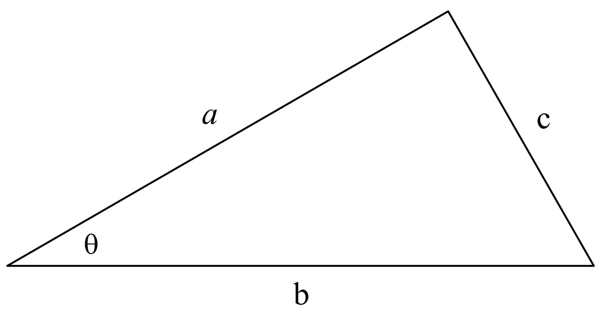
۱۰- فاصله L در شکل ۱-۱۲ چقدر است؟



شکل ۱-۱۲

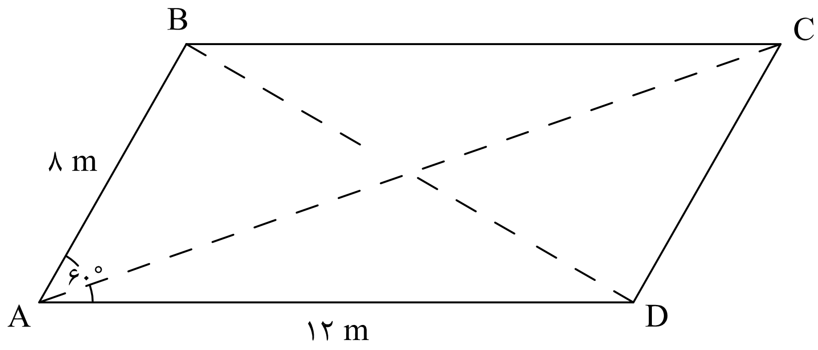
۱۱- با استفاده از روش تانژانت خطی رسم کنید که با یک خط افقی مبنا زاویه ۵۷/۲ درجه تشکیل دهد.

۱۲- در شکل ۱-۱۳ در صورتی که $a = ۵$ cm، b =۱۰، θ =۳۰ درجه باشد اندازه ضلع c چقدر است؟



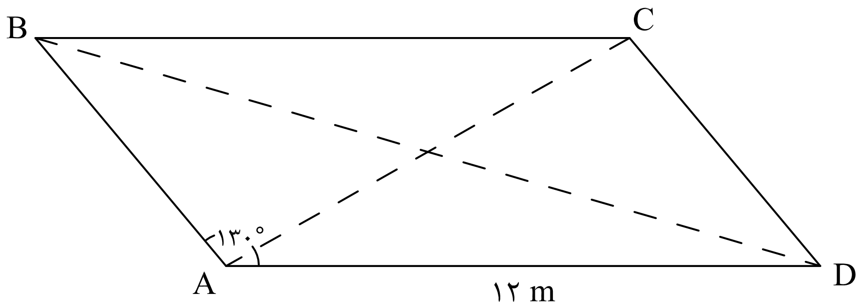
شکل ۱-۱۳

۱۳- اندازه قطرهای BD و AC در متوازی الاضلاع شکل ۱۴-۱ چقدر است؟



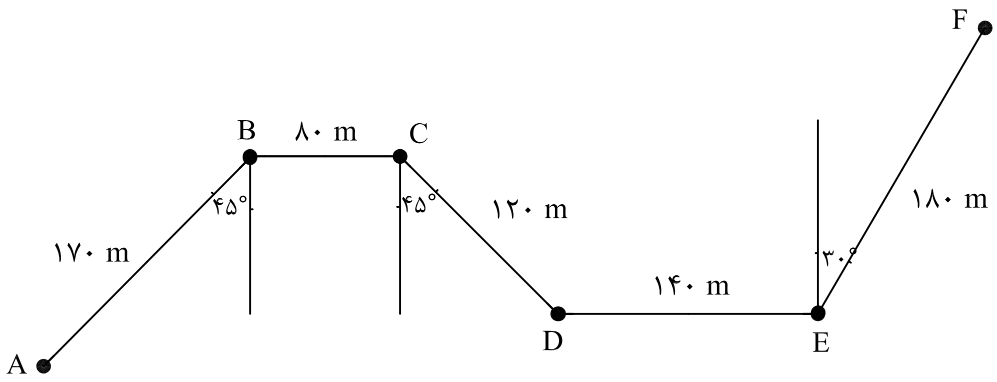
شکل ۱۴-۱

۱۴- اندازه قطرهای BD و AC در متوازی الاضلاع شکل ۱۵-۱ چقدر است؟



شکل ۱۵-۱

۱۵- یک قایق مســیر زیگ زاگ را از نقطه A تا نقطه F مطابق شــکل ۱۶-۱ می پیماید. خط AF را رسم کرده و اندازه آن را تعیین کنید.



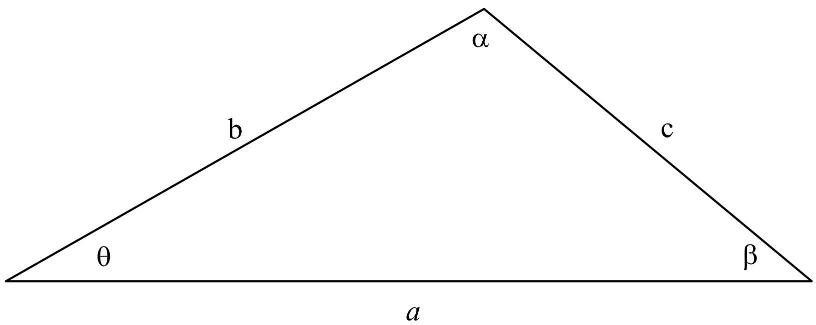
شکل ۱۶-۱

۱۶- در مثلث شکل ۱۷-۱ اندازه ضلع و زوایای معین نشده، چقدر است؟

a = ۱۰۰ cm

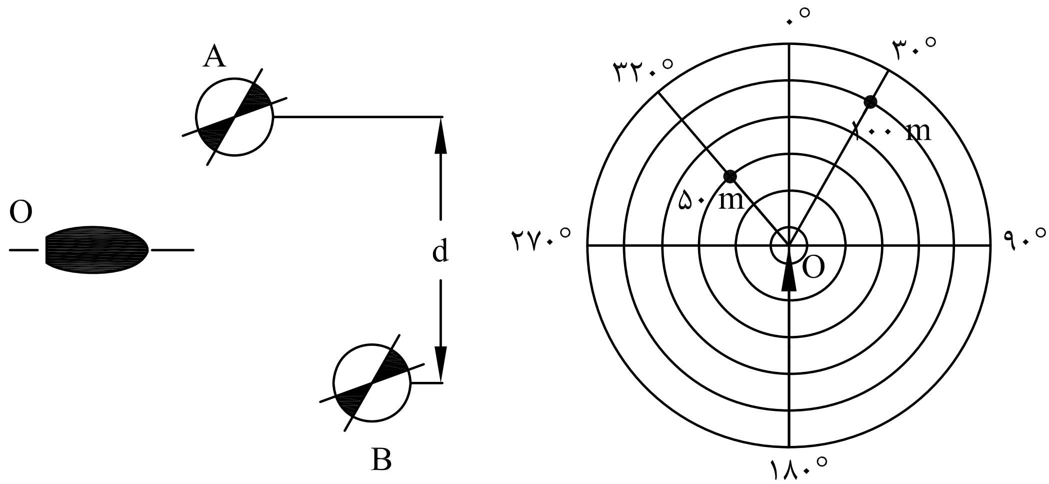
θ = ۳۰°

β = ۴۰°



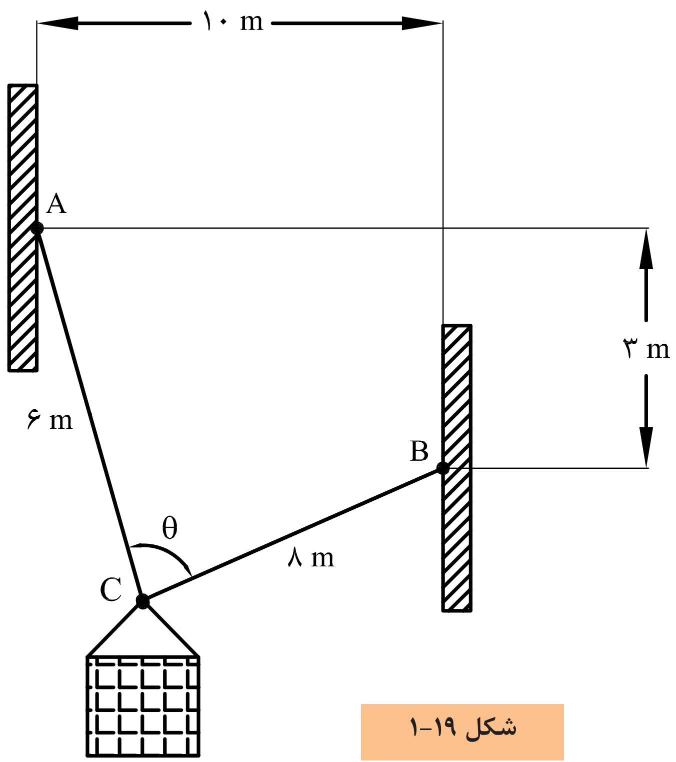
شکل ۱۷-۱

۱۷- یک کشــتی مطابق شــکل ۱۸-۱ باید از بین دو بویه A و B بگذرد. فواصل A و B از کشــتی به ترتیب ۵۰ و ۱۰۰ متر است. اندازه d چقدر است؟



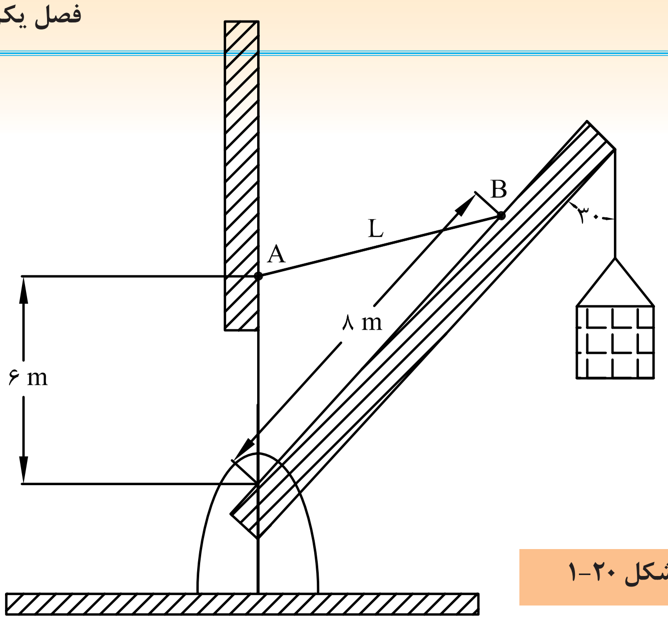
شکل ۱۸-۱

۱۸- وزنــه‌ای مطابق شــکل ۱۹-۱ از کابل‌های AC و BC آویزان است. زاویه θ بین این دو کابل چقدر است؟



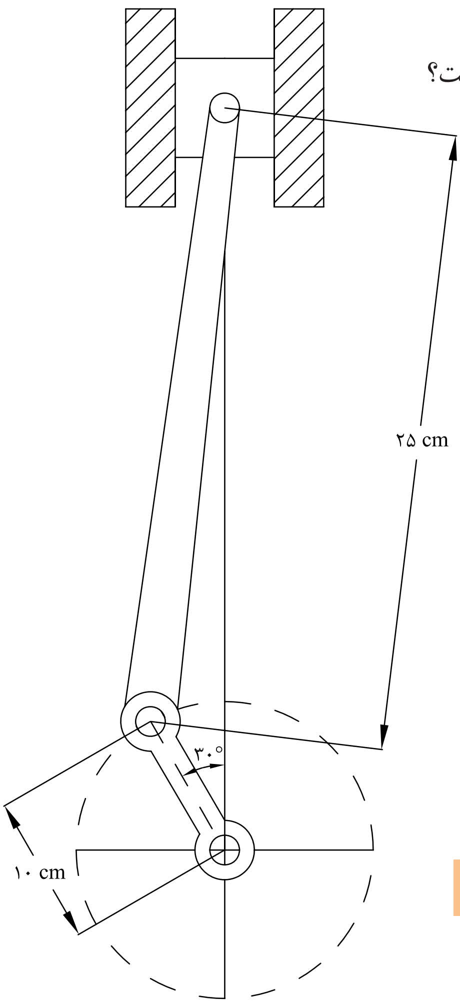
شکل ۱۹-۱

۱۹- بوم جرثقیل شکل ۲۰-۱ به وسیله کابل AB مهار شده است. طول کابل L و زاویه بین کابل و بوم چقدر است؟



شکل ۲۰-۱

۲۰- فاصله بین سر پیستون تا نقطه مرگ بالا در شکل ۲۱-۱ چقدر است؟



شکل ۲۱-۱

فرازهایی از فرهنگ و تمدن اسلام و ایران

از قرن سوم الی هشتم هجری دانشمندان مسلمان نقش به سزایی در پیشبرد علم مثلثات و انتقال‌آن به اروپا داشتند. محد بوزجانی معروف به ابوالوفاء (۳۲۹-۳۸۹ هجری) تانژانت، کتانژانت، سکانت وکسکانت را همان طوری تعریف کرد که درکتابهای امروزی دیده می‌شود.

خواجه‌نصیرالدین طوسی (۵۷۹-۶۷۳ هجری) مثلثات را یک رشته علمی مستقل دانست. خواجه نصیر الدین روشهای جدیدی برای حل مسائل مختلف مثلثاتی ارائه کرد.

از قرن پنجم (دوازدهم میلادی) کتابهای علمی نجوم از عربی (زبان رسمی مسلمانان) به لاتین ترجمه شد تا برای اولین بار اروپایی‌ها با مثلثات آشناشوند. اما بسیاری ازنکات مطرح شده به‌وسیله خواجه نصیرالدین در اروپا درک نشد تا اینکه دویست سال بعد از آن، ستاره‌شناس آلمانی قرن پانزدهم میلادی جوآن مولر (۱۴۳۶-۱۴۷۶میلادی) یافته‌های خواجه‌نصیرالدین را به اروپایی‌ها ارائه نمود.

فصل دوم

تجزیه و تحلیل نیروهای ساده

هدف کلی : تجزیه و تحلیل نیروهای ساده

هدف‌های رفتاری: فراگیر پس از آموزش این واحد فصل قادر خواهد بود

۱- نیرو را توصیف کند.

۲- قانون‌های حرکت نیوتون را با مثال‌های ساده بیان کند.

۳- منشاء نیرو را تشخیص دهد.

۴- نقطه اثر نیرو را تشخیص دهد.

۵- برای انتقال پذیری نیرو مثال بزند.

۶- برآیند دو نیروی عمود بر هم را تعیین کند.

۷- برآیند دو نیروی غیرعمود بر هم را تعیین کند.

۸- راستای برآیند را تحلیل کند.

پیش آزمون(۲)

۱- برآیند دو نیروی ۵ نیوتونی عمود بر هم را محاسبه کنید.

۲- برآیند دو نیروی عمود برهم که اولی به مقدار ۱۰ نیوتون و دومی به مقدار ۲۰ نیوتون است را محاسبه کنید.

۳- برآیند دو نیروی ۲۰ و ۴۰ نیوتونی که با هم زاویه ۶۰ درجه می سازند را به روش ترسیمی تعیین کنید.

فصل دوم

تجزیه و تحلیل نیروهای ساده

۱–۲– توصیف نیرو

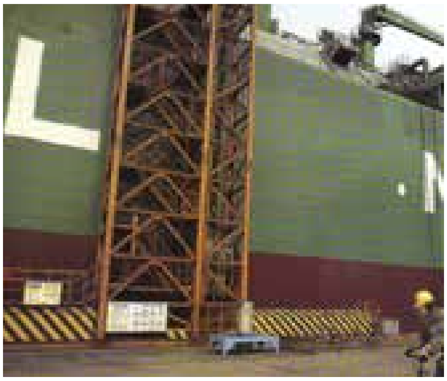
اگرچه مفهوم نیرو با ذهن بشر بیگانه نیست ولی تعریف و توصیف فیزیکی نیرو آسان نمی‌باشد، ساده ترین و بلکه کامل ترین تعریف برای نیرو با توجه به اثر نیرو بر اجسام ارائه می‌شود. مطابق تعریف، نیرو عبارت است از «اثر یک جسم بر جسم دیگر، طوری که وضعیت جسم دوم تغییر کند» مثلا؛

(۱) ممکن است جسم دوم در حالی که ساکن است تحت تأثیر نیرو حرکت کند مانند شکل ۱–۲ که در آن دوچرخه به وسیله دوچرخه سوار به حرکت در می‌آید و یا شکل ۲–۲ که توپ (جسم دوم) با ضربه فوتبالیست حرکت می‌کند.

شکل ۱–۲

شکل ۲–۲

(۲) ممکن است جسم دوم در حالی که متحرک است تحت تاثیر نیرو به وضعیت سکون درآید مانند شکل ۳–۲ که در آن دوچرخه (جسم دوم) بوسیله ترمز (جسم اول) متوقف می شود و یا مانند شکل ۴–۲ که توپ (جسم دوم) بوسیله دروازه‌بان (جسم اول) مهار می‌شود.



شکل ۳-۲

شکل ۴-۲

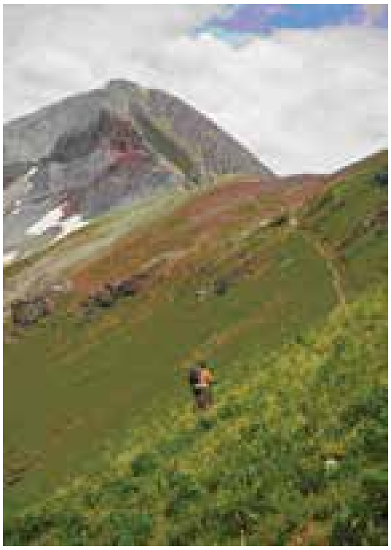
(۳) ممکن است جهت حرکت جسم دوم در حالی که متحرک است تحت تاثیر نیرو تغییرکند مانند شکل ۵-۲ که در آن با تاثیر نیروی دست دوچرخه سوار (جسم اول) دوچرخه (جسم‌دوم) تغییرجهت می‌دهد و یا مطابق شکل ۶-۲ که در آن دروازه‌بان با ضربه مشت (جسم‌اول) جهت حرکت توپ (جسم دوم) را تغییر می‌دهد و از ورود توپ به دروازه جلوگیری می‌کند.

شکل ۵-۲

شکل ۶-۲

(۴) ممکن است جسم دوم در حالی که متحرک است تحت تأثیر نیرو و با سرعت کمتر یا بیشتری به حرکت ادامه دهد مانند شـــکل ۷-۲ که دوچرخه ســوار در سراشــیبی قرار می‌گیرد و دوچرخه به سمت پایین می‌رود که در این حالت نیروی وزن دوچرخه و دوچرخه سوار به نیروی حاصل از پدال زدن دوچرخه سوار اضافه می‌شود و سرعت دوچرخه افزایش می‌یابد. یا مطابق شکل ۸-۲ دوچرخه در سربالایی حرکت می‌کند و نیروی وزن دوچرخه سوار و دوچرخه موجب می‌شود که بخشی از نیروی ناشی از پدال زدن صرف غلبه بر نیروی وزن شود. لذا سرعت دوچرخه کاهش می‌یابد.

شکل ۷-۲



شکل ۸-۲

(۵) ممکن است جسم دوم نیروای مساوی نیروی داده شده از جسم اول به جسم دوم وارد کند منتهی نیروی وارده بر جسم اول در جهت مخالف نیروی وارده از جسم دوم باشد مانند شکل ۹-۲ که در آن توپ (جسم اول) به تیر دروازه عمودی (جسم دوم) برخورد می کند و جسم دوم نیروای در جهت مخالف بر توپ (جسم اول) وارد می‌کند.

شکل ۹-۲

مثال‌های فوق بیانگر قانون های حرکت هستند که بشر از ابتدای پیدایش در کره خاکی با آنها سر و کار داشته است. نیوتون قوانین حرکت را با توجه به نظریه‌های دانشمندان قبل از خود در سه قانون خلاصه نمود که از آن پس به نام خود او معروف شد. این سه قانون عبارتند از:

قانون اول نیوتون :

هر جسمی در حالت سکون و یا در حرکت یکنواخت در مسیر مستقیم باقی می‌ماند مگر اینکه نیرویی موجب تغییر سرعت یا تغییر مسیر جسم شود.

قانون دوم نیوتون :

وقتی یک، دو یا چند نیرو بر یک جسم متحرک وارد شود، حرکت آن شتابی می یابد که با نیرو و یا برآیند نیروها متناسب است.

قانون سوم نیوتون :

وقتی جسمی بر جسم دیگر نیرو وارد می‌کند (عمل)[۱]، جسم دوم نیروای مساوی و در جهت مخالف (عکس العمل)[۲] به جسم اول وارد می‌کند.

۱-کُنش

۲- واکنش

تمرین: مثال‌های (۱) الی (۵) را به همراه شکلهای ۲-۲ الی ۹-۲ مرور کنید.

کدام قانون نیوتون در هر مثال و شکل وجود دارد؟

حالا می توان نتیجه گرفت که به طور خلاصه یک نیرو عبارت است از اثری هدایت شده که تمایل دارد تا حالت حرکت یک جسم را تغییر دهد. نیرو همواره با یک عکس العمل مساوی همراه است.

بنابراین به طور خلاصه می توان گفت؛

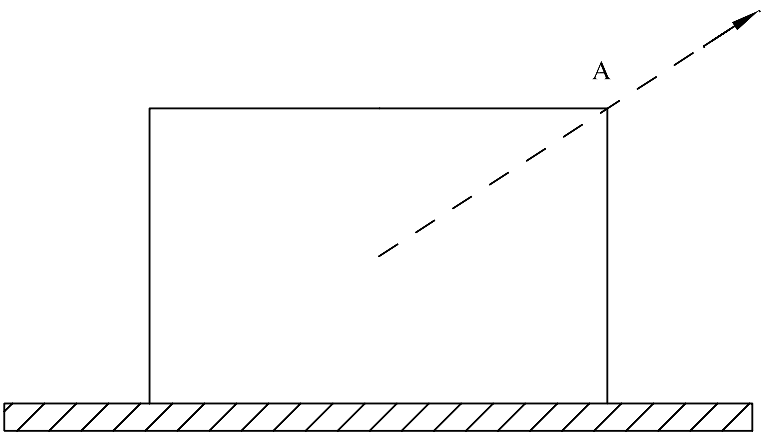
۱- نیرو اثر یک جسم بر جسم دیگر است که میل دارد وضعیت جسم دوم را به صورتی هدایت شده از لحاظ سکون یا حرکت تغییر دهد.

۲- برای تولید نیرو همواره دو جسم دخالت دارند. جسم اول به منشاء نیرو و جسم دوم به نقطه اثر نیرو موسوم است.

۳- نیرو دارای اندازه (مقدار)، جهت و نقطه اثر است.

توضیح: از این به بعد برای نشـان دادن نیرو از یک حرف لاتین و علامت $\rightarrow$ اسـتفاده می‌شود. مثلا برای معرفی F نوشته می‌شود $\vec{F}$ ولی اندازه همان نیروی $\vec{F}$ با حرف F نشان داده می‌شود. مثلا $F = ۲۵\,N$

مطالق شـکل ۱۰-۲ نیرو با پیکانی نشـان داده شده اسـت که طول پیکان مشخص کننده اندازه یا مقدار نیرو، نقطه A نقطه اثر نیرو و نوک پیکان نشـان‌دهنده جهت اثر نیرو می‌باشـد. خط اثر نیرو با خطوط بریده نشـان داده شده است (خط اثر نیرو به امتداد نیرو معروف اسـت. به این معنی که امتداد نیرو خط مسـتقیمی اسـت که نیرو در امتداد آن خط بر جسم اثر می‌کند).



شکل ۱۰-۲

۲-۲- انتقال پذیری نیرو

اگر اولین واگن یک قطار به لکوموتیوی وصل شود و لکوموتیو قطار را بکشد مانند این است که همان لکوموتیو به آخرین واگن وصل شـود و قطار را هل دهد. به این معنی که نتیجه ورود نیرو در هر کدام از نقاط خط اثر خود یکسـان اسـت. این عمل به عنوان اصل انتقال پذیری نیرو در استاتیک مطرح است.

مثال: در شکل ۱۱-۲ فاصله نقطه برخورد خط اثر نیرو (نقطه P) تا نقطه O و فاصله عمودی بین نقطه O و امتداد خط اثر نیرو (d) چقدر است؟

راه حل: با توجه به اینکه ۳۰° = زاویه BPC در مثلث BPC داریم؛

$$\tan ۳۰ = \frac{۶۰\ \text{cm}}{PC}$$

$$PC = ۶۰(۰/۵۷۷) = ۱۰۳/۹۸ \approx ۱۰۴\ \text{cm}$$

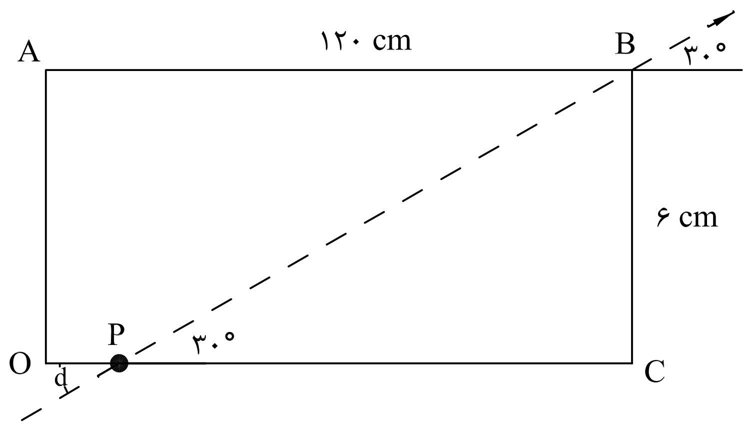
چون $AB = OC = ۱۲۰\ \text{cm}$ داریم

$$OP = OC - PC = ۱۲۰ - ۱۰۴ = ۱۶\ \text{cm}$$

برای یافتن d داریم:

$$\sin ۳۰ = \frac{d}{OP} = \frac{d}{۱۶}$$

$$d = ۱۶ \sin ۳۰. = ۸\ \text{cm}$$



شکل ۱۱-۲

۳-۲ – برآیند دو نیروی عمود بر هم

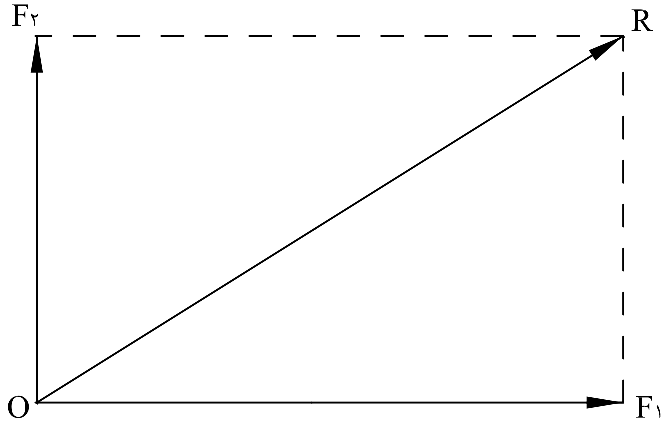
دو نیروی $\vec{F_1}$ و $\vec{F_2}$ شکل ۱۲-۲ بر نقطه O وارد شده اند. نیروی $\vec{F_1}$ منطبق با محور x و نیروی $\vec{F_2}$ منطبق بر محور y می‌باشد.

با توجه به اینکه با تجربه و آزمایش ثابت شده است که به جای دو نیروی $\vec{F_1}$ و $\vec{F_2}$ می‌توان یک نیروی $\vec{R}$ را به نقطه O وارد کرد طوری که $\vec{R}$ به تنهایی اثر دو نیروی $\vec{F_1}$ و $\vec{F_2}$ را داشته باشد نیروی $\vec{R}$ به برآیند دو نیروی $\vec{F_1}$ و $\vec{F_2}$ معروف شده است. برای تعیین اندازه نیروی $\vec{R}$ از روش های ترسیمی و ریاضی استفاده می‌شود. به این ترتیب که ابتدا از انتهای $\vec{F_1}$ خطی موازی $\vec{F_2}$ و سپس از انتهای $\vec{F_2}$ خطی موازی $\vec{F_1}$ رسم می شود تا مستطیلی به دست آید. قطر مستطیل که از نقطه O شروع می شود اندازه برآیند $\vec{R}$ است.

شکل ۱۲-۲

مثال ۱:

اگـر در شـکل ۱۳-۲ اندازه نیـروی $\vec{F}_1$ برابر با ۱۲ N اندازه نیروی $\vec{F}_2$ برابر با ۹ N باشـد، اندازه نیروی برآیند $\vec{R}$ چقدر است؟



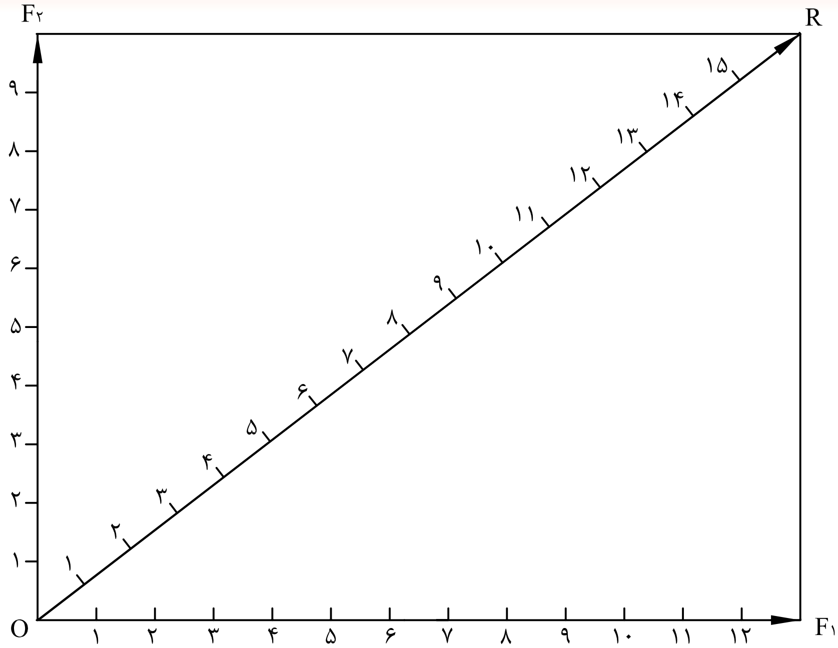
۱۳-۲

حل: اولا برای ترسـیم نیروها در این مثال می‌توان هر یک نیوتون را برابر یک سـانتی‌متر گرفت و نیروها را مطابق شکل ۱۴-۲ ترسیم کرد.

طول نیروی $\vec{F}_1$ برابر با ۱۲ سانتی‌متر و طول نیروی $\vec{F}_2$ برابر با ۹ سانتی‌متر رسم می‌شود. حال اگر طول قطر مستطیل اندازه‌گیری شـود ملاحظه می‌شـود که برابر ۱۵ سانتی‌متر است. چون در شـکل مزبور هر یک سانتی‌متر برابر یک نیوتون می‌باشد، $R = ۱۵\,N$ است. از طرف دیگر چون ۲۲۵ = $۱۵^۲$ و همچنین

$۱۲^۲ + ۹^۲ = ۱۴۴ + ۸۱ = ۲۲۵$

و لذا: $۹^۲ + ۱۲^۲ = ۱۵^۲$ و یا $۱۵ = \sqrt{۱۲^۲ + ۹^۲}$ می‌باشد. در اینگونه مثال همواره $R = \sqrt{F_1^۲ + F_1^۲}$ خواهد بود. اندازه R هم با استفاده از روش ترسیمی و هم با استفاده از ریاضیات قابل تعیین است.



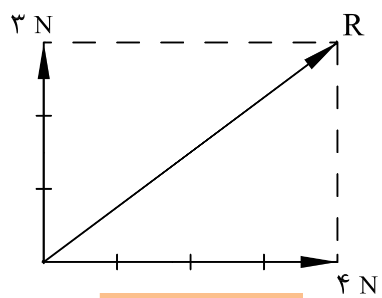
شکل ۱۴-۲

مثال ۲: برآیند دو نیروی عمود بر هم ۴N و ۳N را با استفاده از روش های ترسیمی و ریاضی تعیین کنید.

حل: ابتدا هر دو نیرو رسم می‌شود. هر یک سانتی متر طول به عنوان یک نیوتون گرفته می شود.

طول نیروی $\vec{R}$ با خط‌کش اندازه‌گیری می شود که برابر ۵ سانتی متر است و چون هر یک سانتی متر مساوی یک نیوتون گرفته شده است پس اندازه نیروی $\vec{R}$ مساوی ۵ نیوتون است. با استفاده از ریاضیات می‌توان نوشت:

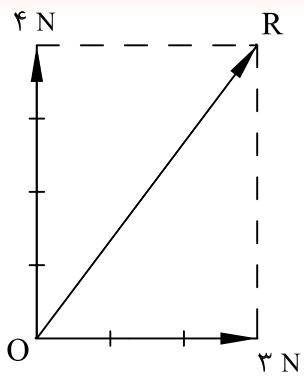
$$R = \sqrt{۴^۲ + ۳^۲} = \sqrt{۲۵} = ۵$$



شکل ۱۵-۲

مثال ۳: در مثال ۲ چنانچه نیروی افقی ۳ N و نیروی عمودی ۴ N باشد اندازه $\vec{R}$ چقدر است؟

حل: با استفاده از هر دو روش ترسیمی و ریاضی مشخص می‌شود که اندازه R برابر ۵ N است. بنابراین نتیجه گرفته می‌شود که اندازه برآیند دو نیروی معین عمود بر هم $\vec{F_1}$ و $\vec{F_2}$ همواره یک نیروی معین R است ولی اندازه زاویه ای که نیروی برآیند با محورهای مختصات افقی و عمودی تشکیل می دهد متفاوت است.



شکل ۱۶-۲

تمرین:

۱- با استفاده از نقاله زاویه نیروی R با محور مختصات افقی در مثال های ۲ و ۳ را مقایسه کنید.

۲- زاویه نیروی R با محور مختصات عمودی در مثال های ۲ و ۳ را مقایسه کنید.

۳- در صورتی که نیروی $\vec{F_1}$ برابر ۵ N در راستای عمودی و نیروی $\vec{F_2}$ برابر ۳ N در راستای افقی باشد زاویه بین R و محور مختصات عمودی در مقایسه با زاویه بین R و محور مختصات عمودی در شکل ۱۶-۲ کوچکتر است یا بزرگتر؟

۴–۲– برآیند دو نیروی غیرعمود بر هم

دو نیروی $F_۱ = ۵\,N$ و $F_۲ = ۵\,N$ مطابق شـکل ۱۷–۲ بر نقطه O وارد می‌شـوند. زاویه بین دو نیرو ۴۵ درجه اسـت. برای تعیین برآیند این دو نیرو از روش‌های ترسیمی و ریاضی می‌توان استفاده کرد.

برای تعیین نیروی $\vec{R}$ از روش ترسـیمی ای که به روش ترسـیمی متوازی الاضلاع معروف اسـت استفاده می‌شود. در این روش از انتهای $F_۱$ خطی موازی $F_۲$ و از انتهای $F_۲$ خطی موازی $F_۱$ رسـم می‌شـود. قطر متوازی الاضلاعی که به دسـت می‌آید اندازه نیروی برآیند $\vec{R}$ می‌باشد. با خط‌کش هر سانتی‌متر مساوی یک نیوتون فرض می‌شود. طول قطر R برابر ۹/۲۴ سانتی‌متر می‌شود و در نتیجه اندازه $\vec{R}$ مساوی ۹/۲۴ نیوتون است.

با استفاده از روش ریاضی داریم:

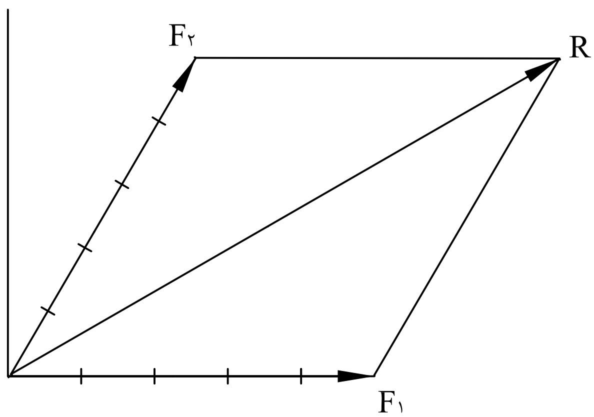
$$R^۲ = F_۱^۲ + F_۲^۲ + ۲(F_۱)(F_۲)\cos ۴۵$$

$$R = \sqrt{۵^۲ + ۵^۲ + ۲ \times ۵ \times ۵ \cos ۴۵}$$

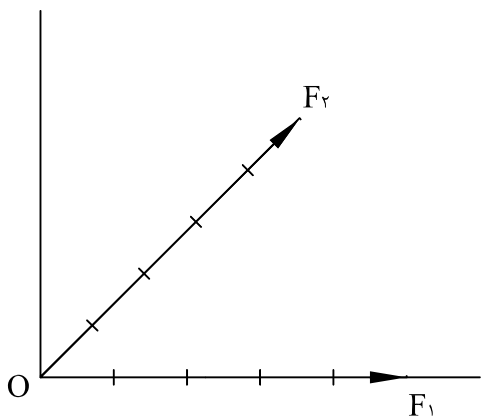
$$= \sqrt{۵^۲ + ۵^۲ + ۲ \times ۵ \times ۵ \times ۰/۷۰۷}$$

$$= ۹/۲۳۸۷۹ \approx ۹/۲۴$$

بدیهی است در روش ترسیمی هر چقدر اندازه گیری طول با دقت بیشتری انجام شود اندازه گیری برآیند دقیق تر می شود.



شکل ۱۸–۲

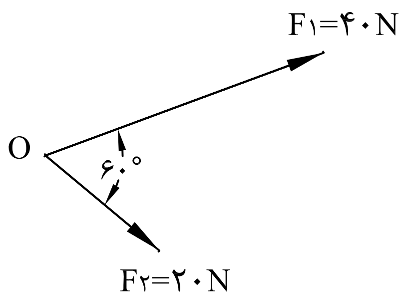


شکل ۱۷–۲

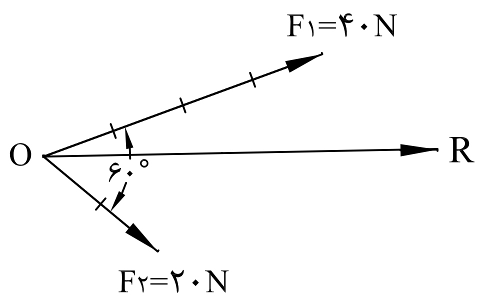
مثال ۱: برآیند دو نیروی $\vec{F}_۱$ و $\vec{F}_۲$ شکل ۱۹-۲ چقدر است؟

با استفاده از روش ترسیمی شکل ۲۰-۲ ترسیم می شود. هر سانتی متر مساوی ۱۰ نیوتون گرفته می‌شود.
طول R در شکل ۲۰-۲ برابر ۵/۲۹ سانتی‌متر است و در نتیجه اندازه $\vec{R}$ مساوی ۵۲/۹ نیوتون می‌باشد. با استفاده از روش ریاضی می توان نوشت:

$$R = \sqrt{F_۱^۲ + F_۲^۲ + ۲(F_۱)(F_۲)\cos ۶۰}$$
$$R = \sqrt{۴۰^۲ + ۲۰^۲ + ۲(۴۰)(۲۰)۰/۵}$$
$$= \sqrt{۲۸۰۰}$$
$$= ۵۲/۹\ N$$



شکل ۱۹-۲



شکل ۲۰-۲

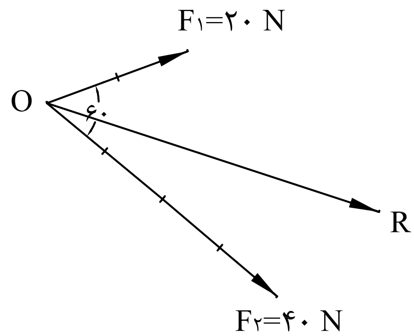
مثال ۲:
برآیند دو نیروی $\vec{F}_۱$ و $\vec{F}_۲$ شکل ۲۱-۲ چقدر است؟
(در مقایسه با مثال ۱ نیروهای $\vec{F}_۱$ و $\vec{F}_۲$ جابه جا شده اند)

$$R = \sqrt{۲۰^۲ + ۴۰^۲ + ۲(۴۰)(۲۰)۰/۵} = ۵۲/۹\ N$$

تمرین ۱: چه تفاوتی بین برآیند R در مثال های ۱ و ۲ وجود دارد؟
پاسخ : اندازه $\vec{R}$ در هر دو مثال یکی است ولی راستای $\vec{R}$ در مثال ۱ با راستای $\vec{R}$ در مثال ۲ متفاوت است.

تمرین ۲:

با استفاده از نقاله زاویه $\vec{R}$ در مثال های ۱ و ۲ را با محور مختصات افقی و عمودی اندازه گرفته و تحلیل خود را بیان کنید.



شکل ۲۱-۲

مثال ۳: طناب نازکی مطابق شــکل ۲۲-۲ به چارچوب A بســته شده و خودرو با نیروی ۵۰۰ N یک تنه درخت با وزن ۱۰۰۰ N را می‌کشــد. برآیند نیروهای وارد بر چارچوب در نقطه A چقدر اســت؟ زاویه نیروی برآیند با محور عمودی چقدر است؟

حل: با توجه به شکل ۲۲-۲ نیروهای موجود در مسئله و متوازی الاضلاع نیروها ترسیم می شود.

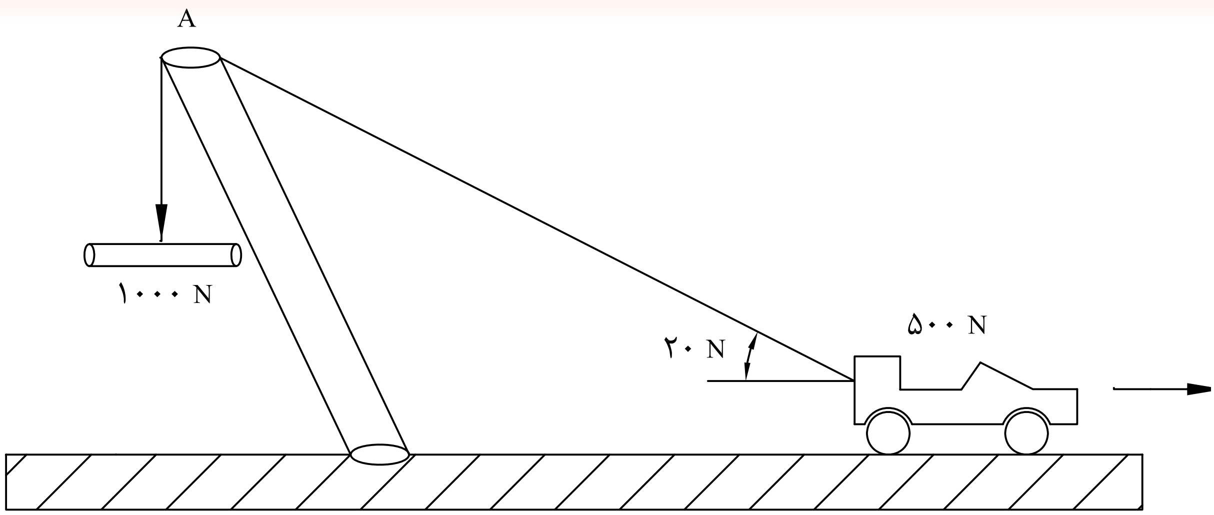
ابتدا اندازه زاویه بتا (β) تعیین می شــود. ملاحظه می‌شــود زاویه بین نیروی ۵۰۰ N و محور AX مســاوی ۲۰ درجه اســت. چون زاویه بین نیروی ۱۰۰۰ N و محور AX مســاوی ۹۰ درجه است بنابراین اندازه زاویــه بین نیروهای ۵۰۰ N و ۱۰۰۰ N برابر $۹۰^\circ - ۲۰^\circ = ۷۰^\circ$ است. با توجه به اینکه مجموع زوایای متوازی الاضلاع برابر ۳۶۰ درجه است، بنابراین اندازه زاویه βمساوی ۱۱۰ درجه است.

زاویهΥ مساوی ۷۰ درجه و زاویه θ مساوی ۲۰ درجه است.

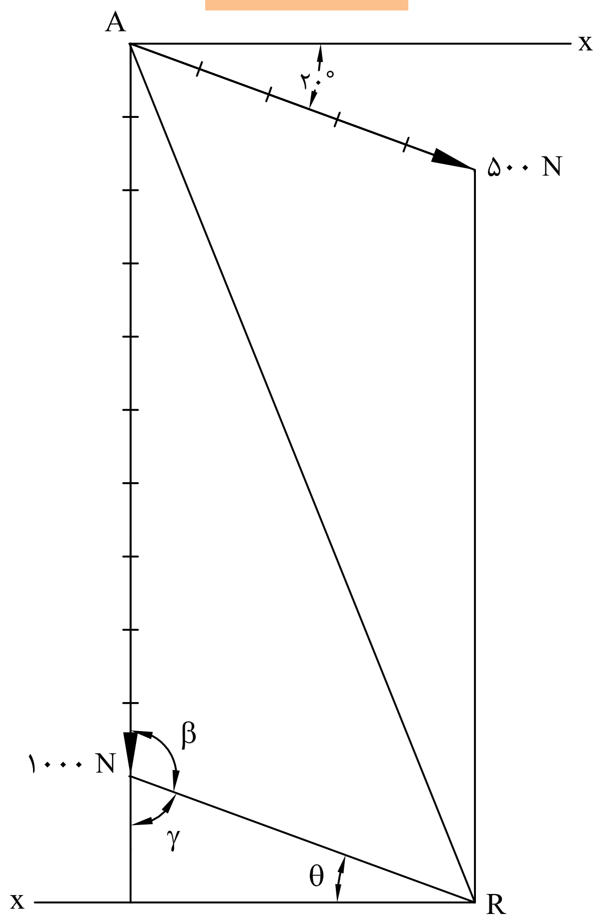
با استفاده از قانون کسینوس داریم:

$$R^۲ = ۵۰۰^۲ + ۱۰۰۰^۲ - ۲(۵۰۰)(۱۰۰۰)\cos ۱۱۰$$

$$R^۲ = ۵۰۰^۲ + ۱۰۰۰^۲ - ۲(۵۰۰)(۱۰۰۰)(-۰/۳۴۲)$$



شکل ۲۲-۲



شکل ۲۳-۲

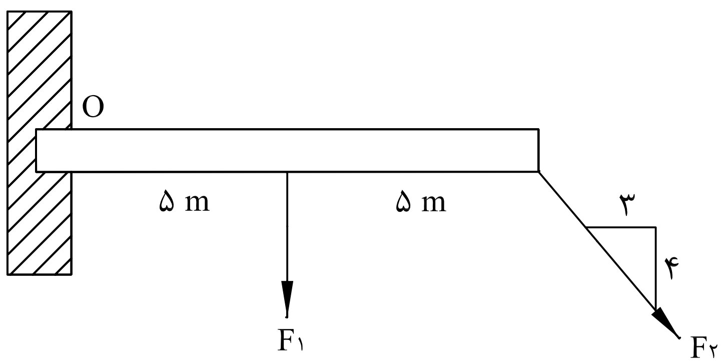
$$= ۲۵۰۰۰۰ + ۱۰۰۰۰۰۰ + ۳۴۲۰۰۰$$
$$= ۱۵۹۲۰۰۰$$
$$\Rightarrow \quad R = ۱۲۶۱/۷\ N$$

α زاویه نیروی برآیند $\vec{R}$ با محور عمودی است. اندازه آن با استفاده از قانون سینوس قابل تعیین است.

$$\frac{۵۰۰}{\sin\alpha} = \frac{۱۲۶۱/۷}{\sin ۱۱۰}$$
$$\frac{۵۰۰}{\sin\alpha} = \frac{۱۲۶۱/۷}{۰/۹۳۹۷}$$
$$\sin\alpha = ۰/۳۷۲۳۹۴$$
$$\Rightarrow \alpha \approx ۲۱/۸$$

خودآزمایی:

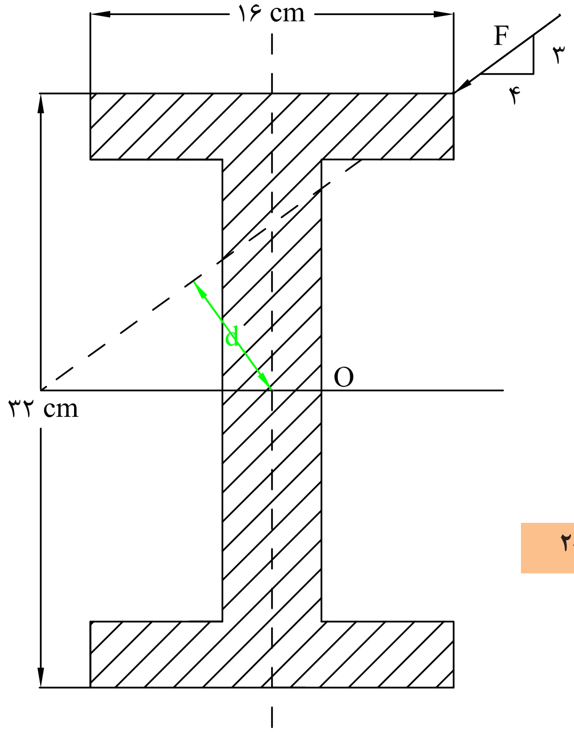
۱- دونیروی F_1 و F_2 مطابق شــکل ۲۴-۲ بر تیر وارد می‌شــوند. امتداد نیروهای F_1 و F_2 در نقطه ای بالای F_1 با هم تلاقی می‌کنند. فاصله عمودی نقطه تلاقی از تیر چقدر است؟



شکل ۲۴-۲

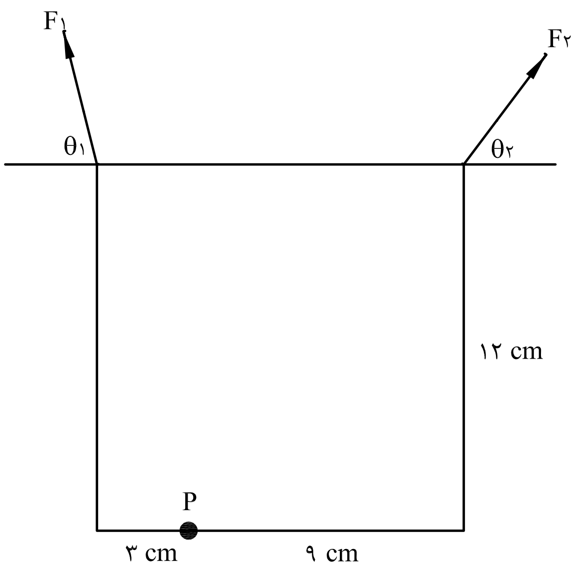
۲- در مسئله شماره ۱، فاصله عمودی نقطه برخورد امتداد نیروی F_2 با دیوار چقدر است؟

۳- مطابق شــکل ۲۵-۲، نیروی F در گوشــه تیرآهن بر آن وارد می شــود. فاصله عمودی d از مرکز هندسی تیرآهن تا امتداد نیروی F چقدر است؟



شکل ۲۵-۲

۴- در شکل ۲۶-۲، امتداد نیروهای $F_۱$ و $F_۲$ از نقطه P می گذرند. اندازه زاویه های $\theta_۱$ و $\theta_۲$ چقدر است؟



شکل ۲۶-۲

۵- با توجه به شــکل ۲۲-۲ در متن درس، در صورتی که زاویه نیروی ۵۰۰ نیوتون با محور افقی برابر ۳۰ درجه اســت برآیند نیروهای وارد بر چارچوب در نقطه A و زاویه نیروی برآیند با محور عمودی چقدر است؟

فرازهایی از فرهنگ و تمدن اسلام و ایران

طراحی و ساخت کشتی به نقل از قرآن مجید و انجیل و تورات

محققین غربی عقیده دارند طراحی و ســاخت کشتی نوح ســرآغاز دورانی جدید در طراحی و ساخت کشتی در دوران باستان بوده است. در مراجعه به قرآن مجید ملاحظه می شود خدای متعال فرموده است کشتی در برابر دیدگان آن خالق یکتا ساخته می‌شود و حضرت نوح (ع) قبلا اطلاع و تجربه‌ای از طراحی و ساخت کشتی نداشته است.

متخصصان غربی عقیده دارند ســاخت کشــتی نوح (ع) یک پروژه عظیم بوده اســت. کیل کشتی از تکه‌های بزرگ تنه درخت و قاب‌ها (فریم‌ها) و قطعات پوســته نیز از الوارهای ســنگین تهیه شد. جابجایی و تنظیم و نصب و اتصال این قطعات به یکدیگر در کشتی‌های مشابه فقط با استفاده از نوعی دستگاه بالابرنده امکان پذیر است.

در قرآن مجید مطلبی در مورد ابعاد و اندازه‌های کشــتی نوح گفته نشــده اســت. ولی در تورات و انجیل به ابعاد، تعداد عرشــه‌ها، وجود یک پنجره و یک در اشاره شده است و علاقه‌مندان مدل‌هایی ســاخته‌اند. ســوار شدن یک جفت از انواع حیوانات و یکصد و پنجاه روز دریانوردی، انبارهای بزرگ آذوقه را می‌طلبد و گفته شــده برخی فرزنــدان حضرت نــوع (ع) کشتی‌ســازان خبره عصر خود شــدند. البته قدرت خدای بزرگ فراتر از دانش و عقل بشر است و معلوم نیست که نظر غربی‌ها صحیح باشــد ولی می‌توان گفت طراحی و ساخت کشتی نوح (ع) الهام‌بخش بشــر برای ســاخت کشــتی‌هایی شد که توانایی‌های کشــتی نوح (ع) را داشــته باشند و در ســاخت آنها از دســتگاههای بالابر مانند جرثقیل‌های عهد کهن استفاده شود.

علاوه بر انتقال فرامین خداوند انبیاء (ع) مشــاغل مختلــف را به بشــر آموختند و از جملــه آن، حضرت نوح(ع) ساخت کشتی را به بشر آموخته است.

فصل سوم

تجزیه و تحلیل بردارها (استاتیک)

هدف کلی : تجزیه و تحلیل بردارها

هدفهای رفتاری: فراگیر پس از آموزش این فصل قادر خواهد بود

۱-بردار برآیند و مؤلفه‌های بردار را به روش‌های ترسیمی و محاسبه‌ای تجزیه و تحلیل کند.

۲-نیروی معادل (خنثی‌کننده برآیند نیروها را) به روش ترسیمی تعیین کند.

۳-مسائل مربوط به جرثقیل کشتی را تجزیه و تحلیل کند.

۴-تأثیر جریان آب بر سرعت و راه کشتی را تجزیه و تحلیل کند.

۵-مسائل مربوط به سازه ساده را تجزیه و تحلیل کند.

پیش آزمون (۳)

۱-روش ترسیمی تعیین برآیند سه نیرو که در یک نقطه اثر می‌کنند چگونه است؟

۲- روش ترسیمی تعیین مؤلفه‌های یک بردار چگونه است؟

۳-روش ترسیمی تعیین نیروی معادل چگونه است؟

۴-روش محاسبه نیروی وارد بر اجزاء جرثقیل ساده بازویی چگونه است؟

۵-روش تعیین عضوهای تراکمی و کششی در یک سازه ساده چگونه است؟

فصل سوم

تجزیه و تحلیل بردارها (استاتیک)

۱–۳– بردار

برای حل مسائل استاتیک از بردار استفاده می‌شود. در واقع، به‌کارگیری بردار نقش و اهمیت به‌سزایی در استاتیک دارد. بردار دارای مقدار (بزرگی) و جهت است. پس بردار کمیتی است که دارای مقدار و جهت است. کمیت دیگر که فقط دارای مقدار است و بدون جهت می‌باشد کمیت اسکالر (نرده‌ای) نامیده می‌شود. بنابراین:

تمام کمیت‌های اسکالر یا نرده‌ای فقط دارای مقدار هستند و دارای جهت نمی‌باشند

و

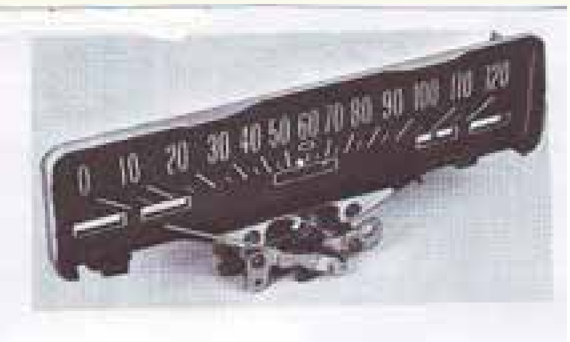
تمام کمیت‌های برداری دارای مقدار و جهت هستند.

وقتی گفته می‌شود طول زمین فوتبال یک صد و ده متر است، در این عبارت مؤلفه جهت‌دار وجود ندارد و کمیت مزبور (طول زمین فوتبال) یک کمیت اسکالر محسوب می‌شود. اگر فعالیتی شامل جابجا شدن یک جسم به فاصله یک کیلومتر شود ولی معلوم نباشد جابجایی در چه جهتی بوده است در این فعالیت نیز مؤلفه جهت دار ملاحظه نمی‌شود. ولی اگر گفته شود که همان جسم از نقطه اولیه یک کیلومتر به طرف شمال شرق جابجا شده است فعالیت دارای مؤلفه جهت‌دار است و به زبان برداری بیان شده است.

در استاتیک جرم (mass)، زمان (time)، فاصله (distance) و سرعت (speed) جزء کمیت‌های اسکالر محسوب می‌شوند. در این چهار کمیت مؤلفه جهت وجود ندارد مثلاً ممکن است گفته شود؛

- جرم جسمی یک هزار گرم است.
- یک سال شمسی شامل سیصد و شصت و پنج روز و شش ساعت است.
- طول زمین فوتبال یکصد و ده متر است.
- حداکثر سرعت کشتی رو‌ـ‌رو والفجر یک شانزده مایل در ساعت است و یا حداکثر سرعت خودروی برقی شصت کیلومتر درساعت است.

شـکل ۱-۳ سرعت‌سـنج (speedometer) خودرو یک کمیت اسکالر را نشان می‌دهد و مشخص نمی‌کند خودرو در چه جهتی حرکت می‌نماید. سرعت‌سنج مزبور نشان می‌دهد که درهرلحظه مقدار سـرعت حرکت خـودرو در واحد زمان چند کیلومتر و یا چند مایل است.



شکل ۱-۳

سرعت (speed) یک کمیت اسکالر است. سرعت به معنی آهنگ تغییر در پیمودن فاصله اسـت. سـرعت سنج خودرو (speedometer) به‌درستی نامگذاری شده است زیرا مدت زمانی را نشـان می‌دهد که در آن یک واحد مسافت پیموده می‌شـود. اما تندی (velocity) یک کمیت برداری است که شامل سرعت و جهت است. مثلاً می‌توان گفت سرعت نوک پروانه یک کشـتی ثابت اسـت. اما نمی‌توان گفت که تندی نـوک همان پروانه ثابت اسـت زیرا بردار تنـدی دائم تغییر می‌کنـد. در این کتاب هرگاه صحبـت از تندی (velocity) شـود منظور سرعت جسم در یک جهت معین است و هرجا صحبت از سـرعت (speed) شود منظور سرعت جسم بدون درنظر گرفتن جهت است.

شکل ۲-۳- سرعت‌سنج کشتی نیز فقط سرعت کشتی در واحد زمان را که یک کمیت اسکالر است نشان می‌دهد

شـکل ۳-۳ نشـان‌دهنده راه کشتی (course indicator) جهت حرکت کشتی را نشان می‌دهد. وقتی سرعت کشتی و جهت حرکت کشـتی مشخص باشـد تندی که یک کمیت برداری است معین می‌شود. مثلاً می‌توان گفت تندی کشتی در راه ۳۵۰ درجه ۲۰ مایل در ساعت است.

شکل ۳-۳- نشان‌دهنده راه کشتی

در جدول ۱-۳ کمیت‌های اسکالر و در جدول ۲-۳ کمیت‌های برداری معرفی شده‌اند.

کمیت	معادل انگلیسی	علامت	مثالهای مقداری
زمان	Time	t	ثانیه، ساعت، …
مسافت	Distance	s	متر، کیلومتر، …
جرم	Mass	m	گرم، کیلوگرم، …
سرعت	Speed	s/t	متر بر ثانیه، کیلومتر در ساعت، مایل در ساعت،…

جدول ۱-۳ کمیت‌های اسکالر

نیرو عبارت است از جرم ضربدر شتاب. نیرو یک کمیت برداری است زیرا دارای جهت است. وزن نوع ویژه‌ای از نیرو می‌باشد که مساوی است با جرم ضربدر شتاب جاذبه (شتاب جاذبه برابر است با ۹/۸ متر بر مجذور ثانیه). نیرو ممکن است در جهت‌های مختلف باشد ولی وزن (نوع ویژه‌ای از نیرو) تحت تأثیر شتاب جاذبه همواره دارای جهتی عمودی به‌طرف پایین است.

نیرو یک کمیت برداری است که دارای دو مؤلفه جرم و شتاب است و دارای جهت است.

وزن نوع ویژه‌ای از نیرو می‌باشد که دارای دو مؤلفه جرم و شتاب جاذبه است و جهت آن همواره به‌طرف پایین است.

کمیت	معادل انگلیسی	توضیح	علامت	مثال
نیرو	Force	دارای مؤلفه جرم و شتاب	$F = m a$	نیوتون
وزن (نوع ویژه‌ای از نیرو)	Weight	دارای مؤلفه‌های جرم و شتاب جاذبه	$W = mg$	نیوتون
تندی	Velocity	سرعت (speed) در یک جهت معین	$v = at = s/t$	کیلومتر در ساعت، متر در ثانیه، مایل در ساعت
شتاب	Acceleration	تغییر در تندی	$a = s/t^{۲}$	مسافت بر مجذور ثانیه
شتاب جاذبه	Acceleration due to gravity	—	$g = ۹/۸۱\ m/s^{۲}$	—

جدول ۲-۳ کمیت‌های برداری

برای پنج کمیت مندرج در جدول ۲-۳ می‌توان گفت؛

- نیروای به مقدار ۱۰۰ نیوتون با زاویه ۴۵ درجه بر جسمی وارد می‌شود.
- وزن جسمی در کره زمین ۷۱ نیوتون و در کره ماه ۱۲ نیوتون است.
- یک کشتی با تندی ۴۵ مایل در ساعت در زاویه ۳۶۰ درجه از بحرین به‌طرف بوشهر و در برگشت تحت زاویه ۱۸۰ درجه از بوشهر به‌طرف بحرین دریانوردی می‌کند.
- خودروای با شتاب ۱۰ متر بر مجذور ثانیه از مبدأ حرکت می‌کند.
- شتاب جاذبه در سطح کره زمین $۹/۸۱\ m/s^{۲}$ فرض می‌شود.

۲-۳- جمع بردارها

جمع کمیت‌های اسکالر با توجه به اینکه شامل ریاضیات ساده می‌شود آسان است ولی جمع کمیت‌های برداری زحمت بیشتری دارد و معمولاً نیاز است تا دایاگرامی رسم شود. در مثال زیر جمع برداری جابجا شدن یک خودرو که با سرعت یکنواخت حرکت می‌کند و چندین مرتبه تغییر جهت (در اصطلاح عامیانه تغییر مسیر) می‌دهد بررسی و محاسبه می‌شود.

فرض می‌شود که خودرو مسیری را به شرح زیر می‌پیماید:

(۱) ۵ کیلومتر به طرف شمال

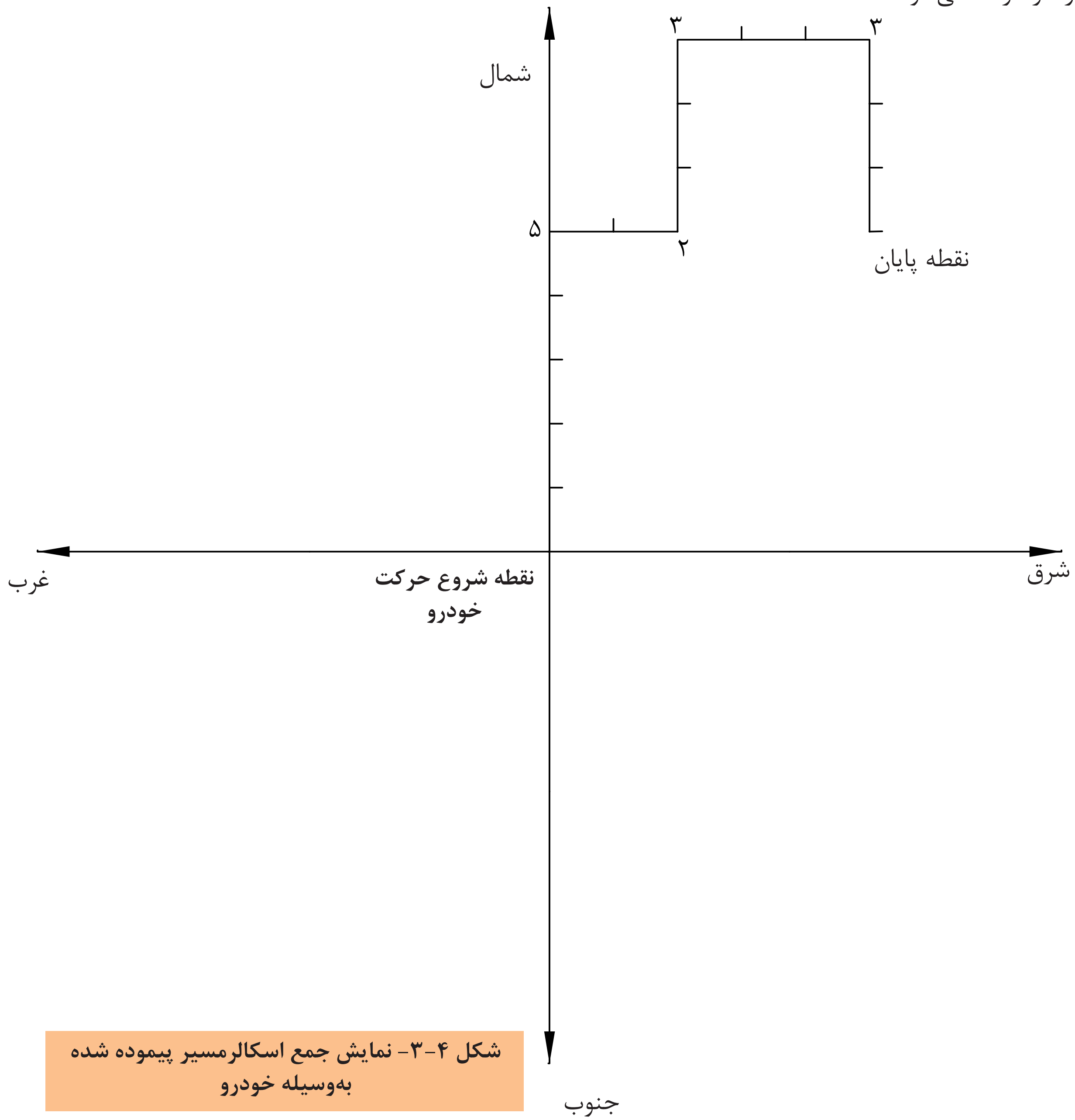
(۲) ۲ کیلومتر به طرف شرق

(۳) ۳ کیلومتر به طرف شمال

(۴) ۳ کیلومتر به طرف جنوب

جمع اسکالر مسیر پیموده شده مساوی است با: ۵ + ۲ + ۳+ ۳ + ۳=۱۶ km

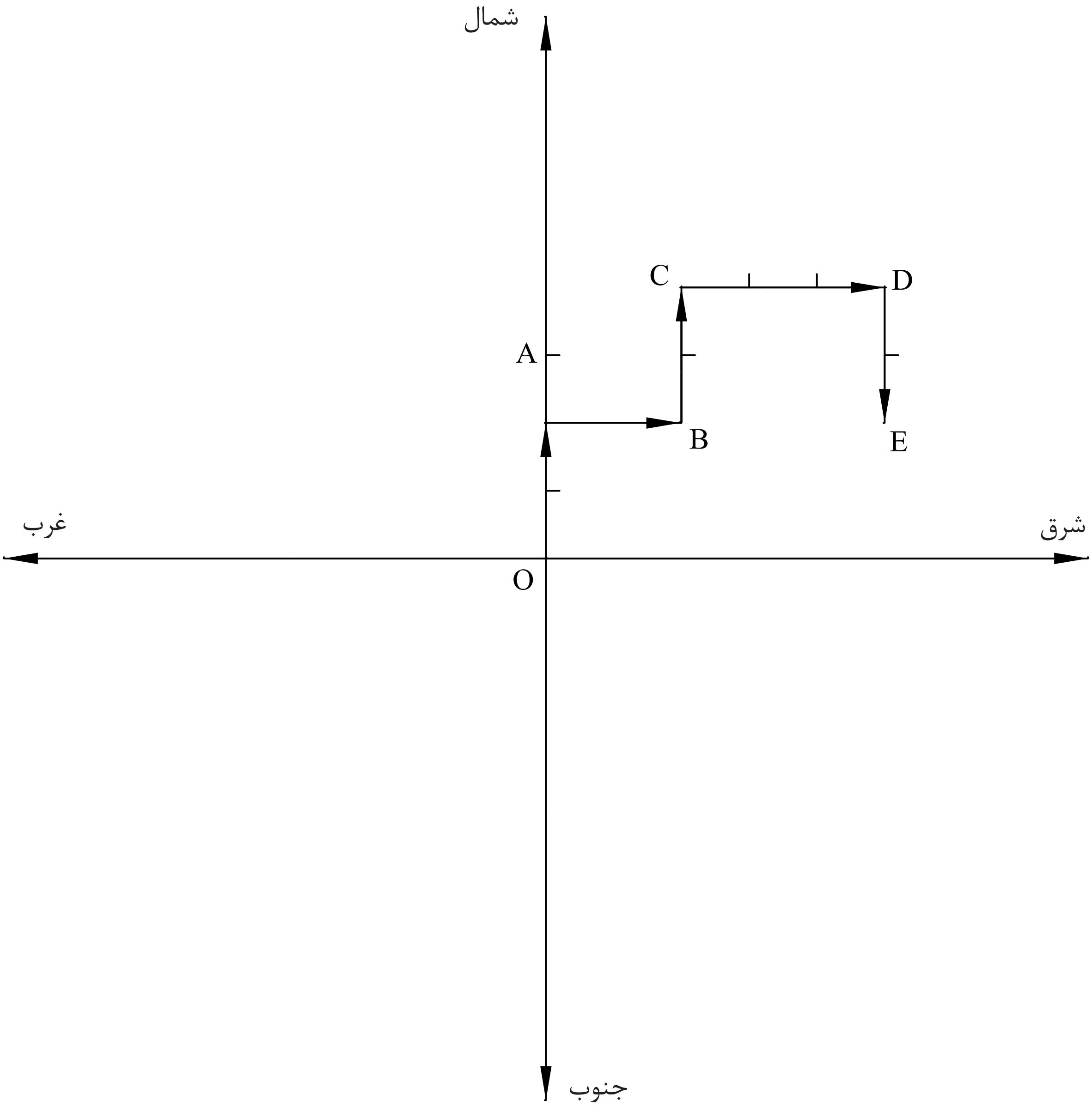
و مســیر به صورت شــکل ۴-۳ قابل نشان دادن است. هر یک ســانتی‌متر در کاغذ به‌عنوان یک کیلومتر در مثال واقعی درنظر گرفته می‌شود.



شکل ۴-۳- نمایش جمع اسکالرمسیر پیموده شده به‌وسیله خودرو

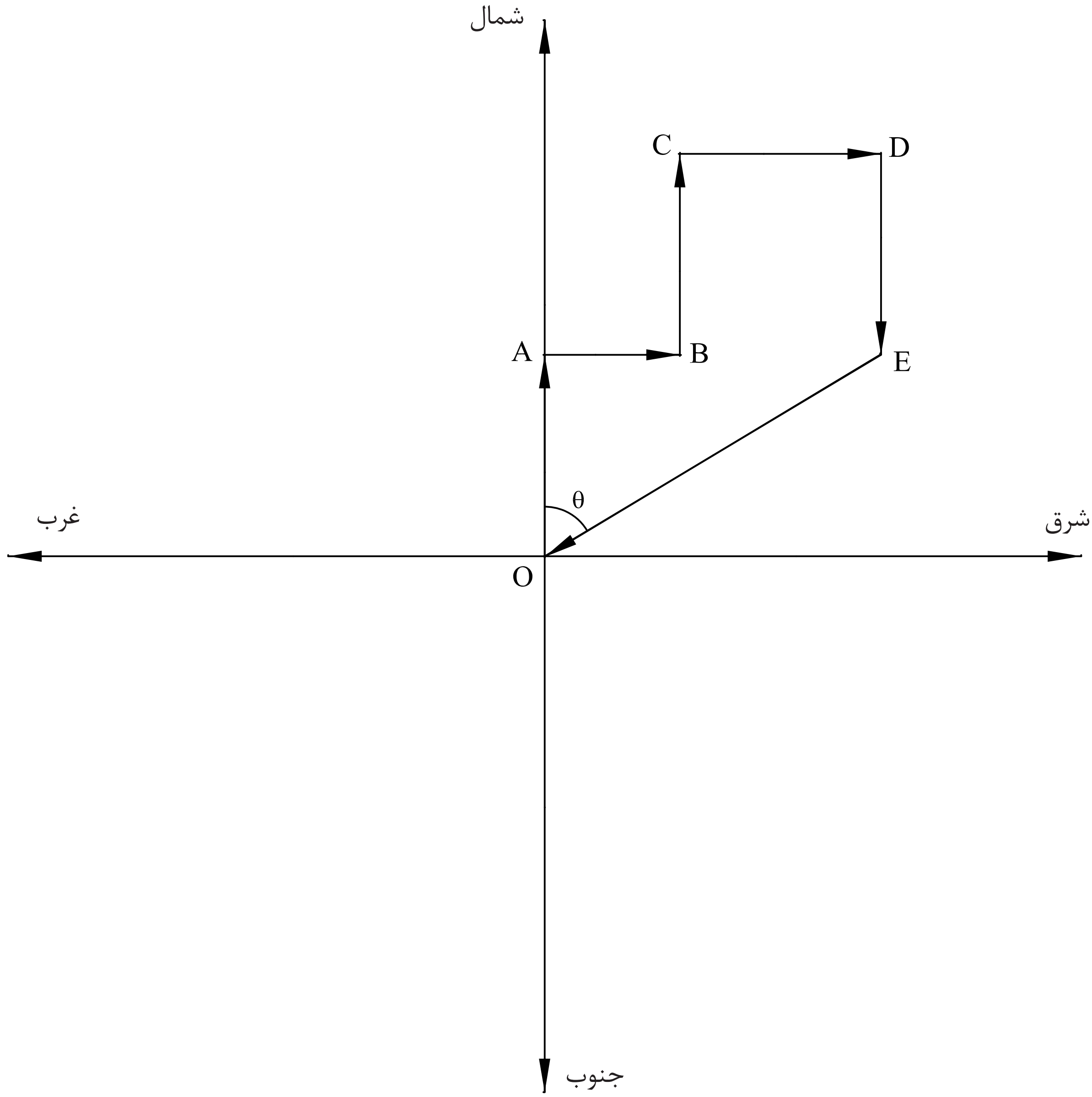
در جمع برداری هر کدام از مســیرها به‌عنوان یک جهت انتخاب می‌شــود و انتهای هر مسیر با یک پیکان علامت‌گذاری می‌شــود. حال هر مســیر با یک بردار نشان داده شــده است و سر (یا نوک) هر بردار به دُم (یا ته) بردار بعدی وصل می‌شود (مطابق شکل ۵-۳).

بنابراین بردارهای $\vec{OA}$، $\vec{AB}$، $\vec{BC}$، $\vec{CD}$ و $\vec{DE}$ نمایش داده می‌شوند.



شکل ۵-۳- نمایش برداری مسیر پیموده شده به‌وسیله خودرو

ملاحظه می‌شود نقطه E پایان جابه‌جا شدن خودرو می‌باشد و در این فعالیت جابه‌جا شدن واقعی خودرو از نقطه O به نقطه E بوده است. اکنون اگر با رسم یک بردار نقطهٔ O به نقطه E وصل شود بردار $\overrightarrow{OE}$ به‌دست می‌آید. بردار $\overrightarrow{OE}$ به بردار برآیند یا برآیند هر پنج بردار $\overrightarrow{OA}$، $\overrightarrow{AB}$، $\overrightarrow{BC}$، $\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{DE}$ موسوم است (شکل ۶-۳).



شکل ۶-۳- نمایش بردار برآیند $\overline{OE}$

مقدار بردار $\overrightarrow{OE}$ با استفاده از رابطه $OE^۲ = OA^۲ + AE^۲$:

$$OE = \sqrt{(۵)^۲ + (۲+۳)^۲} = \sqrt{۵۰} = ۷/۰۷\,km$$

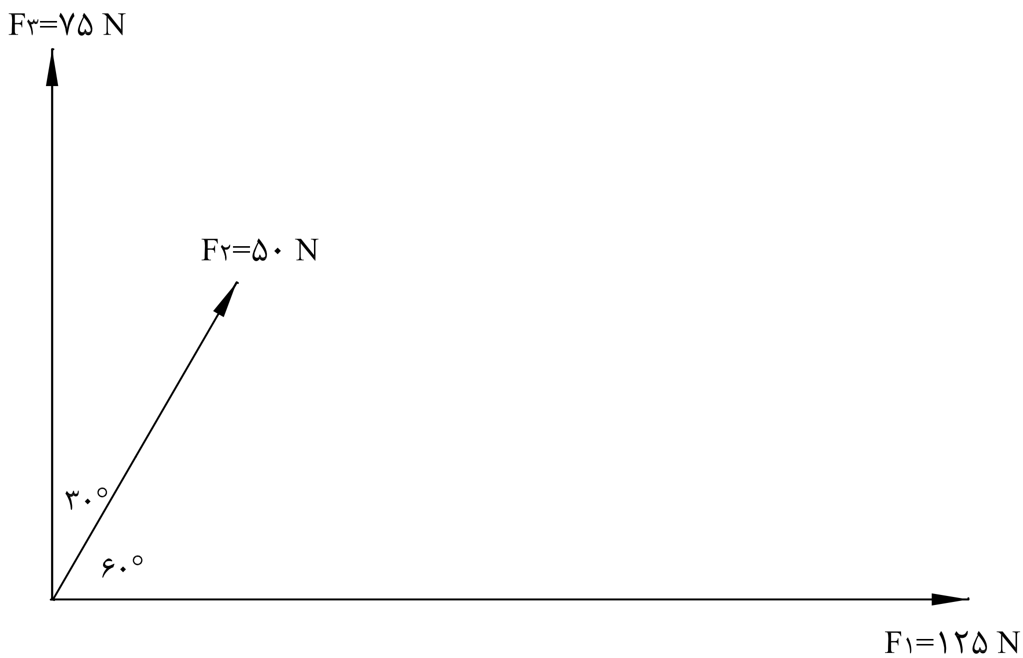
جابه‌جایی واقعی خودرو از نقطه O به نقطه E مســاوی ۷/۰۷ کیلومتر اســت. ولی بردار دارای مؤلفه جهت نیز می‌باشد. برای تعیین جهت بردار $\overrightarrow{OE}$ کافی اســت زاویه θ تعیین شــود. البته به غیراز روش محاسبه می‌توان با استفاده از نقاله اندازه زاویه θ را تعیین کرد. ولی در روش محاسبه می‌توان از روابط سینوس و یا تانژانت در مثلث قائم‌الزاویه OAE استفاده کرد. اگر از روش تانژانت استفاده شود می‌توان نوشت:

$$\tan\theta = \frac{AE}{OA} = \frac{۵}{۵} = ۱ = \tan ۴۵^\circ$$

لذا نتیجه گرفته می‌شود:

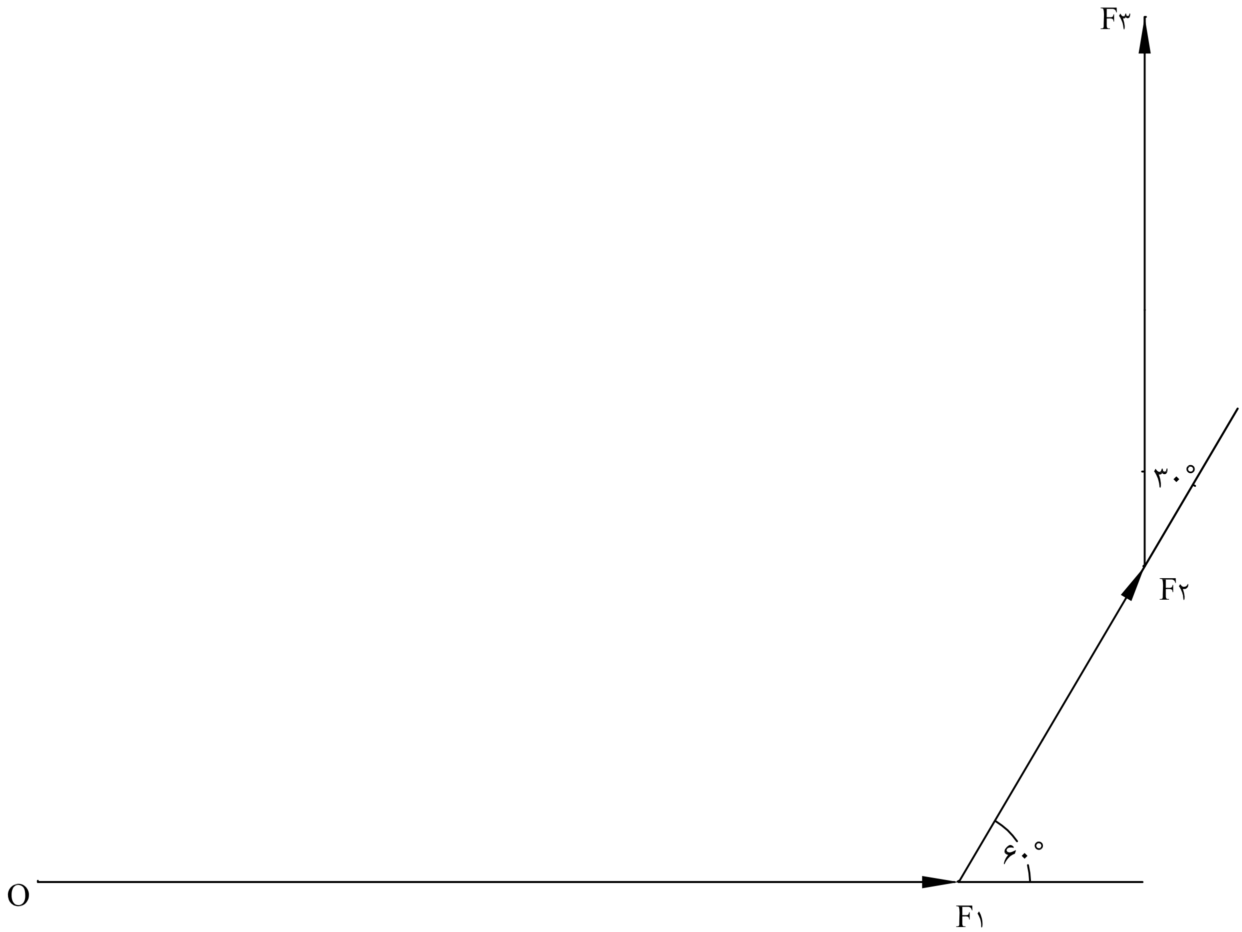
زاویه بردار $\overrightarrow{OE}$ نسبت به محور شمال (y) ۴۵ درجه است. جابه‌جایی واقعی خودرو ۷/۰۷ کیلومتر به سمت شمال شرق (تحت زاویه ۴۵ درجه با محور x و همچنین با محور y) می‌باشد.

مثال ۱: با استفاده از روش ترسیمی مقدار و جهت بردار برآیند ($\overrightarrow{R}$) سه نیروی شکل ۷-۳ را تعیین کنید.



شکل ۷-۳

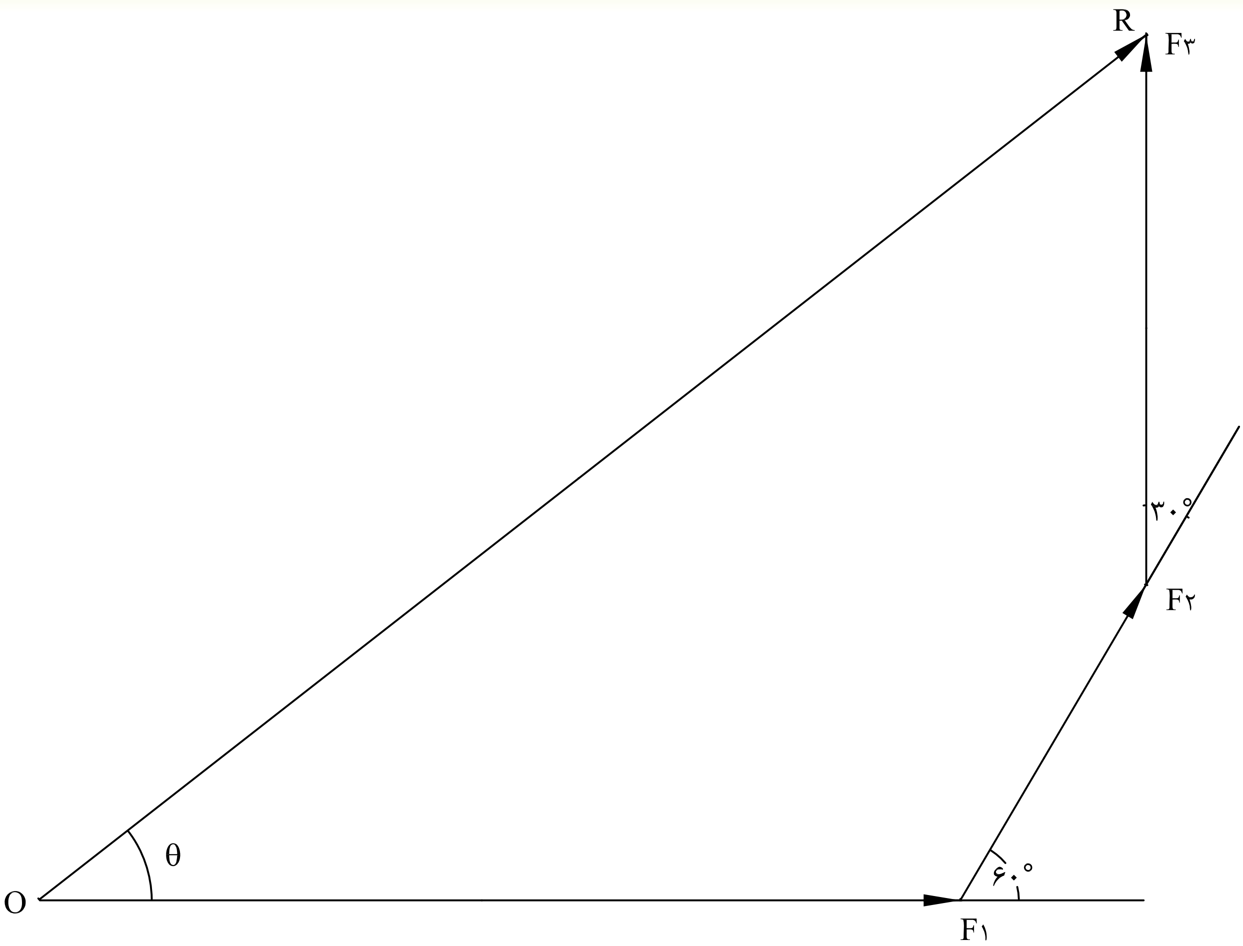
برای نشـــان دادن رســـم بردارها هر یک سانتی‌متر از طول بردار را مســـاوی ۱۰ نیوتون قرار داده و بردارها مطابق شکل ۸-۳ رسم می‌شوند.



شکل ۸-۳ - ترسیم برداری نیروهای شکل ۷-۳

بـــا رســـم بـــرداری از نقطه O طوری که ســـر بردار بـــه نوک بردار $F_۳$ وصل شـــود بـــردار برآیند $(\vec{R})$ به‌دســـت می‌آید (شکل۹-۳).

با تقســـیم پاره‌خط نشـــان دهند بردار R به قطعات یک سانتی‌متری و ضرب عدد حاصل در ۱۰ نیوتون مقدار R به‌دست می‌آید. زاویه θ با استفاده از نقاله اندازه‌گیری می‌شود.



شکل ۹-۳- نمایش بردار R (برآیند نیروهای $F_۱$، $F_۲$ و $F_۳$)

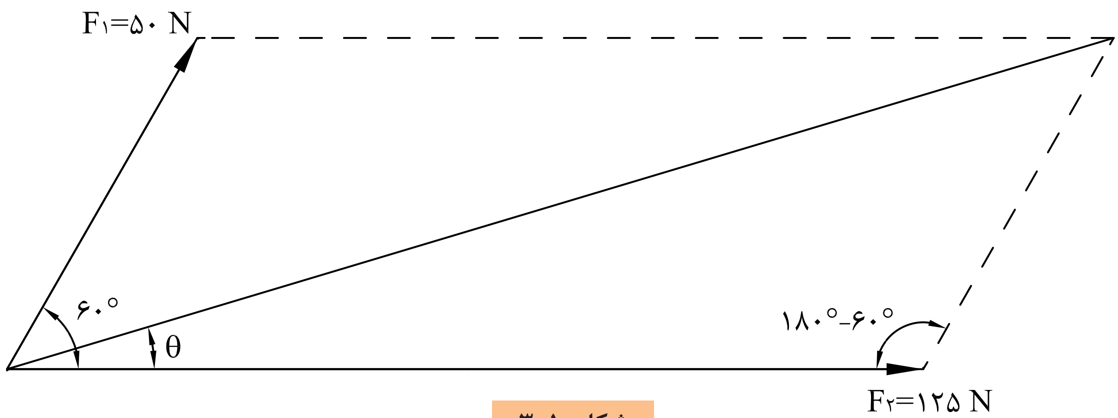
روش دوم برای تعیین برآیند سه نیرو استفاده از روش متوازی‌الاضلاع است. در این روش ابتدا مطابق شکل ۱۰-۳ برآیند دو نیروی $F_۱$ و $F_۲$ با استفاده از قانون کسینوس تعیین می‌شود.

مقدار قطر متوازی‌الاضلاع مساوی برآیند دو نیروی $F_۱$ و $F_۲$ است. این برآیند را می‌توان با $R_{۱,۲}$ نشان داد.

$$R_{۱,۲}^{۲} = F_۱^۲ + F_۲^۲ - ۲F_۱F_۲ \cos(۱۸۰-۶۰)$$
$$= F_۱^۲ + F_۲^۲ + ۲F_۱F_۲ \cos ۶۰$$
$$= \sqrt{F_۱^۲ + F_۲^۲ + ۲F_۱F_۲ \cos ۶۰}$$
$$= \sqrt{(۱۲۵)^۲ + (۵۰)^۲ + ۲(۱۲۵)(۵۰)(۰/۵)}$$
$$R_{۱,۲}^{۲} = ۱۵۶\,N$$

اندازهٔ زاویه θ (در واقع زاویه بردار R با محور x ها) با استفاده از قانون سینوس به دست می‌آید.

$$\sin\theta = \frac{F_۲}{R}\sin(۱۸۰-۶۰) = \frac{F_۲}{R}\sin ۶۰^\circ = \frac{۱۵۰}{۱۵۶}(۰/۸۶۶)$$
$$= ۰/۲۷۷۵۶$$
$$\theta \approx ۱۶^\circ$$



شکل ۱۰-۳

حال با استفاده از بردار $R_{۱,۲}$ (برآیند بردارهای $F_۱$ و $F_۲$) که با محور x دارای زاویه ۱۶ درجه است و بردار $F_۳$ که با بردار $R_{۱,۲}$ زاویه ۳۰ درجه می‌سازد متوازی‌الاضلاعی تشکیل می‌دهیم (شکل ۱۱-۳).

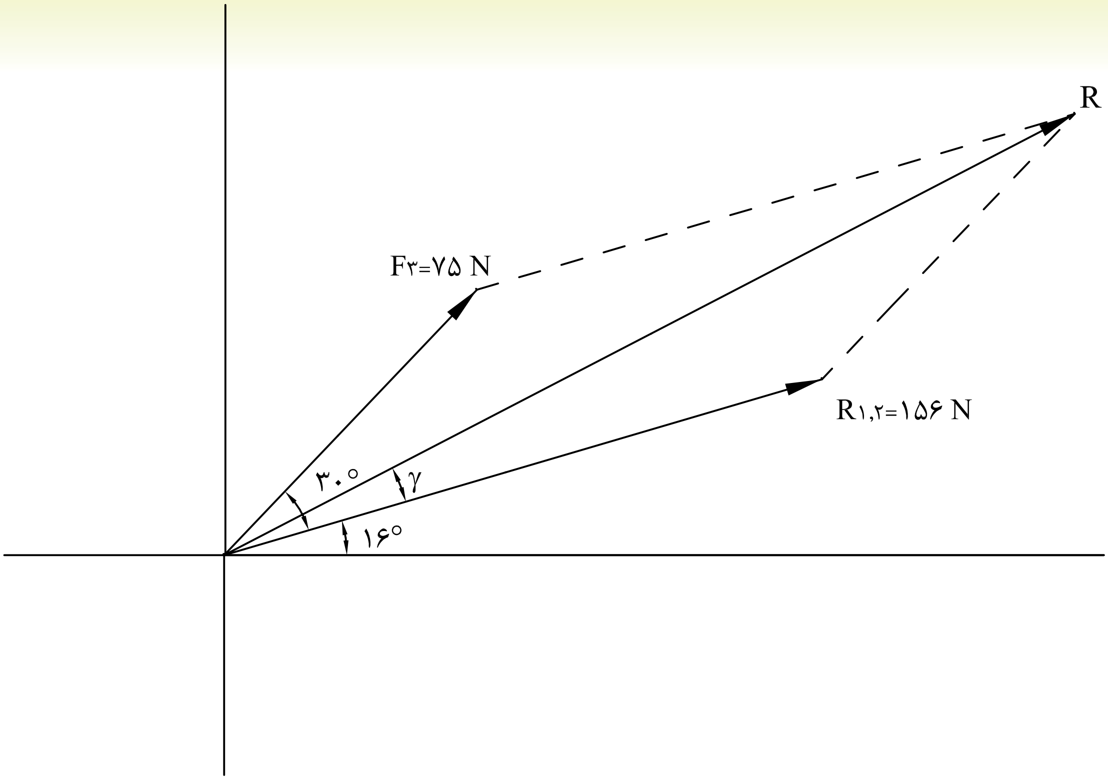
اندازه R با استفاده از روش قبلی عبارت است از:

$$R^۲ = R_{۱,۲}^۲ + F_۳^۲ - ۲R_{۱,۲}F_۳\cos(۱۸۰-۳۰)$$
$$R^۲ = R_{۱,۲}^۲ + F_۳^۲ - ۲R_{۱,۲}F_۳\cos ۳۰^\circ$$
$$R = \sqrt{(۱۵۶)^۲ + (۷۵)^۲ + ۲(۱۵۶)(۷۵)(۰/۸۶۶)}$$
$$R = ۲۲۴\ N$$

و برای تعیین زاویهٔ γ:

$$\sin\gamma = \frac{F_۳}{R}\sin(۱۸۰-۳۰)$$
$$= \frac{۷۵}{۲۲۴}\sin ۳۰^\circ$$
$$= \frac{۷۵(۰/۵)}{۲۲۴} = ۰/۱۶۷۴$$
$$\gamma \approx ۹/۶^\circ$$

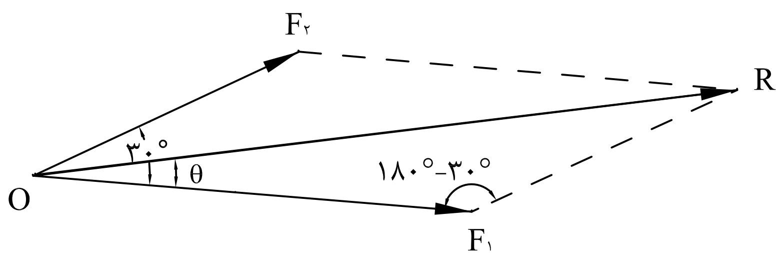
بنابراین برآیند سه نیروی $F_۱$، $F_۲$ و $F_۳$ برداری است به بزرگی ۲۲۴ N که با محور x ها زاویهٔ $۱۶^\circ + ۹/۶^\circ$ یا $۲۵/۶^\circ$ می‌سازد.



شکل ۱۱-۳ نمایش $R_{1,2}$ ، F۳ و برآیند آنها ($\vec{R}$)

مثال ۲: مطابق شکل ۱۲-۳ چنانچه $F_1 = ۴۰N$ و $F_2 = ۲۰N$ و $\alpha = ۳۰°$ باشد اندازهٔ بردار برآیند و جهت آن چقدر است؟

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos 30°}$$
$$= \sqrt{40^2 + 20^2 + 2(40)(20)(0/866)}$$
$$= 58/2\ N$$
$$\theta \approx 9°$$



شکل ۱۲-۳

مثال ۳: مطابق شکل ۱۳-۳ برآیند سه نیروی F_1 ، F_2 و F_3 را تعیین کنید.

هرکدام از بردارهای شکل ۱۳-۳ دارای مؤلفه‌های معادل در دستگاه مختصات x و y هستند. مثلاً F_1 دارای مؤلفه‌های $(F_1)_x$ و $(F_1)_y$ است.

برآیند نیروها را در محورهای x و y می‌توان به طریق زیر نوشت:

$$R_x = \sum F_x = (F_1)_x + (F_2)_x + (F_3)_x + \ldots$$

$$R_y = \sum F_y = (F_1)_y + (F_2)_y + (F_3)_y + \ldots$$

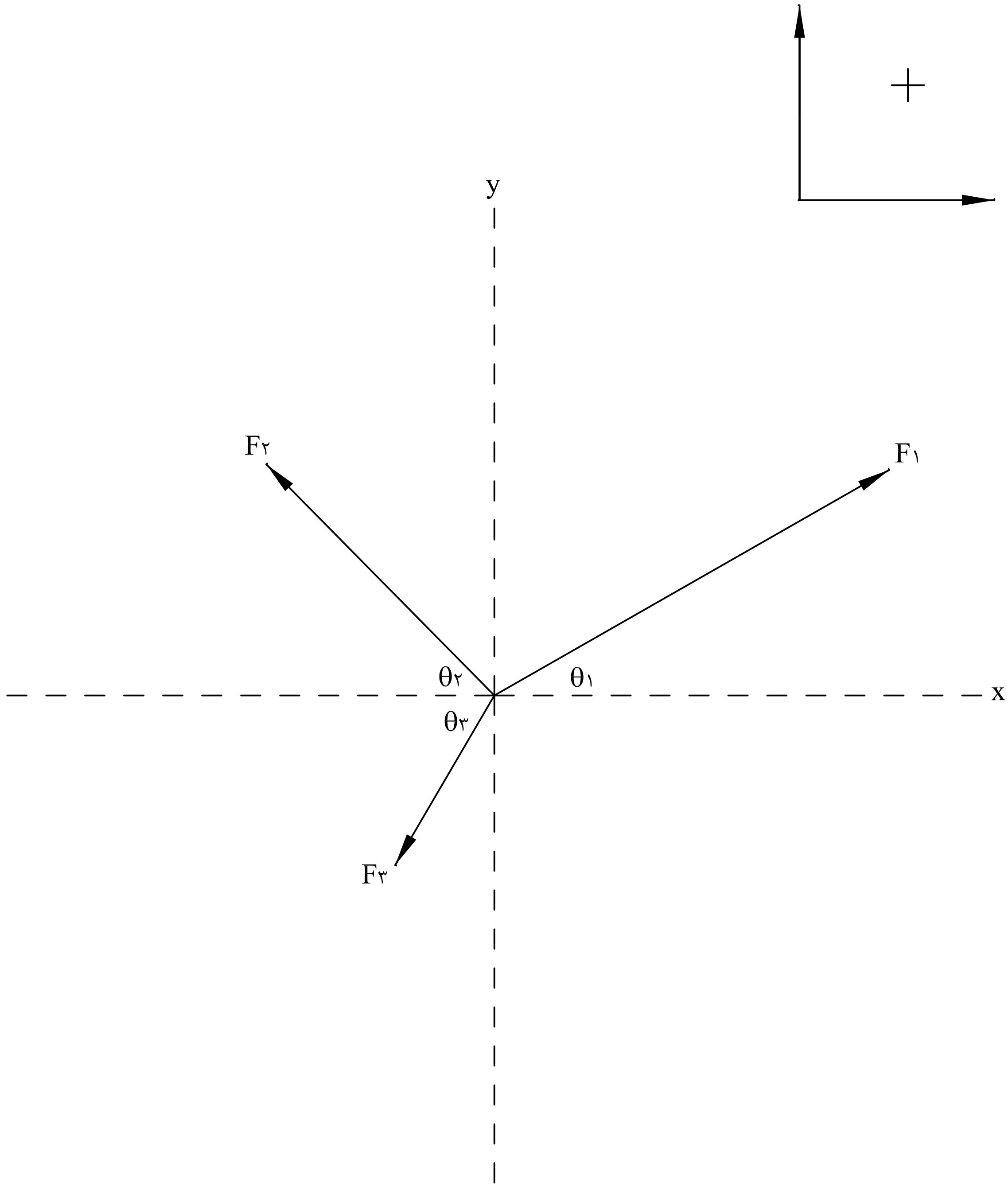
برآیند R (جمع برداری R_x و R_y) با استفاده از قضیهٔ فیثاغورث به‌دست می‌آید.

$$R = \sqrt{(R_x)^2 + (R_y)^2}$$

تانژانت زاویه‌ای که برآیند R با محور x به‌وجود می‌آورد عبارت است از:

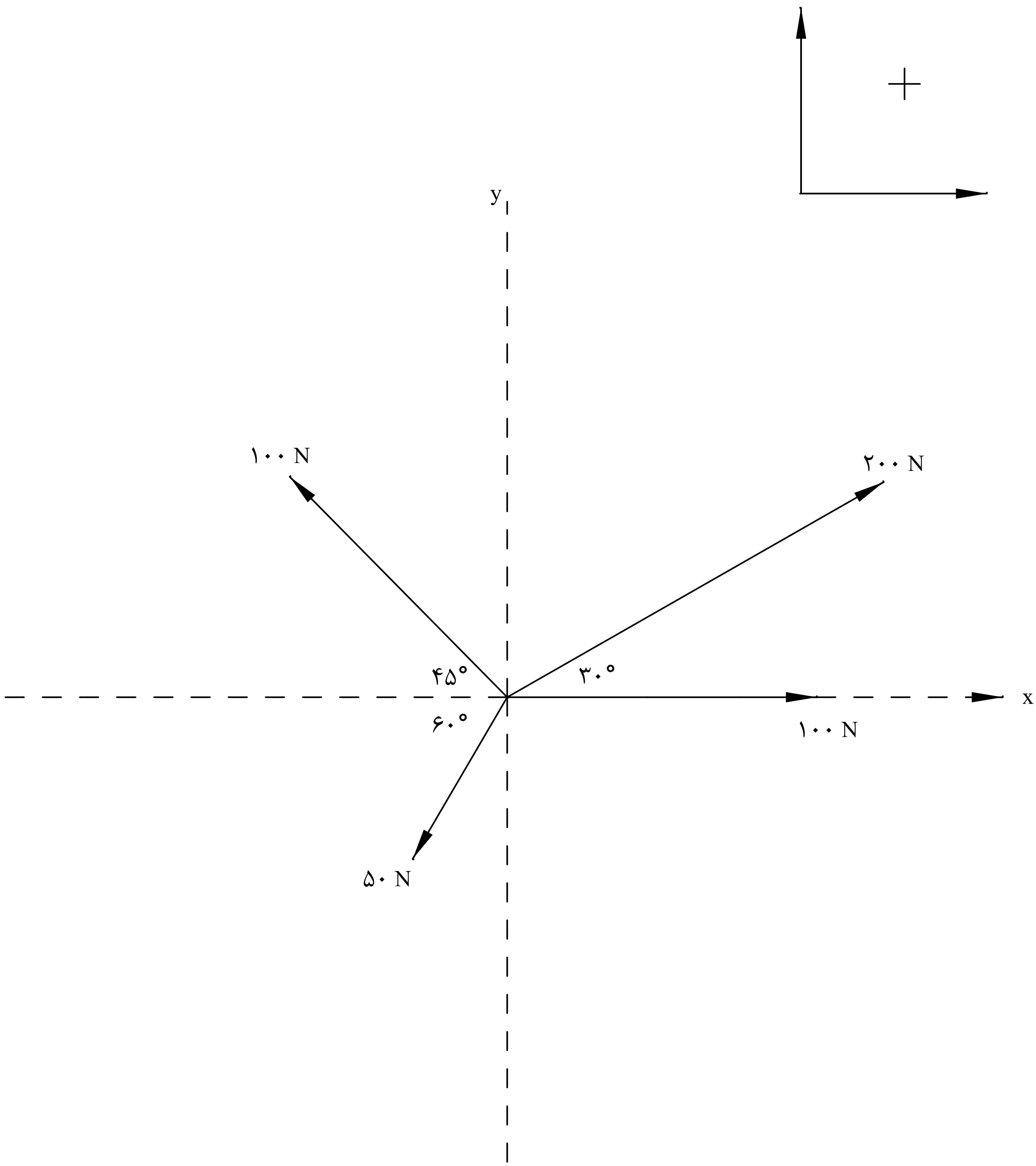
$$\tan\theta = \frac{R_y}{R_x} = \frac{\Sigma F_x}{\Sigma F_y}$$

مطابق قرارداد در شـــکل ۱۳-۳ برای مؤلفه‌های x به طرف راست و مؤلفه‌های y به‌طرف بالا مقادیر مثبت درنظر گرفته می‌شود.



شکل ۱۳-۳

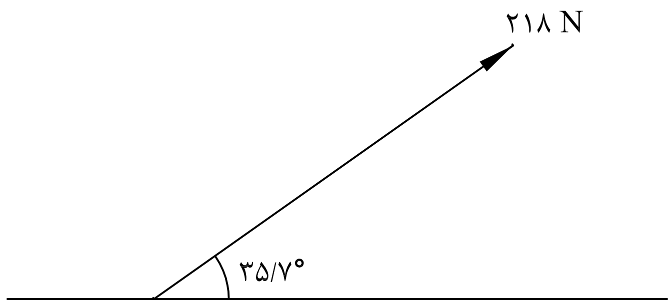
مثال ۴: برآیند نیروهای شکل ۱۴-۳ را تعیین کنید.



شکل ۱۴-۳

$$R_x = \Sigma F_x = +۱۰۰ + ۲۰۰\cos ۳۰^\circ - ۱۰۰\cos ۴۵^\circ - ۵۰\cos ۶۰^\circ$$
$$R_x = +۱۰۰ + ۱۷۳/۲ - ۷۰/۷ - ۲۵$$
$$R_x = +۱۷۷/۵\,N$$
$$R_y = \Sigma F_y = +۲۰۰\sin ۳۰^\circ + ۱۰۰\sin ۴۵^\circ - ۵۰\sin ۶۰^\circ$$
$$R_y = +۱۰۰ + ۷۰/۷ - ۴۳/۳ = +۱۲۷/۴\,N$$
$$R = \sqrt{(R_x)^۲ + (R_y)^۲}$$
$$= \sqrt{(۱۷۷/۵)^۲ + (۱۲۷/۴)^۲}$$
$$= \sqrt{۴۷۷۰۰} = ۲۱۸\,N$$
$$\theta = \arctan \frac{R_y}{R_x} = \arctan \frac{۱۲۷/۴}{۱۷۷/۵} = ۳۵/۷^\circ$$

بنابراین نیروی R را می‌توان به‌صورت شکل ۱۵-۳ نشان داد.



شکل ۱۵-۳ نمایش بردار برآیند مثال ۴

۳-۳ – تفریق برداری

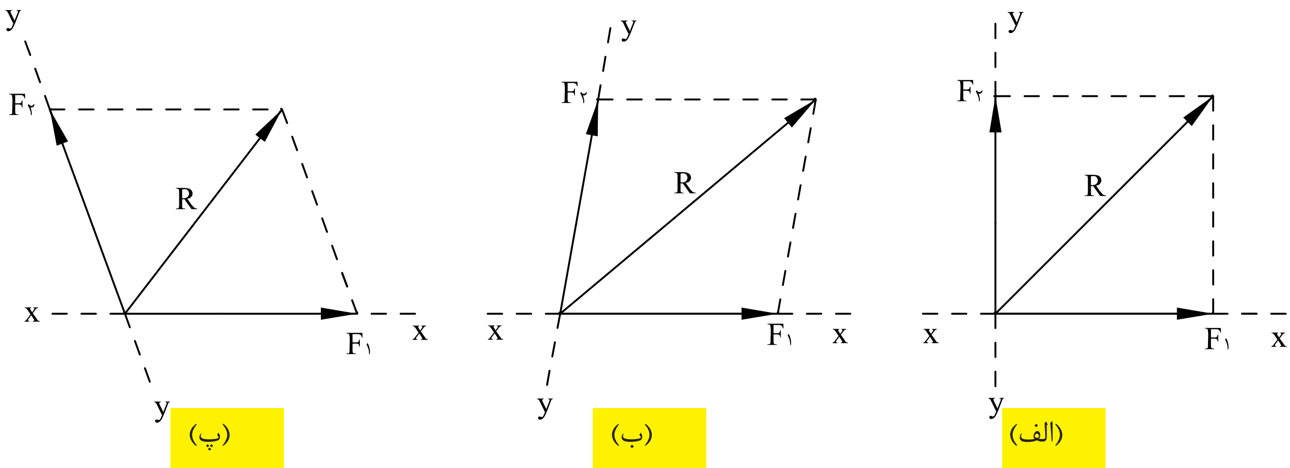
مطابق تعریف، اگر جهت بردار معینی ۱۸۰ درجه تغییر کند، مقدار بردار با علامت منفی نشان داده می‌شود. بنابراین اگر جهت اولیه مثبت باشد بردار منفی می‌شود و اگر جهت اولیه منفی باشد بردار مثبت می‌شود. برای تفریق بردار معینی مانند $\vec{F_۲}$ از بردار معین دیگری مانند $\vec{F_۱}$ می‌توان نوشت:

$$\vec{R} = \vec{F_۱} - \vec{F_۲} = \vec{F_۱} + (-\vec{F_۲})$$

۳-۴ – مؤلفه‌های یک بردار

تاکنون ملاحظه شد چگونه دو (و یا چند) بردار مانند بردارهای A و B بردار برآیند R را به‌وجود می‌آورند. عکس آن هم صادق است. یعنی می‌توان برداری مانند بردار R را با دو (و یا چند) بردار مانند بردارهای A و B که مجموعاً معادل بردار R می‌شوند جانشین کرد، در این حالت دو بردار A و B «مؤلفه‌های برآیند» یا به سادگی «مؤلفه» نامیده می‌شوند.

با توجه به این‌که هر مؤلفه یک بردار محسوب می‌شود لذا هر مؤلفه را هم می‌توان برابر چندین بردار که مجموعاً معادل آن می‌شوند فرض نمود. بنابراین برداری مانند بردار R را می‌توان برآیند یا جمع تعداد زیادی بردار (حتی بی‌نهایت بردار) فرض کرد. برای مثال در شکل ۱۶-۳ بردار R که دارای مؤلفه‌های F_1 و F_2 در شرایط گوناگون است نشان داده شده است. در موارد (ب) و (پ) مؤلفه‌های F_1 و F_2 مؤلفه‌های متوازی‌الاضلاعی نام دارند و در مورد (الف) مؤلفه‌های F_1 و F_2 بر محور x ها و y ها منطبق و بر هم عمودند که به مؤلفه‌های عمودی یا مستطیلی موسومند.

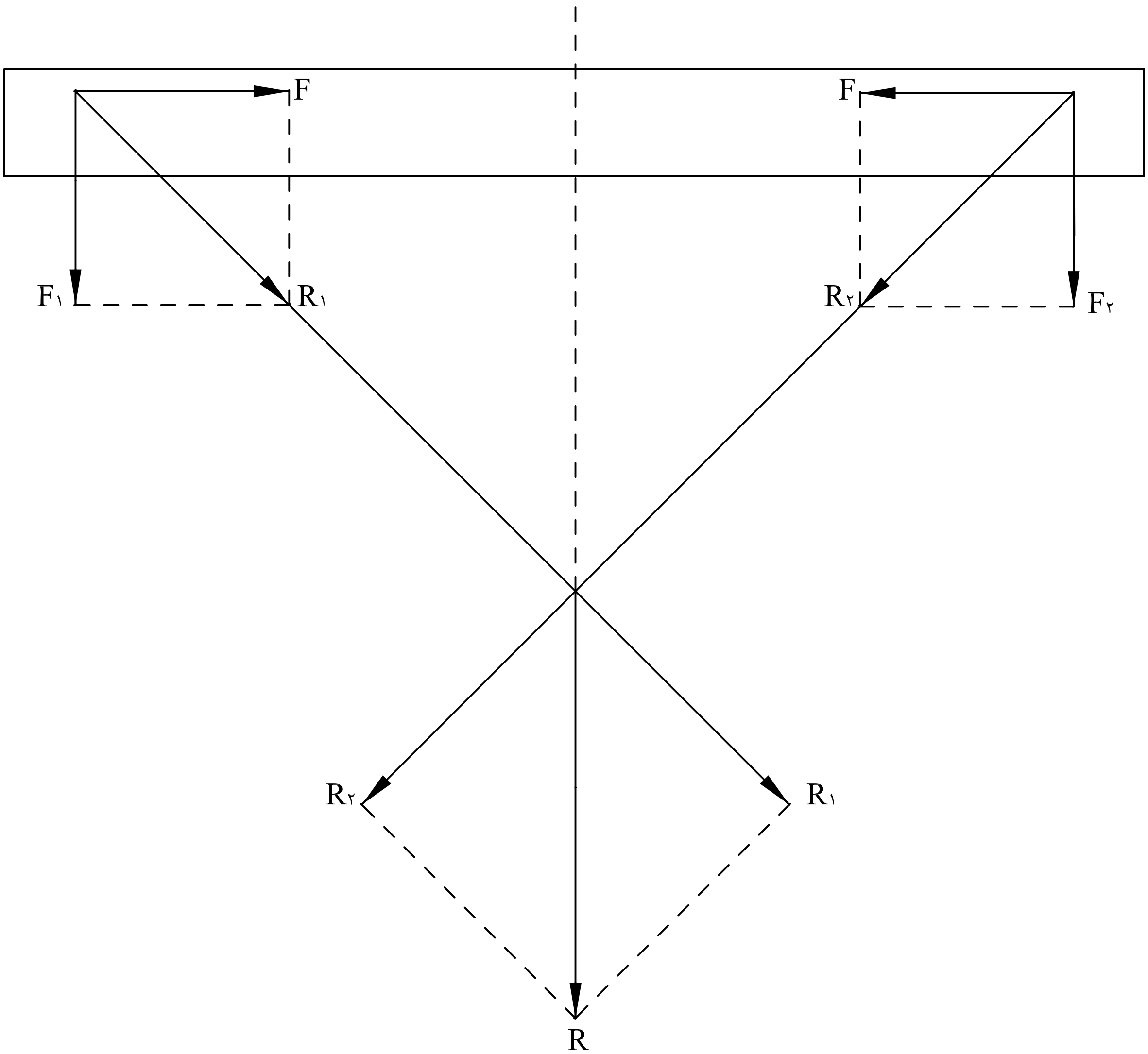


شکل ۱۶-۳

۳-۵ – برآیند دو نیروی موازی

دو نیرو که دارای یک خط اثر مشترک هستند به نیروهای هم‌خط موسومند. برآیند دو نیروی هم‌خط که با هم مساوی بوده ولی در دو جهت مخالف هستند برابر با صفر است.

بنابراین چنانچه مطابق شکل ۱۷-۳ دو نیروی هم‌خط F به نیروهای موازی F_1 و F_2 اضافه شود، سیستم نیروها تغییر نمی‌کند و برآیند دو نیروی F و F_1 برداری مانند $\vec{R}_1$ و برآیند دو نیروی F و F_2 برداری مانند $\vec{R}_2$ خواهد بود. برآیند $\vec{R}_1$ و $\vec{R}_2$ بردار $\vec{R}$ می‌باشد. بردار $\vec{R}$ معادل بردارهای $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ است. بهترین روش برای حل این‌گونه مسائل استفاده از روش ترسیمی است.



شکل ۱۷-۳

۶-۳ – گشتاور یا ممان نیرو

چنانچه یک نیرو تمایل داشــته باشــد تا جسمی را به حول یک محور معین بچرخاند گشتاور (یا ممان نیرو) به حول آن محور معین به وجود می‌آید. اندازهٔ گشــتاور عبارت اســت از حاصل‌ضرب نیرو در فاصلهٔ بین خط اثر نیرو تا محور چرخش. در شــکل ۱۸-۳ حاصل‌ضرب F و d مســاوی اندازه گشتاور M می‌باشد. از آن جا که گشتاور تمایل دارد تا جسم به گردش درآید، از علامت مثبت (+) و منفی (−) برای نشــان دادن جهت چرخش اســتفاده می‌شــود. در این کتاب چنان‌چه حاصل

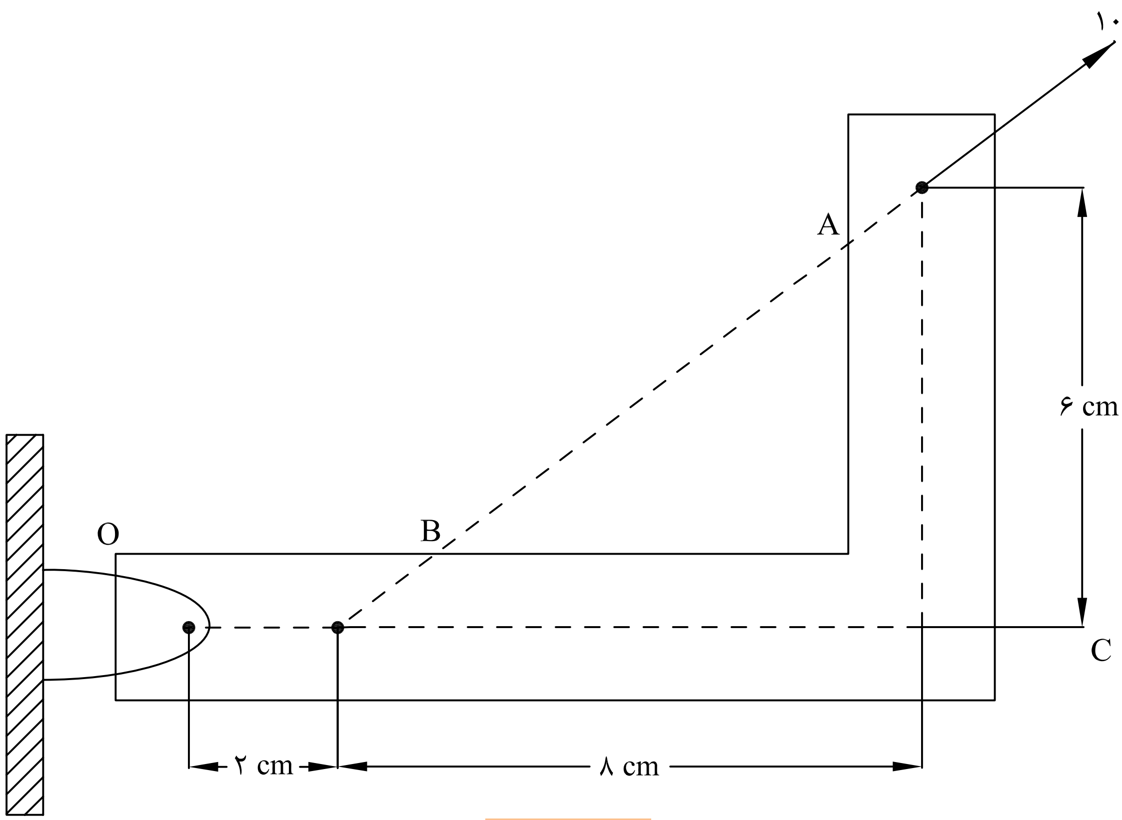
عملکرد گشـــتاور در جهت عقربه ســـاعت باشد از علامت منفی و در صورتی که در جهت خلاف حرکت عقربه ساعت باشد از علامت مثبت استفاده می‌شود.

مثال: در شکل ۱۸-۳ نیروی ۱۰۰ نیوتون در نقطه A بر یک لچکی وارد می‌شود طوری که گشتاوری به حول نقطه O به‌وجود می‌آید. اندازه گشتاور را به شرح زیر تعیین کنید:

(۱) با حاصل‌ضرب نیرو در فاصلهٔ عمودی بین نیرو تا نقطهٔ O

(۲) با تعیین گشتاورهای مؤلفه‌های نیرو در نقطهٔ A

(۳) با تعیین گشتاورهای مؤلفه‌های نیرو در نقطهٔ B



شکل ۱۸-۳

حل:

(۱) شـــرایط موجود در شـــکل ۱۸-۳ را به‌صورت شکل ۱۹-۳ رســـم می‌کنیم. به این ترتیب حل مثال به سهولت انجام می‌شود.

فاصله AB عبارت است از اندازهٔ وتر در مثلث راست گوشه ACB یا

$$AB = \sqrt{۶^۲ + ۸^۲} = ۱۰ \text{ cm}$$

ضلع OE در مثلث OBE بر ضلع EB عمود اســـت و در مثلث‌های ACB و OEB با هم متشـــابه‌اند. لذا از نســـبت اندازه

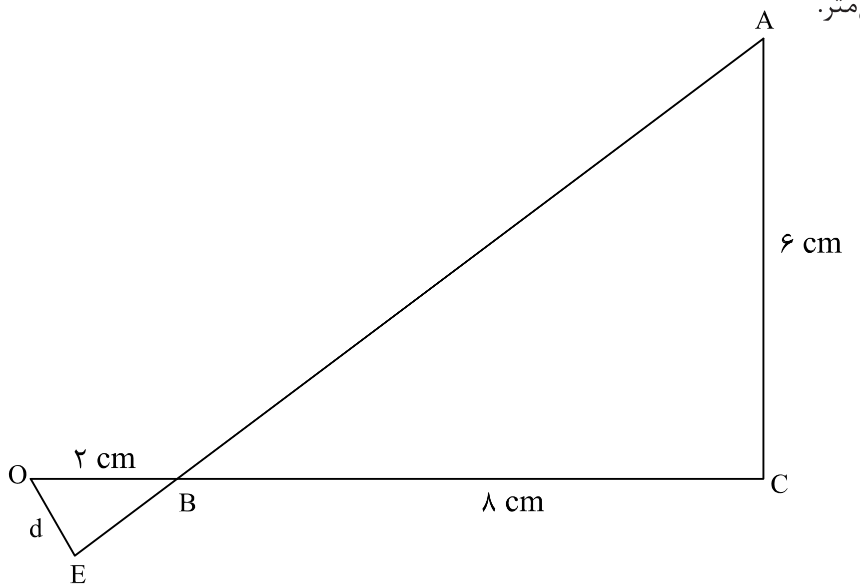
ضلع‌های متشــابه اســتفاده می‌کنیم و می‌نویســیم (OE که با فاصله d نشان داده می‌شــود فاصله خط اثر نیرو تا نقطه O می‌باشد)

$$\frac{OE}{\text{(وتر)}\ OB} = \frac{AC}{\text{(وتر)}\ AB}$$

$$\frac{d}{۲} = \frac{۶}{۱۰}$$

$$d = ۱/۲\ cm$$

اندازه گشــتاور حاصل از نیروی ۱۰۰ نیوتونی به حول نقطه O عبارت می‌شــود از حاصل‌ضرب نیروی ۱۰۰ نیوتون در فاصله ۱/۲ سانتی‌متر.



شکل ۱۹-۳

$$M = Fd = ۱۰۰(۱/۲) = ۱۲۰\ N\,cm$$

(۲) مؤلفه‌های نیروی ۱۰۰ نیوتونی F عبارت می‌شوند از:

$F_X = F\cos\theta$ مؤلفه نیروی F در راستای x

$F_Y = F\sin\theta$ مؤلفه نیروی F در راستای y

کســینوس θ مســاوی است با ضلع مجاور به وتر در مثلث ACB یا $\frac{۸}{۱۰}$ یا $\frac{۴}{۵}$. سینوسθ مساوی است با ضلع مقابل به وتر در مثلث ACB یا $\frac{۶}{۱۰}$ یا $\frac{۳}{۵}$. بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$F = F\cos\theta = ۱۰۰(\frac{۴}{۵}) = ۸۰\ N$$

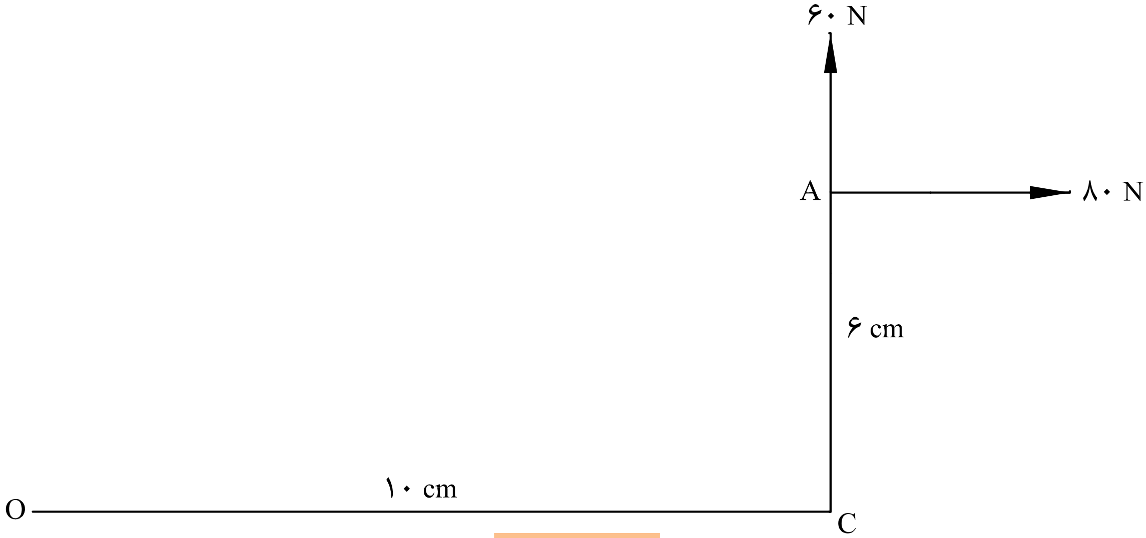
$$F = F\sin\theta = ۱۰۰(\frac{۳}{۵}) = ۶۰\ N$$

نمایش این نیروها مطابق شکل ۲۰-۳ می‌باشد.

ملاحظه می‌شــود فاصله عمودی نیروی ۶۰ نیوتونی از نقطه O برابر ۱۰ ســانتی‌متر و فاصله عمودی نیروی ۸۰ نیوتونی

از نقطه O برابر ۶ سانتی‌متر است.

با توجه به این‌که گشتاور حاصل از نیروی ۶۰ نیوتونی خلاف جهت عقربه ساعت و گشتاور حاصل از نیروی ۸۰ نیوتونی موافق جهت عقربه ساعت به‌وجود می‌آیند، می‌توان نوشت: M =۱۶۰ (۱۰) - ۸۰ (۶) = ۶۰۰- ۴۸۰= +۱۲۰Ncm



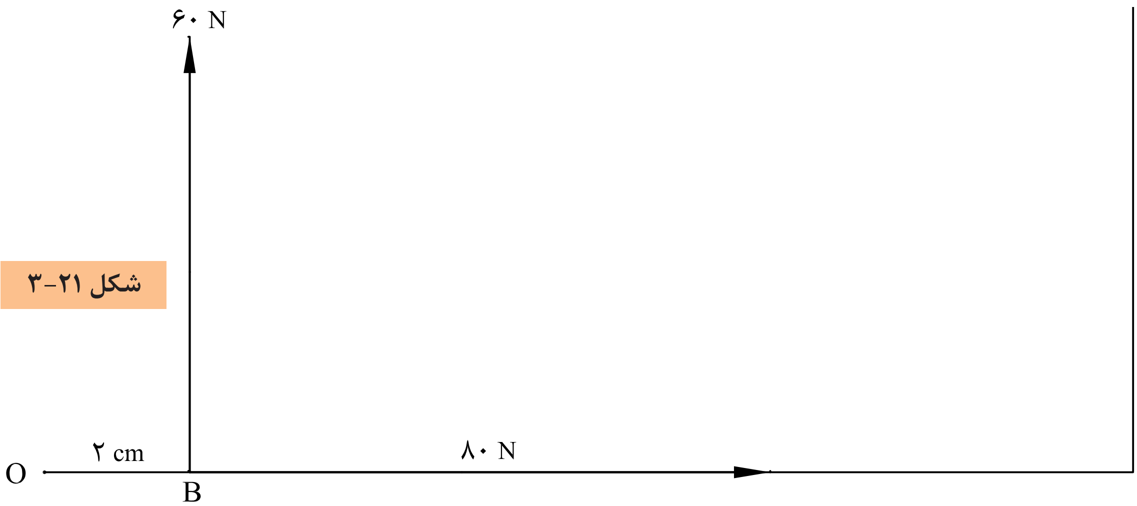
شکل ۲۰-۳

(۳) مؤلفه‌های x و y به‌طوری که در شکل ۲۱-۳ ملاحظه می‌شود در نقطه B هم عمل می‌کنند که در امتداد خط اثر نیروی F است.

راستای نیروی ۸۰N از نقطه O می‌گذرد لذا اندازه فاصلهٔ نقطه O تا نیروی مزبور مساوی با صفر است. حاصل‌ضرب نیروی ۸۰N در صفر برابر صفر است و اندازه گشتاور حاصل از این نیرو مساوی صفر می‌باشد.

اندازهٔ گشتاور حاصل از نیروی ۶۰N برابر است با:

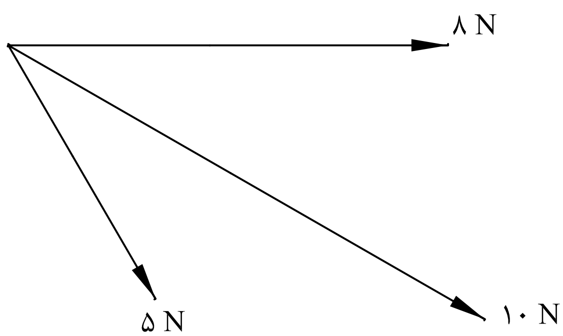
M = ۶۰N (۲cm) = ۱۲۰ Ncm



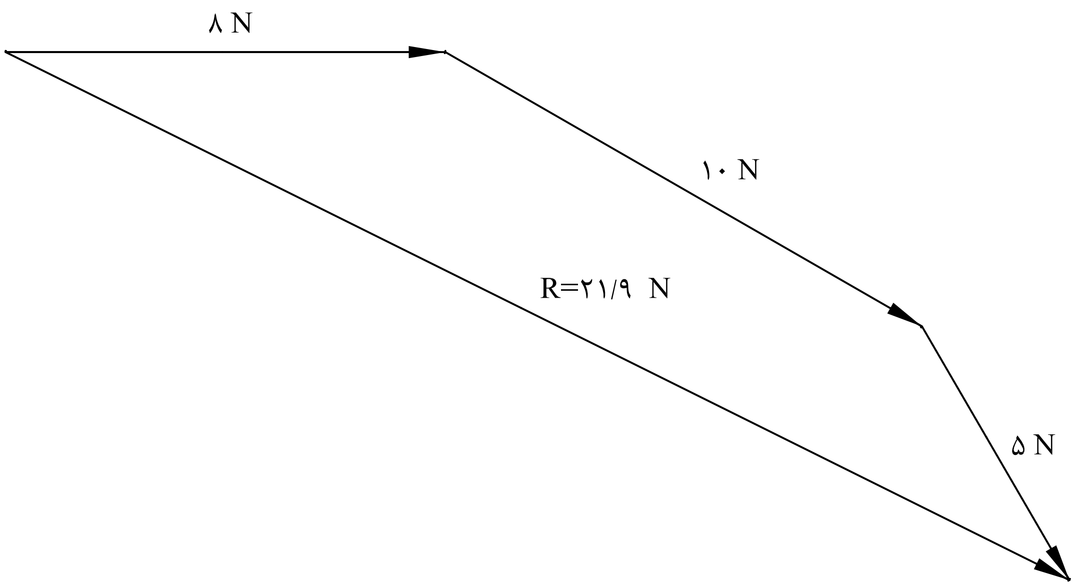
شکل ۲۱-۳

۷–۳– نیروی معادل (خنثی کنندۀ برآیند نیروها)

فرض شــود چند نیرو بر یک جســم وارد شده‌اند طوری که جسم از شــرایط تعادل (Equilibrium) خارج شده است. حال اگر نیروای به تنهایی طوری بر جســم وارد شــود که جسم در شــرایط تعادل قرار گیرد به نیروی مزبور نیروی معادل (Equilibrant) گفته می‌شود. برای نمونه به سه نیروی شکل ۲۲–۳ توجه شود. برآیند این سه نیرو در شکل ۲۳–۳ نشان داده شــده اســت. نیروای که می‌تواند خنثی کنندۀ برآیند $R = ۲۱/۹\,N$ باشد نیروای است که می‌توان آن را با E نشان داد که جهت آن کاملاً مخالف R و اندازۀ آن برابر R است. یعنی $E = -R$ یا $E = -۲۱/۹\,N$

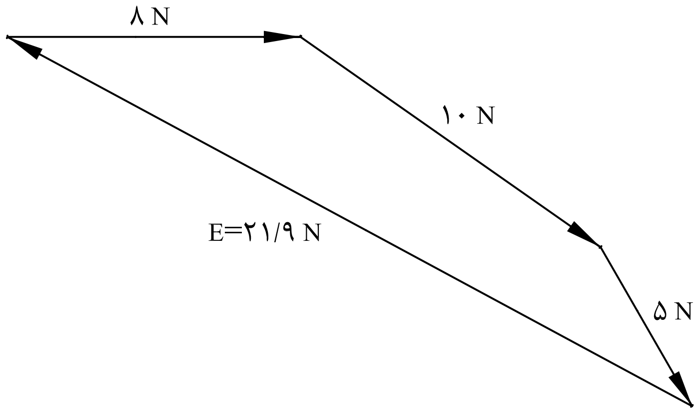


شکل ۲۲–۳ – نمایش سه نیرو در فضا



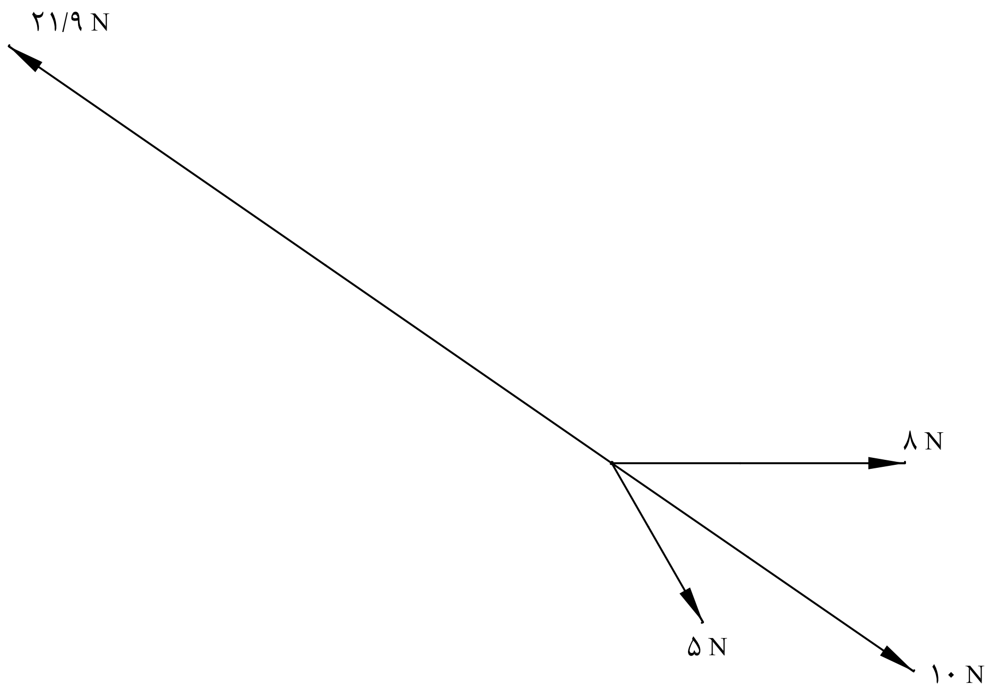
شکل ۲۳–۳– نمایش برداری هر سه نیرو و برآیند آنها

نمایش برداری این نیرو در شکل ۲۴-۳ مشاهده می‌شود.



شکل ۲۴-۳- نمایش برداری هر سه نیرو و خنثی کنندهٔ برآیند آنها یا نیروی معادل

ملاحظه می‌شود نیروی E، نیروی R و در واقع نیروهای ۸ N و ۱۰ N و ۵ N را خنثی می‌کند و جسم را در شرایط تعادل قرار می‌دهد. نیروی E را می‌توان به صورت شکل ۲۵-۳ نشان داد.



شکل ۲۵-۳- نمایش واقعی نیروی معادل یا خنثی‌ساز برآیند چند نیرو

۸-۳ – روش‌های آسان حل مسائل برداری

برای حل مسائل برداری روش‌های آسانی وجود دارد. به این منظور ابتدا روش مثلث و روش چند ضلعی معرفی و سپس نحوهٔ استفاده از آنها در حل مسائل برداری توضیح داده می‌شود.

۱-۸-۳ – روش مثلث

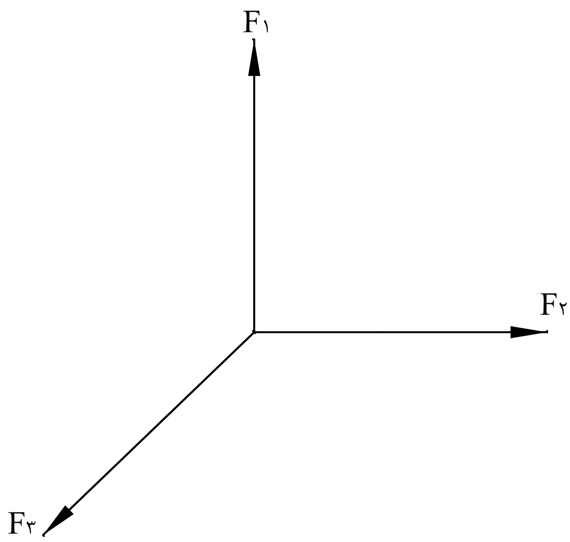
چنانچه سه نیرو در یک نقطه عمل کنند ولی در شرایط تعادل باشند نمودار برداری‌ای که به ترتیب نیروها را با اندازه و جهت آنها نشان دهد تشکیل یک مثلث می‌دهد.

مثال: نیروهای $F_۱$ و $F_۲$ و $F_۳$ در شکل ۲۶-۳ در شرایط تعادل قرار دارند. نمودار برداری آنها را رسم کنید.

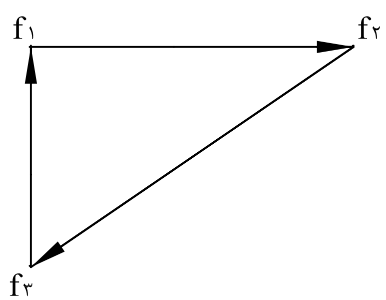
راه حل:

بردار $f_۱$ را موازی با نیروی $F_۱$ رسم می‌کنیم. سپس از ابتدای $f_۱$ بردار $f_۲$ را موازی با $F_۲$ و از ابتدای $f_۲$ بردار $f_۳$ را موازی با $F_۳$ رسم می‌کنیم.

ملاحظه می‌شود که سه بردار $f_۱$ و $f_۲$ و $f_۳$ تشکیل یک مثلث می‌دهند.



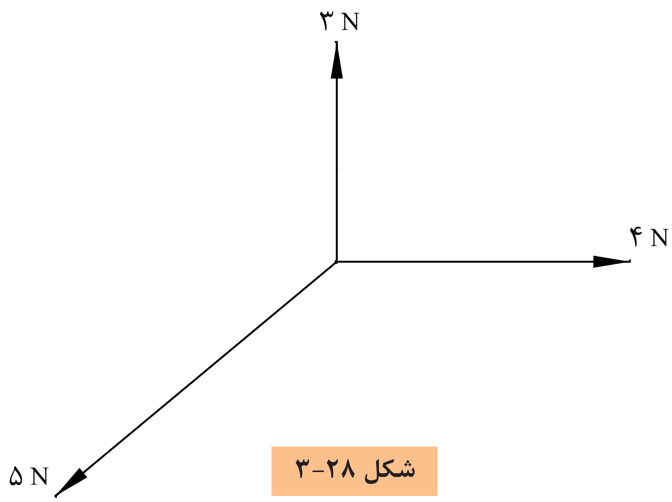
شکل ۲۶-۳



شکل ۲۷-۳ نمودار برداری

یادآوری می‌شود که این مثلث در صورتی تشکیل می‌شود که مانند این مثال نیروها در تعادل باشند.

مثال: نیروهای ۳ N ، ۴ N و ۵ N مطابق شکل ۲۸-۳ در شرایط تعادل قرار دارند. نمودار برداری آنها را رسم کنید.

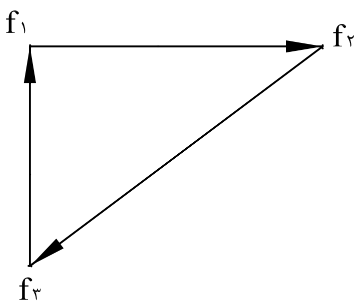


شکل ۲۸-۳

حل:

بردارهای f_1 و f_2 و f_3 را با اســتفاده از روشــی که آموخته‌ایم با دقت (یک سانتی‌متر مساوی یک نیوتون) رسم می‌کنیم. حاصل مثلث شکل ۲۹-۳ می‌باشد.

نکتــهٔ مهــم: با کمی دقت متوجه می‌شــویم کــه در دو مثال فــوق بردار f_3 نشــان‌دهندهٔ نیروی معادل یا خنثی‌ساز برآیند دو نیروی دیگر است و به همین دلیل نیروها در شرایط تعادل قرار دارند.

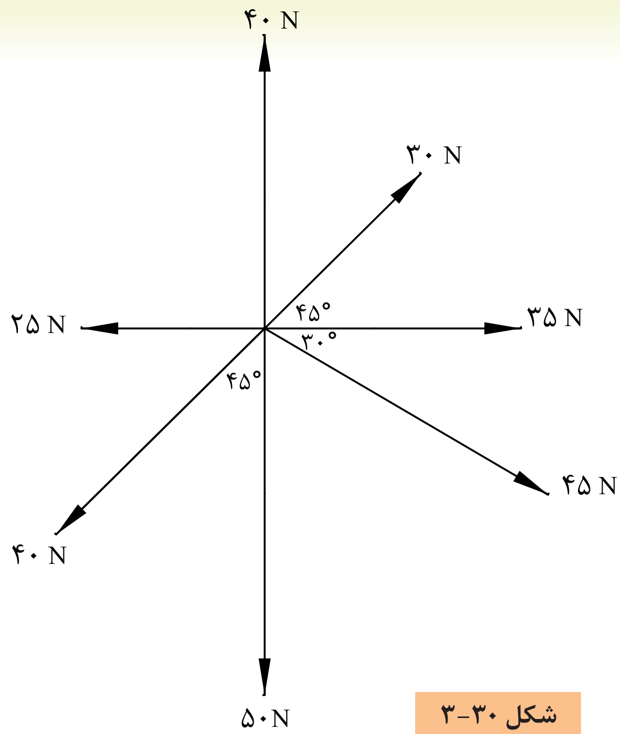


شکل ۲۹-۳

۲-۸-۳ - روش چند ضلعی

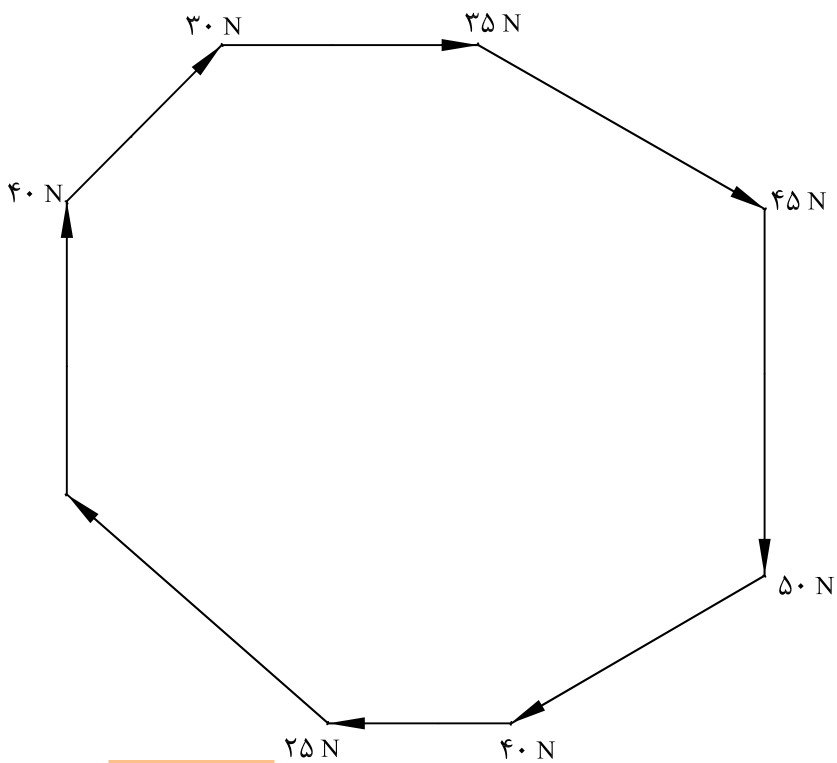
چنانچه چند نیرو در یک نقطه عمل کنند ولی در شرایط تعادل باشند نمودار برداری‌ای که به‌ترتیب نیروها را با اندازه و جهت آنها نشان دهد یک چند ضلعی می سازد. روش‌های مثلث و چند ضلعی مشابه یکدیگر هستند و تفاوت آنها در تعداد نیروها می‌باشد. در مثلث تعداد نیروها سه و در چند ضلعی تعداد نیروها بیش از سه است.

مثال: چند نیرو مطابق شکل ۳۰-۳ بر نقطه‌ای عمل می‌کنند. با استفاده از روش رسم چند ضلعی با فرض این‌که نیروها در تعادل باشند اندازه و جهت نیروی معادل را بیابید.



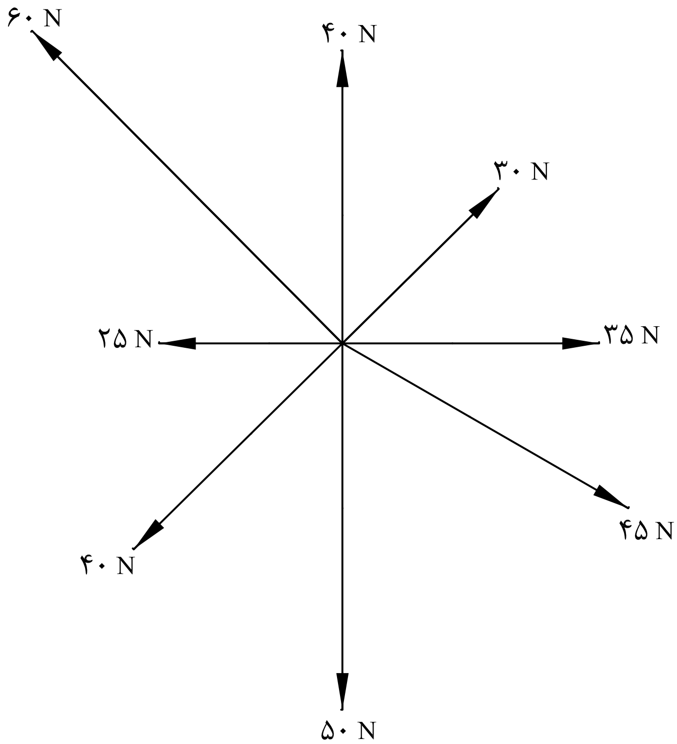
شکل ۳۰-۳

راه حل: نمودار برداری را مطابق روشی که آموخته‌ایم رسم می‌کنیم. هر یک سانتی‌متر را معادل N ۱۰ قرار می‌دهیم. رسم بردارها را از بردار عمودی N ۴۰ شروع می‌کنیم. هفت نیروی موجود در سیستم به‌صورت هفت بردار شکل ۳۱-۳ رسم می‌شوند. برای یافتن بردار معادل که در واقع با رسم آن چند ضلعی کامل می‌شود کافی است که با رسم یک بردار ابتدای بردار N ۲۵ به انتهای بردار N ۴۰ متصل شود.



شکل ۳۱-۳

حال با اســتفاده از خط‌کش طول بردار معادل را اندازه می‌گیریم که ۶ ســانتی‌متر است و چون هر سانتی‌متــر را معادل N ۱۰ قرار داده‌ایم بنابراین اندازهٔ بردار حدود N ۶۰ می‌باشد. چنانچه با نقاله زاویه نیروی معادل با محورهای عمودی و افقی اندازه گرفته شــود ملاحظه می‌گرددکه زاویهٔ آن با این محورها ۴۵ درجه اســت. حال اگر به شکل ۳۰-۳ برگردیم می‌توانیم نیروی معادل را به آن شــکل اضافه کنیم و در نتیجه شــکل ۳۲-۳ را در حالی که کلیه نیروها در آن در شــرایط تعادل قرار دارند رسم کنیم.

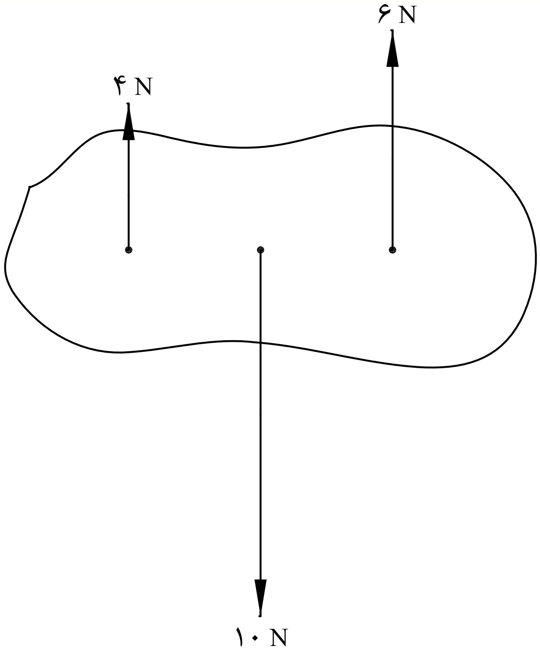


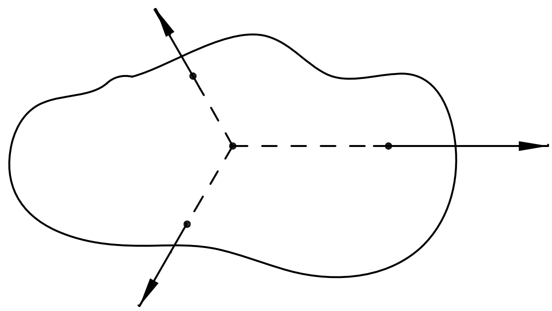
شکل ۳۲-۳

۳-۸-۳ - نیروهای هم‌رأس و نیروهای موازی

خط اثرهای سه نیرو (یا خط اثرهای هر تعداد نیرو که قابل کاهش به سه نیرو باشند) که در حالت تعادل هستند یا باید از یک نقطه مشــترک بگذرند و یا اینکه با هم موازی باشــند. این مطلب را به‌طور عملی در شکل‌های ۳۳-۳ و ۳۴-۳ تجربه می‌کنیم. در هر دو شکل مزبور نیروها در حال کشیدن صفحه هستند.

در شکل ۳۳-۳ سه نیرو در حال کشیدن صفحه هستند. اگر صفحه در حالت تعادل باشد خط اثرهای هر سه نیرو از یک نقطه مشترک می‌گذرند و با هم موازی نیستند.





شکل ۳۴-۳

شکل ۳۳-۳

در شـکل ۳۴-۳ سـه نیروی موازی، یک صفحه را می‌کشند. ملاحظه می‌شـود صفحه در حال تعادل است زیرا مجموع نیروهای موافق و مخالف یکدیگر را خنثی می‌کنند.

تمرین ۱: دانش‌آموزان عزیز شـرایط شـکل ۳۳-۳ را تغییر دهند طوری که خط اثر نیروها از یک نقطه نگذرند و موازی هم نباشند و نتیجه بگیرند که صفحه نمی‌تواند در حال تعادل باشد.

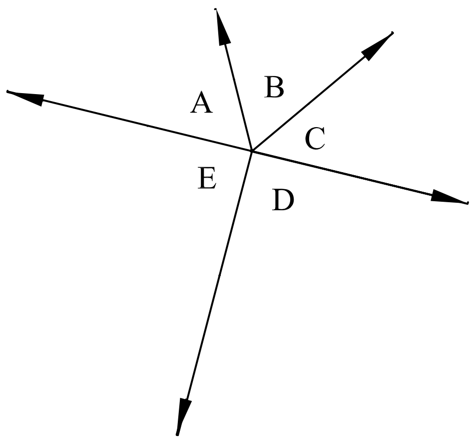
تمرین ۲: دانش‌آموزان عزیز شـرایط شـکل ۳۴-۳ را تغییر دهند طوری که نیروهای موافق و مخالف یکدیگر را خنثی نکنند و نتیجه بگیرند که صفحه نمی‌تواند در حال تعادل باشد.

۴-۸-۳ - علامت‌گذاری

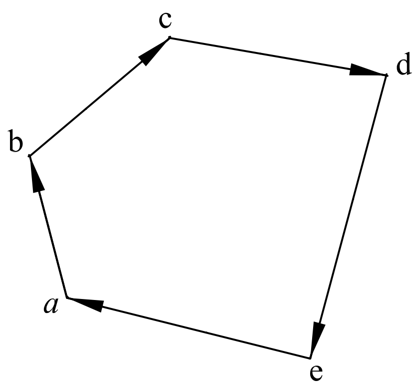
در این قسمت روشی برای علامت‌گذاری فضاها در نمودار فضایی با حروف بزرگ لاتین (A، B، C و ...) معرفی می‌شود طوری که هر نیرو را بتوان با حروفی که نشـانگر دو فضا در دو طرف آن نیرو هسـتند معرفی کرد. مثلاً نیروی AB نیروای اسـت که بیـن فضای A و فضای B قرار می‌گیرد. در ایـن روش بردار هر نیرو در نمودار برداری با حروف کوچک نشـانگر آن نیرو معرفی می‌شـود. مثلاً بردار ab برای نیروی AB، بردار bc برای نیروی BC و مانند آن. در شـکل ۳۵-۳ این روش علامت‌گذاری مشـاهده می‌شـود. در این شکل فضاهای بین نیروها به‌طور پیوسته و موافق حرکت عقربه ساعت نام‌گذاری و علامت‌گذاری شده‌اند. همواره ترجیح داده می‌شود که در صورت امکان اولین نیرو (و در نتیجه اولین بردار) عمودی یا افقی

باشد تا رسم نمودار برداری آن آسان شود.

الف) نمودار فضایی



ب) نمودار برداری



بردار ab نشان‌دهندهٔ نیروی AB واقع شده بین فضای A و B

بردار bc نشان‌دهندهٔ نیروی BC واقع شده بین فضای B و C

بردار cd نشان‌دهندهٔ نیروی CD واقع شده بین فضای C و D

بردار de نشان‌دهندهٔ نیروی DE واقع شده بین فضای D و E

بردار ea نشان‌دهندهٔ نیروی EA واقع شده بین فضای E و A

شکل۳۵-۳

۹-۳ – کاربردهای عملی

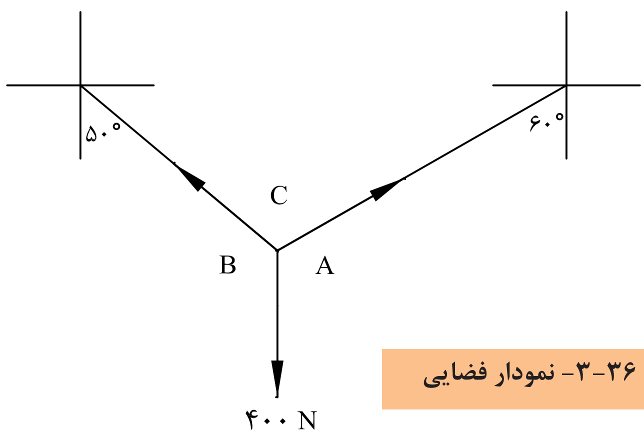
با آنچه که تاکنون آموخته‌ایم می‌توانیم نمودار برداری نیروها را برای حلّ مسائل عملی رسم کنیم. آموختیم که در حل مسائل مکانیک کاربردی (فعلاً استاتیک) از دو روش می‌شود استفاده کرد.

(۱) «حل ترسیمی» که در آن نمودار برداری با مقیاس و اندازه ترسیم می‌شود و موارد نامعلوم با اندازه‌گیری تعیین می‌شوند، از خط‌کش برای تعیین بزرگی (مقدار) بردار و از نقاله برای تعیین جهت و اندازهٔ زاویه استفاده می‌شود. هرچه

نمودار دقیق‌تر رسم شود پاسخ‌ها دقیق‌تر می‌شوند. توصیه می‌گردد که نمودارها متناسب با اندازهٔ کاغذ در بزرگترین مقیاس ممکن رسم شوند.

(۲) «حل محاسبه‌ای» که در آن نمودار برداری رسم می‌شود ولی اندازه‌گیری نمی‌گردد و موارد نامعلوم با استفاده از مثلثات تعیین می‌شوند. حل مسائل با استفاده از جداول مثلثات نتایج دقیق‌تری نسبت به حل مسائل با استفاده از روش ترسیمی می‌دهد و لذا معمولاً از روش محاسبه استفاده می‌شود مگر آن‌که اعلام شود که روش ترسیمی قابل قبول‌است. به‌هرحال چون در روش محاسبه‌ای ترسیم نقشه ساده و بدون اندازه (sketch) نیاز است و از طرفی اندازه‌گیری نمودار برداری در زمان کوتاهی قابل انجام است توصیه می‌شود که دانش‌آموز از هر دو روش استفاده کند. بنابراین با روش ترسیمی می‌توان از صحیح بودن محاسبات اطمینان یافت. البته استفاده از روش ترسیمی و انطباق آن با محاسبات مهارت دانش‌آموز را افزایش می‌دهد.

مثال: مطابق شکل ۳۶-۳ دو کابل که با محور عمودی زاویه ۵۰ و ۶۰ درجه می‌سازند از یک تیر آویزان هستند. اتصال دو طناب با یک شِگِل برقرار است و از آن باری به وزن ۴۰۰ N آویزان می‌باشد. نیروی کششی در هر کابل چقدر است؟



شکل ۳۶-۳- نمودار فضایی

حل ترسیمی: شکل ۳۶-۳ نمودار فضایی مثال را نشان می‌دهد.

محل اتصال کابل‌ها و بار به وضوح مشاهده می‌شود. شِگِل به صورت یک گره نشان داده شده است. گره محل برخورد سه نیرو می‌باشد. نیروها به ترتیب عبارتند از؛

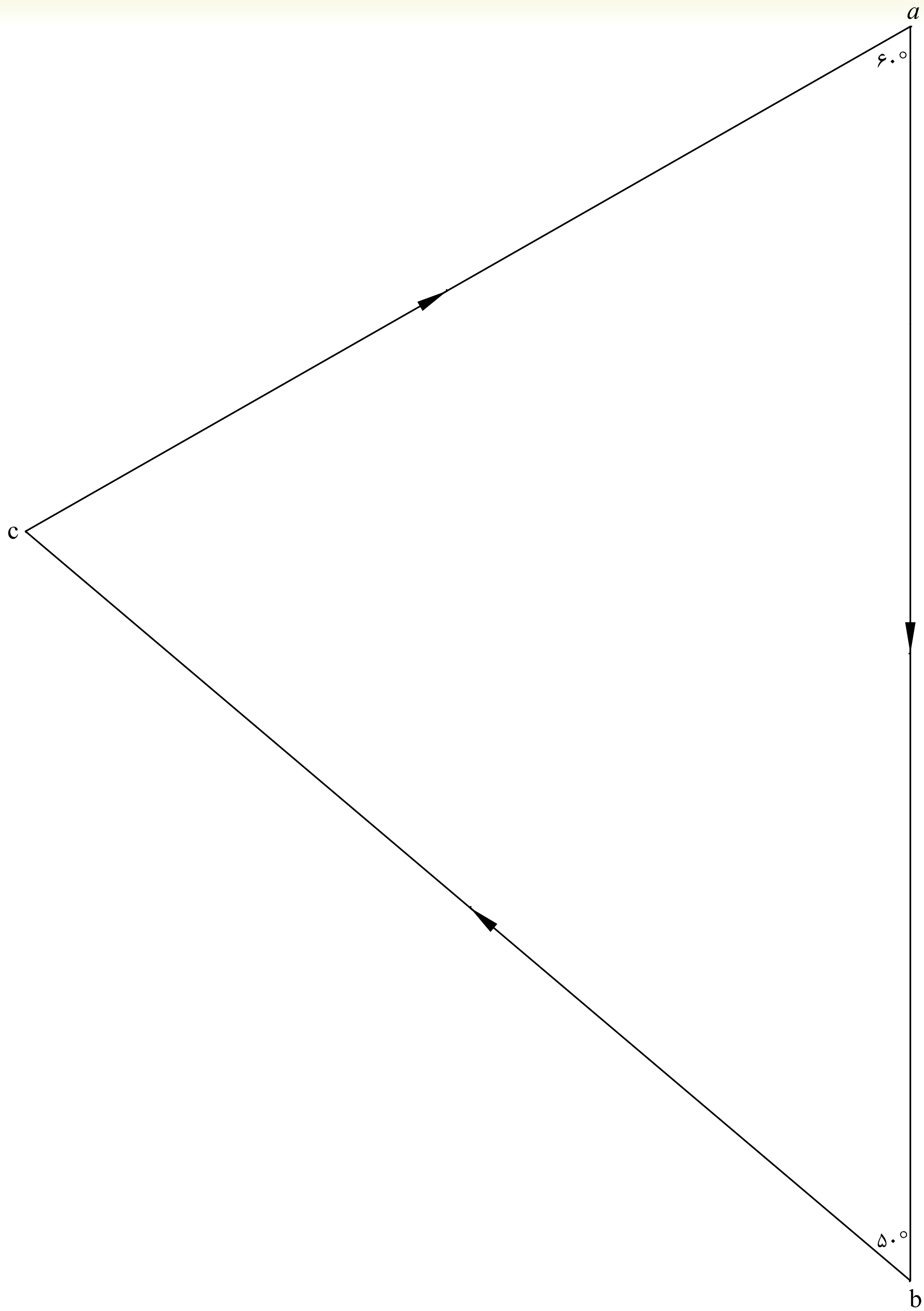
(۱) نیروی کششی ناشی از بار چهارصد نیوتونی به سمت پایین در محور عمودی

(۲) نیروی کششی کابل BC

(۳) نیروی کششی کابل CA

پیکان‌های رسم شده در نمودار فضایی (شکل ۳۶-۳) جهت هرکدام از نیروها را نشان می‌دهند.

اکنون می‌توانیم نمودار برداری را مطابق شکل ۳۷-۳ رسم کنیم. ابتدا بردار عمودی را موازی با نیروی ۴۰۰ نیوتون رسم می‌کنیم و آن را به‌صورت بردار ab نشان می‌دهیم. در این مثال هر ۲۰ نیوتون را مساوی یک سانتی‌متر قرار می‌دهیم.



شکل ۳۷-۳- نمودار برداری

بنابراین طول ab مســاوی ۲۰ سانتی‌متر می‌شود. اکنون می‌توانیم از نقطهٔ b برداری موازی با نیروی کششی کابل BC رسم کنیم. چون زاویهٔ BC با محور عمودی برابر ۵۰ درجه است زاویهٔ bc با بردار ab نیز مساوی ۵۰ درجه می‌باشد. البته هنوز اندازه (بزرگی) بردار bc را نمی‌دانیم بنابراین طول bc برای ما مشخص نیست. به همین دلیل هنگام رسم bc ممکن است طول bc مقداری بزرگتر یا کوچکتر از اندازهٔ واقعی شود ولی توصیه می‌شود بردار با مداد ولی قدری بزرگتر رسم شود زیرا بعداً قابل اصلاح خواهد بود. حال باید بردار ca که نشــان‌دهندهٔ نیروی کششــی کابل CA اســت رسم شود. چون هنوز محل دقیق نقطهٔ c را نمی‌دانیم از نقطهٔ a بردار ca را موازی با کابل CA رســم می‌کنیم. بدیهی اســت زاویه بین بردار ca و بردار ab برابر ۶۰ درجه اســت (چون زاویه نیروی کششــی کابل CA با محور عمودی مساوی ۶۰ درجه می‌باشد). محلّ برخورد دو بردار نقطهٔ c می‌باشد.

حال طول بردارهای bc و ca را با خط‌کش اندازه می‌گیریم. چون هریک ســانتی‌متر را مقابل ۲۰ نیوتون فرض کرده‌ایم طول هر بردار را در ۲۰ نیوتون ضرب می‌کنیم و بزرگی هر بردار و در نتیجه نیروی کششــی کابل‌ها را به‌دســت می‌آوریم. طول بردار ca برابر ۱۶/۳ سانتی متر و طول بردار bc برابر ۱۸/۴ سانتی‌متر می‌شود. بنابراین خواهیم داشت:

نیروی کششی در کابل $AC = ۳۲۶\,N = ۱۶/۳ \times ۲۰N =$ اندازه (بزرگی) بردار ca

نیروی کششی در کابل $BC = ۳۶۸\,N = ۱۸/۴ \times ۲۰N =$ اندازه (بزرگی) بردار bc

البته باید در نظر داشــته باشــیم که نتایج روش ترسیمی با تقریب همراه است ولی در صورتی که نمودار برداری به‌دقت و با خط‌کش و نقالهٔ دقیق و پرگار رســم شــود روش مناســبی است که عملاً می‌تواند در کارهای اجرایی مربوط به کشتی و کشتی‌سازی به کار رود.

حلّ محاسبه‌ای: برای تعیین نیروی کششی در هر کابل به طریق زیر عمل می‌کنیم.

ابتدا نمودار ســاده برداری را رســم می‌کنیم (چون نمودار ساده برداری مورد نظر مشابه نمودار شکل ۳۷-۳ می‌باشد به آن شــکل مراجعه شود)، ســپس اندازهٔ زاویهٔ ab را تعیین می‌کنیم. در شکل ۳۷-۳ زاویه acb زاویه‌ای است در یک مثلث که ضلع مقابل آن بردار ۴۰۰ نیوتونی می‌باشد.

$$\widehat{acb} = ۱۸۰^\circ - (۶۰ + ۵۰) = ۷۰^\circ$$

با استفاده از قانون سینوس می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{ac}{\sin ۵۰^\circ} = \frac{۴۰۰}{\sin ۷۰^\circ}$$

$$ac = \frac{۴۰۰(\sin ۵۰^\circ)}{\sin ۷۰^\circ} = \frac{۴۰۰ \times ۰/۷۶۶}{۰/۹۳۹۷} = ۳۲۶/۰۶ \quad \text{نیوتون}$$

$$\frac{bc}{\sin ۶۰^\circ} = \frac{۴۰۰}{\sin ۷۰^\circ}$$

$$bc = \frac{۴۰۰(\sin ۶۰^\circ)}{\sin ۷۰^\circ} = \frac{۴۰۰ \times ۰/۸۶۶}{۰/۹۳۹۷} = ۳۶۸/۶ \quad \text{نیوتون}$$

بنابراین نیروی کششی در کابل ها به شرح زیر می‌باشد.

نیوتون ۳۲۶/۰۶ = نیروی کششی در کابل AC

نیوتون ۳۶۸/۶ = نیروی کششی در کابل BC

حال می‌توانیم نتایج حاصل از روش ترسیمی و روش محاسبه‌ای را مقایسه کنیم. ملاحظه می‌شود که خطای حاصل به شرح زیر است؛

(۱) خطا در تعیین نیروی کششی کابل AC:

$$۳۲۶/۰۶ - ۳۲۶ = ۰/۰۶$$

$$\frac{۰/۰۶}{۳۲۶/۰۶} = ۰/۰۰۰۱۸ = \%./۱۸$$

بنابراین ملاحظه می‌شود خطای روش ترسیمی در تعیین نیروی کششی کابل AC برابر هجده هزارم درصد می‌باشد که برای این مثال قابل صرف‌نظر است.

(۲) خطا در تعیین نیروی کششی کابل BC:

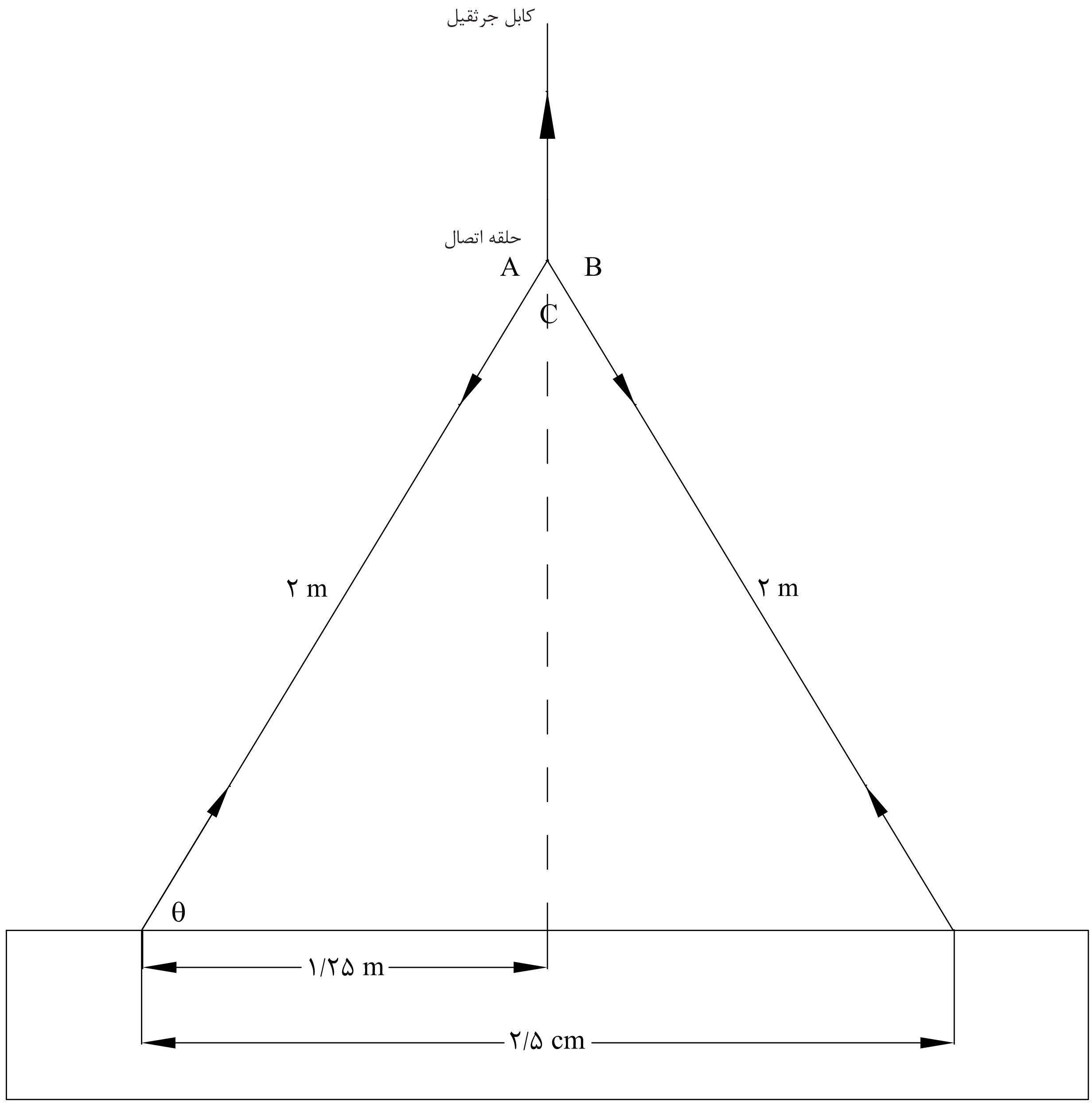
$$۳۶۸/۶ - ۳۶۸ = ۰/۶$$

$$\frac{۰/۶}{۳۶۸/۶} = ۰/۰۰۱۶۲ = \%./۱۶۲$$

خطای روش ترسیمی در تعیین نیروی کششی کابل BC برابر یکصد و شصت و دو هزارم درصد است، که قابل صرف‌نظر می‌باشد.

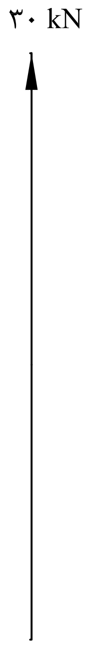
مثال: دو رشته کابل (مطابق شکل ۳۸-۳) هرکدام به طول ۲ متر برای بالا بردن شاسی یک موتور کوچک به جرم ۳/۰۵۸ تن استفاده می‌شوند. نیروی کششی در هر کابل چقدر است؟

حلّ ترسیمی: تفاوت این مثال با مثال قبلی در این است که در مثال قبلی بار آویزان بود ولی در این مثال بار به وسیله جرثقیل بالا برده می‌شود. در نتیجه نیروهای موجود در سیستم با مثال قبلی تفاوت دارند. کابل جرثقیل نیرویی به سمت بالا به حلقه اتصال وارد می‌کند. نیروی مزبور مساوی با وزن کل شاسی می‌باشد (از وزن کابل‌ها و حلقه‌های اتصال صرف‌نظر می‌شود). در نتیجه کابل جرثقیل تحت کشش قرار دارد. از انتهای فوقانی هر کدام از کابل‌های B و C نیرویی به سمت پایین به حلقه اتصال A وارد می‌شود. انتهای پایینی هر دو کابل B و C به شاسی متصل است و از محل اتصال به شاسی نیرویی به سمت بالا از طناب به نقاط اتصال وارد می‌شود.



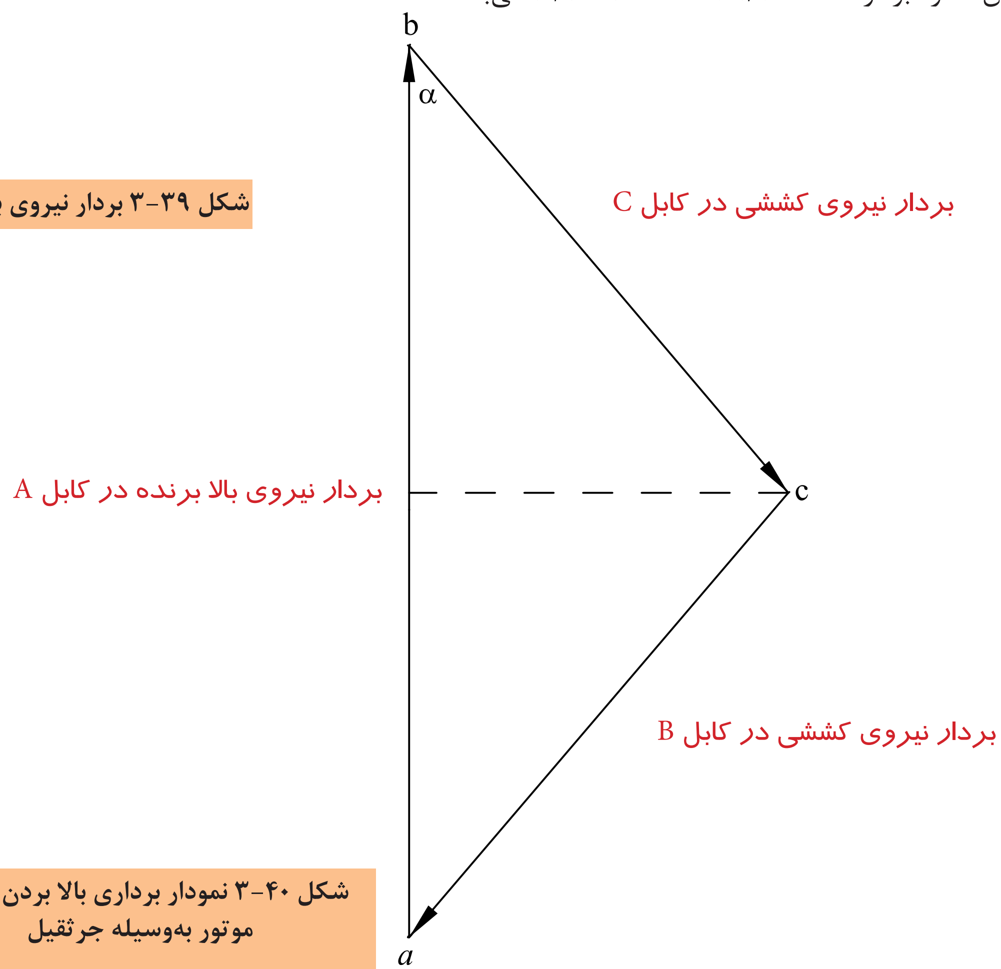
شکل ۳-۳۸ نمودار فضایی بالابردن شاسی موتور به‌وسیله جرثقیل

حال بردار نیروی بالابرنده را با توجه به این‌که می‌دانیم نیروی بالابرنده در کابل جرثقیل مساوی با نیروی وزن شاسی است مطابق شکل ۳-۳۹ رسم می‌کنیم. با توجه به این‌که جرم شاسی برابر ۳/۰۵۸ تن بوده است وزن شاسی (نیروی وزن آن) مساوی ۲۹۹۹۸/۹ = ۹/۸۱ × ۱۰۰۰ ^{۳} × ۳/۰۵۸ نیوتون یا تقریباً مساوی ۳۰۰۰۰ نیوتون یعنی ۳۰ کیلونیوتون(۳۰kN) می‌باشد. برای رسم بردار نیروی بالابرنده هر سه کیلو نیوتون را مساوی یک سانتی‌متر قرار می‌دهیم.



شکل ۳-۳۹ بردار نیروی بالابرنده در کابل A

نیروی بالابرنده در کابل A در واقع خنثی کننده برآیند دو نیروای است که کابل‌های متصل به شاسی (کابل‌های B و C) به حلقه اتصال وارد می‌کنند. بنابراین نمودار برداری کلیه کابل‌ها را می‌توان مطابق شکل ۴۰-۳ رسم نمود. برای رسم نمودار برداری سیستم ابتدا بردار بالابرنده در کابل A و سپس بردار نیروهای کششی در کابل‌های B و C را موازی با نیروها در یک مثلث رسم می‌کنیم (در این مثال هم هنوز نمی‌دانیم در چه نقطه‌ای بردارهای bc و ca یکدیگر را قطع می‌کنند، لذا بردارها را کمی بلندتر رسم می‌کنیم و پس از یافتن نقطهٔ تلاقی خطوط اضافی را پاک می‌کنیم). حاصل نمودار، یک مثلث متساوی‌الساقین است که طول ساق‌ها حدود ۶/۴ سانتی‌متر می‌باشد. چون هر سانتی‌متر را برابر ۳kN قرار دادیم پس اندازهٔ بردارها ۱۹/۲ kN = ۳ kN × ۶/۴ می‌باشد.



شکل ۴۰-۳ نمودار برداری بالا بردن شاسی موتور به‌وسیله جرثقیل

نتیجهٔ عملی از یافتن اندازهٔ نیروها این است که در این مسئله کابل‌ها و حلقه‌های اتصال باید به ترتیب برای کار با نیروهایی بزرگتر از ۳۰kN و ۱۹/۲kN انتخاب شوند.

حل محاسبه‌ای: در شکل‌های ۳۸-۳ و ۴۰-۳ از قلّاب جرثقیل خطی عمود بر شاسی رسم می‌کنیم. مثلث متساوی‌الساقین به دو مثلث راست گوشه تبدیل می‌شود. از شکل ۳۸-۳ اندازهٔ زاویه θ را به شرح زیر تعیین می‌کنیم.

$$\cos\theta = \frac{۱/۲۵}{۲} = ۰/۶۲۵$$

با مراجعه به جداول مثلثات اندازهٔ زاویه θ در حدود $۳۸°۴۱'$ می‌باشد. در نمودار فضایی (شکل ۳۸-۳) زاویه بین کابل‌های مورّب اتصال شاسی به قلّاب به شرح زیر قابل تعیین است:

$$\frac{۱}{۲}\ \text{زاویه بین دو کابل} = ۹۰-\theta$$

$$۹۰-۵۱°۱۹' = ۳۸°۴۱'$$

با کمی دقت در شکل‌های ۳۸-۳ و ۳۹-۳ ملاحظه می‌شود زاویه α در نمودار برداری همان زاویه $۳۸°۴۱'$ تعیین شده در نمودار فضایی است. اگر در نمودار برداری از نقطهٔ c خطی عمود بر ضلع مقابل رسم کنیم بردار ۳۰kN را به دو قسمت هرکدام به اندازهٔ ۱۵ kN تقسیم کرده‌ایم و می‌توانیم بنویسیم:

$$\cos\alpha = \cos ۳۸°۴۱' = \frac{۱۵\,\text{kN}}{\text{C یا B}}$$

C یا B مقدار نیروی کششی در هرکدام از کابل‌های مورب اتصال شاسی به قلّاب هستند.

$$\text{C یا B} = \frac{۱۵\ \text{kN}}{۰/۷۸۰۶} = ۱۹/۲۱۵۹$$

بنابراین با استفاده از روش ترسیمی اندازهٔ نیروی کششی هرکدام از کابل‌ها تقریباً برابر ۱۹/۲۲ کیلو نیوتون می‌باشد. ملاحظه می‌شود با وجود در نظر گرفتن تخمین در روش ترسیمی، تفاوت حاصل از روش ترسیمی و روش محاسبه ای حدود دو صدم کیلو نیوتون یا بیست نیوتون می‌باشد.

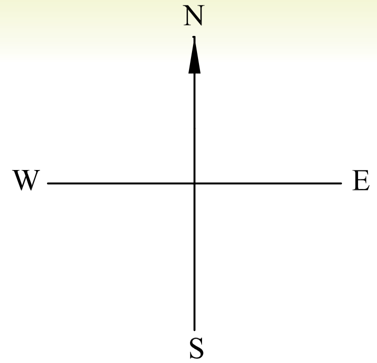
مثال: مطابق شکل ۴۱-۳ چهار نیروی کششی بر یک نقطه اثر می‌کنند. اندازه و جهت سه تا از نیروها به شرح زیر است.

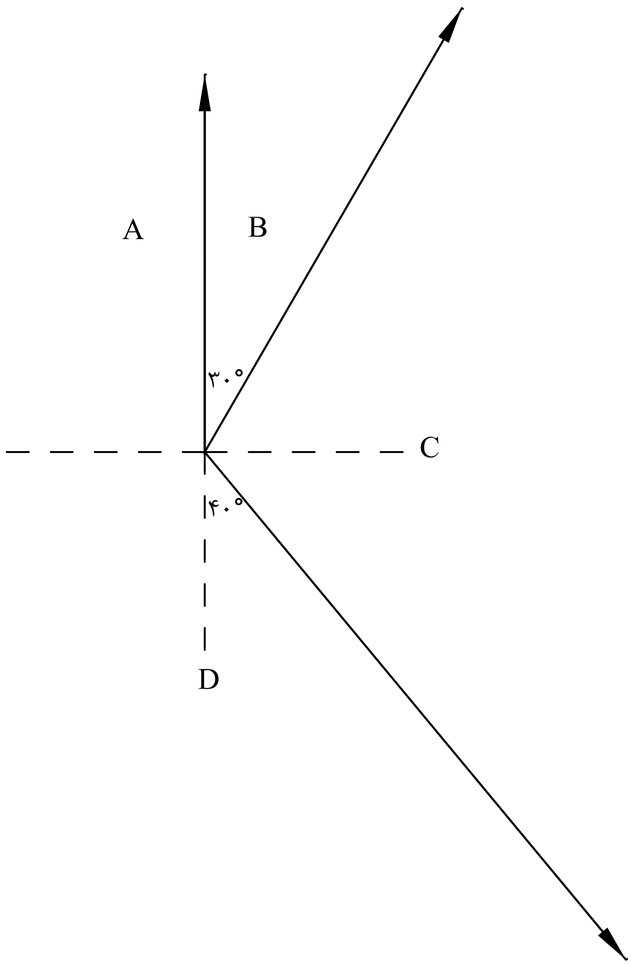
۱) نیروی ۱۲ نیوتون در جهت شمال

۲) نیروی ۱۵ نیوتون در جهت شمال‌شرقی که با محور عمودی زاویه ۳۰ درجه می‌سازد.

۳) نیروی ۲۰ نیوتون در جهت جنوب‌شرقی که با محور عمودی زاویه ۴۰ درجه می‌سازد.

اندازه و جهت نیروی چهارم را به‌طوری که سیستم در تعادل باشد از طریق ترسیمی و نیز از طریق محاسبه تعیین کنید.

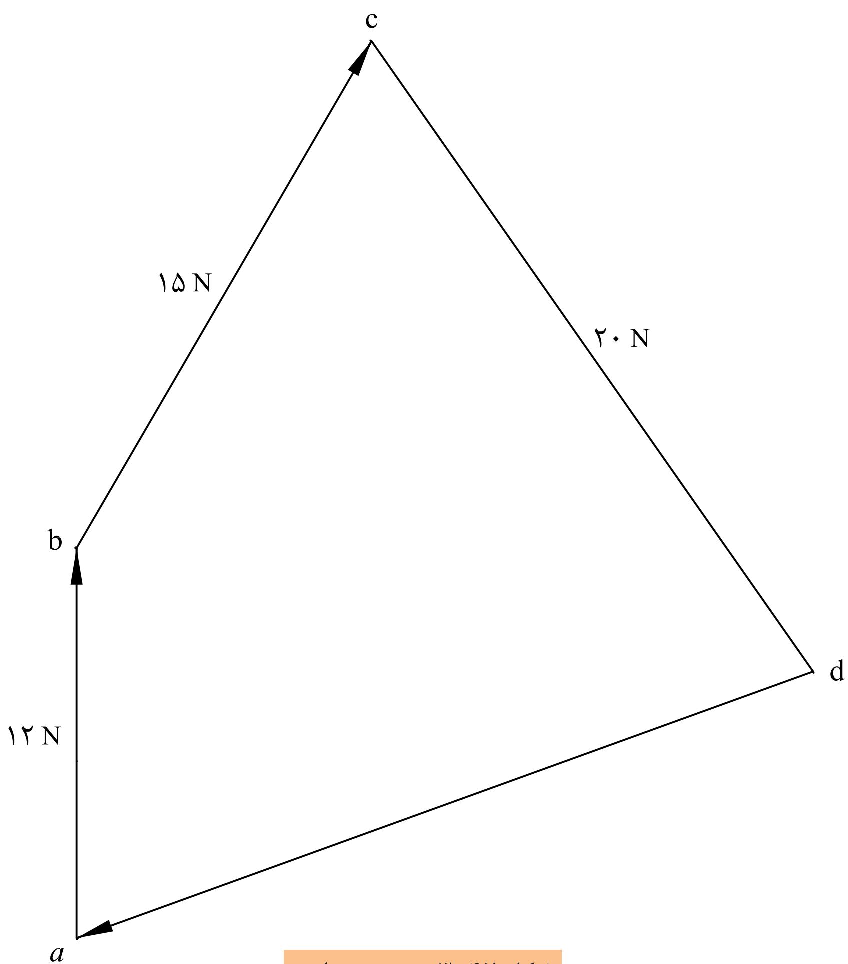




شکل ۴۱-۳

حل ترسیمی: برای ترسیم نمودار برداری مقیاس مناسبی انتخاب می‌شود. برای این مثال فرض می‌شود هر یک سانتی‌متر معرف دو نیوتون باشد. ابتدا بردار عمودی ab (به سمت بالا) به نمایندگی از نیروی ۱۲ N در جهت شمال رسم می‌شود. از نقطهٔ b بردار bc به نمایندگی از نیروی ۱۵ N که با محور عمودی دارای زاویه ۳۰ درجه در جهت شمال‌شرق است رسم می‌گردد. از نقطه c بردار cd معرف نیروی ۲۰N در جهت جنوب‌شرق با زاویه ۴۰ درجه با محور عمودی رسم می‌شود. چون سیستم در تعادل است نمودار برداری باید تشکیل یک چند ضلعی دهد. بنابراین نیروی چهارم به وسیله برداری نمایندگی می‌شود که نقطه d را به نقطه a وصل می‌کند. طول بردار da مساوی ۱۱/۲۵ سانتی‌متر است یعنی: ۲۲/۵ N = ۱۱/۲۵×۲ N. زاویه a برابر ۶۴/۵ درجه است (یعنی زاویه dab). جهت این نیرو جنوب غرب با زاویه ۶۴/۵ درجه با محور عمودی است. بنابراین می‌توان نوشت: اندازه نیروی معادل = ۲۲/۵ N s۶۴/۵°w

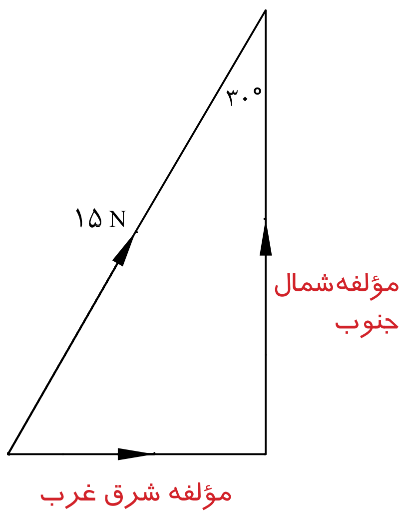
حل محاسبه‌ای: برای محاسبه اندازه بردار da از نمودار برداری شکل ۴۲-۳ می‌توان استفاده نمود. حل محاسبه‌ای از دو راه قابل انجام است. راه اول این‌که از نقطهٔ b خطی تا نقطه d رسم شود، ابتدا اندازه bd با استفاده از روابط مثلثاتی در مثلث bcd محاسبه و سپس در مثلث bda اندازه da تعیین شود.



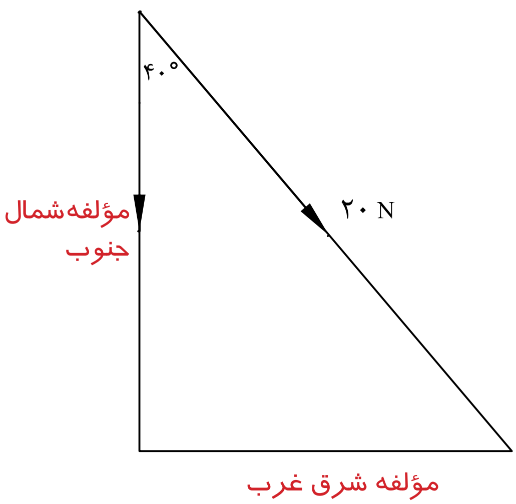
شکل ۴۲-۳- نمونه برداری

ولی یک راه حل ســاده‌تر وجود دارد. به این ترتیب که هر ســه بردار ۱۲، ۱۵ و ۲۰ نیوتون به مؤلفه‌های شمال جنوب و شرق غرب تبدیل شده و سپس نیروی معادل برآیند یا نیروی خنثی کننده برآیند آن مؤلفه‌ها به‌دست آید.

از شکل ۴۲-۳ ملاحظه می‌شود که بردار ۱۲ نیوتون فقط یک مؤلفه عمودی شمال جنوب دارد و فاقد مؤلفه شرق غرب است. ولی بردارهای ۱۵ و ۲۰ نیوتون دارای مؤلفه‌های شمال جنوب و شرق غرب هستند و لذا می‌توان شکل ۴۳-۳ را برای بردار ۱۵ نیوتون و شکل ۴۴-۳ را برای بردار ۲۰ نیوتون رسم نمود.



شکل ۴۳-۳- نمایش مؤلفه های بردار ۱۵ N



شکل ۴۴-۳- نمایش مؤلفه های بردار ۲۰ N

اندازهٔ مؤلفه‌ها به شرح زیر قابل تعیین است.

اندازه مؤلفه شمال جنوب بردار ۱۵ N = ۱۵ cos ۳۰° = ۱۲/۹۹ N در جهت شمال

اندازه مؤلفه شرق غرب بردار ۱۵ N = ۱۵ sin ۳۰° = ۷/۵ N در جهت شرق

اندازه مؤلفه شمال جنوب بردار ۲۰ N = ۲۰ cos ۴۰° = ۱۵/۳۲ N در جهت جنوب

اندازه مؤلفه شرق غرب بردار ۲۰ N = ۲۰ sin ۴۰° = ۱۲/۸۵۶ N در جهت شرق

مؤلفه‌های بردار ۱۲ N چنانچه قبلاً هم تعیین شد به شرح زیر است.

اندازه مؤلفه شمال جنوب بردار ۱۲ N = ۱۲

اندازه مؤلفه شرق غرب بردار ۱۲ N = ۰

برآیند مؤلفه‌های شمال جنوب عبارت است از:

۱۲/۹۹ (شمال) + ۱۲ (شمال) − ۱۵/۳۲ (جنوب) = ۹/۶۷ N (شمال)

برآیند مؤلفه‌های شرق غرب عبارت است از:

$7/5$ (شرق) + $12/856$ (شرق) = $20/356\,N$ (شرق)

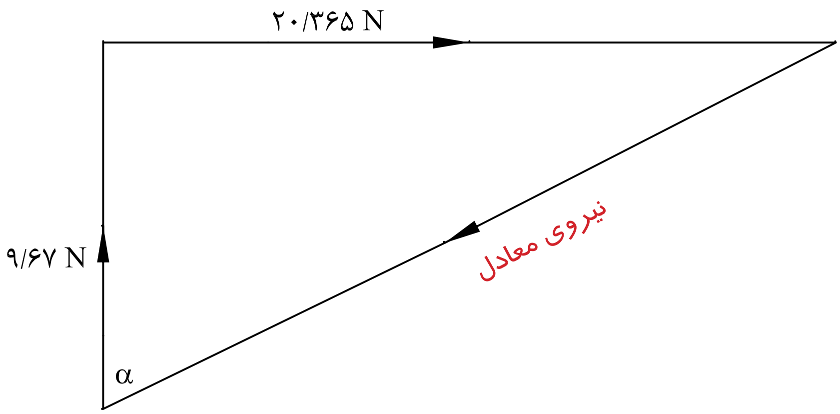
با استفاده از دو برآیند $9/67\,N$ و $20/356\,N$ شکل ۴۵-۳ قابل رسم است. مجدداً هر دو نیوتون مساوی یک سانتی‌متر فرض می‌شود. اینک اندازه نیروی معادل قابل تعیین است.

$$\text{اندازه نیروی معادل} = \sqrt{(9/67)^2 + (20/356)^2} = 22/54\,N$$

برای تعیین جهت نیروی معادل می‌توان نوشت:

$$\tan\alpha = \frac{20/356}{9/67} = 2/105$$
$$\Rightarrow \alpha = 64^\circ 36'$$

پس نیروی معادل نیروای است با اندازهٔ ۲۲/۵۴ نیوتون در جهت جنوب شرق با زاویه ۶۴ درجه و ۳۶ دقیقه



شکل ۴۵-۳ تعیین نیروی معادل

جرثقیل بازویی

نوع ساده جرثقیل بازویی شامل یک پایه، یک بازو و یک مهار می‌شود. پایه یک ستون عمودی است، انتهای پایینی بازو به قسمت زیرین پایه متصل می‌شود. «مهار» ارتباط بین قسمت بالایی بازو و پایه را برقرار می‌کند، محل اتصال مهار و بازو به سر جرثقیل موسوم است.

در مسائل مربوط به جرثقیل بازویی غالباً بار مستقیماً از سر جرثقیل آویزان در نظر گرفته می‌شود و در نتیجه یک مثلث ساده از سه نیرو تشکیل می‌شود. در مواردی قرقره‌ای در سر جرثقیل در نظر گرفته می‌شود و کابل بالابرنده بار از قرقره مزبور می‌گذرد و سر دیگر کابل به دوّاری که در پشت جرثقیل است متصل می‌باشد. (دوّار (Winch) دستگاهی است که موجب بالا بردن بار می‌شود). در این‌گونه موارد تعداد نیروها بیشتر از سه نیرو می‌باشد.

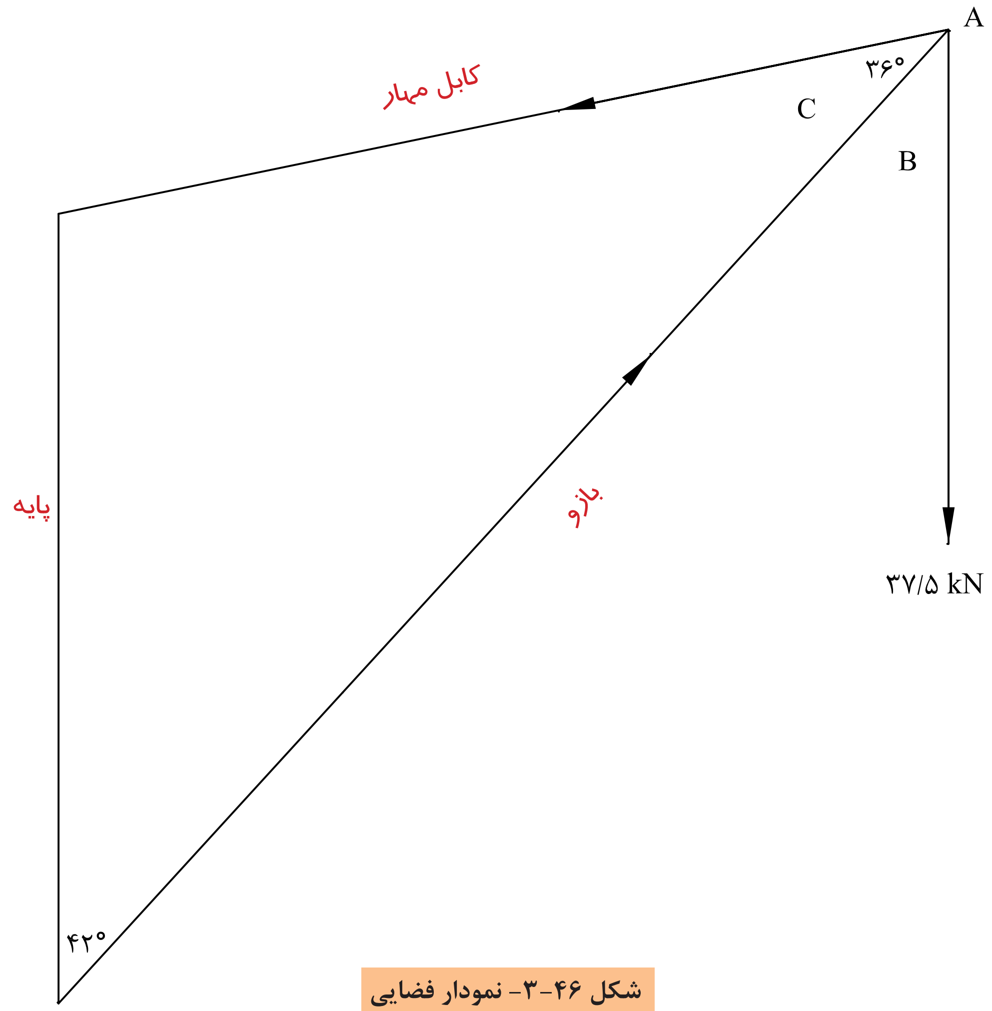
مثال: زاویه بین بازو و پایه یک جرثقیل بازویی برابر ۴۲ درجه و زاویه بین مهار و بازو مساوی ۳۶ درجه است. در صورتی که باری به جرم $۳/۸۲۲\times۱۰^{۳}\,kg$ از سر جرثقیل آویزان باشد، نیروهای واقع در بازو و مهار چقدر است؟

حل: نیروی عمودی وارد بر سر جرثقیل (به طرف پایین) برابر است با:

$$۳/۸۲۲\times۱۰^{۳}\times۹/۸۱\,N=۳۷/۵\times۱۰^{۳}\,N=۳۷/۵\,kN$$

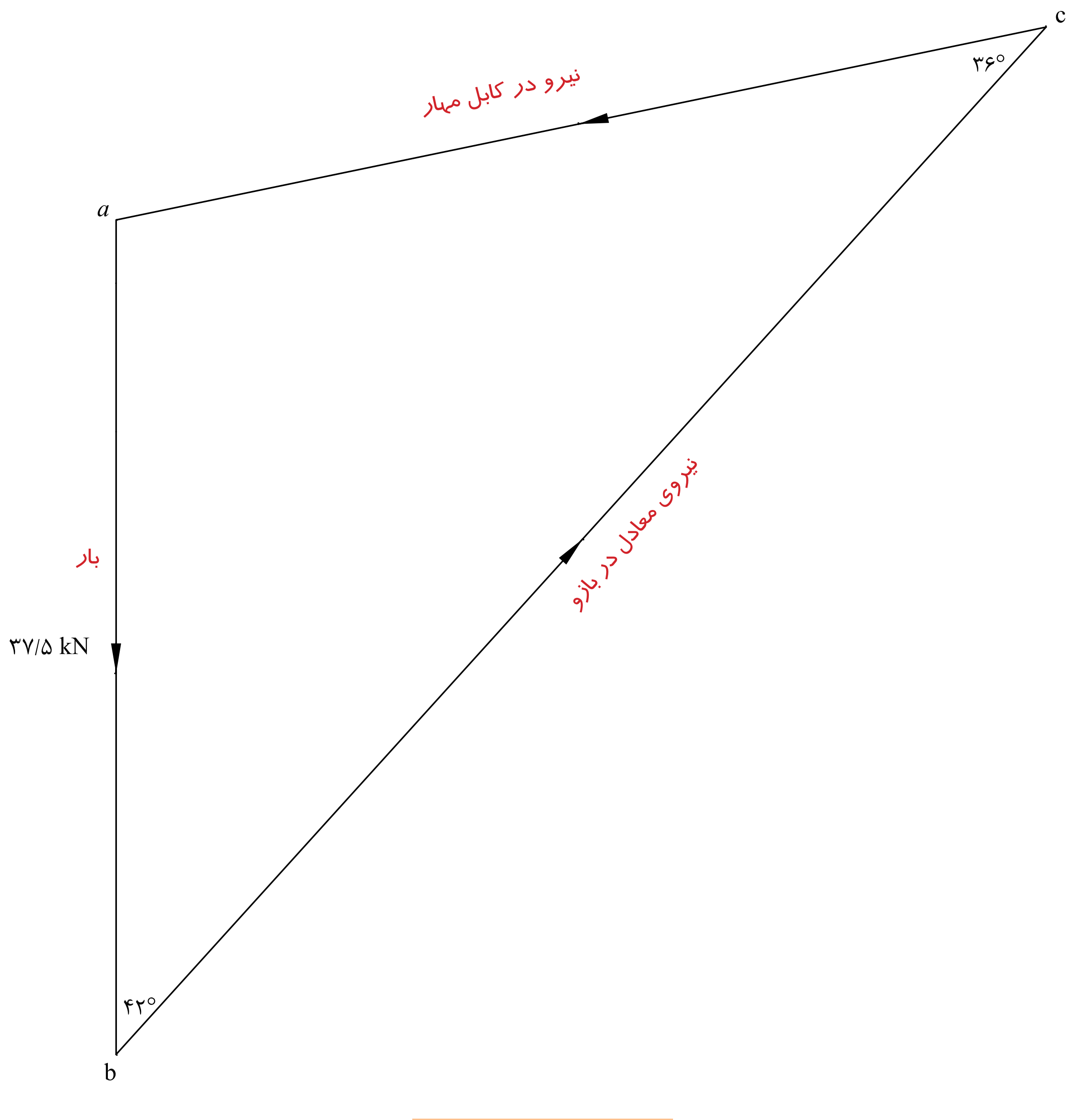
در سر جرثقیل سه نیرو با یکدیگر تلاقی دارند. از بازو به سر جرثقیل فشار وارد می‌شود تا بار آویزان در جای خود نگه‌داشته شود و کابل مهار برای نگهداشتن بازو در جای خود سر جرثقیل را به‌طرف چپ می‌کشد، بنابراین بازو به سر جرثقیل نیرو وارد می‌کند و نیروای از سر جرثقیل به‌طرف چپ در کابل مهار وجود دارد.

نمودار فضایی مطابق شکل ۴۶-۳ قابل رسم است و پیکان مربوط به هر نیرو، جهت نیرو را نشان می‌دهد. حال می‌توان نمودار برداری را طوری که هر سه نیروی وارده به سر جرثقیل را نشان دهد مطابق شکل ۴۷-۳ رسم نمود.



شکل ۴۶-۳- نمودار فضایی

برای رســم نمودار برداری ابتدا نیروی عمودی بار، ســپس نیروهای موجود در بازو و کابل مهار رسم می‌شوند. فعلاً تنها نیروی معلوم نیروی بار است (۳۷/۵ N). هر یک سانتی‌متر مساوی ۲/۵ کیلو نیوتون فرض می‌شود.



شکل ۴۷-۳ نمودار برداری

ملاحظه می‌شود نمودار برداری شکل ۴۷-۳ مثلثی است مشابه اسکلت جرثقیل. با توجه به نمودار برداری (شکل ۴۷-۳)

می‌توان نوشت: bac اندازه زاویه $= ۱۸۰ - (۴۲ + ۳۶) = ۱۰۲^\circ$

طبق قانون سینوس می‌توان نوشت:

$$\frac{\text{نیروی واقع در بازو}}{\sin ۱۰۲^\circ} = \frac{۳۷/۵}{\sin ۳۶^\circ}$$

$$\text{نیروی واقع در بازو} = \frac{۳۷/۵ \times ۰/۹۷۸۱}{۰/۵۸۷۸} = ۶۲/۴\ \text{kN}$$

$$\frac{\text{نیروی واقع در کابل مهار}}{\sin ۴۲^\circ} = \frac{۳۷/۵}{\sin ۳۶^\circ}$$

$$\text{نیروی واقع در کابل مهار} = \frac{۳۷/۵ \times ۰/۶۶۹۱}{۰/۵۸۷۸} = ۴۲/۶۹\ \text{kN}$$

مثـال: طـول پایــه و بازوی یک جرثقیل بازویی به ترتیب ۶/۵ و ۷ متر و زاویه بین پایه و بازو ۴۰ درجه اســت. باری به جرم ۲/۸۵۴ تن از کابلی که از روی قرقره سر جرثقیل می‌گذرد آویزان است و سر دیگر کابل تحت زاویه ۵۰ درجه با محور عمودی در دوار پشــت پایه قرار دارد. نمودار برداری نیروها را در ســر جرثقیل رسم کرده و نیروی واقع در بازو و کابل مهار اندازه‌گیری شود.

حـلّ: ابتدا نمودار واقعی فضایی مطابق شــکل ۴۸-۳ رســم می‌شــود. برای تعییــن اندازهٔ نیروی بــار مطابق زیر عمل می‌شود.

$$\text{جرم بار} = ۲/۸۵۴\ \text{tonnes} = ۲/۸۵۴ \times ۱۰^{۳}\ \text{kg}$$

$$\text{اندازه بار بر حسب نیوتون} = ۲/۸۵۴ \times ۱۰^{۳} \times ۹/۸۱$$

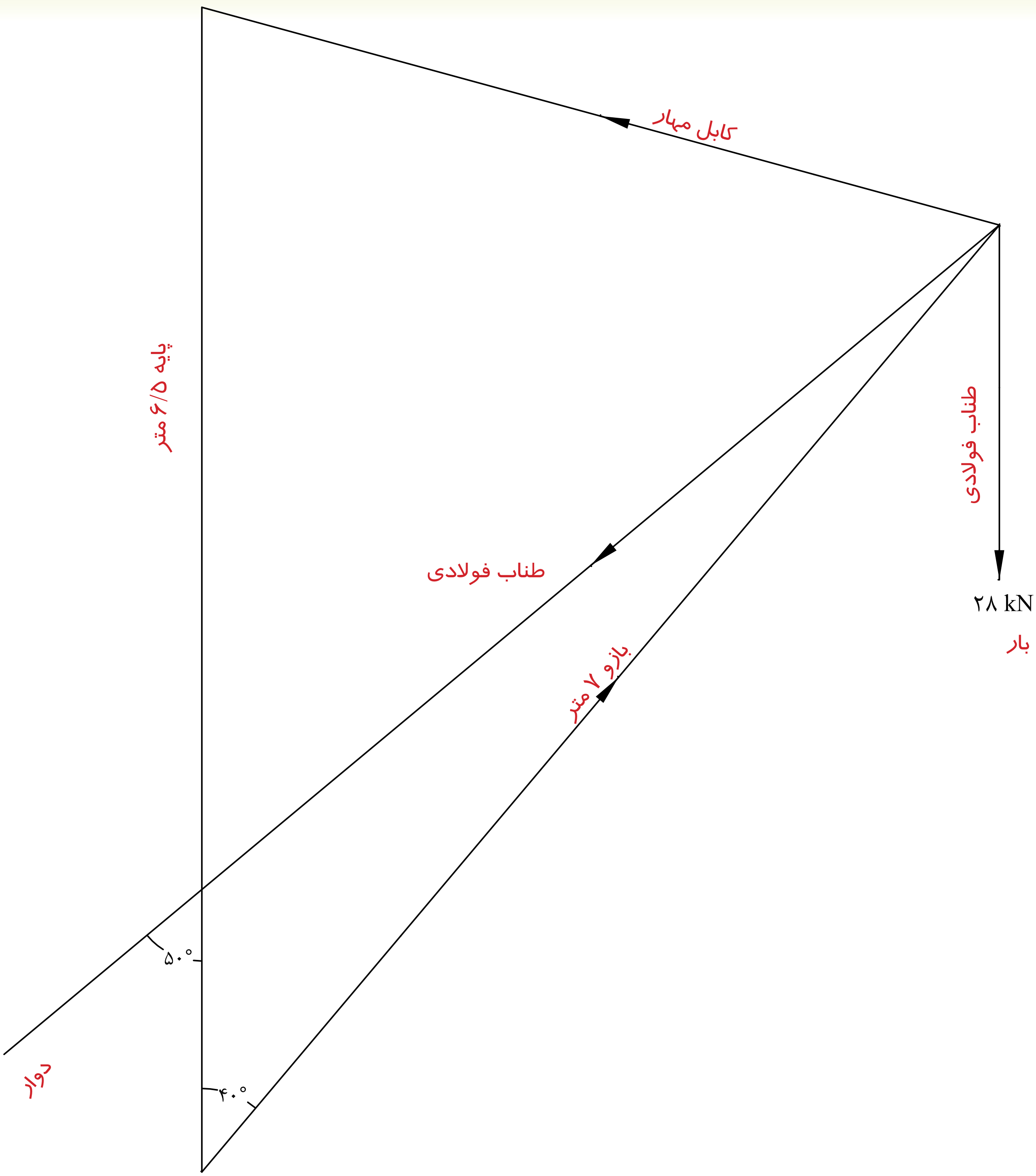
$$= ۲۷۹۹۷/۷۴\ \text{N} = ۲۸\ \text{kN}$$

اکنون می‌توان برای رسم نمودار برداری اقدام کرد.

برای رسم نمودار برداری، بردارها باید موازی با نیروهای واقع در کابل‌ها (طناب‌های فولادی)، بازو و کابل مهار باشند. از روی نمودار فضایی می‌توان ســایر زوایا را اندازه‌گیری نمود و در نمودار برداری اســتفاده کرد (این اندازه‌گیری‌ها با خط‌کش و نقاله انجام می‌شود).

نیروی واقع در در همه نقاط کابل یا طناب فولادی نگهدارنده بار یکســان و برابر ۲۸ kN اســت، به این ترتیب نیروی بار آویزان و نیروی کششی واقع در طناب فولادی از سر جرثقیل به دوّار ۲۸کیلو نیوتون می‌باشد.

در حل این‌گونه مسئله آسان‌تر است که هنگام رسم نمودار برداری، بردارهایی که اندازه‌شان معلوم است در پی هم رسم شــوند بدون آن‌که برداری با اندازهٔ نامعلوم در بین بردارهای معلوم قرار گیرد. مثلاً در نمودار فضایی شــکل ۴۸-۳ ملاحظه می‌شود؛



شکل ۴۸-۳ نمودار فضایی

۱) نیروی بار از سر جرثقیل به‌طرف پایین مساوی ۲۸ kN (اندازه معلوم) است.

۲) نیروی بازو به‌طرف بالا با زاویه ۴۰ درجه با محور عمودی و اندازهٔ نامعلوم است.

۳) نیروی کششی در کابل دوار مساوی ۲۸ kN (اندازهٔ معلوم) است.

۴) نیروی کششی در کابل مهار نامعلوم است.

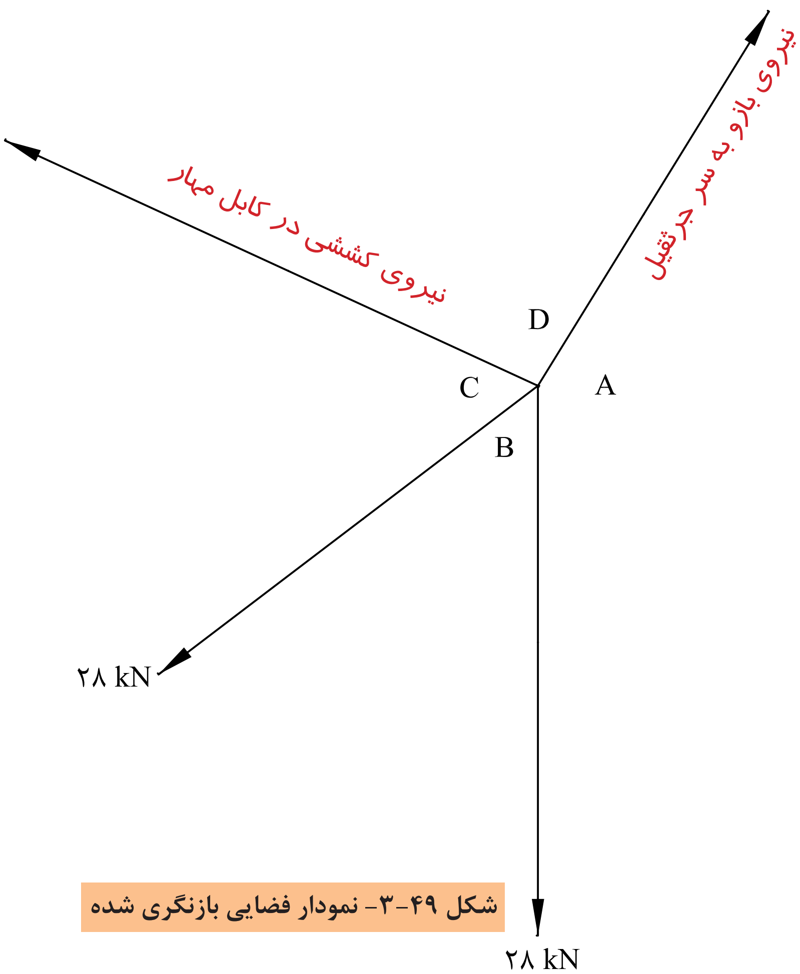
با توجه به نکات فوق می‌توان نمودار فضایی را برای مرتبه دوم طوری رسم نمود تا نیروهای معلوم در پی هم قرار گیرند. به این ترتیب که ابتدا نیروی عمودی بار رسم شود و سپس نیروی کششی در طناب فولادی از سر جرثقیل به دوّار و بعد سایر نیروها مطابق شکل ۴۹-۳ که نمودار فضایی بازنگری شده نام دارد رسم شود. فضاهای بین نیروها با حروف D ، C ، B ، A نام‌گذاری می‌شوند. اکنون با استفاده از نمودار فضایی بازنگری شده (شکل ۴۹-۳) نمودار برداری قابل رسم است. برای بردارهای معلوم هر چهار کیلو نیوتون برابر یک سانتی‌متر قرار داده می‌شود (لذا طول بردارهای معلوم ۷ سانتی‌متر است).

هر چهاربردار (چه بردارهای معلوم و چه بردارهای نامعلوم) دارای جهت معینی می‌باشند. محلّ تلاقی بردارهای نامعلوم موجب می‌شود که بردارهای نامعلوم قابل اندازه‌گیری شوند. در صورتی که رسم بردارها با دقت انجام شود و با توجه به این‌که هر چهار کیلو نیوتون برابر یک سانتی‌متر قرار داده شده است اندازهٔ بردارهای نامعلوم به شرح زیر به‌دست می‌آید.

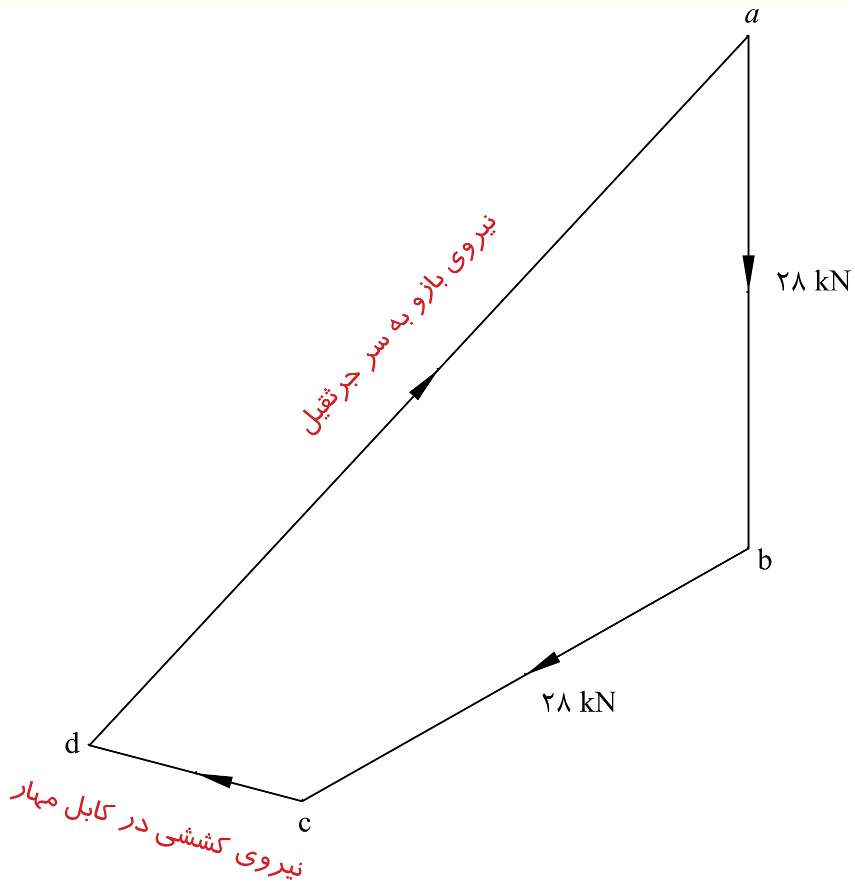
نیروی بازو به سر جرثقیل =۵۵/۴ kN

نیروی کششی در کابل مهار =۱۴/۶ kN

البته بدیهی است که نیروی بازو به سر جرثقیل درواقع نیروی معادل یا خنثی‌ساز برآیند سه نیروی دیگر موجود در این مسئله است.



شکل ۴۹-۳- نمودار فضایی بازنگری شده



شکل ۵۰-۳- نمودار برداری

تأثیر جریان آب بر سرعت و راه

اگر کشتی‌ای که در آب آرام حرکت می‌کند وارد محیطی با «جریان آب» شود سرعت و راه کشتی تغییر می‌کند. به این صورت که سرعت و راه جدید کشتی برآیند کار پروانه و تیغه سکان در آب آرام به علاوه سرعت جریان آب می‌باشند.

واژه «تندی» دارای دو مشخصه سرعت و جهت است. این دو مشخصه قابل اندازه‌گیری بوده و در نتیجه «تندی» یک کمیت‌برداری است (در فصل قبل نیز به این مطلب اشاره شده است) و با بردار نشان داده می‌شود. طول «بردار تندی» طوری اندازه‌گیری می‌شود که سرعت را نشان دهد. در واقع نمودار بردار تندی مانند نمودار بردار نیرو رسم می‌شود.

مثال: یک کشتی با سرعت ۱۶ گره دریایی در جهت شمال وارد محیطی با جریان آب به‌سرعت ۴ گره دریایی به سمت جنوب شرقی می‌شود. مطلوب است برآیند سرعت و راه کشتی.

حل: مطلب مهم در این مثال جهت جریان آب است. وقتی گفته شود جهت جریان جنوب شرقی است به این معنی است که جهت جریان با محور افقی در ناحیه SE دارای زاویه ۴۵ درجه است (البته چون زاویه ۴۵ درجه نصف زاویه ۹۰

درجه است در این مثال زاویه جریان با محور عمودی هم ۴۵ درجه می‌باشد). بنابراین نمودار فضایی مطابق شکل ۵۱-۳ رسم می‌شود.

نمودار برداری مطابق شکل ۵۲-۳ قابل رسم است. نمودار برداری سرعت و جهت اولیه کشتی (یعنی سرعت و جهت در آب آرام) و سرعت و جهت جریان آب که کشتی وارد آن می‌شود را نشان می‌دهد. بردار برآیند همانطور که قبلاً گفته شد برآیند سرعت و جهت است که «برآیند تندی» نامیده می‌شود.

در نمـــودار برداری دو ضلع مثلث و زاویه بین آنها معلوم و معین هســـتند. با اســـتفاده از قانون کسینوس اندازهٔ ضلع ســـوم و با استفاده از قانون سینوس جهت (زاویه بین بردار برآیند و محور عمودی) محاسبه می‌شوند. مطابق قانون کسینوس می‌توان نوشت؛

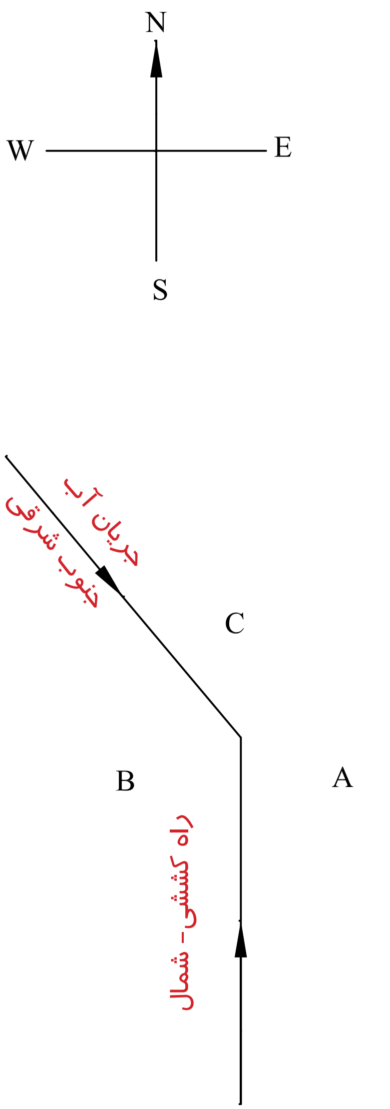
$$a^۲ = b^۲ + c^۲ - ۲bc\cos A$$

قانون کسینوس برای مثلث شکل ۵۲-۳ به‌صورت زیر نوشته می‌شود؛

$$\begin{aligned}(ac)^۲ &= (ab)^۲ + (bc)^۲ - ۲(ab)(bc)\cos\beta \\ &= ۱۶^۲ + ۴^۲ - ۲\times۱۶\times۴\cos ۴۵^\circ \\ &= ۲۵۶ + ۱۶ - ۹۰/۵۱ = \sqrt{۱۸۱/۴۹} \\ &\Rightarrow ac = ۱۳/۴۷ \text{ گره دریایی}\end{aligned}$$

مطابق قانون سینوس می‌توان نوشت؛

$$\frac{۴}{\sin\alpha} = \frac{۱۳/۴۷}{\sin ۴۵^\circ} \Rightarrow \sin\alpha = ۰/۲۱$$
$$\alpha = ۱۲^\circ ۷'$$

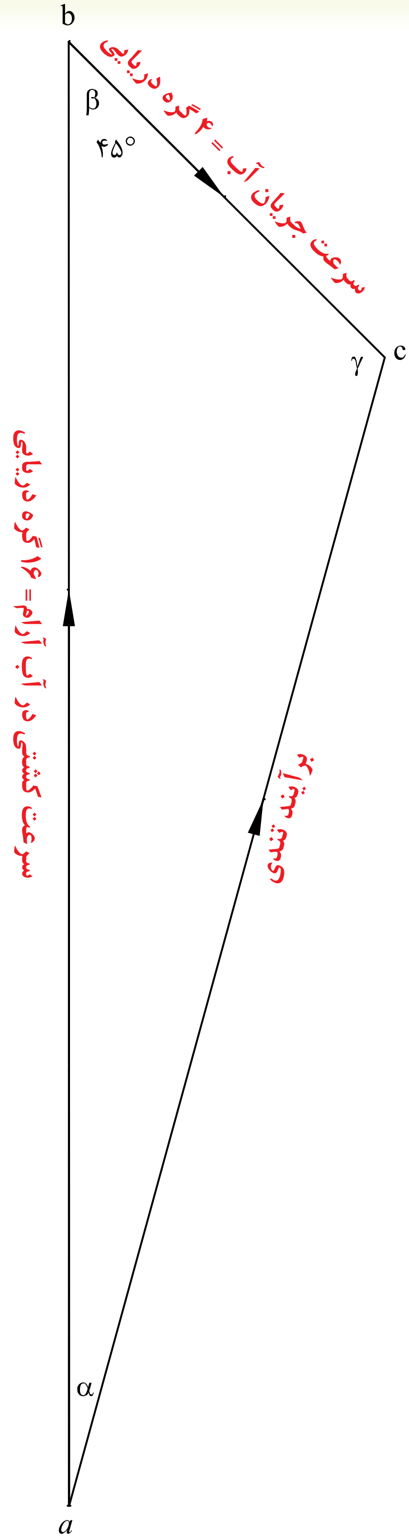


شکل ۵۱-۳ نمودار فضایی

بنابراین برآیند سرعت (سرعت کشتی در جریان آب) و راه کشتی به شرح زیر می‌باشند.

سرعت کشتی در جریان آب = ۱۳/۴۷ گره دریایی

راه کشتی در جریان آب $= ۱۲^\circ ۷'$



شکل ۵۲-۳ نمودار فضایی

عضوهای سازه ساده

هر سازه ساده از تعدادی تیر و ستون‌های راست تشکیل می‌شود. هر عضو در دو انتهای خود به عضو دیگر متصل است. اگرچه ممکن است اتصال به وسیله جوش یا پرچ اجرا شود ولی معمولاً در طراحی فرض می‌شود که اتصال به‌وسیله پین یا لولا برقرار می‌گردد طوری که هر عضو یا مستقیماً تحت کشش است یا تحت تراکم.

اگر نیروهای بیرونی که به دو انتهای یک عضو وارد می‌شوند تمایل به کوتاه کردن عضو داشته باشند، عضو تحت تراکم محســوب می‌شــود و «عضو تراکمی» نامیده می‌شــود. در این عضو نیروهای عکس‌العملی به طرف بیرون به دو انتهای عضو وارد می‌شوند (مانند شکل الف ۵۳-۳).

الف ـ دو انتهای این عضو تحت تراکم قرار دارند. این عضو، عضو تراکمی نامیده می‌شود. جهت نیروهای بیرونی به طرف داخل و جهت نیروهای عکس‌العملی داخلی به طرف بیرون است.

شکل ۵۳-۳ (الف)

ب ـ دو انتهای این عضو تحت کشش قرار دارند. این عضو، عضو کششی نامیده می‌شود. جهت نیروهای بیرونی به طرف بیرون و جهت نیروهای عکس‌العملی داخلی به طرف داخل است.

شکل ۵۳-۳ (ب)

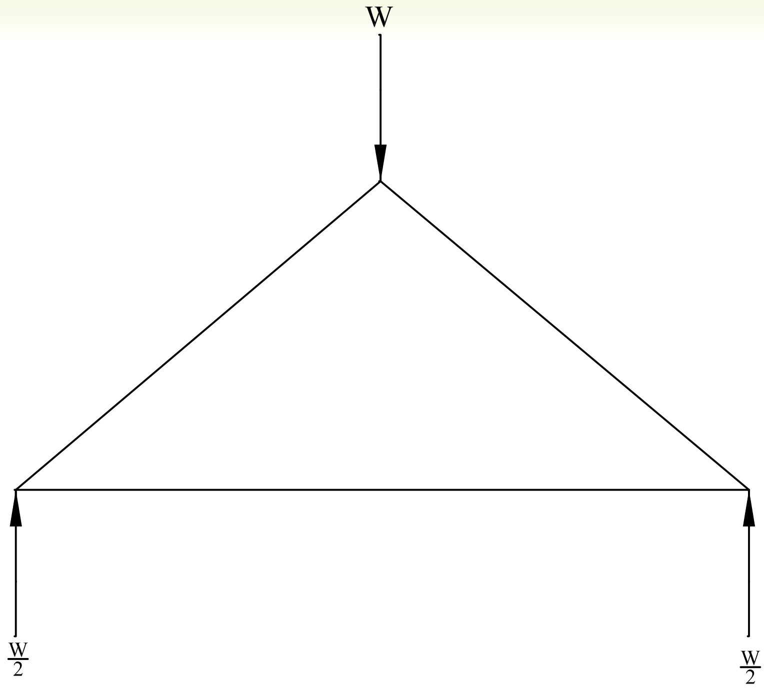
اگر نیروهای بیرونی که به دو انتهای یک عضو وارد می‌شود تمایل به طویل کردن عضو داشته باشند، عضو تحت کشش محســوب می‌شــود و «عضو کششی» نامیده می‌شــود. در این عضو نیروهای عکس‌العملی دو انتهای عضو را به طرف داخل می‌کشند (مانند شکل ب ۵۳-۳).

تحلیل سازهٔ ساده

یک سازهٔ ساده و متقارن سقف شیروانی یک خانه (در واقع یک خرپای ساده) را مطابق شکل ۵۴-۳ ملاحظه می‌کنیم. این سازه از یک تیر افقی و دو تیر شیب‌دار تشکیل شده است. فرض می‌شود انتهای تیرها با پین به یکدیگر متصل هستند

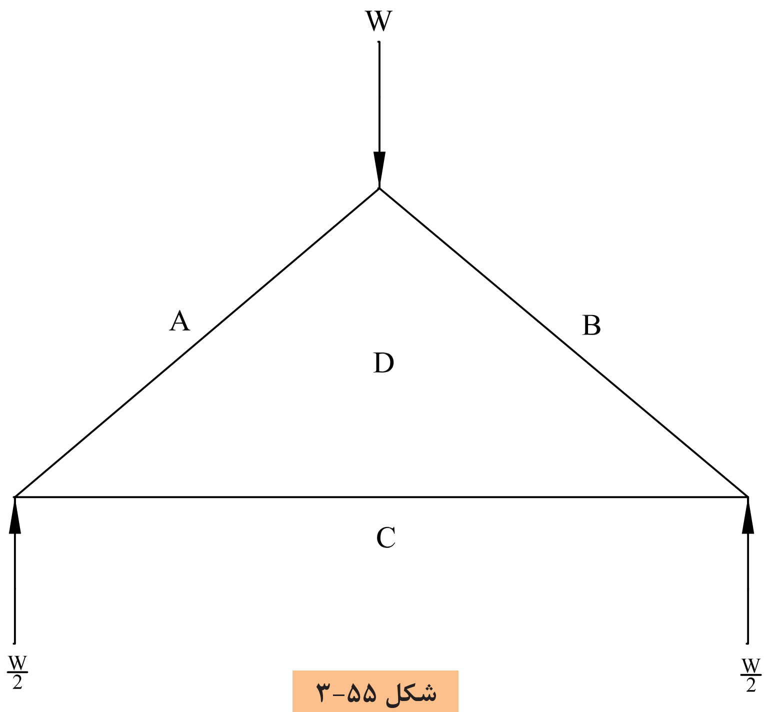
و بــاری بــه انــدازه W به رأس ســازه وارد می‌شود. ســازه در دو نقطه دارای تکیه‌گاه است و نیروی عکس‌العمل هر تکیه‌گاه مساوی با نصف W می‌باشد.

با اســتفاده از روش نامگذاری، ابتدا فضای مابین نیروهای بیرونی نامگذاری می‌شــود. A بــه عنــوان فضــای بین تکیــه‌گاه چپ و بــار W ، B به عنون فضای بین تکیه‌گاه راست و بار W ، C به عنوان فضای بیــن دو تکیه‌گاه و D به عنوان فضــای داخل خرپا نامگذاری می شوند.



شکل ۵۴-۳

به این ترتیب شکل ۵۵-۳ حاصل می‌شود.

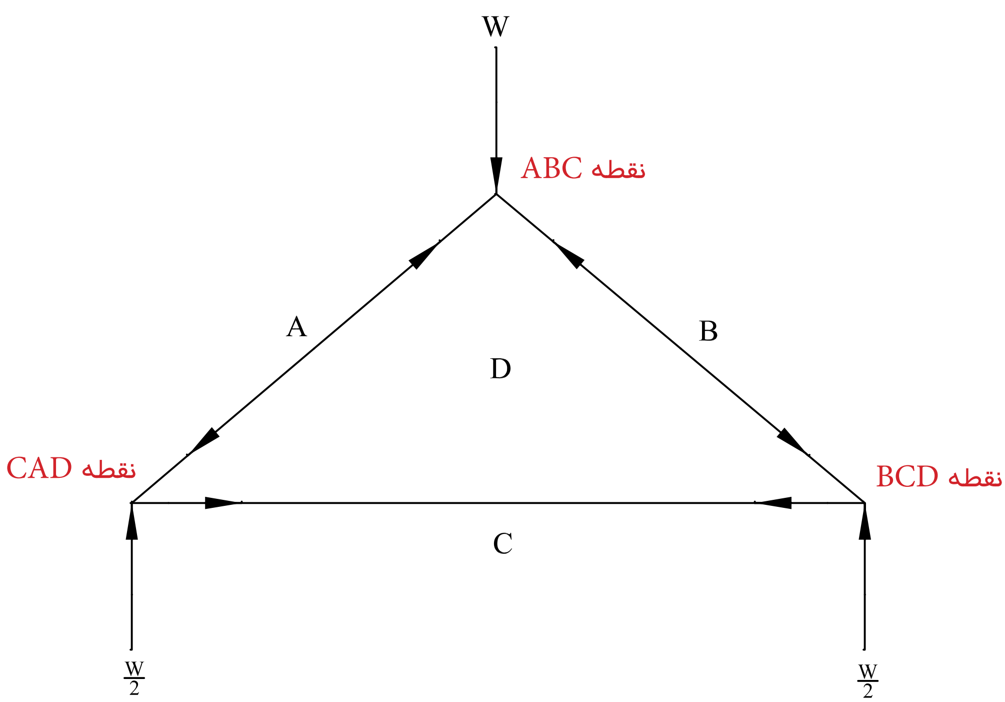


شکل ۵۵-۳

اکنون پیکان‌های نشان دهندهٔ جهت نیروها در هر یک از نقاط تقاطع رسم می‌شود. پیکان‌ها با دلیل گذارده می‌شوند. نقطه برخورد نیروها در تکیه‌گاه سمت چپ نقطه CAD، نقطه برخورد نیروها در تکیه‌گاه سمت راست نقطه BCD و نقطه برخورد نیروها در رأس نقطه ABD نامیده می‌شود.

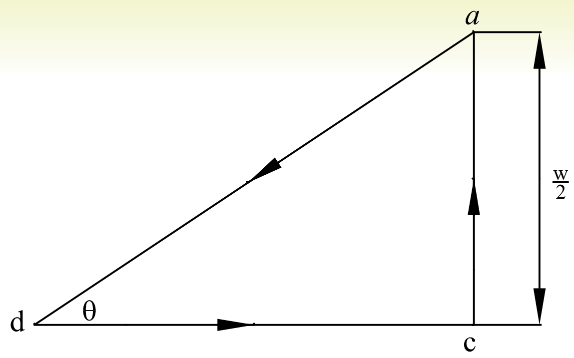
تکیه‌گاه سمت چپ در نقطه CAD به سمت بالا نیرو وارد می‌کند. اندازهٔ این نیرو (نیروی عکس‌العمل در نقطه CAD) مساوی $\frac{W}{۲}$ است. برای این‌که این نقطه در تعادل باشد باید نیروای از بالا به پایین وجود داشته باشد. عضو افقی دارای نیروای با مؤلفه عمودی نیست. بنابراین عضو مورب سمت چپ باید به نقطه CAD نیرو وارد کند، نیروی وارده ازعضو مورب سمت چپ بر نقطه CAD دارای دومؤلفه عمودی و افقی است. جهت مؤلفه عمودی به طرف پایین و جهت مؤلفه افقی به سمت چپ است. پس برای این‌که نقطه تقاطع عضو مورب سمت چپ و عضو افقی در تعادل باشد، باید نیروای افقی در جهت راست بر عضو افقی وارد شود. لذا پیکان عضو مورب به جهت پایین و پیکان عضو افقی به جهت راست رسم می‌شوند.

با استفاده از همین شیوه، پیکان‌های نشان‌دهندهٔ جهت نیروها در نقطهٔ تقاطع سمت راست (نقطهBCD) هم رسم می‌شوند. باید توجه کرد دو پیکان یک عضو حتماً در جهت‌های مخالف هم رسم می‌شوند، چون هر عضو یا تحت کشش و یا تحت تراکم می‌باشد. شکل ۵۶-۳ هر سه عضو را با پیکان‌ها نشان می‌دهد.

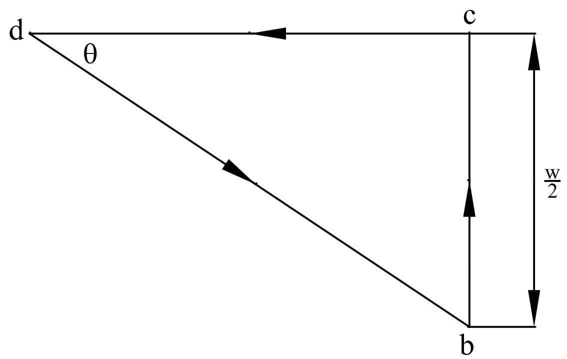


شکل ۵۶-۳

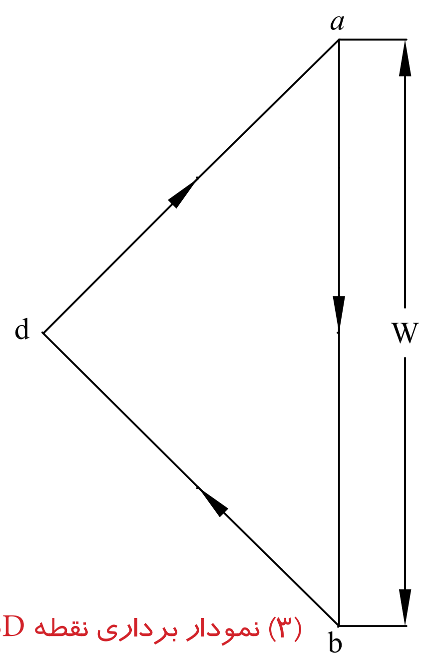
حال مطابق شکل ۵۷-۳ نمودار برداری برای هر نقطه تقاطع به طور جداگانه رسم می‌شود.



(۱) نمودار برداری نقطه CAD



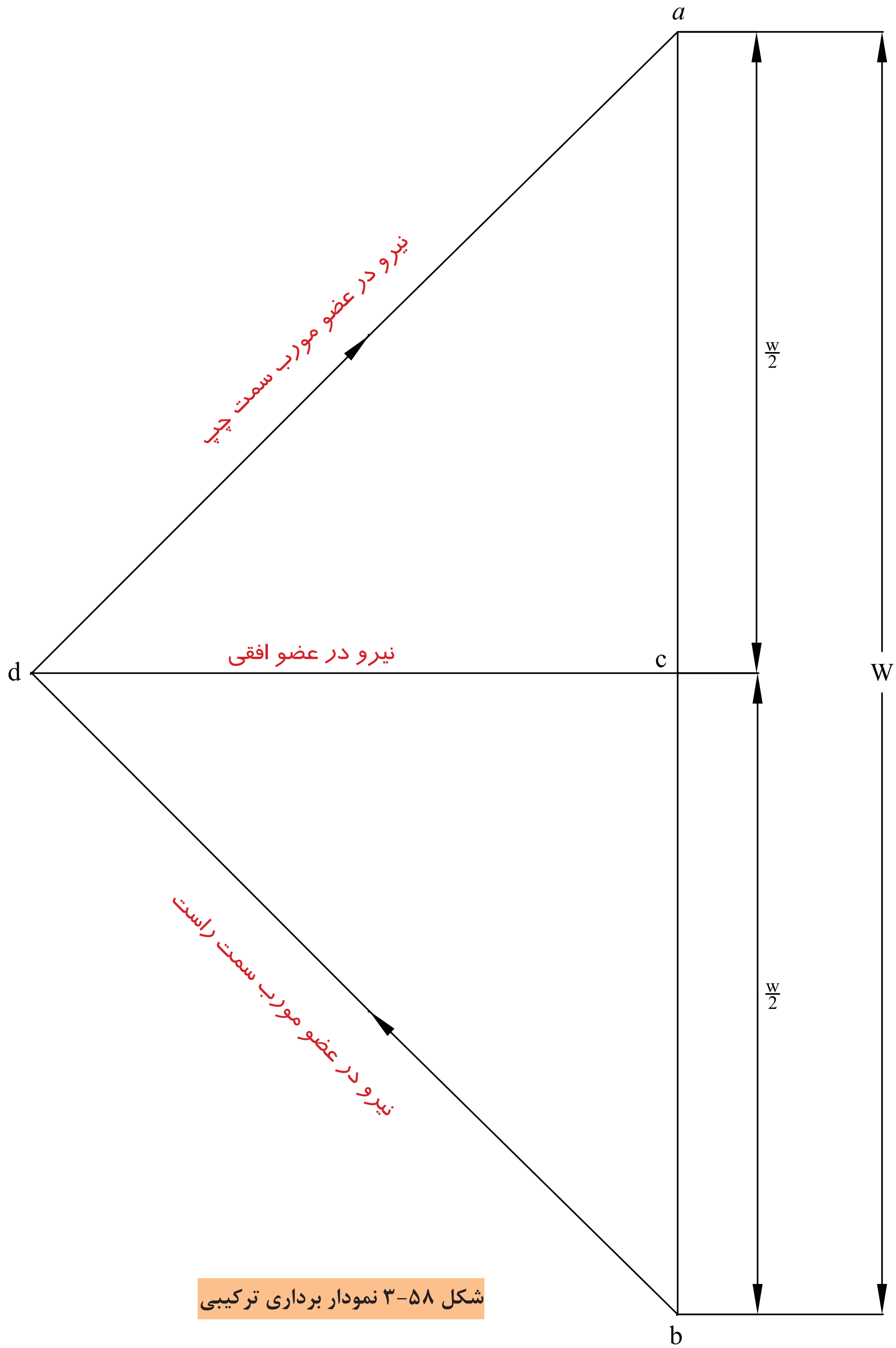
(۲) نمودار برداری نقطه BCD



(۳) نمودار برداری نقطه ABD

شکل ۵۷-۳

با قرار دادن نمودارهای (۱) و (۲) روی نمودار (۳) یک نمودار جدید حاصل می‌شود که نمودار برداری ترکیبی نام دارد (شکل ۵۸-۳).



شکل ۵۸-۳ نمودار برداری ترکیبی

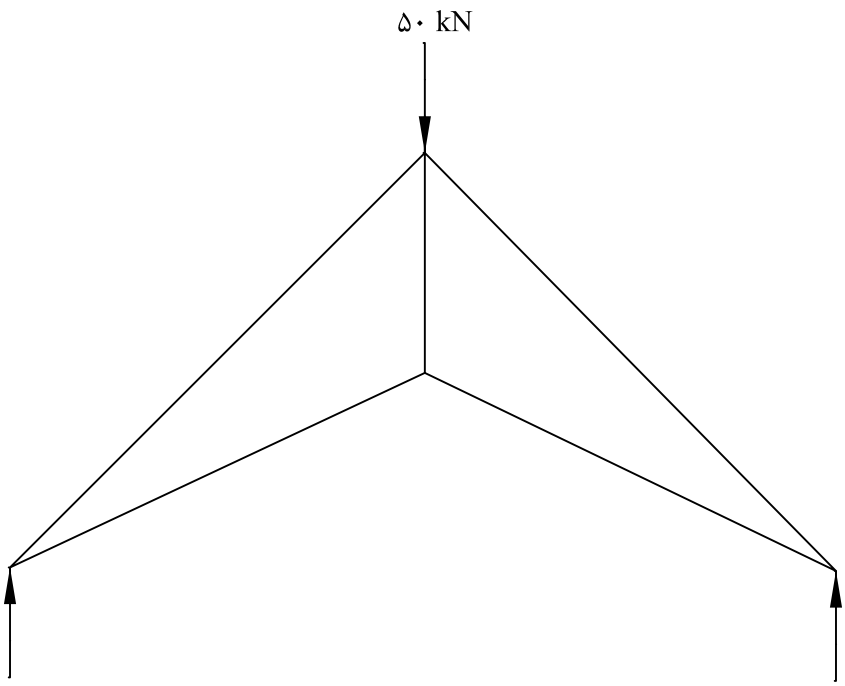
در این نمودار ترکیبی پیکان‌های نشان‌دهنده جهت نیروها حذف می‌شوند زیرا هرکدام از تیرهای سازه در هر دو نقطه انتهای خود نیروهایی در جهت مخالف به وجود می‌آورند.

با توجه به این‌که طول ab، bc و ca متناسب با مقدار W و $\frac{W}{۲}$ رسم می‌شود اندازه نیروهای موجود در هر کدام از تیرهای افقی و مورب قابل اندازه‌گیری می‌باشد.

حال می‌توانیم روش آسانی برای رسم نمودار برداری ترکیبی خرپای ساده شکل ۵۴-۳ معرفی کنیم. به این ترتیب که ابتدا بردار نیروهای بیرونی را رسم می‌کنیم. اولین نیرو، نیروی بار W است که به صورت خط عمودی ab قابل رسم است. سپس از نقطه b به اندازه $\frac{W}{۲}$ روی خط ab بالا می‌رویم و نقطه c را تعیین می‌کنیم. bc نشان‌دهندهٔ نیروی عکس‌العمل تکیه‌گاه راست و ca نشان‌دهندهٔ نیروی عکس‌العمل تکیه‌گاه چپ است.

اکنون می‌توانیم نمودار برداری هر نقطه تقاطع را رسم کنیم تا نمودار برداری ترکیبی حاصل شود. در مثال بعدی رسم این نمودار را تمرین می‌کنیم.

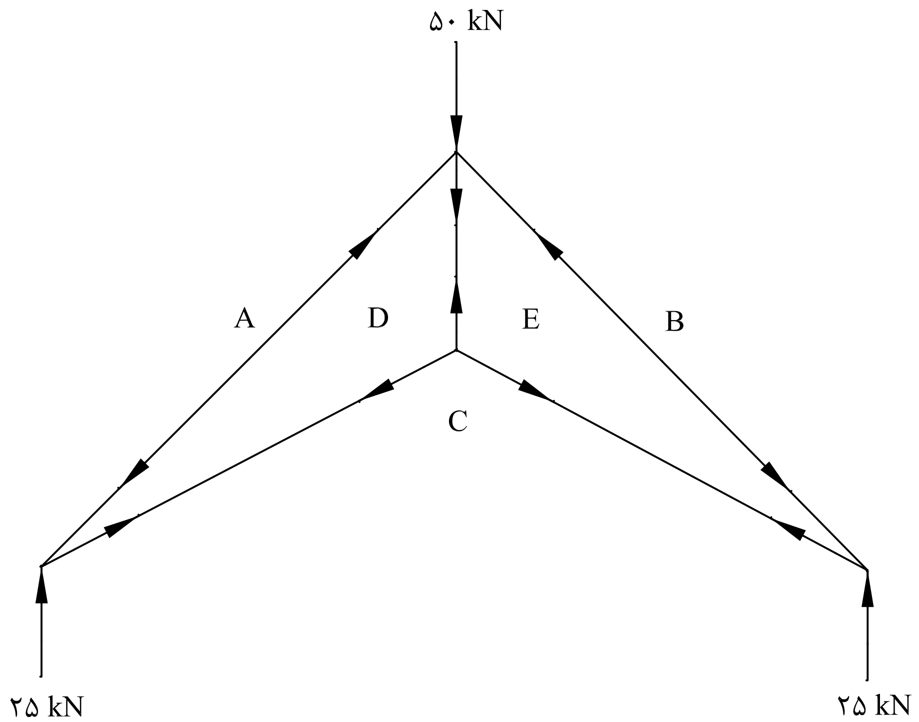
مثال: در شکل ۵۹-۳ نقشه ساده و بدون اندازه سازه یک سقف شیروانی ملاحظه می‌شود. عضوهای شیب‌دار پایینی با زاویه ۱۵ درجه و عضوهای شیب‌دار بالایی با زاویه ۴۵ درجه با محور افقی بنا شده‌اند. سازه در دو طرف دارای تکیه‌گاه است و باری به اندازه ۵۰kN از رأس سازه وارد می‌شود. نمودار برداری سازه را رسم کرده، نیروی موجود در هر عضو را اندازه‌گیری کنید. برای هر عضو تعیین کنید که تحت کشش است یا تحت تراکم.



شکل ۵۹-۳ - نمودار فضایی

راه حل:

بـا توجه به متقارن بودن سـازه هـر تکیه‌گاه نیمی از بار یعنـی ۲۵ kN را تحمل می‌کند. مطابق شـکل ۶۰-۳ نمودار فضایی قابل رسـم اسـت. در نمودار فضایی ابتدا نیروهای بیرونی را رسـم می‌کنیم و فضاها را نامگذاری می‌نماییم. سپس با استدلال جهت نیروهای موجود در هر عضو را تعیین و پیکان نشان‌دهنده جهت را درج می‌کنیم.



شکل ۶۰-۳ - نمودار فضایی

برای رسم نمودار برداری به صورت زیر عمل می‌کنیم (شکل ۶۱-۳)

(۱) ab بردار بار ۵۰ kN می‌باشد که به رأس سازه وارد شده است.

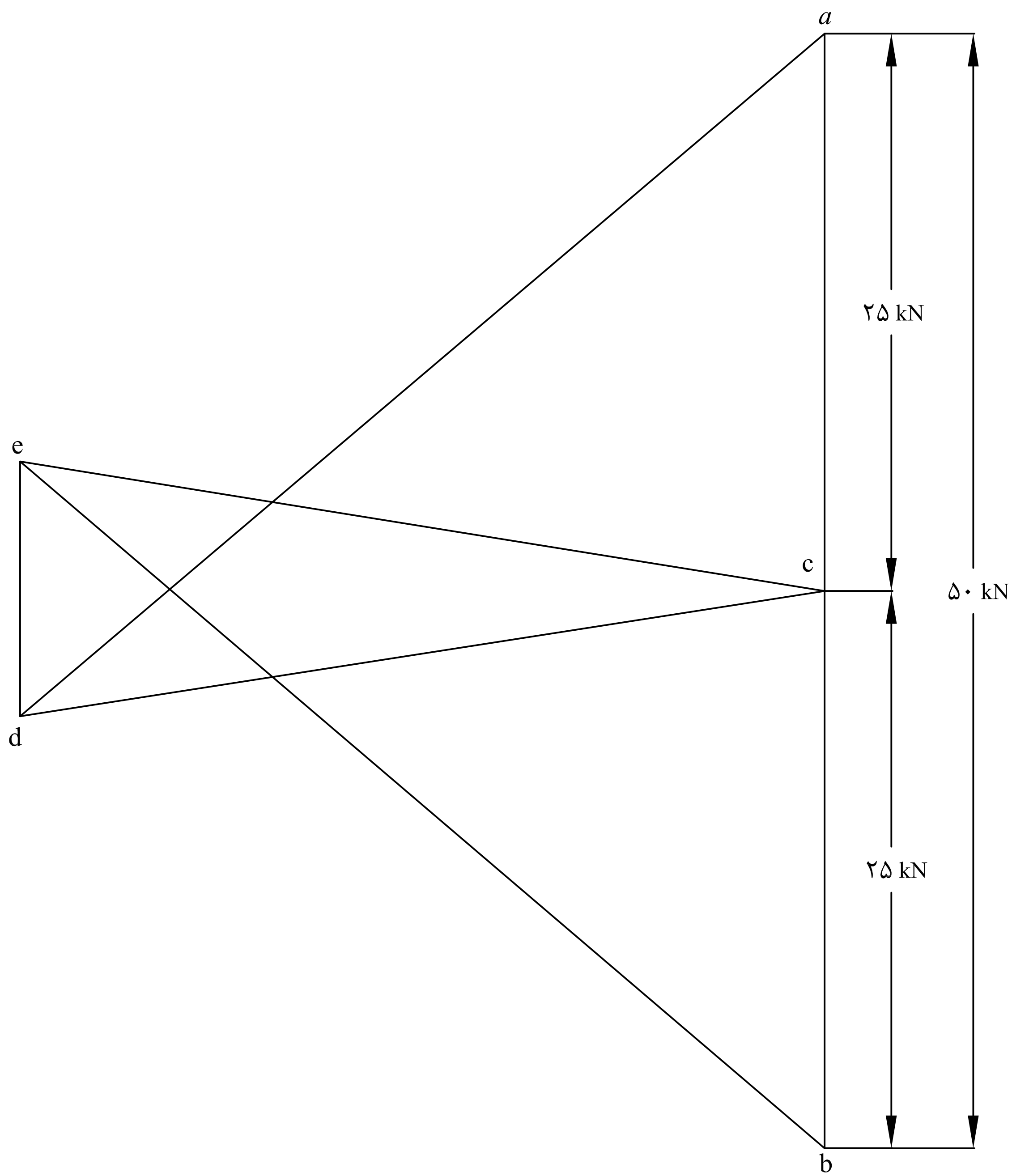
(۲) bc و ca به ترتیب بردار نیروهای عکس‌العمل تکیه‌گاه‌ها می‌باشند.

(۳) نمودار برداری نقطه تقاطع CAD به صورت بردار ab موازی عضو شـیب‌دار بالایی سـمت چپ از نقطه a و بردار cd موازی با عضو شیب‌دار پایینی سمت چپ از نقطه c رسم می‌شوند.

(۴) نمودار برداری نقطه تقاطع BCE به صورت بردارهای be و ce رسم می‌شوند.

(۵) برای رسم نمودار برداری نقطه تقاطع DEC بردار de موازی با عضو عمودی سازه رسم می‌شود. سایر بردارهای این نقطه یعنی ec (موازی با عضو شـیب‌دار پایینی سـمت راسـت) و cd (موازی با عضو شیب‌دار پایینی سمت چپ) قبلاً رسم شده‌اند.

۶) ملاحظه می‌شود نمودار برداری نقطه ABED (رأس سازه) با اجرای موارد فوق رسم شده است.



شکل ۶۱-۳

با اندازه‌گیری نیروها مطابق مقیاسی که انتخاب می‌کنیم (مثلاً هر سانتی‌متر مساوی ۲/۵ کیلو نیوتون) و با توجه به جهت نیروها اندازه نیروی موجود در هر عضو و نیز تحت کشش یا تحت تراکم بودن عضو به شرح زیر مشخص می‌شود.

عضو	اندازه نیرو	نوع نیرو
AD (عضو شیب‌دار بالایی سمت چپ)	(بر عهده دانش‌آموز)	تراکمی
BE (عضو شیب‌دار بالایی سمت راست)	(بر عهده دانش‌آموز)	تراکمی
DC (عضو شیب‌دار پایینی سمت چپ)	(بر عهده دانش‌آموز)	کششی
EC (عضو شیب‌دار پایینی سمت راست)	(بر عهده دانش‌آموز)	کششی
DE (عضو عمودی)	(بر عهده دانش‌آموز)	کششی

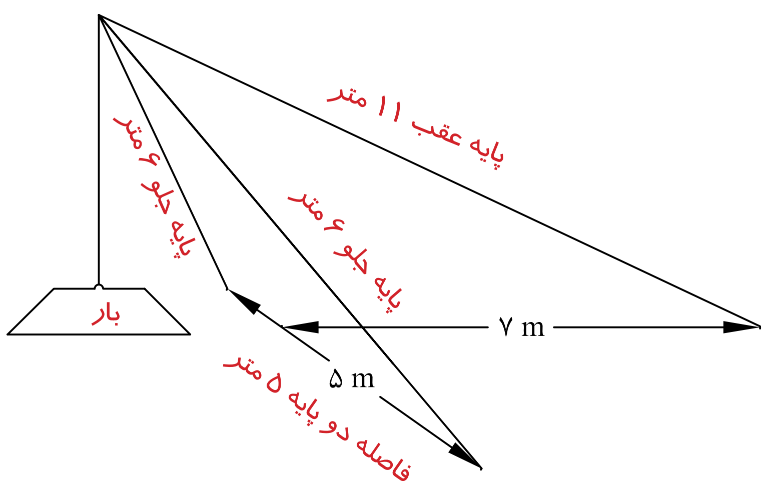
نیروهای غیر واقع در یک صفحه

برخی مواقع لازم است به حلّ مسائلی بپردازیم که در آنها نیروها در یک صفحه مشابه قرار ندارند. در این گونه مسائل می‌توانیم یک عضو فرضی را به جای هر جفت از عضوهای قرینه درنظر بگیریم و مجموعه نیروها را به یک صفحه منتقل کنیم.

مثال: جرثقیلی با سه پایه در شکل ۶۲-۳ نشان داده شده است، طول پایه‌های جلو ۶ متر است که با هم قرینه بوده و با فاصله ۵ متر از یکدیگر به زمین تکیه داده‌اند. طول پایه عقب ۱۱ متر است و تکیه‌گاه آن به فاصله ۷ متر از وسط خط راست مابین پایه‌های جلو قرار دارد. جسمی به جرم ۱۵/۲۹ تن از جرثقیل آویزان است. اندازه نیروهای موجود در هر پایه را با اندازه‌گیری از نمودار برداری (روش ترسیمی) و نیز با انجام محاسبه تعیین کنید.

حل ترسیمی: اندازه بار برحسب کیلو نیوتون برابر است با:

$$۱۵/۲۹\ \text{tonne} \times ۱۰^{۳}\ (\text{kg}) \times ۹/۸۱\ (\text{N}) = ۱۵۰\ \text{kN}$$

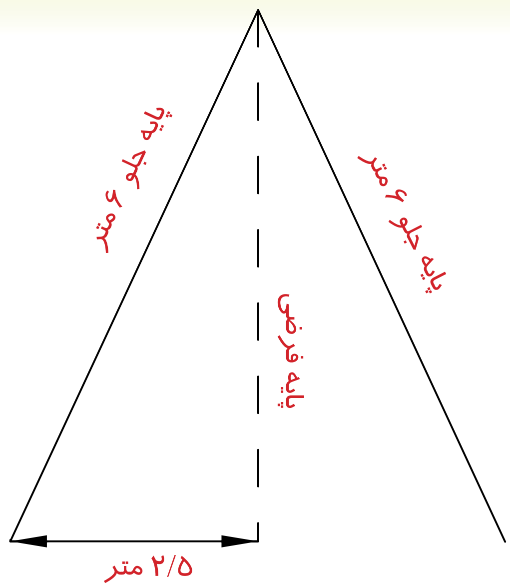


شکل ۶۲-۳

مطابــق شــکل ۶۳-۳ دو پایــه جلو را موقتــی با یک پایه فرضی که در صفحه وســط تکیه‌گاه‌هــای دو پایه جلو قرار دارد جانشین می‌کنیم.

طول پایه فرضی به صورت زیر قابل تعیین است.

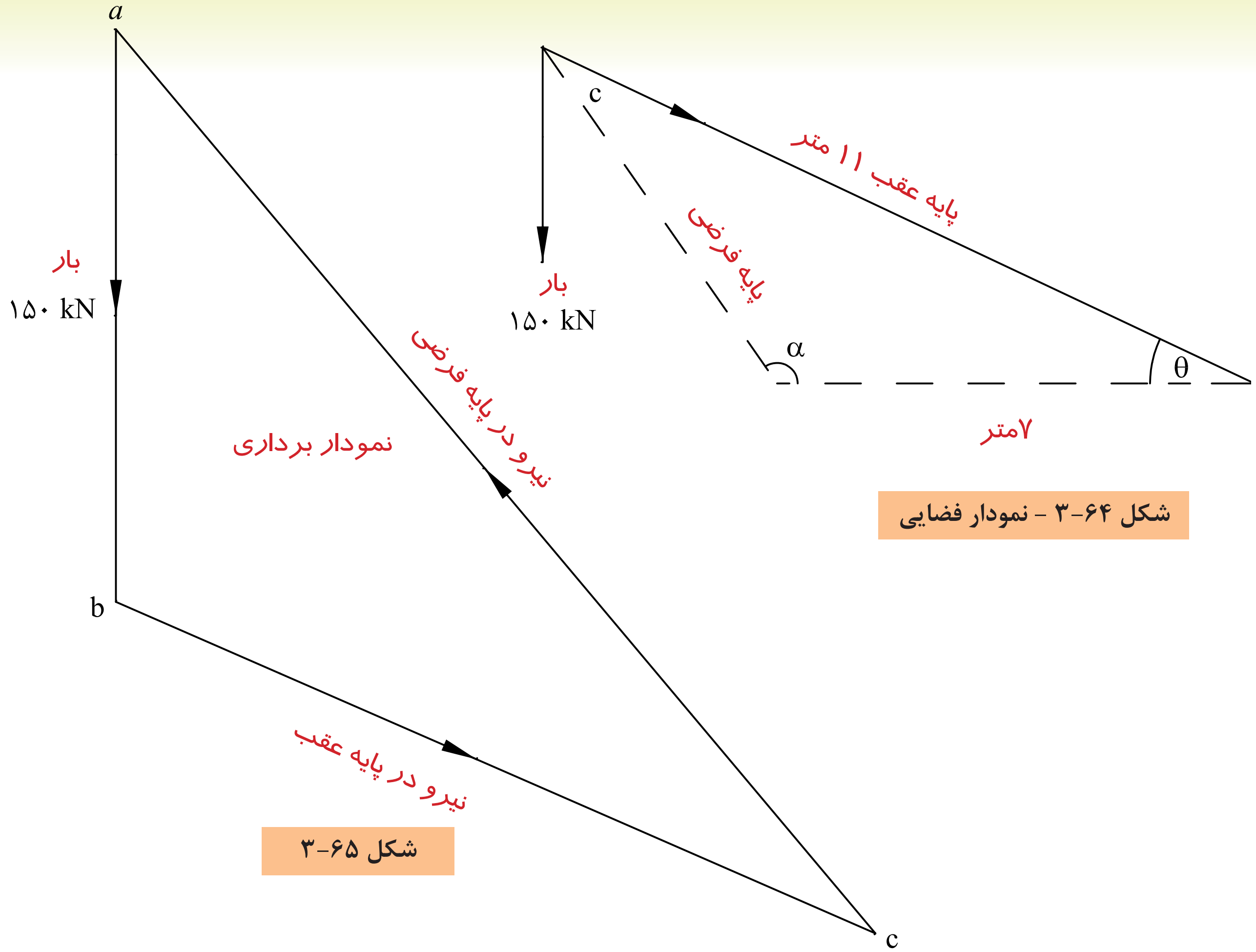
$$\text{طول پایه فرضی} = \sqrt{۶^۲ - ۲/۵^۲} = ۵/۴۵۵\,\mathrm{m}$$



شکل ۶۳-۳

حال نمودار فضایی نیروها قابل رســم اســت. نمودار فضایی شامل نیروی ۱۵۰ kN، نیروی پایه عقب و نیروی پایه فرضی جلو (که جانشین دو پایه جلو شده است) می‌شود. هر سه نیروی مزبور در یک صفحه قرار دارند. مطابق شکل ۶۴-۳ نمودار فضایی با توجه به اندازه‌های هر سه عضو و نیروها رسم می‌شود.

حال نمودار برداری که در آن بردارها موازی با نیروهای موجود در نمودار فضایی هستند. مطابق شکل ۶۵-۳ قابل رسم است.

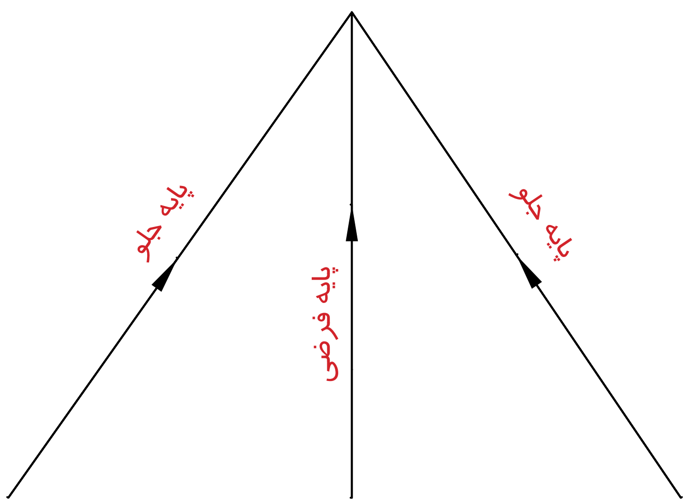


شکل ۶۴-۳ - نمودار فضایی

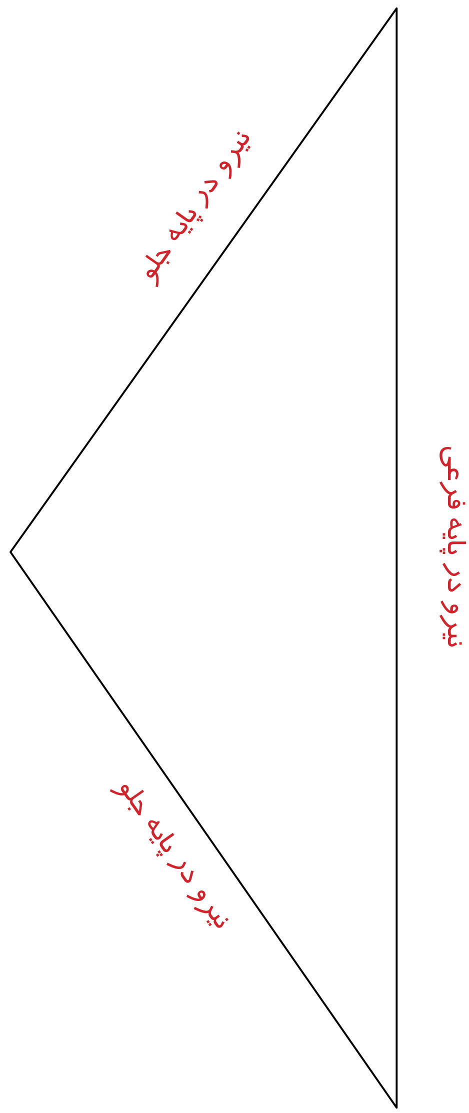
شکل ۶۵-۳

برای رسم نمودار برداری هر یک سانتی متر را مساوی مقدار مناسبی از نیرو برحسب کیلو نیوتون قرار می‌دهیم و با اندازه‌گیری طول بردارها، نیروی موجود در پایه فرضی و پایه عقب قابل تعیین می‌باشند.

با توجه به این‌که نیروی موجود در پایه فرضی برآیند نیروهای موجود در دو پایه جلو می‌باشد، مطابق شکل ۶۶-۳ نمودار فضایی مربوطه مجدداً رسم می‌شود. سپس نمودار برداری از روی نمودار فضایی مطابق شکل ۶۷-۳ رسم و با اندازه‌گیری بردارها در نمودار ۶۸-۳ اندازهٔ نیروی هر پایه جلو تعیین می‌شود.



شکل ۶۶-۳



شکل ۶۷-۳

حل محاسبه‌ای: با مراجعه به نمودار فضایی شکل ۶۴-۳ و قانون کسینوس می‌توانیم بنویسیم:

$$\cos C = \frac{۱۱^{۲} + ۵/۴۵۵^{۲} - ۷^{۲}}{۲ \times ۱۱ \times ۵/۴۵۵} = ۰/۸۴۸$$

با استفاده از جداول مثلثات c برابر ۳۲ درجه می‌باشد.

با استفاده از قانون سینوس می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{۵/۴۵۵}{\sin\theta}=\frac{۷}{\sin ۳۲^\circ}$$

$$\sin\theta=\frac{۵/۴۵۵\times ۰/۵۲۹۹}{۷}=۰/۴۱۳۰$$

با استفاده از جداول مثلثات اندازه تقریبی زاویه θ برابر ۲۴ درجه و ۲۴ دقیقه $(۲۴^\circ ۲۴')$ می‌باشد.

در نتیجه اندازه α به صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$\alpha=۱۸۰^\circ-(۳۲^\circ+۲۴^\circ ۲۴')=۱۲۳^\circ ۳۶'$$

اندازه زاویه a با استفاده از شکل ۶۴-۳ و ۶۵-۳ برابر است با اندازهٔ زاویه α منهای ۹۰° یعنی:

$$a=\alpha-۹۰^\circ=۱۲۳^\circ ۳۶'-۹۰^\circ=۳۳^\circ ۳۶'$$

اندازه زاویه b با استفاده از شکل‌های ۶۴-۳ و ۶۵-۳ برابر است با زاویه $\theta=۲۴\ ۲۴'$ بعلاوه ۹۰° یا :

$$b=۲۴^\circ ۲۴'+۹۰^\circ=۱۱۴^\circ ۲۴'$$

با استفاده از قانون سینوس می‌نویسیم (شکل ۶۵-۳)

$$\frac{\text{نیرو در پایه‌ی عقب}}{\sin\alpha}=\frac{\text{بار}}{\sin c}$$

$$\text{نیرو در پایه‌ی عقب}=\frac{\sin ۳۳^\circ ۳۶'\times ۱۵۰\,kN}{\sin ۳۲^\circ}=۱۵۶/۶\,kN$$

برای تعیین اندازه نیرو در پایه فرضی می‌نویسیم:

$$\frac{\text{نیرو درپایه‌ی فرضی}}{\sin b}=\frac{\text{بار}}{\sin c}$$

$$\text{نیرو درپایه‌ی فرضی}=\frac{۱۵۰\times\sin ۱۱۴^\circ ۲۴'}{\sin ۳۲^\circ}=۲۵۷/۸\,kN$$

با استفاده از شکل‌های ۶۶-۳ و ۶۷-۳ می‌نویسیم:

$$\text{نیرودرهرپایه واقعی جلو}=\frac{۲۵۷/۸}{۲}\times\frac{۶}{۵/۴۵۵}=۱۴۱/۸\,kN$$

دانش‌آموز می‌تواند نتایج حاصل از حل مسئله به روش ترسیمی را با حل مسئله به روش محاسبه‌ای مقایسه کند.

خودآزمایی :

۱ـ نیروی عمودی بالابرنده به اندازه N۹۰ بر جسم ساکن وارد می‌شود. همزمان یک نیروی N ۱۲۰ جسم را به سمت خود در راستای محور افقی می‌کشد. اندازه و جهت نیروی برآیند را تعیین کنید.

۲ـ دو نیرو بر جسمی اثر می‌کنند. نیروی اول به اندازه N ۲۰ در راستای افقی جسم را به سمت راست می‌کشد. نیروی دوم به اندازه N ۱۷ در راستای محور عمودی و به طرف پایین جسم را می‌کشد. اندازهٔ و جهت نیروی سوم که اثر این دو نیرو را خنثی می‌کند تعیین کنید.

۳ـ اندازه و جهت نیروی معادل (خنثی‌ساز برآیند) دو نیرو با مشخصه‌های زیر را تعیین کنید.

۱) نیروی ۱۰ نیوتونی در راستای افقی.

۲) نیروی ۲۰ نیوتونی که با نیروی اول زاویه ۵۰ درجه می‌سازد.

۴ـ سه نیرو که جسمی را به طرف خود می‌کشند در تعادل قرار دارند. جهت نیروی اول به طرف جنوب است. نیروی دوم با زاویه ۷۵ درجه شمال شرقی و نیروی سوم با زاویه ۴۰ درجه شمال غربی می‌باشند. اگر اندازه نیروی جنوبی ۳۵ نیوتون باشد اندازه دونیروی دیگر را تعیین کنید.

۵ـ یک قطعه چوب مکعب مستطیل شکل روی میز افقی بوسیله نیروی N ۲۵ که دارای زاویه ۲۰ درجه با محور افقی (از بالا) است کشیده می‌شود. اندازه مؤلفه‌های عمودی و افقی نیروی مزبور چقدر است؟

۶ـ دو طناب فولادی به طول مساوی از یک تیر افقی آویزان می‌باشند. انتهای هر دو طناب به حلقه‌ای متصل است و از حلقه باری به وزن kN ۳۰ آویزان است. دو طناب با تیر افقی تشکیل یک مثلث متساوی‌الاضلاع می‌دهند. نیروی موجود در هر طناب چقدر است؟

۷ـ انتهای دو طناب فولادی به یک شِگل متصل و باری به اندازه kN ۲۵ از شِگل آویزان است. زاویه طناب‌ها با محور

عمودی به ترتیب ۳۲ و ۴۲ درجه است. نیروی کشش در هر طناب چقدر است؟

۸ـ شافتی به جرم ۵/۰۹۷ تن بوسیله دو زنجیر از یک قلاب جرثقیل آویزان می‌باشد. طول هر زنجیر ۴ متر و فاصله بین نقاط اتصال زنجیرها به شافت نیز ۴ متر است. فاصله مرکز ثقل شافت از یکی از نقاط اتصال شافت و زنجیر ۱/۲۵ متر است. نیروی کششی در هر زنجیر چقدر است؟

۹ـ طناب فولادی به طول ۲۵/۵ متر بین دو دیوار عمودی و موازی با فاصله ۲۱ متر از یکدیگر بسته شده است. فاصله دو سر طناب از زمین مساوی و دو نقطه اتصال طناب به دیوارها روبه‌روی هم قرار دارند. قرقره‌ای با بست لغزنده از طناب آویزان می‌باشد. باری به اندازه ۳۰kN بوسیله قرقره حمل می‌شود. یک نیروی افقی قرقره را تا فاصله ۸ متری از یک دیوار حرکت می‌دهد.

مطلوب است؛

۱) اندازهٔ نیروی کششی در طناب

۲) اندازه نیروی افقی

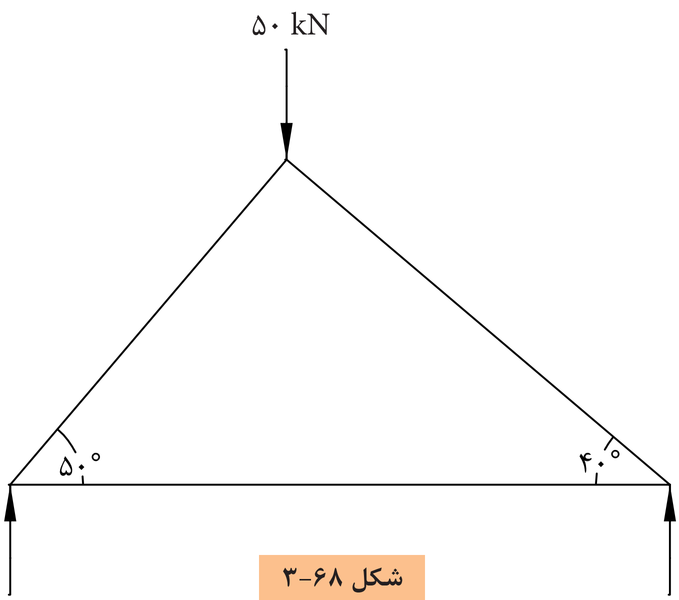
۱۰ـ زاویه بین بازو و پایه عمودی یک جرثقیل بازویی ۴۰ درجه و زاویه بین بازو و مهار ۴۵ درجه است. باری به اندازهٔ ۱۵ kN از سر جرثقیل آویزان می‌باشد. اندازه نیروی موجود در بازو و مهار چقدر است؟

۱۱ـ ابعاد پایه عمودی، بازو و مهار یک جرثقیل بازویی به ترتیب ۸،۱۳و۹ متر است. باری به اندازه ۲۰ kN از سر جرثقیل آویزان است. اندازه نیروها در بازو و مهار را تعیین کنید.

۱۲ـ طول پایه، بازو و مهار یک جرثقیل بازویی به ترتیب ۴/۲، ۶/۶ و ۳/۶ متر می‌باشد. باری به اندازه ۴۵ kN از کابلی که از روی قرقره سر جرثقیل می‌گذرد آویزان است و سر دیگر کابل تحت زاویه ۴۵ درجه با محور عمودی در دوّار پشت پایه قرار دارد. بار با سرعت یکنواخت بالابرده می‌شود. نمودار برداری نیروها را در سر جرثقیل رسم کرده و مقدار نیرو در بازو و مهار اندازه‌گیری شود؟

۱۳ـ یک کشتی با سرعت ۱۸ گره دریایی در جهت شرق وارد محیطی با جریان آب به سرعت ۳ گره دریایی در جهت ۴۰ درجه شمال شرقی می‌شود. مطلوب است برآیند سرعت و راه کشتی.

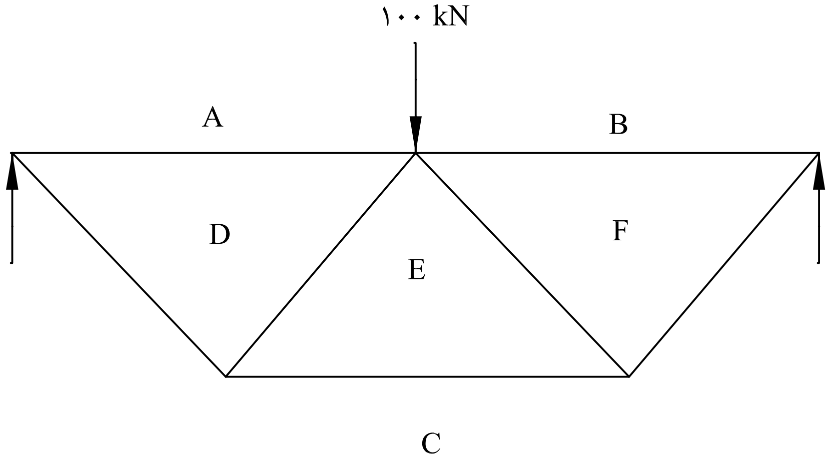
۱۴ـ باری به اندازهٔ ۵۰ kN از رأس سازه شکل ۶۸-۳ وارد می‌شود. نمودار برداری سازه را رسم کرده، نیروی موجود در هر عضو را محاسبه نموده و ماهیت نیروها (کششی یا تراکمی) را تعیین کنید. اندازه عکس‌العمل هر تکیه‌گاه را نیز تعیین کنید.



شکل ۶۸-۳

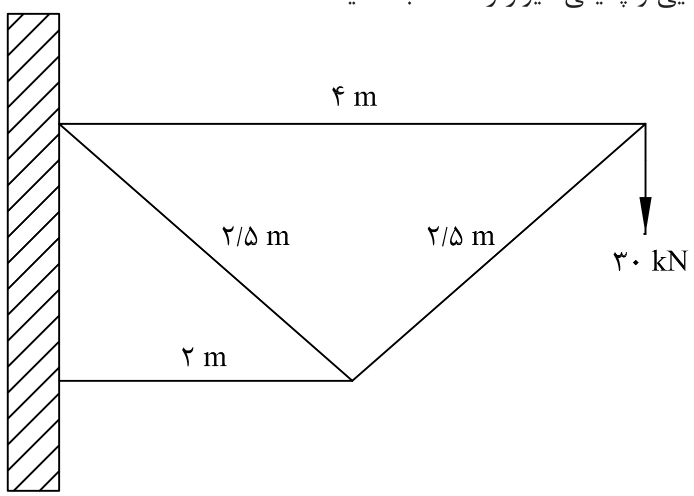
۱۵ـ در سازهٔ شکل ۶۹-۳ کلیه عضوهای مورب دارای زاویه ۴۵ درجه با عضو مجاورخود هستند. باری به اندازهٔ ۱۰۰ kN در وسط سازه قرار دارد. نمودار برداری نیروهای موجود در عضوها را رسم کرده و اندازه‌گیری کنید.

اندازهٔ نیروها و ماهیت آنها را در یک جدول بنویسید.



شکل ۶۹-۳

۱۶ـ نمودار برداری سازه شکل ۷۰-۳ را که باری به اندازه ۳۰ kN را در انتهای خود حمل می‌کند رسم کنید. نیروهای عکس‌العمل نقاط اتصال بالایی و پائینی دیوار را محاسبه کنید.



شکل ۷۰-۳

فرازهایی از فرهنگ و تمدن اسلام و ایران

اگرچه هیچ شـــاهد تاریخی برای اســـتفاده از جرثقیل در کشـــتی حضرت نوح (ع) وجود ندارد ولی محققان عقیده دارند برای ساخت این‌گونه کشتی به جرثقیلی مشابه این تصاویر نیاز است.

فصل چهارم

تجزیه و تحلیل ماشین‌های گردشی

هدف کلی : تجزیه و تحلیل ماشین‌های گردشی

هدفهای رفتاری: فراگیر پس از آموزش این فصل قادر خواهد بود

۱- جابه‌جایی زاویه‌ای را در دستگاه‌های گردشی محاسبه کند.

۲- شتاب زاویه‌ای را در دستگاه‌های گردشی محاسبه کند.

۳- تندی زاویه‌ای را در دستگاه‌های گردشی محاسبه کند.

۴- اثر ترمز بر گردش را تجزیه و تحلیل کند.

۵- ارتباط حرکت خطّی و حرکت زاویه‌ای را تجزیه و تحلیل کند.

پیش آزمون (۴)

۱- روش محاسبه فاصله پیموده شده یک چرخ طیار چگونه است؟

۲- روش محاسبه تندی در چرخ دنده‌ها چگونه است؟

تجزیه و تحلیل ماشین‌های گردشی

۱–۴ – ماشین‌های گردشی

در فصل‌های قبل مفاهیم و مسائل مکانیک کاربردی و به خصوص استاتیک بررسی و مرور شد. در فصل سوم دانش‌آموز موفق به حلّ مسائل استاتیک با استفاده از روشهای آسان گردید.

یکی از هدف‌های این کتاب حلّ مسائل کاربردی به شیوه‌های آسان است. در فصل‌های قبل چندان از دانسته‌های قبلی دانش‌آموز از درس فیزیک مکانیک استفاده نشد بلکه قدم به قدم و به‌تدریج مطالب مختلف با تنوع نسبت به آموخته‌های قبلی و به صورت کاربردی مطرح و بررسی و تجزیه و تحلیل گردید.

اکنون دانش‌آموز آمادگی دارد تا آنچه را که در درس فیزیک مکانیک راجع به شتاب، سرعت، تندی، حرکت، کار، توان، انرژی و اصطکاک آموخته است به شیوه‌ها و روش‌های آسان در آمیزد و مسائل مربوط با ماشین‌ها را که نه تنها در کشتی بلکه در زندگی و کار روزمره با آنها سرکار دارد تجزیه و تحلیل و در نهایت حل نماید.

ماشین‌ها نقش مهمی در کار و زندگی در ساحل و دریا دارند. برای مثال نیرو را منتقل می‌کنند طوری که کار مطابق و متناسب با خواسته بشر انجام می‌شود یا اجسام نسبتاً سنگین و حتی سنگین را جابه‌جا می‌کنند. در فصل سوم یک نمونه از این گونه ماشین‌ها (جرثقیل) معرفی شد. در این فصل دستگاه‌های گردشی مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌گیرند و مسائل مربوط به آنها با استفاده از روش‌های آسان حل می‌شود.

۲–۴ – حرکت در ماشین‌های گردشی

در درس اصول مکانیک دریایی با چرخ طیار آشنا شده‌ایم. حرکت خطی و حرکت زاویه‌ای را نیز در درس فیزیک مکانیک آموخته‌ایم. با تعاریف جابه‌جایی، تندی و شتاب در حرکت خطی آشنا هستیم. این تعاریف عیناً برای حرکت زاویه‌ای نیز قابل بیان هستند. حرف یونانی θ (بخوانید تتا Theta) نشان دهنده جابه‌جایی زاویه‌ای است. جابه‌جایی زاویه‌ای عموماً بر مبنای رادیان بیان می‌شود.

رادیان اندازهٔ تغییر در موضع زاویه‌ای است. فاصله زاویه‌ای مانند فاصله خطی قابل بیان است. به عبارتی فاصله زاویه‌ای عبارت است از اندازهٔ مجموع زوایایی که با گردش یک جسم چرخشی به‌وجود می‌آید.

مثال ۱: چرخ طیار شکل ۱-۴ بیست مرتبه در جهت ساعتگرد می‌چرخد. فاصله پیموده شده زاویه‌ای آن چقدر است؟ فاصله را برحسب رادیان و درجه تعیین کنید.

راه حل: فاصله پیموده شده زاویه‌ای را با θ_D نشان می‌دهیم.

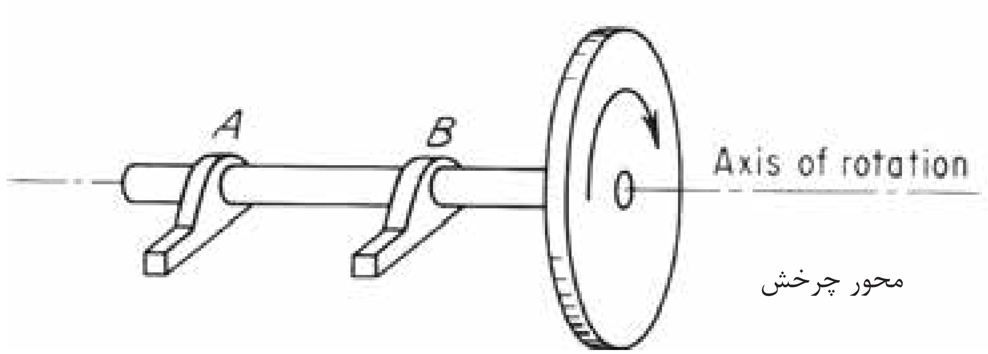
هر مرتبه چرخش برابر با ۲π radian (که به صورت ۲π radian نشان داده می‌شود) است. برای بیست مرتبه چرخش داریم:

$$\theta_{D_1} = ۲۰\ (۲\pi\ rad) = ۴۰\pi\ rad = ۱۲۵/۶\ rad$$

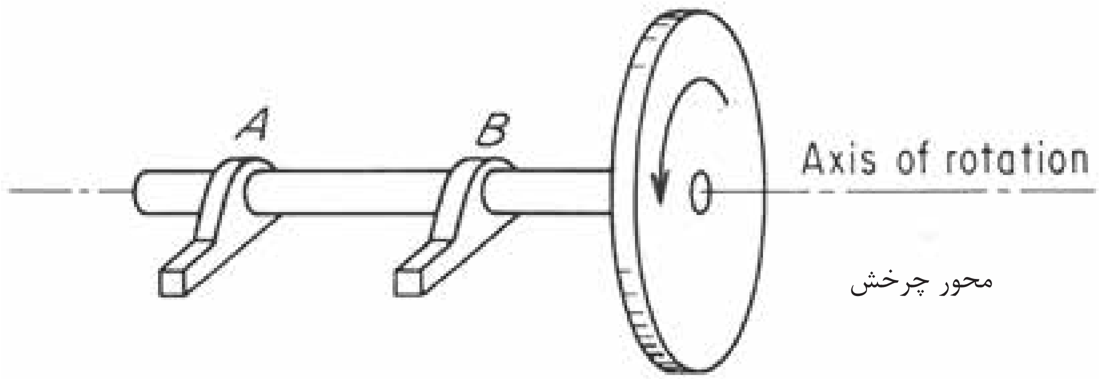
با توجه به اینکه هر ۲π radian برابر ۳۶۰ درجه است.

$۴۰\pi\, rad = ۲۰ \times ۲\pi\, rad = ۲۰ \times ۳۶۰ = ۷۲۰۰$ درجه

مثال ۲: چرخ طیار شکل ۲-۴ ، ۱۰/۵ مرتبه در جهت پادساعتگرد می‌چرخد. فاصله پیموده شده زاویه‌ای آن چقدر است؟



شکل ۱-٤



شکل ۲-٤

راه حل:

$$\theta_{D_۲}=۱۰/۵(۲\pi\,rad)=۲۱\pi\,rad=۶۵/۹۴\,rad$$

$$۲۱\pi\,rad=۱۰/۵\times۲\pi\,rad=۱۰/۵\times۳۶۰=۳۷۸۰ \quad \text{درجه}$$

مثال ۳: با توجه به مثال‌های ۱ و ۲ مطلوب است:

(۱) مجموع فاصله زاویه‌ای پیموده شده به وسیله چرخ طیار

(۲) جابه‌جایی زاویه‌ای چرخ طیار

راه حل:

مجموع فاصله زاویه‌ای پیموده شده برابر است با:

$$\theta_{D_{۱,۲}}=۱۲۵/۶\,rad+۶۵/۹۴\,rad=۱۹۱/۵۴\,rad$$

این فاصله برحسب درجه برابر است با $\theta_{D_{۱,۲}}=۷۲۰۰+۳۷۸۰=۱۰۹۸۰$

جابه‌جایی زاویه‌ای عبارت می‌شود از فاصله‌ای که در جهت ساعتگرد پیموده شده است منهای فاصله‌ای که در جهت پادساعتگرد چرخیده شده است. اگر جهت ساعتگرد را مثبت فرض کنیم داریم:

$$\theta=۱۲۵/۶rad-۶۵/۹rad=۵۹/۶۶rad \quad \text{در جهت ساعتگرد}$$

اما اگر جهت ساعتگرد را منفی فرض کنیم داریم:

$$\theta=۶۵/۹۴rad-۱۲۵/۶rad=-۵۹/۶۶rad \quad \text{در جهت پادساعتگرد}$$

۴-۲-۱ - اثر ترمز بر گردش

در این بخش اثر ترمز بر گردش چرخ طیار را بررسی می‌کنیم. در ابتدا سه رابطه را از درس فیزیک مکانیک مرور می‌کنیم.

$$x=v_۰t+\frac{۱}{۲}at^۲ \qquad (۴-۱)$$

$$a=\frac{v_f-v_۰}{t} \qquad (۴-۲)$$

$$۲ax=v_f^۲-v_۰^۲ \qquad (۴-۳)$$

X فاصله پیموده شده، $v_۰$ تندی اولیه، t مدت زمان، a شتاب، v_f تندی نهایی می‌باشند. تندی زاویه‌ای را با ω (بخوانید امگا) نشان می‌دهیم. میانگین تندی زاویه‌ای را با ω_{ave} مشخص می‌کنیم ($\omega_{ave}=\frac{\text{فاصله طی شده}}{\text{زمان}}$). میانگین شتاب زاویه‌ای با α_{ave} نشان داده می‌شود ($\alpha_{ave}=\frac{\text{تفاوت تندی نهایی و تندی اولیه}}{\text{زمان}}$) برای تجزیه و تحلیل مسائل مربوط به اجسام گردشی از رابطه‌های زیر متناسب با روابط (۴-۱)، (۴-۲) و (۴-۳) استفاده می‌شود.

جابه جایی یا فاصله پیموده شده زاویه‌ای : $\theta=\omega_۰t+\frac{۱}{۲}\alpha t^۲ \qquad (۴-۴)$

$$\alpha = \frac{\omega_f - \omega_0}{t} \quad \text{: شتاب زاویه‌ای} \qquad (۴-۵)$$

$$۲\alpha\theta = \omega_f^۲ - \omega_0^۲ \qquad (۴-۶)$$

$$\theta = \frac{\omega_f^۲ - \omega_0^۲}{۲\alpha} \qquad (۴-۷)$$

$$\alpha = \frac{\omega_f^۲ - \omega_0^۲}{۲\theta} \qquad (۴-۸)$$

مثال ۴: چرخ طیار شـــکل ۱-۴ به وســـیله عملکرد یک ترمز در مدت ۱۵ ثانیه به‌طور یکنواخت از تندی ۱۸۰۰ دور در دقیقه (۱۸۰۰RPM) در جهت پادساعتگرد می‌ایستد. شتاب زاویه‌ای مؤثر بر چرخ طیار و جابه‌جایی زاویه‌ای چرخ طیار در مدت ۱۵ ثانیه را محاسبه کنید. RPM اختصار Revolutions Per Minute (تعداد دور در دقیقه) است.

راه حل: ابتدا یکاهای تندی اولیه را به رادیان بر ثانیه تبدیل می‌کنیم.

$$\omega_0 = ۱۸۰۰ \frac{\text{rev}}{\text{دقیقه}} \times \frac{۲\pi\,\text{rad}}{\text{rev}} \times \frac{\text{دقیقه}}{۶۰\,\text{ثانیه}} = ۶۰\pi\,\text{rad}/\text{ثانیه} \text{ یا } ۶۰\pi\,\text{rad}/\text{s}$$

$$\alpha = \frac{\omega_f - \omega_0}{t} = \frac{۰ - ۶۰\pi\,\text{rad/s}}{۱۵\text{s}} = -۱۲/۵۶\,\text{rad/s}^۲$$

علامت منفی شتاب به این معنی است که چرخ طیار دچار واشتاب (شتاب منفی) است و تندی آن کاهش می‌یابد.

برای تعیین جابه‌جایی زاویه‌ای در مدت ۱۵ ثانیه از رابطهٔ (۴-۴) استفاده می‌شود.

$$\theta = \omega_0 t + \frac{۱}{۲}\alpha t^۲$$

$$= ۶۰\pi(۱۵) - \frac{۱}{۲}۴\pi(۱۵)^۲$$

$$= ۴۵۰\pi\,\text{rad} = ۱۴۱۳\,\text{rad}$$

مثال ۵: تندی پروانه یک کشتی با شتاب یکنواخت و با انجام ۱۰۰ مرتبه گردش از ۳۰۰ دور در دقیقه (۳۰۰RPM) به ۵۰۰ دور در دقیقه یا ۵۰۰RPM می‌رسد. شتاب زاویه‌ای و مدت زمان لازم برای تغییر تندی را تعیین کنید.

راه حل: ابتدا مقادیر مربوط به جابه‌جایی و تندی را به ترتیب به رادیان و رادیان بر ثانیه تبدیل می‌کنیم. سپس از روابط ۵-۴ و ۶-۴ برای محاسبهٔ شتاب زاویه‌ای و مدت زمان لازم استفاده می‌کنیم.

تبدیل تندی اولیه برحسب رادیان بر ثانیه:

$$\omega_0 = ۳۰۰\,\text{RPM} = ۳۰۰ \times \frac{۲\pi\,\text{rad}}{۶۰\,\text{ثانیه}} = ۳۱/۴\,\text{rad/s}$$

تبدیل تندی نهایی برحسب رادیان بر ثانیه:

$$\omega_f = ۵۰۰\text{RPM} = ۵۰۰ \times \frac{۲\pi\, rad}{۶۰\ \text{ثانیه}} = ۵۲/۳\ rad/s$$

تعیین مقدار جابه‌جایی زاویه‌ای طی ۱۰۰ مرتبه گردش پروانه

$$\theta = ۱۰۰(۲\pi\, rad) = ۲۰۰\pi\, rad = ۶۲۸\, rad$$

تعیین شتاب زاویه‌ای (رابطهٔ ۸-۴)

$$\alpha = \frac{\omega_f^۲ - \omega_۰^۲}{۲\theta} = \frac{(۵۲/۳)^۲ - (۳۱/۴)^۲}{۲(۶۲۸)} = \frac{(۲۷۳۵/۲۹ - ۹۸۵/۹۶)(rad/s)^۲}{۱۲۵۶\, rad}$$

$$\alpha = ۱/۳۹\ rad/s^۲$$

تعیین مدت زمان لازم برای افزایش تندی از ۳۰۰RPM به ۵۰۰RPM (استفاده از رابطهٔ ۵-۴)

$$\alpha = \frac{\omega_f - \omega_۰}{t}$$

$$t = \frac{\omega_f - \omega_۰}{\alpha} = \frac{(۵۲/۳ - ۳۱/۴) rad/s}{۱/۳۹\, rad/s^۲} = ۱۵\, s$$

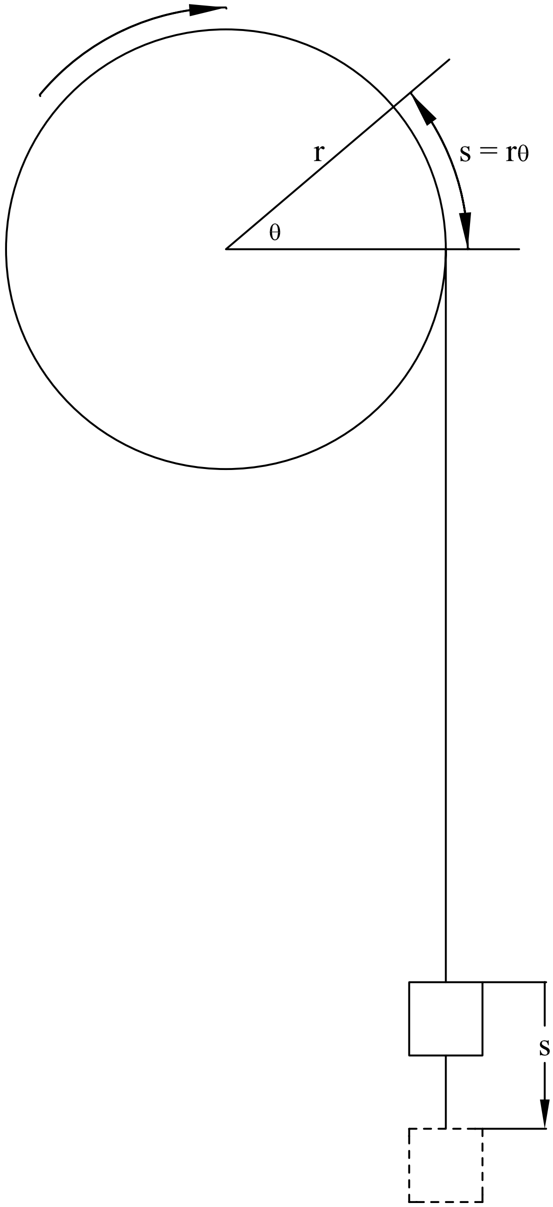
۳-۴ – ارتباط حرکت خطی و حرکت زاویه‌ای

شکل ۳-۴ جسمی را نشان می‌دهد که از طنابی آویزان است. طناب به دور قرقره‌ای با شعاع r پیچیده شده است. وقتی قرقره در جهت ساعتگرد به اندازهٔ زاویه θ می‌چرخد، طناب به اندازهٔ طول s از قرقره بیرون می‌آید. اگر قرقره یک دور کامل بچرخد، جسم به فاصله‌ای مساوی با محیط قرقره پایین می‌رود ($s = ۲\pi r$). مقدار $۲\pi r$ برحسب رادیان می‌باشد.

می‌دانیم $۲\pi\, rad = ۳۶۰$. بنابراین اگر قرقره نیم‌دور بچرخد (۱۸۰) به اندازه $\pi\, rad$ چرخیده است. اگر $\frac{۴}{۵}$ دور بچرخد (۹۰) به اندازه $\frac{\pi}{۲} rad$ می‌چرخد. اگر فرض کنیم θ مساوی ۳۶۰ درجه باشد در رابطه $s = ۲\pi r$ به‌جای ۲π می‌توانیم θ را قرار دهیم. در نتیجه خواهیم داشت $s = r\theta$ (برحسب رادیان). بنابراین همواره می‌توان گفت که چنان‌چه قرقره به اندازه زاویه‌ای مانند θ بچرخد فاصله‌ای که جسم پایین می‌رود برابر است با

$$s = r\theta \qquad (۴\text{-}۹)$$

حال به روابط بین عوامل موجود در حرکت خطی و حرکت زاویه‌ای می‌پردازیم.



شکل ۳-٤

اگر دو طرف رابطه ۹-۴ را بر زمان t تقسیم کنیم خواهیم داشت:

$$\frac{s}{t} = r\frac{\theta}{t}$$

در واقع $\frac{s}{t}=v$ یا تندی خطی و $\frac{\theta}{t}=\omega$ یا تندی زاویه‌ای است. بنابراین می‌توانیم بنویسیم

$$v=r\omega \quad (۴-۱۰)$$

اگر دو طرف رابطه ۱۰-۴ را نیز بر زمان t تقسیم کنیم خواهیم داشت:

$$\frac{v}{t}=r\frac{\omega}{t}$$

با توجه به اینکه $\frac{v}{t}=a$ شتاب خطی است و $\frac{\omega}{t}=\alpha$ شتاب زاویه‌ای است بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$a=r\alpha \quad (۴-۱۱)$$

مثال ۶ : مطابق شـــکل ۴-۴ وزنه‌های A و B از ســـیم‌هایی که به دور قرقره دو شـــیاره پیچیده شده‌اند آویزان‌اند. تندی وزنه A در مدت دو ثانیه با آهنگ یکنواخت از ۹ متر در ثانیه به ۱۵ متر در ثانیه می‌رسد. شتاب و مقدار جابه‌جایی وزنه‌های A و B و جابه‌جایی زاویه‌ای قرقره را محاسبه کنید.

حل: برای تعیین a_A و S_A از روابط (۲-۴) $a=\frac{v_f-v_۰}{t}$ و(۳-۴) $s=\frac{v_f^۲-v_۰^۲}{۲a}$ استفاده می‌شود.

$$a_A=\frac{v_f-v_۰}{t}=\frac{۱۵-۹}{۲}=۳\,\mathrm{m/s^۲}$$ شتاب خطی وزنه A

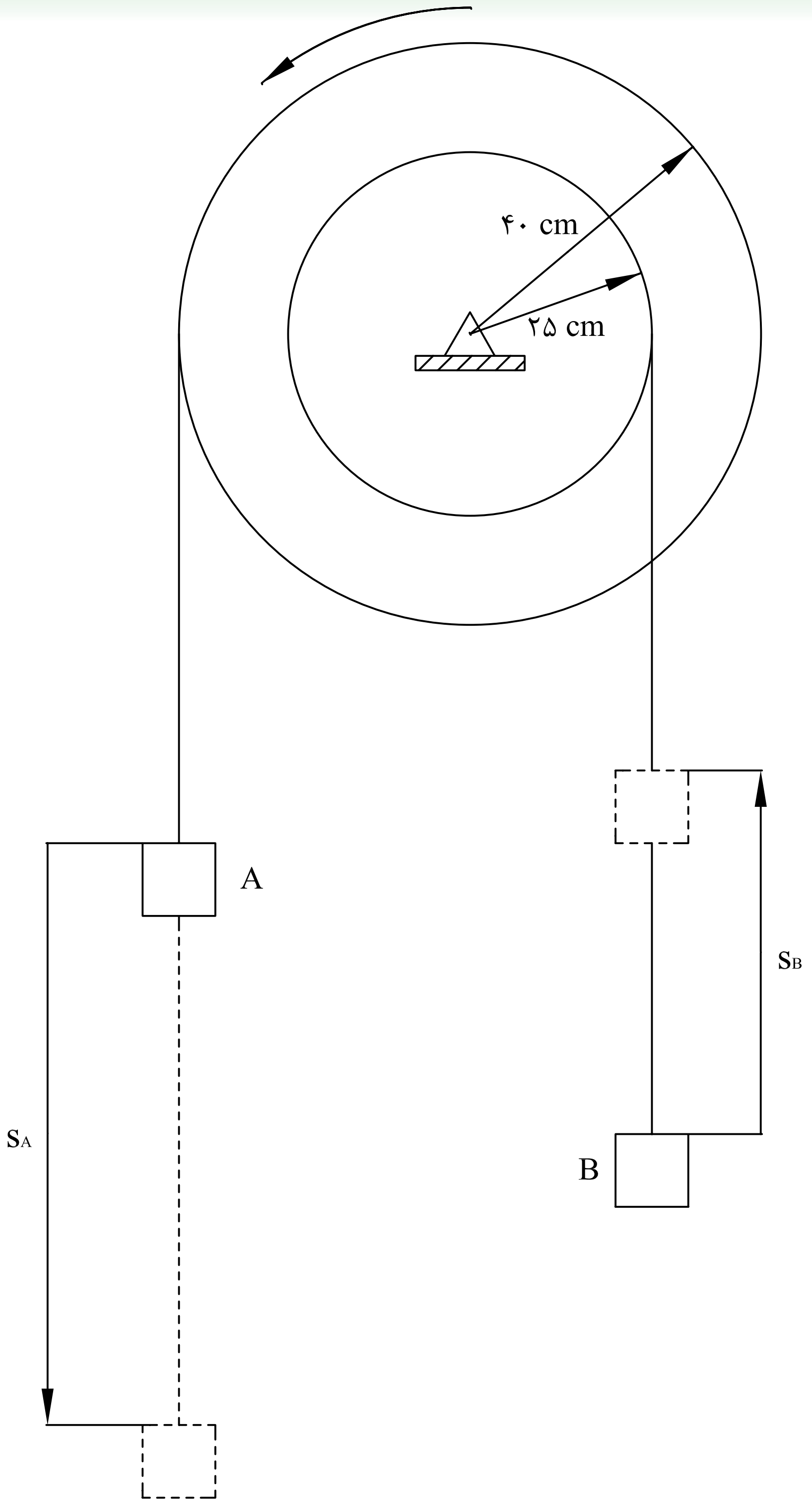
$$S_A=\frac{v_f^۲-v_۰^۲}{۲a}=\frac{(۱۵)^۲-(۹)^۲}{۲(۳)}=۲۴\,\mathrm{m}$$ جابه‌جایی خطی وزنه A

برای تعیین جابه‌جایی زاویه‌ای و شتاب زاویه‌ای قرقره از روابط ۹-۴ و ۱۱-۴ استفاده می‌شود.

$$\theta=\frac{s}{r}=\frac{۲۴}{۰/۴}=۶۰$$

با توجه به اینکه مقدارθ (جابه‌جایی زاویه‌ای) برحسب رادیان است پس $\theta=۶۰\,\mathrm{rad}$.

$$\alpha=\frac{a}{r}=\frac{۳}{۰/۴}=۷/۵$$



شکل ٤-٤

مقدار α برحسب رادیان بر مجذور ثانیه است پس $\alpha = ۷/۵\,rad/s^۲$.

برای تعیین جابه‌جایی خطی و شتاب خطی وزنه B از روابط $s = r\theta$ و $a = r\alpha$ استفاده می‌شود.

$$s_B = r\theta = ۰/۲۵(۶۰) = ۱۵\,m$$
$$a_B = r\alpha = ۰/۲۵(۷/۵) = ۱/۸۷۵\,m/s^۲$$

از دانش‌آموز انتظار می‌رود با توجه به متن درس، روابط معرفی شـــده و شـــکل‌های ۳-۴ و ۴-۴ علت اینکه اندازهٔ θ برابر $۶۰rad$ و اندازهٔ α برابر $۷/۵\,rad/s^۲$ می‌شود را تحلیل کند.

مثال ۷: چرخ دندهٔ A در شکل ۵-۴ موجب چرخیدن دو چرخ دندهٔ دیگر و انتقال نیرو می‌شود. جهت چرخش دندهٔ A پادساعتگرد و تندی زاویه‌ای آن ۱۸۰۰ RPM است. تندی زاویه‌ای چرخ دنده‌های B و C را محاسبه کند.

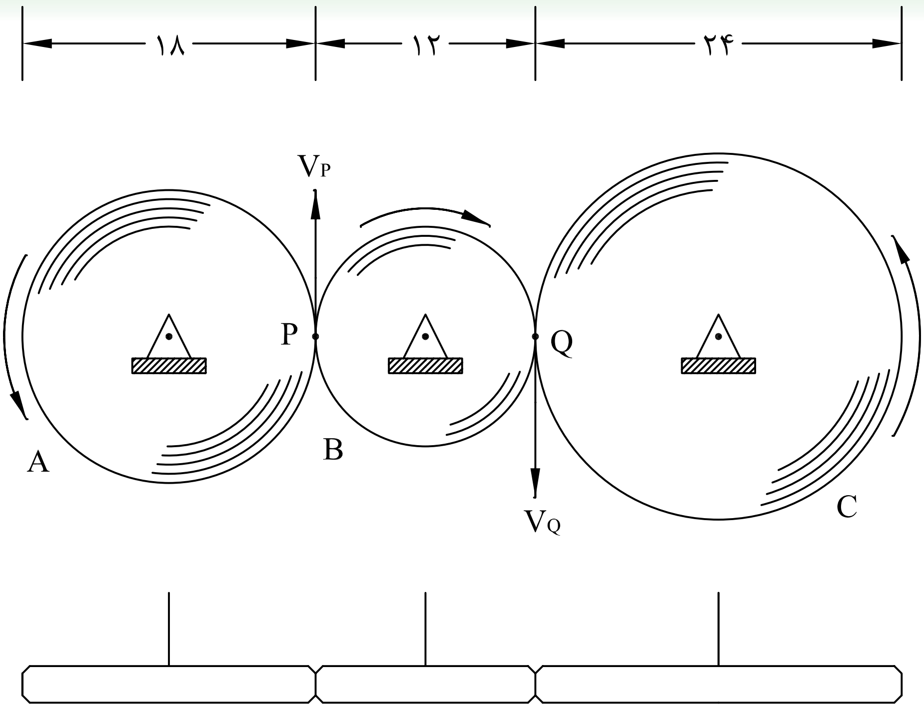
حل: نکته مهم در این‌گونه مســـئله کاربردی توجه به اندازهٔ تندی خطی در نقاط تماس اســـت. اگرچه تندی زاویه‌ای دو چرخ دنده A و B با هم مساوی نیستند ولی تندی خطی نقطه تماس برای هر دو چرخ دنده مساوی است (همواره نقطه‌ای مانند P نقطه تماس دو چرخ دنده اســـت و در این نقطه ســـرعت خطی هر دو مساوی است). لـذا با استفاده از رابطه ۱۰-۴ ($v = r\omega$) می‌توان نوشت:

تندی خطی چرخ دنده‌های A و B در نقطه P $= v_P = r_A\omega_A = r_B\omega_B$

$$r_A = ۹\,cm \;;\; \omega_A = ۱۸۰۰\,RPM$$
$$r_B = ۶\,cm$$
$$۹\times۱۸۰۰ = ۶\omega_B \quad ; \quad \omega_B = \frac{۹\times۱۸۰۰}{۶} = ۲۷۰۰\ RPM$$

به نحو مشابه، تندی خطی نقطه تماس دو چرخ دنده B و C برای هر دو چرخ دنده مساوی است لذا می‌توان نوشت:

$$v_Q = r_B\omega_B = r_C\omega_C$$
$$r_C = ۱۲\,cm$$
$$۶\times۲۷۰۰ = ۱۲\omega_C \quad , \quad \omega_C = \frac{۶\times۲۷۰۰}{۱۲} = ۱۳۵۰\ PRM$$



شکل ۵-۴

خودآزمایی :

۱ـ چرخ طیار شکل ۲-۴ به مدت ۳۰ ثانیه در جهت ساعتگرد و با شتاب زاویه‌ای ۴$rad/s^۲$ می‌چرخد. جابه‌جایی زاویه‌ای آن را برای شرایط زیر تعیین کنید.

(۱) اگر حرکت از حالت توقف شروع شود.

(۲) تندی زاویه‌ای اولیه در جهت ساعتگرد ۱۰rad/s باشد.

(۳) تندی زاویه‌ای اولیه در جهت پادساعتگرد ۱۰rad/s باشد.

۲ـ تندی زاویه‌ای میانگین پروانه یک موتور برون نصب را که در عرض ۲۰ دقیقه ۱۰۰۰ دور می‌چرخد برحسب rad/s تعیین کنید.

۳ـ شتاب زاویه‌ای ۱۰۰ RPM/min/s را بر حسب

(۱) دور $/s^۲$ (۲) $rad/s^۲$ (۳) $rad/min^۲$ محاسبه کنید.

۴ـ تندی چرخ طیار شکل ۲-۴ به طور یکنواخت طی ۲۰ دور چرخش از ۶۰ RPM به ۱۲ RPM می‌رسد. شتاب زاویه‌ای و زمان لازم برای رسیدن به تندی نهایی را محاسبه کنید.

۵ـ شتاب زاویه‌ای و جابه‌جایی زاویه‌ای چرخ طیار شکل ۲-۴ را در صورتی که تندی آن در مدت ۴۵ ثانیه به طور کامل از ۱۸۰۰ RPM ساعتگرد به ۱۸۰۰ RPM پادساعتگرد معکوس شود تعیین کنید.

۶ـ تندی یک چرخ طیار در مدت ۲۰ ثانیه از ۱۸۰۰ RPM به ۶۰۰ RPM می‌رسد.

میانگین واشتاب زاویه‌ای را محاسبه کنید.

۷ـ یک شبانه‌روز در سیاره زهره تقریباً ۳۰ ساعت است. در صورتی که قطر سیاره ۱۲۳۹۰ کیلومتر باشد تندی زاویه‌ای و سرعت خطی نقطه‌ای روی دایره مرکزی آن را محاسبه کنید.

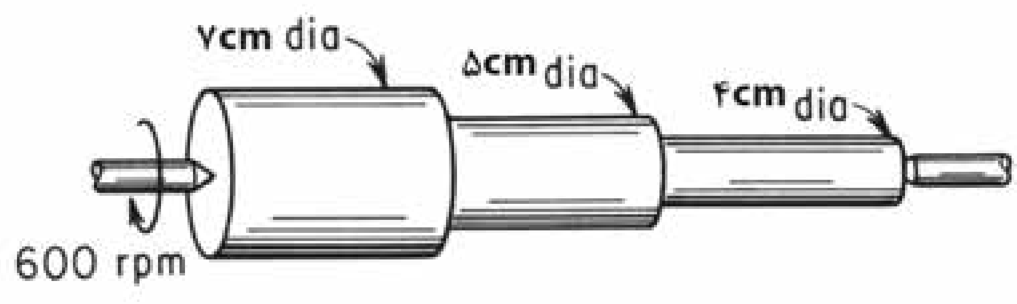
۸ـ قطر سیاره مشتری (بزرگترین سیاره منظومه شمسی) ۹۱۶۰۰ کیلومتر است. این سیاره هر ۹/۹ ساعت یک مرتبه دور خود می‌گردد. سرعت خطی یک نقطه روی خط استوای آن را تعیین کنید.

۹ـ میله پله‌دار شکل ۶-۴ با سرعت RPM ۶۰۰ در یک دستگاه تراش می‌چرخد. تندی خطی یک نقطه را برحسب متر در ثانیه در موارد زیر محاسبه کنید.

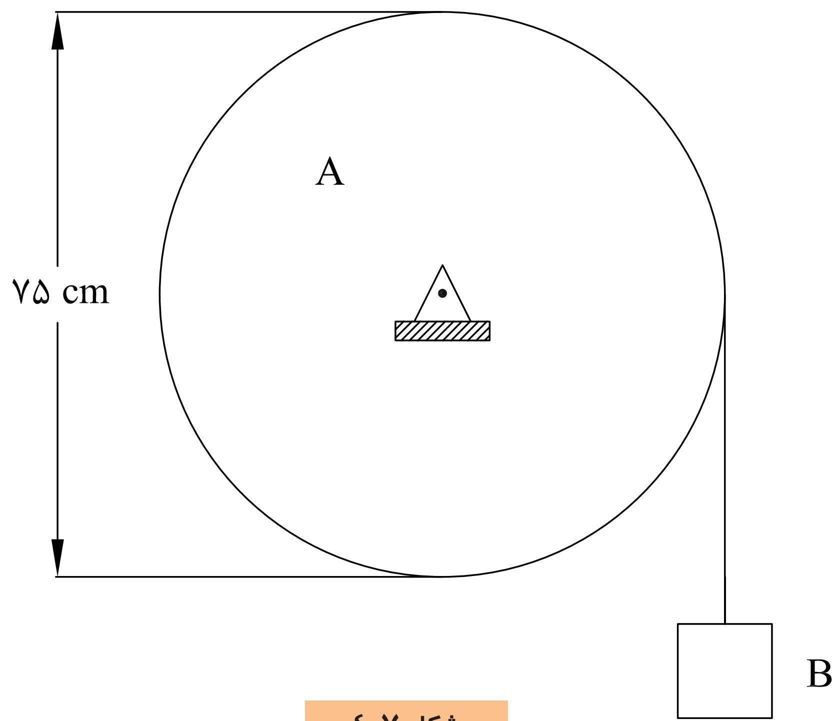
(۱) نقطه‌ای روی قسمتی که قطر آن ۷ سانتی‌متر است.

(۲) نقطه‌ای روی قسمتی که قطر آن ۵ سانتی‌متر است.

(۳) نقطه‌ای روی قسمتی که قطر آن ۴ سانتی‌متر است.



شکل ۶-۴



شکل ۷-۴

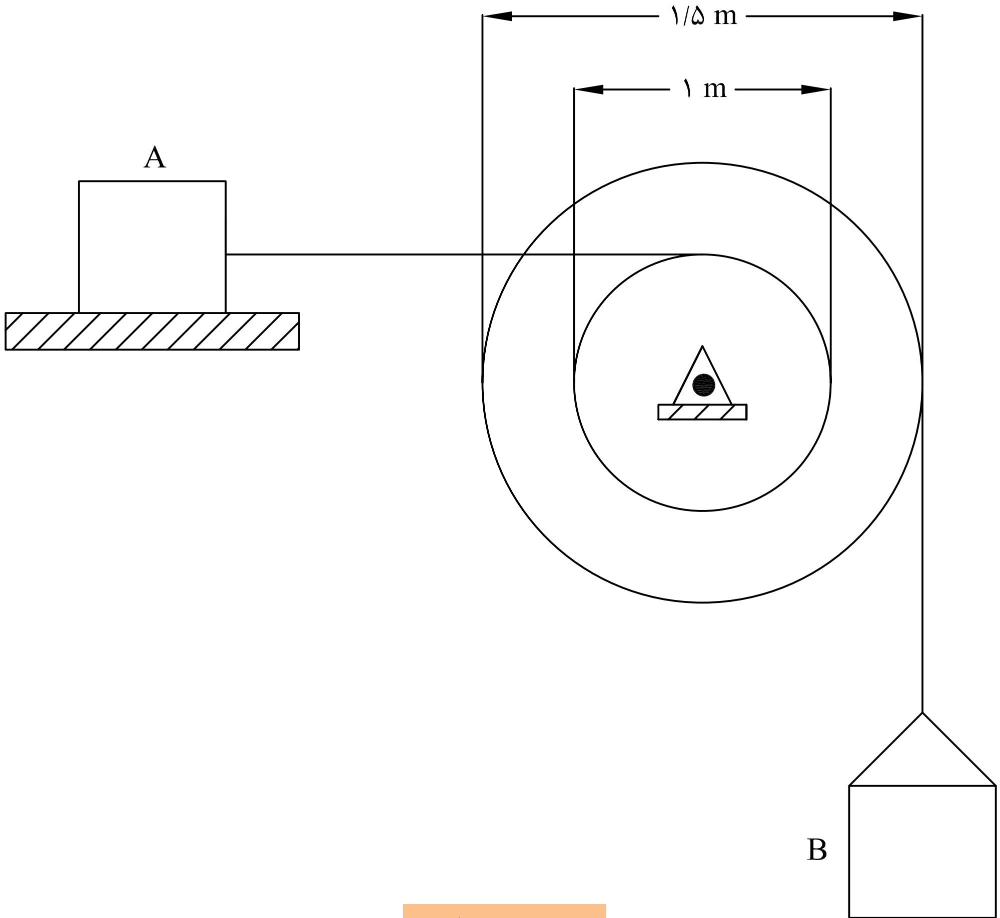
۱۰ـ تندی وزنه B در شکل ۷-۴ در مدت ۲ ثانیه از صفر به ده متر بر ثانیه می‌رسد. جابه‌جایی زاویه‌ای و شتاب زاویه‌ای قرقره را محاسبه کنید.

۱۱ـ مطابق شکل ۸-۴ تندی وزنه B در حالی‌که ۳ متر پایین می‌آید از ۳ متر بر ثانیه به ۹ متر بر ثانیه می‌رسد. شتاب جسم A در این مدت چقدر است؟

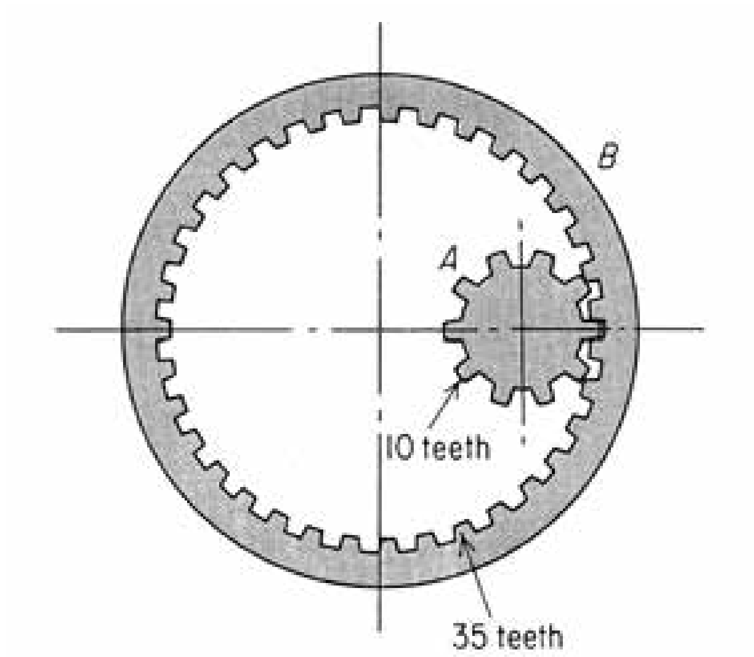
۱۲ـ در شکل ۹-۴ یک جفت چرخ دنده با دندانه‌های داخلی صاف و محورهای موازی مشاهده می‌شود. تندی چرخ طیار دندهٔ A طی ۲۰ ثانیه با شتاب یکنواخت از حالت توقف به ۱۲۰۰ RPM می‌رسد. جابه‌جایی زاویه‌ای و شتاب زاویه‌ای دندهٔ B را تعیین کنید.

۱۳ـ چرخ دندهٔ A در مجموعه انتقال نیروی شکل ۱۰-۴ با تندی زاویه‌ای ۶۰۰ RPM می‌چرخد. تندی زاویه‌ای چرخ دنده‌های B و C را تعیین کنید.

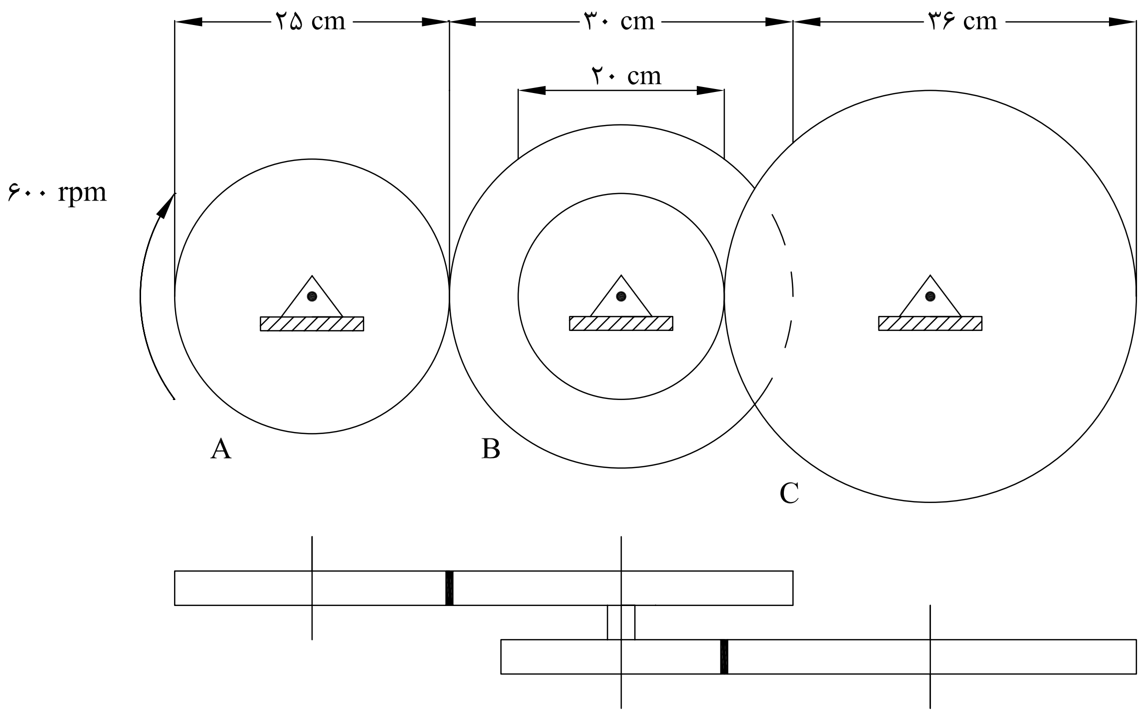
۱۴ـ تندی چرخ دنده C در شکل ۱۰-۴ طی ده ثانیه از توقف به ۹۰۰ RPM می‌رسد. جابه‌جایی زاویه‌ای چرخ دنده‌های A و B را تعیین کنید.



شکل ۸-۴



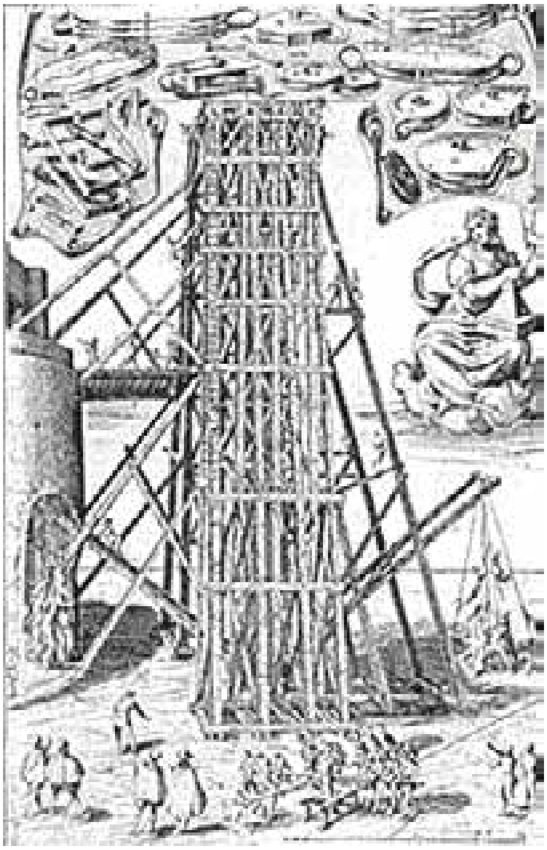
شکل ۹-۴



شکل ۱۰-۴

فرازهایی از فرهنگ و تمدن اسلام و ایران

تلمبه پارســی (Persian wheel) قرن‌ها به عنوان پیشــرفته‌ترین تلمبهٔ بالابر آب اســتفاده می‌شد. معروف به Saqiya، ســقایه یا ســقایت (به کسر ســین و فتح یا) به معنای جای آب یا ظرف یا پیمانهٔ آب یا پیشهٔ کسی است که به دیگران آب بدهد. واژه‌های ســاقی، ســقّا و سقاخانه نیز از همین ریشه می‌باشند. ســقایه در واقع همان «چرخ آب ایرانی» یا «دولاب» است.



فصل پنجم

تجزیه و تحلیل ابزار و ماشین‌های جابه‌جایی و بالابر

هدف کلی : تجزیه و تحلیل ابزار و ماشین‌های جابه‌جایی و بالابر

هدفهای رفتاری: فراگیر پس از آموزش این فصل قادر خواهد بود

۱-اهرم‌ها را محاسبه و تجزیه و تحلیل کند.

۲-قرقره و طناب را محاسبه و تجزیه و تحلیل کند.

۳-ترکیب‌های مختلف قرقره و طناب را محاسبه و استفاده کند.

۴-نسبت تندی، بهره مکانیکی و راندمان ترکیب‌های مختلف قرقره و طناب را محاسبه کند.

۵-قرقره زنجیری را تجزیه و تحلیل کند.

۶-چرخ و محور را تجزیه و تحلیل کند.

۷-مسائل قرقره سگکی را حل کند.

۸-چرخ و محور دو پله‌ای را تجزیه و تحلیل کند.

۹-حلزون و چرخ حلزون بالابر را تجزیه و تحلیل کند.

پیش آزمون (۵)

۱ـ روش محاسبه بهره مکانیکی اهرم را بیان کنید.

۲ـ انواع سه گانه اهرم را مثال بزنید.

۳ـ روش محاسبه بهره مکانیکی و نسبت تندی را در قرقره و طناب توضیح دهید.

۴ـ روش محاسبه بهره مکانیکی و نسبت تندی را در قرقره زنجیری توضیح دهید.

۵ـ علت افزایش بهره مکانیکی به واسطهٔ استفاده از قرقره سگکی را بیان کنید.

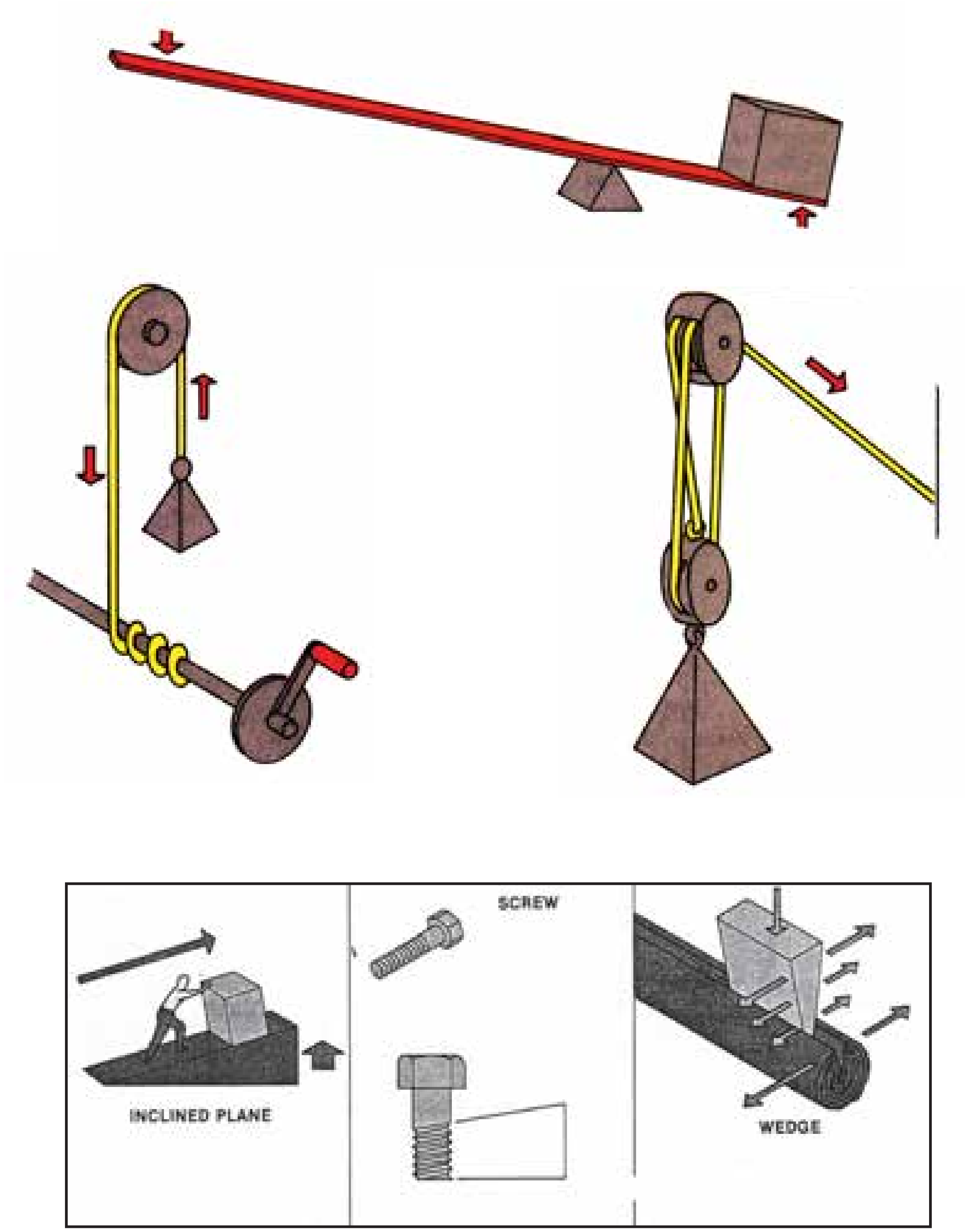
تجزیه و تحلیل ابزار و ماشین‌های جابه‌جایی و بالابر

ابزارها توانایی بشـــر را برای انجام فرآیندها افزایش می‌دهند. ماشـــین‌ها را می‌توان نوعی ابزار و یا مجموعه‌ای از ابزارها تلقی نمود. ابزارها موجب افزایش قدرت، ســـرعت، راندمان، دقت و بهره‌وری می‌شـــوند. ما نمی‌توانیم میخ را با دست خالی در یک تخته چوبی فرو کنیم ولی با کمک چکش دستی (یعنی یک ابزار ساده) انجام این فرآیند امکان‌پذیر می‌شود. بطور کلی می‌توان ابزارها را تحت عنوان ابزارهای دســـتی، ابزارهای دســـتی برقی و ماشـــین‌ها طبقه‌بندی نمود. ابزارهای دستی ســـاده‌ترین نوع ابزارند طوری که نیروی لازم برای اجرای فرآیند به وســـیله بشر و بدون کمک وسایل دیگر تأمین می‌شود. ارّه دستی و پیچ گوشتی از این قبیل ابزارها هستند. ابزارهای دستی برقی نوع بهبود یافته ابزار دستی‌اند. در این نوع ابزار، دست بشر برای نگهداری و حرکت دادن آن به‌کار می‌رود ولی قدرت به وسیله یک موتور الکتریکی تأمین می‌شود. ارّه برقی دستی نمونه‌ای از این نوع ابزار است.

ماشـــین‌های ساده مبنای کار ماشـــین‌ها و سیستم‌های مرکب می‌باشند. اهرم‌ها، قرقره‌ها، چرخ دنده‌ها، سطوح شیبدار، پیچ‌ها و گوه‌ها که نمونه‌ای از آنها در شکل ۱-۵ ملاحظه می‌شود جزء ماشین‌های ساده هستند.

ماشین‌های ساده بدون تغییر در مقدار کار، اجرای فرآیند را آسان می‌کنند. در واقع بهره مکانیکی را افزایش می‌دهند طـــوری کـــه در نهایت اندازهٔ نیرو در انجـــام کار افزایش می‌یابد. افزایش بهره مکانیکی (یا بزرگ شـــدن نیرو در انجام کار) به‌تدریج توضیح داده می‌شود.

بدون یک چکش دستی بشر نمی‌تواند میخ را در دیوار فرو کند. با گرفتن چکش در دست و بالا بردن دست، اهرم ایجاد می‌شـــود. اهرم بهره مکانیکی را برای ورود نیرو به میخ افزایش می‌دهد و میخ با عملکرد گوه‌ای به دیوار فرو می‌رود. برای بیرون کشیدن میخ از میخ‌کش استفاده می‌شود. دست بشر نیروی کمی بر دسته میخ‌کش وارد می‌کند ولی به علت ایجاد اهرم، نیروی بزرگی در چنگال میخ‌کش موجب بیرون کشیدن میخ می‌شود.



شکل ۱-۵- ماشین‌های ساده

وقتی با مبانی کار ماشــین‌های ساده آشنا شویم می‌توانیم طرز کار ماشین‌های مرکب را درک کنیم. در واقع هر ماشین مرکب ترکیبی از دو یا چند ماشین ساده است.

۱–۵– اهرم (Lever)

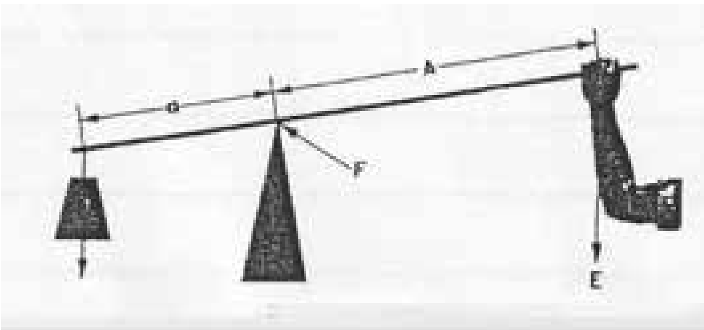
همهٔ ما از کودکی با اهرم آشــنا می‌شــویم، الاکلنگ نوعی اهرم است که در دو سر آن دو نیرو وارد می‌شود. اهرم دارای سه عامل مهم است.

۱ـ نیروی ورودی یا نیروی کارگر (Effort)

۲ـ نقطه اتکا یا مرکز دوران یا تکیه‌گاه (Fulcrum)

۳ـ نیروی ایستادگی یا نیروی بار یا بار (Resistance)

در شــکل ۲–۵ یک اهرم ســاده ملاحظه می‌شود. نیروی کارگر (E) در یک ســر اهرم در فاصله A با نقطه اتکا (یا مرکز دوران F) عمل می‌کند و موجب جابه‌جایی بار (R) می‌شود. در این اهرم اندازهٔ کار برابر است با: $E \times A = R \times a =$ کار



شکل ۲–۵– اهرم ساده

با توجه به این‌که a کوچک‌تر از A می‌باشــد بنابراین مقدار بار بزرگتر از نیروی کارگر است. ملاحظه می‌شود اهرم سادهٔ مزبور دارای بهره مکانیکی است که در مثال به آن می‌پردازیم.

مثال: در اهرم سادهٔ شکل ۲–۵ فاصله A برابر ۰/۵ متر و فاصله a مساوی ۰/۱ متر است. اگر مقدار بار ۴۹۰ نیوتون باشد مقدار نیروی کارگر (E) چقدر است؟

حل:

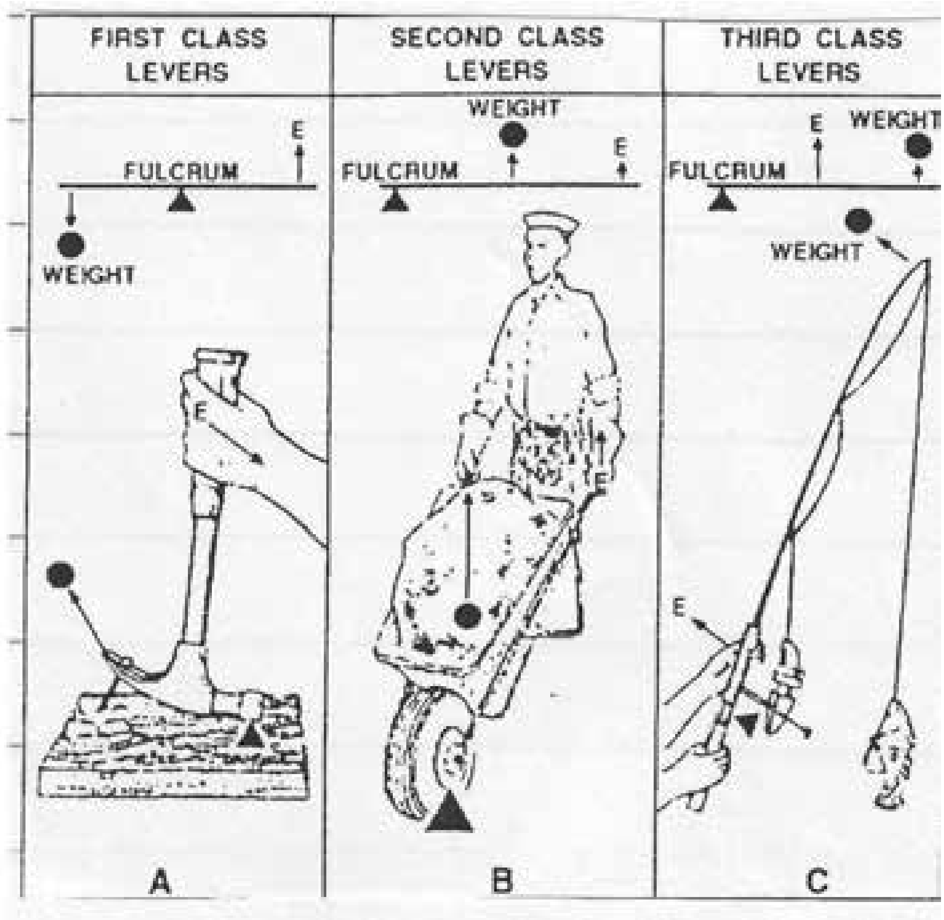
$$R \times a = E \times A$$

$$۴۹۰ \times ۰/۱ = ۰/۵ \times E$$

$$E = ۹۸$$ نیوتون

۱-۱-۵ – انواع اهرم

در شــکل ۳-۵ ســه نوع اهرم نشان داده شده است. نوع اهرم با توجه به محل قرارگیری نقطه اتکا یا مرکز دوران نسبت به نیروی کارگر و نیروی بار تعیین می‌شود.



شکل ۳-۵- انواع سه‌گانه اهرم

۱-۱-۱-۵- اهرم نوع اول

در اهرم نوع اول (مطابق بخش A در شکل ۳-۵) نقطهٔ اتکا بین نیروی کارگر و نیروی مقاوم (بار) قرار دارد. در این شکل از چکش میخ‌کش برای بیرون کشیدن میخ استفاده می‌شود.

الاکلنــگ نمونه خوبی از اهرم نوع اول اســت. در این نوع اهرم مقدار نیروی بــار و فاصله آن از نقطه اتکا (یا تکیه‌گاه) با

توجه به نیاز فرآیند قابل تغییر است. مثال‌های زیر این مطلب را توضیح می‌دهد.

مثال ۱: شخصی به وزن ۷۰۰ نیوتون در یک سر الاکلنگ نشسته است. طول الاکلنگ دو متر می‌باشد و تکیه‌گاه در فاصله نیم متری این شخص قرار دارد. شخصی با وزن ۵۰۰ نیوتون در طرف دیگر الاکلنگ می‌نشیند. برای ایجاد موازنه، فاصله شخص دوم از تکیه‌گاه چقدر باید باشد؟

حل:

$R \times a = E \times A$

E = وزن شخص اول = ۷۰۰ نیوتون

A = ۰/۵ متر

R = وزن شخص دوم = ۵۰۰ نیوتون

۵۰۰ × a = ۷۰۰ × ۰/۵

a = ۰/۷ متر

مثال ۲: در صورتی که وزن شخص اول ۸۰۰ نیوتون باشد فاصله شخص دوم از تکیه‌گاه باید چقدر باشد؟

حل:

$R \times a = E \times A$

E = وزن شخص اول = ۸۰۰ نیوتون

A = ۰/۵ متر

R = ۵۰۰ نیوتون

a = فاصله شخص دوم از تکیه‌گاه

۵۰۰ × a = ۸۰۰ × ۰/۵

a = ۰/۸ متر

بنابراین ملاحظه می‌شود با افزایش نیرو در یک سر الاکلنگ (اهرم نوع اول) فاصله بازوی نیروی مقاوم افزایش می‌یابد.

نمونه دیگر از اهرم نوع اول در شکل ۴-۵ ملاحظه می‌شود. در این شکل محل اتکا پارو بر قایق مرکز دوران اهرم می‌باشد. آب به عنوان نیروی مقاوم (بار) و نیروی بازوی ملوان به عنوان نیروی کارگر می‌باشند. بدین صورت پارو یک اهرم نوع اول محسوب می‌شود.

دیلم، قیچی و انبر دست نیز اهرم نوع اول محسوب می‌شوند.

۲-۱-۱-۵ - اهرم نوع دوم

در اهرم نوع دوم (مطابق بخش B در شکل ۳-۵) نقطهٔ اتکا در انتها و نیروی کارگر در سر اهرم ولی نیروی مقاوم (بار) در بین نقطه اتکا و نیروی کارگر قرار دارد. در این شکل فرغون ملاحظه می‌شود.

مثال ۱: اگر نیروی کارگر بر دسته‌های فرغون در شکل ۵-۵ برابر ۲۲۰ نیوتون در فاصله ۱/۲ متری از نقطه اتکا (چرخ فرغون) باشد و فاصله مرکز ثقل نیروی بار از نقطه اتکا برابر ۰/۳ متر باشد مقدار نیروی مقاوم (بار) که به وسیله ملوان قابل بلند کردن است چقدر است؟

حل:

$$۲۲۰\times ۱/۲ = R\times ۰/۳$$

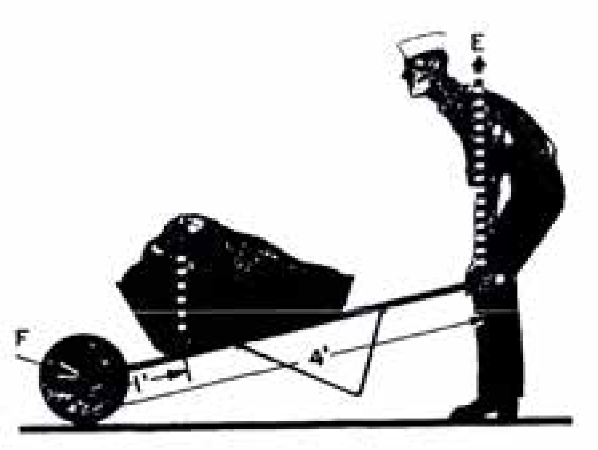
$R = ۸۸۰$ نیوتون

مثال ۲: چنان‌چه فاصله مرکز ثقل بار از چرخ فرغون ۰/۳۵ متر شود اندازه نیروی کارگر چقدر باید باشد؟

$$۸۸۰\times ۰/۴ = E\times ۱/۲$$

$E = ۲۹۳/۳$ نیوتون

شکل ۴-۵- پارو اهرم نوع اول است



شکل ۵-۵- اهرم نوع دوم

بنابراین در صورت افزایش فاصله بار از نقطه اتکا نیروی کارگر باید افزایش یابد.

مثال ۳: چنان‌چه فاصله مرکز ثقل بار از چرخ فرغون ۰/۲ متر شود اندازهٔ نیروی کارگر چقدر باید باشد؟

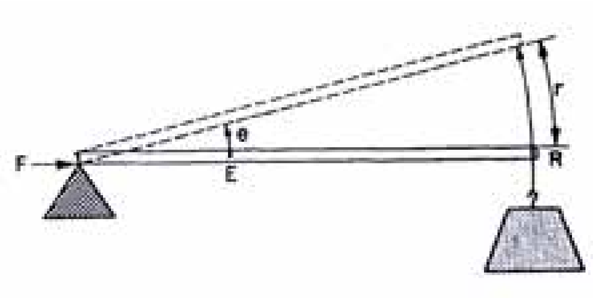
$۸۸۰ \times ۰/۴ = E \times ۱/۲$

$E = ۱۴۶/۶$ نیوتون

ملاحظه می‌شود در صورت کاهش فاصله بار از نقطهٔ اتکا نیروی کارگر قابل کاهش است.

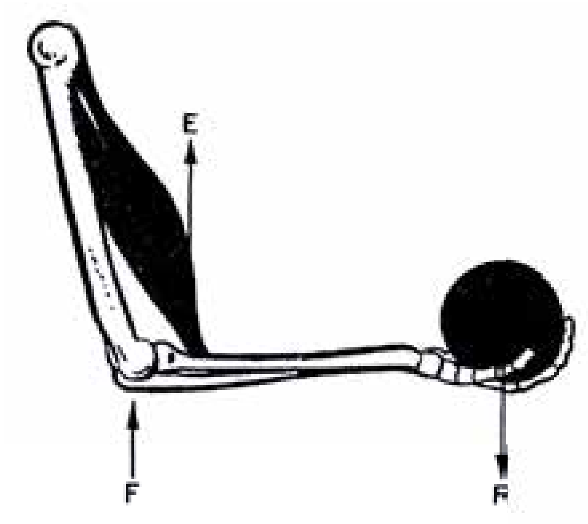
۳-۱-۱-۵- اهرم نوع سوم

در اهرم نوع سوم (مطابق بخش C در شکل ۳-۵) نیروی کارگر بین نقطه اتکا و نیروی مقاوم (بار) قرار می‌گیرد. در این نوع اهرم سرعت حرکت بار زیاد است ولی نیروی کارگر باید بزرگ باشد. همانطور که در شکل ملاحظه می‌شود نقطه اتکا در محل نگه‌داشتن دسته قلاب ماهی‌گیری با دست راست صیاد قرار دارد. نیروی مقاوم (بار) که ماهی صید شده می‌باشد در انتهای اهرم است و نیروی کارگر که به وسیله دست چپ صیاد وارد می‌شود بین نقطه اتکا و بار قرار دارد. برای آسان‌تر شدن درک مطلب به شکل ۶-۵ مراجعه شود. همچنان که نیروی E فاصله e را می‌پیماید نیروی مقاوم (بار) R فاصله r را طی می‌کند. ملاحظه می‌شود فاصله r بزرگتر از فاصله e می‌باشد. در نتیجه سرعت حرکت R باید بزرگ‌تر از سرعت حرکت E باشد زیرا R و E دو فاصلهٔ مختلف را در مدت زمان مشابه و معین طی می‌کنند. این پدیده عیناً در مورد صیاد و ماهی به وجود می‌آید.



شکل ۶-۵- اهرم نوع سوم

حال به شکل ۷-۵ نگاه کنید. گلوله R به وسیله انگشتان و کف دست نگه‌داشته شده است. نقطه اتکا F در آرنج قرار دارد و محل اجرای نیروی کارگر E بین آرنج و کف دست است.



شکل ۷-۵- بازو اهرم نوع سوم

مثال: چنان‌چه در شکل ۶-۵ فاصله E و R از F به‌ترتیب ۲/۵ و ۴۵ سانتی‌متر و مقدار R برابر ۴۰ نیوتون باشد. مقدار نیروی E چقدر است؟

حل:

$E \times ۲/۵ = ۴۰ \times ۴۵$

$E = ۷۲۰$ نیوتون

نتیجه می‌گیریم در اهرم نوع سوم نیروی کارگر بزرگ‌تر از نیروی مقاوم (بار) می‌باشد.

۴-۱-۱-۵ – بهره مکانیکی

ملاحظه شد که در اهرم‌های نوع اول و دوم مقدار بار بزرگ‌تر از مقدار نیروی کارگر می‌شود. افزایش نیروها در اهرم نوع اول و دوم به بهره مکانیکی مثبت موسوم است. در اهرم نوع سوم بهره مکانیکی مثبت وجود ندارد و در واقع عیب مکانیکی وجود دارد زیرا نیروی کارگر بیش‌تر از نیروی مقاوم (بار) می‌باشـد. بهره مکانیکی (Mechanical Advantage) به صورت زیر نشان داده می‌شود:

$$\text{بهره‌ی مکانیکی (Mechanical Advantage)} = \frac{\text{Resistance (بار)}}{\text{Effort (نیروی کارگر)}}$$

یا

$$M.A. = \frac{R}{E}$$

بهره مکانیکی در مثال شکل ۴-۵ برابر است با:

$$M.A. = \frac{۸۸۰}{۲۱۰} = ۴$$

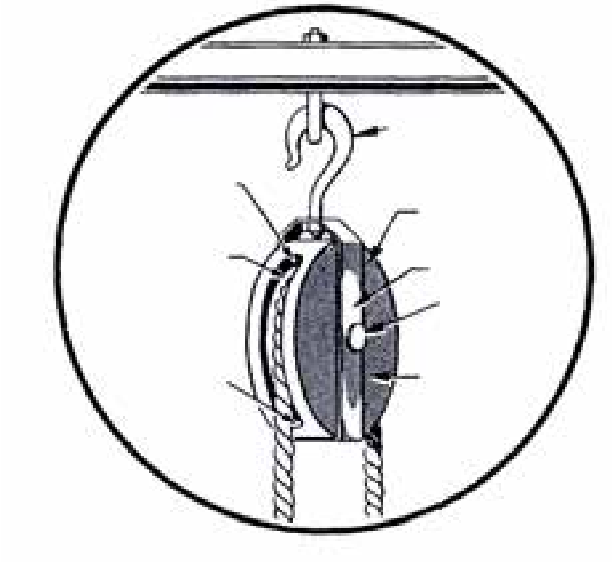
این مطلب به صورت یک قانون برای همهٔ ماشـین‌ها صدق می‌کند. لذا در کلیه ماشـین‌ها بهره مکانیکی برابر اسـت با خارج قسمت مقدار بار (نیروی مقاوم) بر نیروی کارگر.

البته بهره مکانیکی یک اهرم را می‌توان با تقسیم طول بازوی نیروی کارگر بر طول بازوی نیروی مقاوم نیز به‌دست آورد یعنی اینکه:

$$\text{بهره‌ی مکانیکی (Mechanical Advantage)} = \frac{\text{بازوی نیروی کارگر}}{\text{بازوی نیروی مقاوم}}$$

بهره مکانیکی در مثال شکل ۵-۵ برابر است با: $M.A. = \frac{۱/۲}{۰/۳} = ۴$

برای اهرم نوع سـوم به مثال شـکل ۶-۵ مراجعه می‌کنیم. در این مثال نیروی E مساوی ۷۲۰ نیوتون و نیروی R برابر ۴۰ نیوتون اسـت. بهره مکانیکی آن برابر اسـت با $\frac{۴۰}{۷۲۰}$ یا $\frac{۸}{۱۰}$ یا ۵۵۶٪ که کمتر از عدد یک است. بنابراین مجدداً نتیجه می‌گیریم در اهرم نوع سـوم بهره مکانیکی به معنی بهره مکانیکی در اهرم نوع اول و دوم نیسـت و می‌تواند عیب مکانیکی محسوب شود.

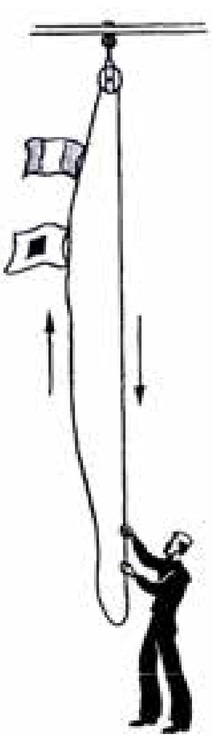


(۱) قلاب
(۲) صفحه قرقره
(۳) نوار حافظ
(۴) پین
(۵) ورق بیرونی
(۶) محفظهٔ طناب بخور
(۷) شیار قرقره
(۸) نشیمنگاه قرقره

شکل ۸-۵- قسمت‌های مختلف قرقره

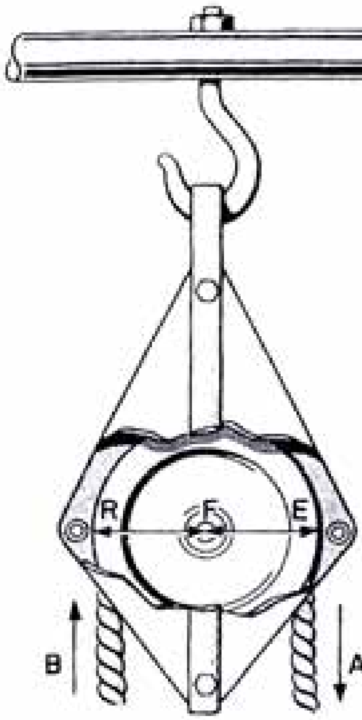
۲-۵ – قرقره و طناب (Block and Tackle)

قرقره وسیله مدوری اســت که حول محور خود حرکت دورانی دارد. روی محیط قرقره شــیاری بــرای قرار گرفتن طناب وجود دارد. قســمت‌های مختلف یک قرقره در شکل ۸-۵ مشــاهده می‌شــود. در شــکل ۹-۵ از قرقره ثابت تک شــیاره برای بالا بردن پرچم استفاده شده است. همچنان‌که شخص طناب را پایین می‌کشد پرچم بالا می رود. این قرقره را قرقره تک شــیاره ثابت می‌نامیم. در شــکل ۱۰-۵ همین قرقره در محل نصب مشــاهده می‌شــود. نیروی کارگر E در طنــاب A و نیروی مقاوم R در طناب B اعمال می‌شــوند. مشاهده می‌شــود که اندازهٔ بازوی EF مســاوی بازوی FR است. در این دســتگاه با اعمال نیروی کارگر کوچک جهت کشش تغییر می‌کند.



(۱) قلاب
(۲) صفحه قرقره
(۳) نوار حافظ
(۴) پین
(۵) ورق بیرونی
(۶) محفظهٔ طناب بخور
(۷) شیار قرقره
(۸) نشیمنگاه قرقره

شکل ۹-۵- قرقره و طناب در قرقره ثابت تک شیاره



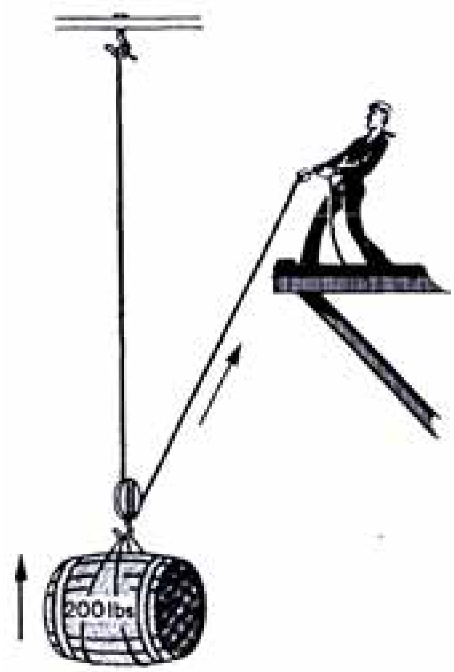
شکل ۱۰-۵- این قرقره فاقد بهره مکانیکی است

قرقره ثابت تک شیاره نوعی اهرم نوع اول با بازوهای مساوی است. بنابراین اندازهٔ بهره مکانیکی در آن برابر با $\frac{EF}{FR} = ۱$ می‌باشد، لذا اگر در نقطه A طناب با یک نیروی ۵ نیوتونی پایین کشیده می‌شود در نقطه B طناب با همان مقدار بالا می‌رود.

در شکل ۱۱-۵ همان قرقره به‌کار می‌رود. در این شکل یک انتهای طناب از سقف آویزان است و انتهای دیگر در دست فرد است. بشکه‌ای به وزن ۸۰۰ نیوتون به وسیله قرقره و طناب تحمل می‌شود. با کشیدن طناب، قرقره و بشکه با هم بالا می‌آیند. وقتی قرقره و طناب به این صورت استفاده شود مجموعه آن قرقره متحرک نامیده می‌شود. با توجه به این‌که وزن بشکه ۸۰۰ نیوتون است، هر نیمه از طناب به همراه قرقره ۴۰۰ نیوتون از بار را تحمل می‌کنند.

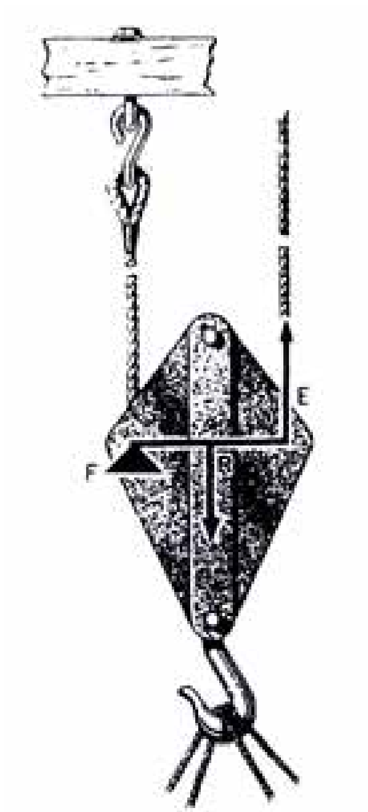
بهره مکانیکی برابر است با:

$$M.A. = \frac{R}{E} = \frac{۸۰۰}{۴۰۰} = ۲$$



شکل ۱۱-۵- قرقره متحرک

در این دســتگاه، قرقره متحرک تک شیاره اهرم نوع دوم می‌باشد. توضیح چگونگی اعمال نیروها در شکل ۱۲-۵ داده می‌شود. نیروی E روی بازوی EF که قطر چرخ قرقره اســت وارد می‌شود. نیروی مقاوم (بار) R روی بازوی FR که شعاع چرخ قرقره است مقاومت می‌کند. با توجه به این‌که اندازهٔ قطر دو برابر شــعاع است بنابراین بهره مکانیکی دســتگاه برابر ۲ می‌باشد. باید توجه کرد وقتی نیروی E به اندازه یک متــر به طرف بالا حرکت می‌کند بار در محل R فقط به اندازهٔ نیم‌متر بالا می‌رود. اگرچه در این دســتگاه بهره مکانیکی حاصل می‌شود ولی طول کابلی که به وســیله دســت کارگر بالا کشیده می‌شود بیش‌تر از فاصله‌ای اســت که بار بالا می‌آید. البته اســتفاده از قرقره و طناب به صورت شکل ۱۱-۵ مشکل است و برای بالا کشیدن یک جسم مشابه، از دو قرقره مطابق شــکل ۱۳-۵ بهره‌برداری می‌شــود. در این سیستم قرقره پایین متحرک و قرقره بالایی ثابت است. قرقره ثابت فقط جهت کشش را تغییر می‌دهد و بهرهٔ مکانیکی دو برابر می‌باشد.



شکل ۱۲-۵- قرقره متحرک با نسبت ۲ به ۱

مجموعه قرقره و طناب را می‌توان برحسب نیاز و بهرهٔ مکانیکی مورد نظر استفاده کرد.

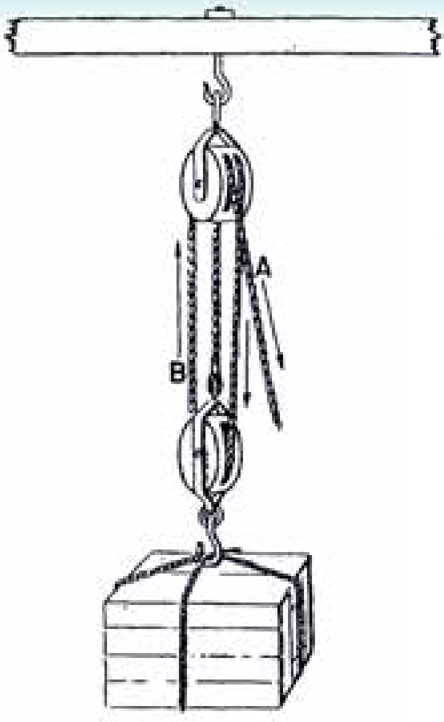
شکل ۱۳-۵- مجموعه دو قرقره‌ای تک شیاره (همسان)

برای مثال در شکل ۱۴-۵ مجموعه قرقره و طناب متشکل از قرقره ثابت دو شیاره و قرقره متحرک تک شیاره مشاهده می‌شود. در این مجموعه بار از قرقره متحرک آویزان است. قرقره متحرک نیز به وسیله سه بخش از طناب تحمل می‌شود. هر بخش از طناب به اندازهٔ مساوی بار را تحمل می‌کنند. اگر وزن صندوق ۳۰۰۰ نیوتون باشد، هر طناب به اندازهٔ ۱۰۰۰ نیوتون از بار را تحمل می‌کند. اگر نیروی وارد بر طناب B برابر ۱۰۰۰ نیوتون باشد کارگر مجبور است یک نیروی ۱۰۰۰ نیوتون برای کشیدن طناب A وارد کند تا بتواند صندوق را بالا ببرد.

بهرهٔ مکانیکی برابر است با:

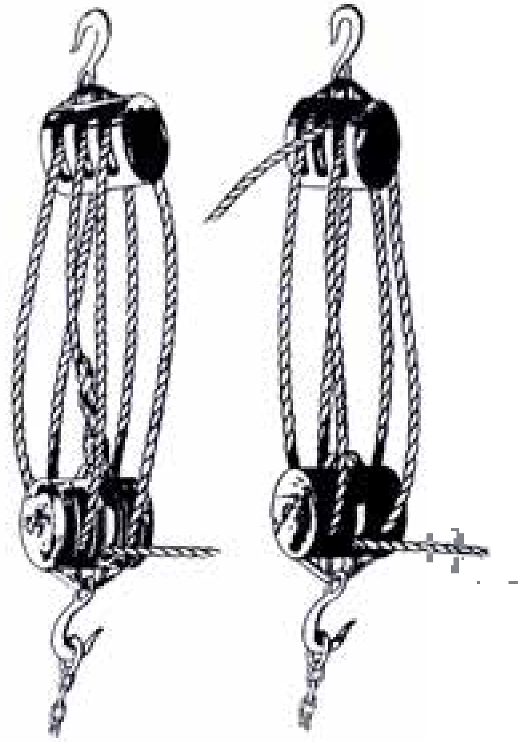
$$M.A. = \frac{R}{E} = \frac{۳۰۰۰}{۱۰۰۰} = ۳$$

ملاحظه می‌شود وقتی بار به وسیله دو بخش از طناب تحمل می‌شود، بهره مکانیکی برابر ۲ و وقتی به وسیله سه بخش از طناب تحمل می‌گردد بهره مکانیکی برابر ۳ می‌باشد. این نتیجه راهنمای خوبی برای محاسبه بهره مکانیکی انواع مجموعه‌های قرقره و طناب است. به این ترتیب که تعداد بخش‌هایی از طناب که بار به وسیله آنها تحمل می‌شود مساوی بهره مکانیکی است. نکته مهم اطمینان یافتن از استحکام و مناسب بودن طناب برای تحمل بار است.



شکل ۱۴-۵- مجموعه قرقره ثابت دوشیاره و قرقره متحرک تک شیاره (ناهمسان)

ترکیب‌های مختلفی از مجموعه قرقره و طناب می‌توان بوجود آورد. دو ترکیب در شکل ۱۵-۵ نشان داده شده است.



شکل ۱۵-۵- دو مجموعه قرقره و طناب با قرقره‌های سه و دو شیاره

اکنون آنچه را که در مورد قرقره و طناب آموختیم بطور خلاصه در زیر می‌آوریم تا بطور عملی قابل استفاده در کشتی باشد.

ـ تنها مزیت قرقره ثابت تک شیاره تغییر در جهت کشیدن طناب است و بهره مکانیکی آن برابر عدد یک است.

ـ در قرقره متحرک تک شیاره بهره مکانیکی برابر عدد ۲ است.

ـ مجموعه قرقره و طناب را می‌توان به صورت‌های مختلف با ترکیب قرقره‌های تک شیاره، دو شیاره و سه شیاره و بهره مکانیکی بزرگ‌تر استفاده نمود.

ـ تعداد بخش‌های طناب که از یک قرقره متحرک می‌گذرند مشخص کنندهٔ تقریبی بهره مکانیکی آن هستند.

ـ اگر انتهای طناب به یک قرقره متحرک محکم شود بهرهٔ مکانیکی به اندازهٔ عدد یک افزایش می‌یابد.

۳ـ۵ – راندمان ماشین

تاکنون آموختیم که مجموعه قرقره و طناب در واقع نوعی ماشــین بالابر اســت. ماشین بالابر مکانیزمی برای جابه‌جایی بار در امتداد قائم و امتداد افقی و یا هر دو می‌باشد.

در این فرآیند نیروهای ورودی و مصرفی به نیروی کارگر و نیروی مقاوم به بار موســوم اســت. کار انجام شــده به وسیله یک ماشین نمی‌تواند بیش از کار ورودی به آن باشد. بنابراین هیچ ماشینی دارای راندمان صد در صد نیست و مقدار معینی از کار ورودی به علت اصطکاک بین اجزاء و قطعات از دست می‌رود.

روابط موجود برای کار ورودی، کار مفید و اصطکاک به شرح زیر است:

(۱) کار ورودی به ماشین = کار از دست رفته به علت اصطکاک + کار مفید

(۲) تغییر مکان به وسلیه نیروی کارگر × نیروی کارگر= کار ورودی

(۳) تغییر مکان بار × بار= کار مفید

اگر موقتاً اصطکاک نادیده گرفته شود رابطه (۴) رامی‌توان به صورت زیرنوشت:

(۴) تغییر مکان بار × بار= تغییر مکان بوسیله نیروی کارگر × نیروی کارگر

نســبت تغییر مکان به وســیله نیــروی کارگر به تغییر مکان بار به‌نســبت‌تندی (Velocity Ratio) یــا به اختصار v.r. موسوم است. اندازهٔ نسبت تندی برای هر ماشین خاص ثابت است و بستگی به طراحی دارد. نسبت تندی با انجام آزمایش به‌دست‌می‌آید. به‌هرحال رابطه (۵) به صورت زیرمی‌باشد.

$$\text{(۵)}\qquad \text{نسبت تندی(v.r.)} = \frac{\text{تغییرمکان به وسیله نیروی کارگر}}{\text{تغییر مکان بار}}$$

$$\text{نسبت تندی(v.r.)} = \frac{A}{a}$$

راندمان یک ماشین عبارت است از نسبت کار مفید به کار ورودی

یا

$$\text{راندمان} = \frac{\text{کار مفید}}{\text{کار ورودی}} = \frac{\text{تغییر مکان بار} \times \text{بار}}{\text{تغییر مکان به‌وسیله نیروی کارگر} \times \text{نیروی کارگر}}$$

$$\text{راندمان} = \frac{R \times a}{E \times A} \qquad (۶)$$

در بخشهای قبل آموختیم که $\frac{R}{E}$ = بهره مکانیکی (M.A.)

و نیز $\frac{A}{a}$ = نسبت تندی (v.r.)

بنابراین رابطه (۷) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\text{راندمان} = (M.A.) \times \frac{1}{v.r.} = \frac{M.A.}{v.r.} = \frac{\text{بهره مکانیکی}}{\text{نسبت تندی}} \qquad (۷)$$

راندمان رابطه (۷) به صورت کسری بیان شده است. برای بیان راندمان به صورت درصد، راندمان در عدد صد ضرب می‌شود.

در صورتی که از اصطکاک صرف‌نظر شود یا وجود نداشته باشد نیروی کارگر فقط باید بار را جابه‌جا کند. این‌گونه نیروی کارگر به نیروی کارگر مطلوب موسوم است. اگر از لحاظ تئوری یک ماشین کاملاً بدون اصطکاک وجود داشته باشد، راندمان آن صد در صد یا مساوی عدد یک است. در این‌گونه ماشین بهره مکانیکی مساوی با نسبت تندی است و می‌توان نوشت:

$$M.A. = v.r.$$

$$\frac{R}{E_I} = v.r.$$

$$E_I = \frac{R}{v.r.} \qquad (۸)$$

E_I نیروی کارگر مطلوب می‌باشد.

البته با توجه به این‌که در ماشین‌های واقعی اصطکاک وجود دارد رابطه زیر در هر ماشین واقعی برقرار است.

نیروی کارگر مطلوب − نیروی کارگر واقعی = نیروی کارگر برای جبران اصطکاک

$$\text{نیروی کارگر برای جبران اصطکاک} = E - \frac{R}{v.r.} \qquad (۹)$$

بر فرض این‌که در ماشـــین اصطکاک وجود نداشـــته باشد، باری که به وسیله یک نیروی کارگر معین جابه‌جا می‌شود به بار مطلوب موسوم است و می‌توان نوشت:

$$\text{بار مطلوب} = E \times v.r. \qquad (۱۰)$$

ولی با توجه به این‌که در ماشین‌های واقعی اصطکاک وجود دارد رابطه زیر قابل بیان است:

بار واقعی− بار مطلوب= بار قابل جابه‌جایی به علت اصطکاک

$$\text{بار قابل جابه‌جایی به علت اصطکاک} = E \times v.r. - R \qquad (۱۱)$$

از روابط فوق در حل مسائل نمونه استفاده خواهد شد.

مسئله: مجموعه قرقره و طناب مطابق شکل ۱۶-۵ باری به وزن ۴۰۵ نیوتون را به فاصله یک متر بالا می‌کشد. اگر نیروی کارگر مساوی ۹۰ نیوتون باشد راندمان مجموعه چقدر است؟

حل:

با توجه به این‌که بار به وســیله پنج بخش از طناب تحمل می‌شــود بنابراین فاصله طی شده به وسیله نیروی کارگر برابر ۵ متر و فاصله طی شده بوسیله بار مساوی یک متر است.

$$v.r.\ (\text{نسبت تندی}) = \frac{۵}{۱} = ۵$$

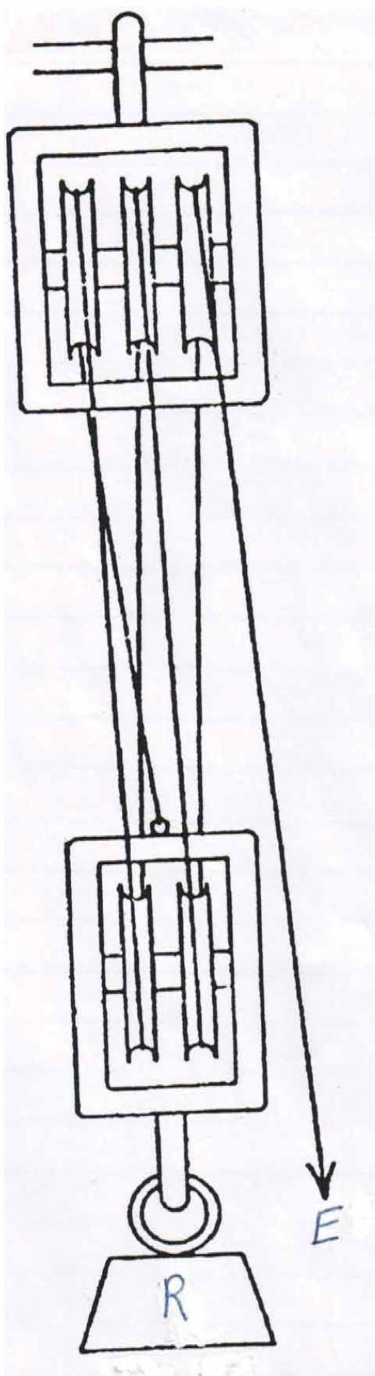
$$M.A.\ (\text{بهره مکانیکی}) = \frac{E}{R} = \frac{۴۰۵}{۹۰} = ۴/۵$$

(توضیح: بهره مکانیکی به علت وجود اصطکاک کم‌تر از ماشین مطلوب است)

$$\text{راندمان} = \frac{M.A.}{v.r.} \times ۱۰۰$$

$$\text{راندمان} = \frac{۴/۵}{۵} \times ۱۰۰$$

$$\text{راندمان} = ٪۹۰$$



شکل ۱۶-۵

۴-۵-تأثیر استقرار معکوس

در شکل ۱۷-۵ دو شیوهٔ ترکیب قرقره و طناب ثابت و متحرک دو شیاره نشان داده شده است. قرقره‌ها به ترتیب با حروف A و B نشان داده شده‌اند.

در ترکیب اول، قرقره A به یک بست محکم شده و بار R از قرقره B آویزان است. از این ترکیب غالباً برای بلند کردن بار استفاده می‌شود. ملاحظه می‌شود جهت حرکت نیروی کارگر E مخالف جهت حرکت بار R است.

چهار بخش طناب، بار R را متحمل می‌شوند و نسبت تندی برابر ۴ می‌باشد. در ترکیب دوم، همان قرقره‌ها معکوس شده‌اند. قرقره B به بست محکم شده و بار به وسیلهٔ قرقرهٔ A جابه‌جا می‌شود. جهت حرکت نیروی کارگر موافق جهت حرکت بار است. در این ترکیب هر پنج بخش طناب، بار R را تحمل می‌کنند و نسبت تندی برابر عدد ۵ است.

ملاحظه می‌شود اگر قرقره‌ها برای بلند کردن بار استفاده شوند، نسبت تندی مساوی با تعداد شیارها می‌باشد، اما اگر از قرقره‌ها برای جابه‌جایی بار در امتداد افقی استفاده شود، در ترکیب اول نسبت تندی مساوی با تعداد شیارها و در ترکیب دوم مساوی با مجموع تعداد شیارها به علاوه یک است.

در حل این‌گونه مسائل در صورتی که چگونگی استقرار قرقره‌ها معین نشده باشد محاسبه دو پاسخ امکان‌پذیر است و هر دو باید داده شود.

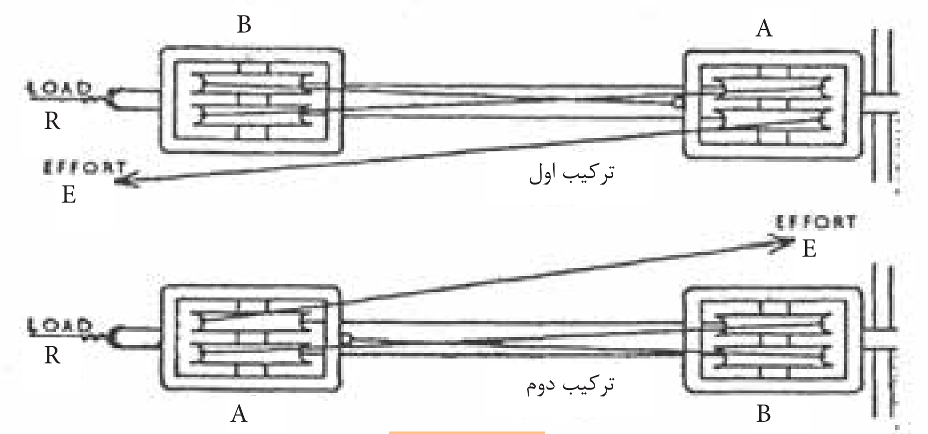
مسئله:

در صورتی که مطابق شکل ۱۷-۵ باری به وزن ۴۵۰۰ نیوتون در امتداد افقی حرکت داده شود و ضریب اصطکاک بار و زمین ۰/۴۵ و راندمان ماشین ۰/۸ باشد اندازه نیروی کارگر چقدر است؟

حل:

$$\text{نیروی لازم برای جبران اصطکاک} = \mu R = ۰/۴۵ \times ۴۵۰۰ = ۲۰۲۵ \quad \text{نیوتون}$$

$$\text{راندمان ماشین} = \frac{\text{بهره مکانیکی}}{\text{نسبت تندی}} = \frac{R}{E \times v.r.} \qquad E = \frac{R}{(v.r.) \times \text{راندمان ماشین}}$$



شکل ۱۷-۵

در ترکیب اول که E در جهت مخالف R است نسبت تندی برابر ۴ و در ترکیب دوم که E در جهت موافق R است نسبت تندی برابر ۵ است در نتیجه:

$$\text{درترکیب اول} \quad E = \frac{۲۰۲۵}{۴\times ۰/۸} = ۶۳۲/۸ \quad \text{نیوتون}$$

$$\text{درترکیب دوم} \quad E = \frac{۲۰۲۵}{۵\times ۰/۸} = ۵۰۶/۲ \quad \text{نیوتون}$$

۵–۵ – قرقره زنجیری (Chain hoist)

قرقره زنجیری که قرقره اختلافی (Differential Pulley) نیز نامیده می‌شود معمولاً از سقف موتور خانه کشتی و یا کارگاه ساحلی به وسیله رورو‌ک آویزان است و برای جابه‌جایی عمودی و افقی اجسام و بارهای سنگین استفاده می‌شود. قرقره مزبور در شکل ۱۸-۵ نشان داده شده است. ماشین شامل دو قرقره متحدالمرکز به عنوان قرقره ثابت و یک قرقره تک شیاره متحرک می‌باشد. هر دو قرقره فوقانی همزمان با هم می‌چرخند.

وقتی نیروی کارگر بر زنجیر وارد می‌شود یک سوی قرقره متحرک به طرف قرقره بزرگ A کشیده می‌شود ولی سوی دیگر آن با چرخیدن قرقره کوچک B پایین می‌آید. در نتیجه جابه‌جایی رو به بالای قرقره متحرک و بار به شرح زیر می‌باشد.

اگر D و d به ترتیب قطر قرقره بزرگ A و قرقره کوچک B باشند، با یک دور چرخش کامل قرقره ثابت داریم:

$$\text{تغییرمکان به‌وسیله نیروی کارگر} = \pi D$$

$$\text{تغییرمکان بار} = \frac{(\pi D - \pi d)}{۲}$$

$$(\text{v.r.}) \ \text{نسبت تندی} = \frac{\text{تغییرمکان به وسیله نیروی کارگر}}{\text{تغییرمکان بار}}$$

$$(\text{v.r.}) \ \text{نسبت تندی} = \frac{\pi D}{\frac{۱}{۲}(\pi D - \pi d)}$$

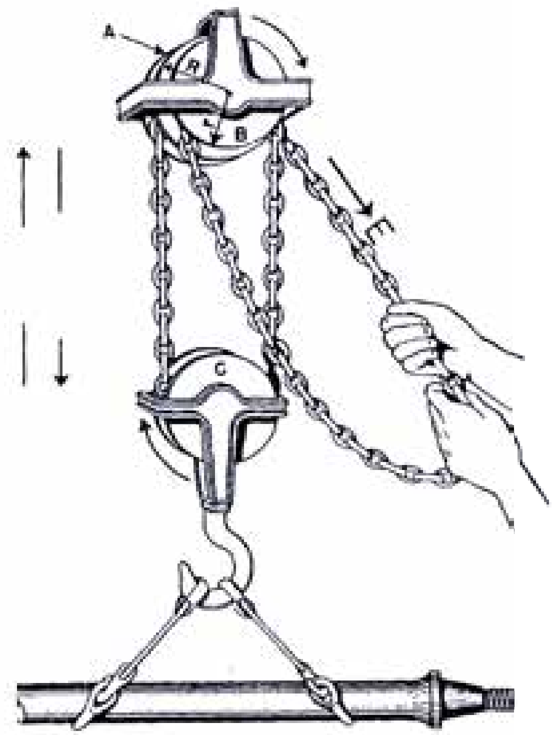
$$(\text{v.r.}) = \frac{۲\pi D}{(\pi D - \pi d)} = \frac{۲\pi(۲R)}{۲\pi R - ۲\pi r} = \frac{۲R}{R - r}$$

مثال:

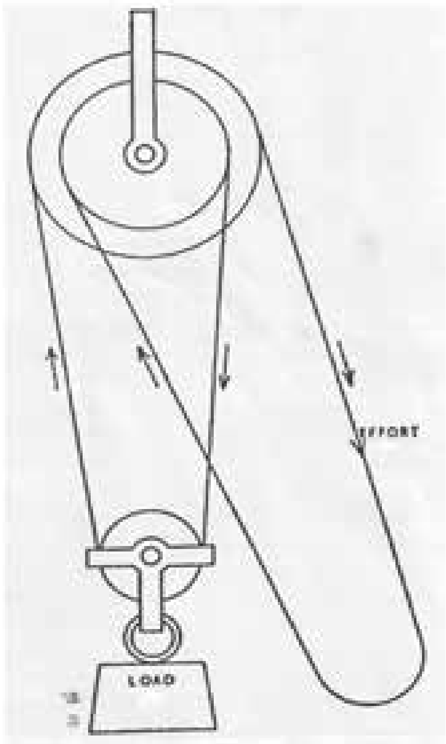
چنان‌چه در شکل ۱۸-۵ شعاع قرقره بزرگ R برابر ۱۶ سانتی‌متر و شعاع قرقره کوچک r مساوی ۱۴ سانتی‌متر باشد نسبت تندی ماشین چقدر است؟

حل:

$$v.r. = \frac{۲(۱۶)}{۱۶ - ۱۴} = \frac{۳۲}{۲} = ۱۶$$



شکل ۱۸-۵ الف- قرقره زنجیری (اختلافی)



شکل ۱۸-۵ ب- قرقره زنجیری (اختلافی)

اگرچه نسبت تندی بزرگ حاکی از بهرهٔ مکانیکی بزرگ می‌باشد ولی این ماشین دارای اصطکاک نسبتاً زیادی است لذا بهره مکانیکی واقعی آن بسیار کوچک‌تر از بهره مکانیکی مطلوب است.

در این ماشین از زنجیر استفاده می‌شود. قرقره‌ها دارای دندانه هستند طوری که زنجیر قابل استفاده باشد. گام دندانه‌ها ثابت است لذا داریم:

$$\text{(v.r.) نسبت تندی} = \frac{\text{در برابر تعداد دندانه‌ها در قرقره بزرگ}}{\text{تفاوت تعداد دندانه‌ها در دو قرقره}}$$

$$v.\mathrm{r.} = \frac{۲\mathrm{D}}{\mathrm{D}-\mathrm{d}} = \frac{۲\mathrm{R}}{\mathrm{R}-\mathrm{r}}$$

مسئله:

قطـر قرقره‌هـای بزرگ و کوچـک در یک قرقره زنجیری به ترتیب ۱۲۰ و ۱۱۰ میلی‌متر اسـت. برای بالا بردن باری به مقدار ۲/۴ کیلو نیوتون نیروی کارگر به مقدار ۲۵۰ نیوتون لازم است. نسبت تندی، بهره مکانیکی و راندمان را تعیین کنید. همچنین مقدار نیروی کارگر که برای جبران اصطکاک مصرف می‌شود را محاسبه کنید.

حل:

$$v.r.=\frac{۲D}{D-d}=\frac{۲\times۱۲۰}{۱۲۰-۱۱۰}=۲۴$$

$$M.A.=\frac{R}{E}=\frac{۲۴۰۰}{۲۵۰}=۹/۶$$

$$\text{راندمان}=\frac{M.A.}{v.r.}=\frac{۹/۶}{۲۴}=۰/۴ \text{ یا } ۴۰\%$$

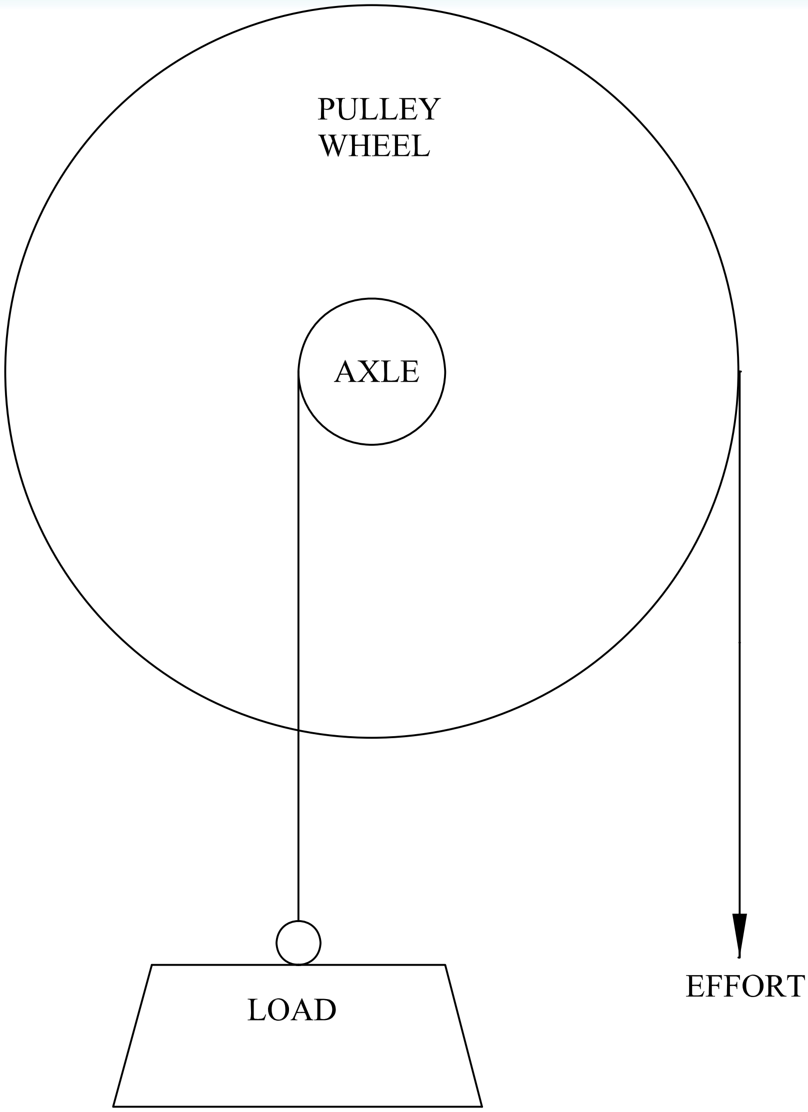
$$\text{نیروی کارگر مطلوب}=\frac{R}{v.r.}=\frac{۲۴۰۰}{۲۴}=۱۰۰ \text{ نیوتون}$$

نیروی کارگر مطلوب − نیروی کارگر حقیقی = نیروی کارگر مصرف شده برای اصطکاک

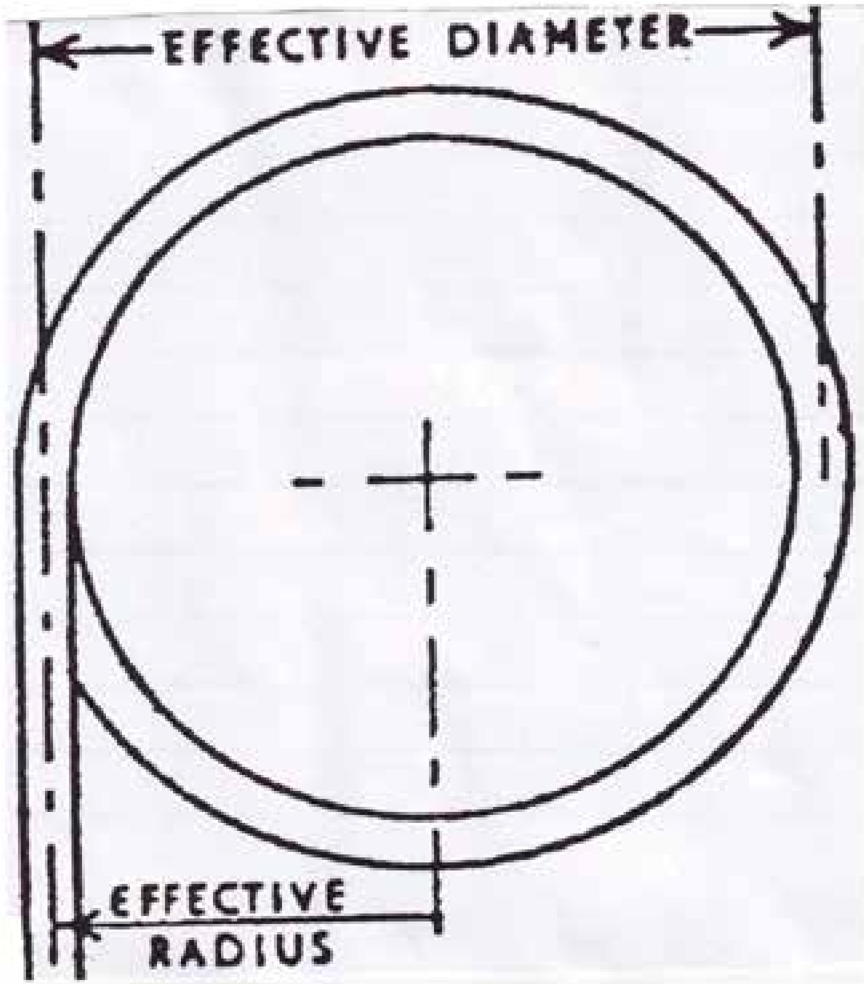
نیوتون ۱۵۰=۱۰۰-۲۵۰=

۶–۵ –چرخ و محور (The Wheel and Axle)

این ماشـــین شـــامل یک قرقره تک شـــیاره به همراه یک محور است. یک سر طناب یا ســـیمی که قلاب بار از آن آویزان می‌شود به محور متصل و محکم شده و به دور آن می‌پیچد. یک سر طناب یا سیمی که نیروی کارگر آن را می‌کشد به دور قرقره می‌پیچد. این ماشـــین در شـــکل ۱۹–۵ نشان داده شـــده است. طناب بار و طناب نیروی کارگر در دو جهت مخالف به دور محور و قرقره پیچیده می‌شوند. با اعمال نیروی کارگر قرقره می‌چرخد و طناب به طرف کارگر کشیده می‌شود. همزمان طناب بار در جهت مخالف به دور محور می‌پیچد و بار بالا می‌رود.



شکل ۱۹-۵- چرخ و محور



شکل ۲۰-۵- اندازه قطر و شعاع مؤثر در چرخ و محور

در صورتی که D و R به ترتیب قطر و شــعاع قرقره و d و r قطر و شــعاع محور می‌باشــند با فرض این‌که نیروی کارگر قرقره و محور را یک دور کامل بچرخاند می‌توان نوشت:

$$\text{نسبت تندی (v.r.)} = \frac{\text{تغییرمکان به‌وسیله نیروی کارگر}}{\text{تغییرمکان بار}} = \frac{\text{طول محیط قرقره}}{\text{طول محیط محور}}$$

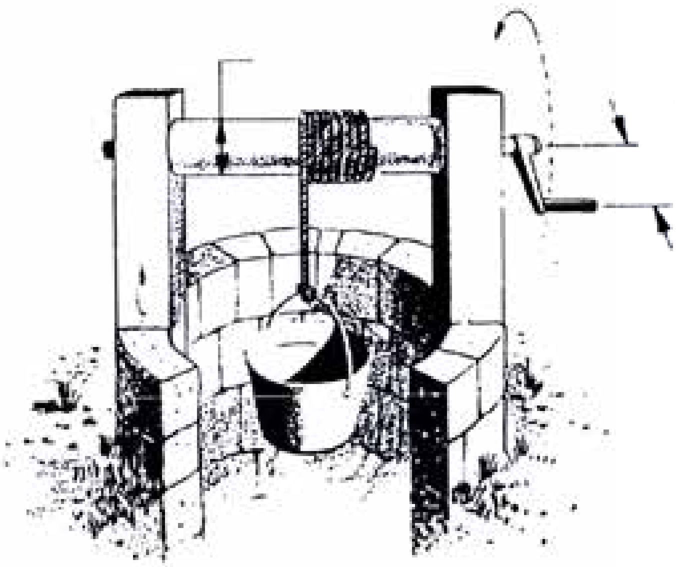
$$(v.r.) = \frac{\pi D}{\pi d} = \frac{D}{d} = \frac{R}{r}$$

در این ماشین ممکن است قطر طناب در محاسبات منظور شود. لذا در حلّ مسائل وقتی که اندازه طناب داده می‌شود

طول مؤثر محیط یا طول شعاع مؤثر مطابق شکل۲۰-۵ از وسط طناب در یک سر تا وسط طناب در سر دیگر اندازه‌گیری می‌شود.

البته عملاً ممکن است به‌جای قرقره از یک دسته (هندل) برای چرخاندن محور استفاده شود. در این صورت فاصله مرکز محور تا دسته (L) معادل شعاع قرقره (R) خواهد بود و خواهیم داشت (مانند چرخ چاه در شکل ۲۱-۵)

$$v.r. = \frac{L}{r}$$



شکل۲۱-۵- چرخ چاه

مسئله:

در یک ماشین چرخ و محور، قطر قرقره و محور به ترتیب ۲۲۰ و ۴۰ میلی‌متر است. قطر طنابهای بار و نیروی کارگر به ترتیب ۱۰ و ۵ میلی‌متر اســت. در صورتی که راندمان ماشــین ۰/۹۲ باشد مقدار نیروی کارگر برای بالا بردن باری به مقدار ۴۰۰ نیوتون را محاسبه کنید.

حل: قطر طناب نیروی کارگر + قطر قرقره = قطر مؤثر قرقره

میلی‌متر ۲۲۵= ۵ + ۲۲۰ =

قطر طناب بار + قطر محور = قطر مؤثر محور

میلی‌متر ۵۰ = ۱۰ + ۴۰ =

$$(\text{v.r.})\quad \text{نسبت تندی} = \frac{D}{d} = \frac{۲۲۵}{۵۰} = ۴/۵$$

$$(\text{M.A.})\quad \text{بهره‌مکانیکی} = \text{راندمان ماشین} \times \text{v.r.}$$

$$= ۰/۹۲ \times ۴/۵$$

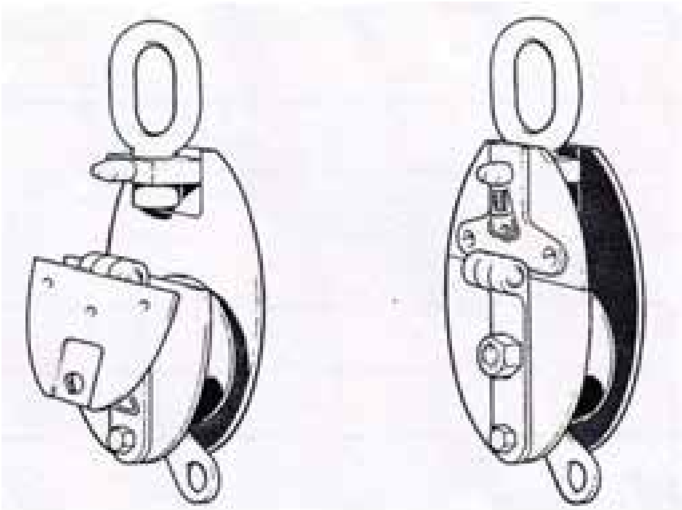
$$= ۴/۱۴$$

$$E = \text{نیروی کارگر} = \frac{R}{\text{M.A.}} = \frac{۴۰۰N}{۴/۱۴} = ۹۶/۶۱N$$

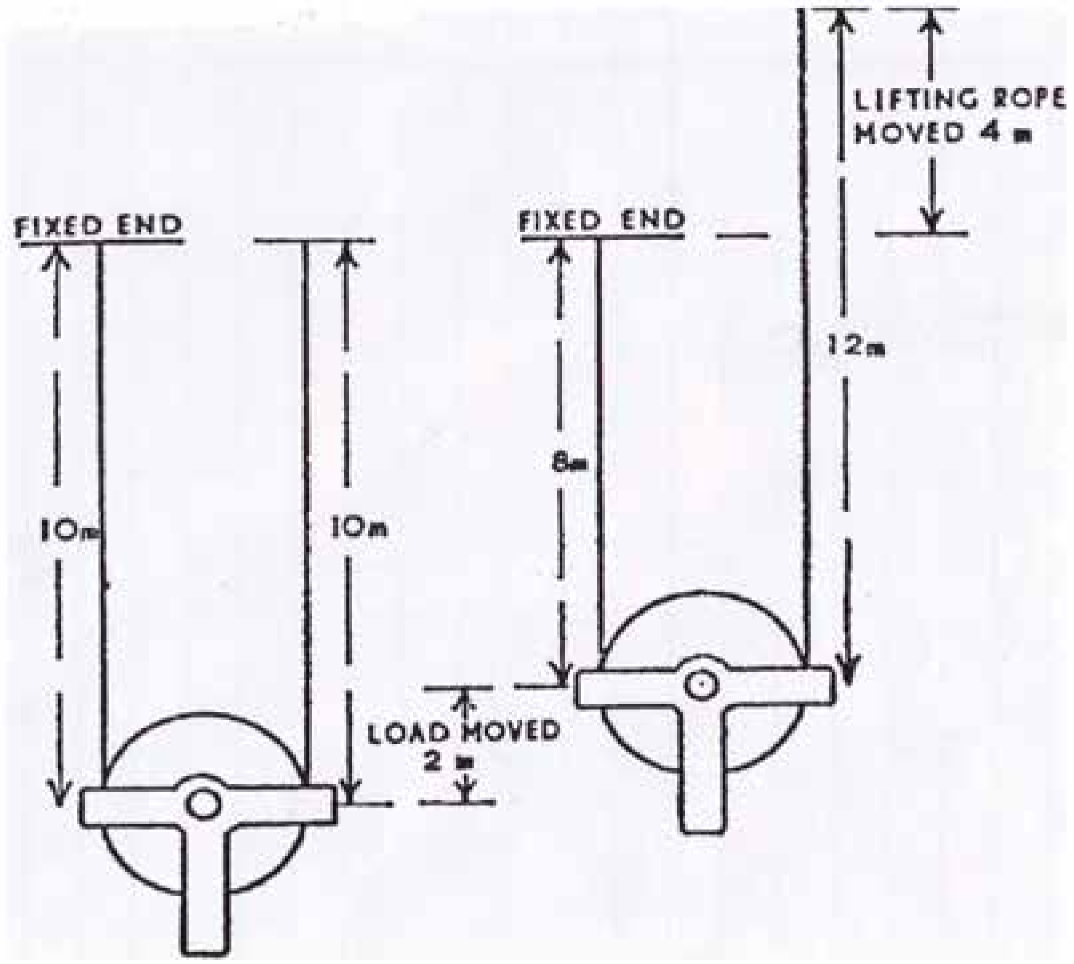
۷–۵ – قرقره سگکی (Snatch Block)

در بسیاری از ماشین‌های بالابر به‌جای آویزان شدن بار از طناب بار، از قرقره سگکی برای آویزان کردن بار استفاده می‌شود. این نوع قرقره دارای یک شیار است. مطابق شکل ۲۲–۵ با باز کردن سگک می‌توان طناب را در داخل قرقره قرار داد. یک سر طناب به ماشین بالابر محکم است و از داخل قرقره می‌گذرد و سر آزاد طناب به وسیله نیروی کارگر بالا کشیده می‌شود.

شکل ۲۳–۵ یک مثال عددی از طرز کار قرقره سگکی را نشان می‌دهد. قبل از اجرای نیروی کارگر طول هر کابل ده متر است. وقتی نیروی کارگر کابل بالارونده را به اندازهٔ چهار متر بالا می‌برد طول کابل بار به هشت متر می‌رسد. یعنی این‌که قرقره سگکی فقط دو متر بالا می‌رود.



شکل ۲۲–۵ – قرقره سگکی

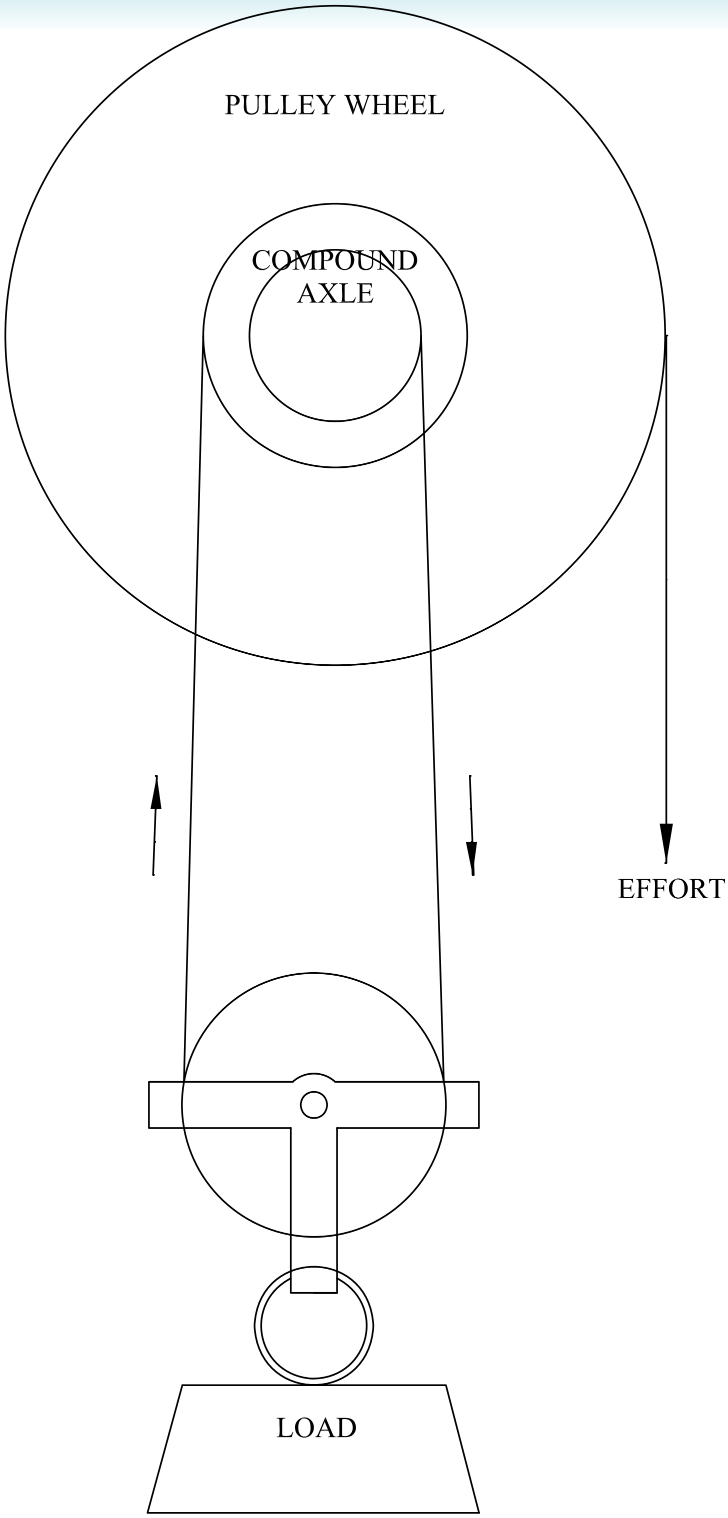


شکل ۲۳-۵ -طرز استفاده از قرقره سگگی

۸-۵ – چرخ و محور دو پله‌ای (Wheel and Differential Axle)

این ماشین مشابه چرخ و محور است با این فرق که محور این ماشین از دو محور متحدالمرکز با دو قطر متفاوت تشکیل شـده اسـت. مطابق شکل ۲۴-۵ با چرخش قرقره کارگر به وسـیله طناب نیروی کارگر و همزمان با پیچیده شدن طناب به دور محور بزرگ‌تر، طناب از دور محور کوچک‌تر باز می‌شـود. طناب محورها از داخل یک قرقره سـگگی می‌گذرد و بار به وسیله قرقره سگگی تحمل می‌شود.

D قطـر قرقـره کارگر، $d_۱$ قطر محور بزرگ‌تر و $d_۲$ قطر محور کوچک‌تر اسـت. با یک دور چرخش قرقره کارگر، طناب بالارو به اندازۀ $\pi d_۱$ بالا می‌رود و طناب پایین‌رو به اندازۀ $\pi d_۲$ پایین می‌آید. بنابراین طناب حامل قرقره سـگگی به اندازۀ $\pi d_۱ - \pi d_۲$ کوتاه می‌شود. در طرز کار قرقره سگگی ملاحظه شد تغییر مکان واقعی بار $\frac{\pi d_۱ - \pi d_۲}{۲}$ برابرمی‌باشد.



شکل۲۴-۵- چرخ و محور دوپله‌ای

بـا توجـه به این‌که تغییر مکان به وســیله نیروی کارگر در یــک دور چرخش کامل قرقره کارگر به اندازه πD اسـت بنابراین

$$\text{نسبت تندی (v.r.)} = \frac{\text{تغییرمکان به‌وسیله نیروی کارگر}}{\text{تغییرمکان بار}}$$

$$v.r. = \frac{\pi D}{\frac{۱}{۲}(\pi D_۱ - \pi d_۲)} = \frac{۲D}{\pi d_۱ - \pi d_۲}$$

$$= \frac{۲D}{d_۱ - d_۲} = \frac{۲R}{r_۱ - r_۲}$$

می‌توان مانند چرخ و محور معمولی (بخش ۶-۵) از یک دسته (هندل) به‌جای قرقره کارگر استفاده کرد. در این صورت فاصله مرکز محور تا دسته چرخش معادل شعاع قرقره کارگر خواهد بود.

مســئله: مطابق شــکل ۲۴-۵ شعاع قرقره کارگر برابر ۳۰ سانتی‌متر، شــعاع محور بزرگ‌تر ($r_۱$) مساوی ۱۰ سانتی‌متر و شــعاع محورکوچک‌تر ($r_۲$) مســاوی ۶ سانتی‌متر است. در صورتی که نیروی کارگر به مقدار ۵۰ نیوتون باشد چه مقدار بار را می‌توان بالا برد. راندمان دستگاه ۰/۹ می‌باشد.

حل:

$$v.r. = \frac{۲R}{r_۱ - r_۲} = \frac{۲\times۳۰}{۱۰-۶} = \frac{۶۰}{۴} = ۱۵$$

$$\text{بهره مکانیکی (M.A.)} = \text{راندمان دستگاه} \times v.r.$$

$$= ۰/۹ \times ۱۵ = ۱۳/۵$$

$$E = \text{نیـــــروی کارگـر} = ۵۰ \text{ نیوتون}$$

$$E = \frac{R}{M.A.} \Rightarrow R = E \times M.A. = ۵۰ \times ۱۳/۵ = ۶۷۵ \text{ نیوتون}$$

۹-۵ –میله حلزون و چرخ حلزون بالابر (Worm and Worm Wheel Lifting Gear)

مطابق شکل ۲۵-۵ ماشین بالابر میله حلزون و چرخ حلزون (که به حلزون و چرخ حلزون معروف است) شامل حلزون یا میله حلزون (Worm)، چرخ حلزون (Worm Wheel)، قرقره بار (Load Wheel)، قرقره کارگر (Effort Wheel)، زنجیر کارگر (Effort Chain)، قلاب بار (Load Hook) و زنجیر یا کابل بار (Load Cable) می‌شود. برخی موارد به جای قلاب بار از قرقره سگکی استفاده می‌گردد. در این موارد یک سر کابل قرقره سگکی به بدنه ماشین متصل و محکم می‌شود.

با اعمال نیروی کارگر بر زنجیر کارگر، قرقره کارگر و سپس میله حلزون، چرخ حلزون و قرقره بار به چرخش درمی‌آیند و بار بالا می‌رود.

در این ماشـــین D قطر قرقرهٔ کارگر، d قطر قرقرهٔ بار و N تعداد دندانه‌های چرخ حلزون اســت. معمولاً از میلهٔ حلزون یک راهه استفاده می‌شود.

به‌ازای یک دور گردش چرخ حلزون، میله حلزون باید N مرتبه بچرخد. برای یک دور گردش چرخ حلزون تغییر مکان به وسیله نیروی کارگر برابر πDN و تغییر مکان بار به اندازه πd است:

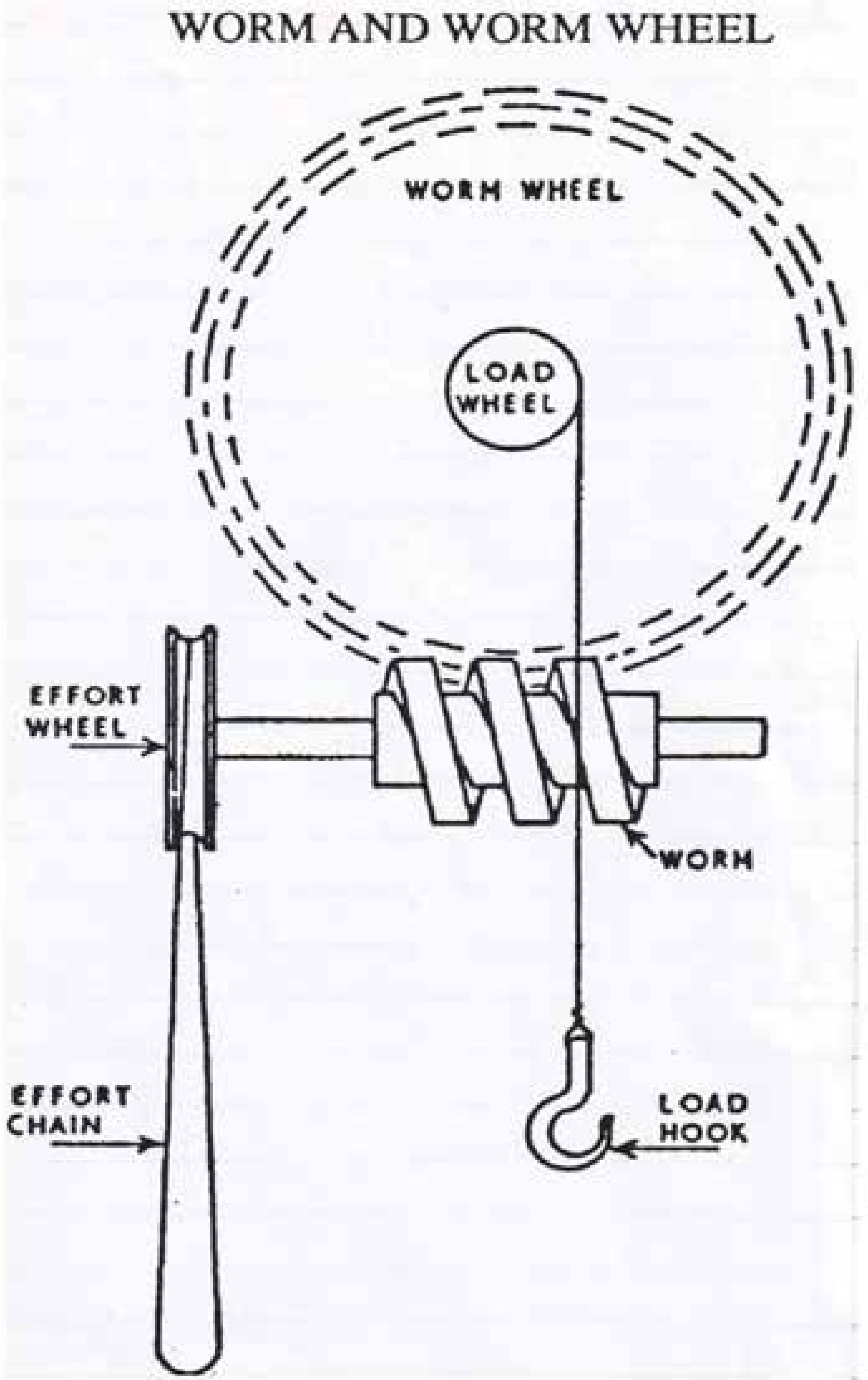
در صورت استفاده از قلاب بار

$$\text{نسبت تندی (v.r.)} = \frac{\text{تغییرمکان به‌وسیله نیروی کارگر}}{\text{تغییرمکان بار}}$$

$$= \frac{\pi D N}{\pi d} = \frac{D N}{d}$$

در صورت استفاده از قرقره سگکی

$$\text{نسبت تندی (v.r.)} = \frac{2 D N}{d}$$



شکل ۲۵-۵ -حلزون و چرخ حلزون

خودآزمایی :

۱ـ در یک مجموعه قرقره و طناب شامل قرقره سه شیاره در بالا و قرقره دو شیاره در پایین، نیروی کارگر به مقدار ۳۰۰ نیوتون برای بالا بردن باری به مقدار ۱/۲۶ کیلو نیوتون مصرف می‌شود. نسبت تندی، بهره مکانیکی و راندمان ماشین را در این بار تعیین کنید.

۲ـ یک مجموعه قرقره و طناب شامل دو قرقره ۴ شیاره در بالا و پایین است. راندمان ماشین برای بالا بردن باری به مقدار ۲/۸ کیلو نیوتون برابر ٪۷۰ است. نیروی کارگر چقدر است؟

۳ـ در یک ماشین بالابر نوع چرخ و محور دوپله‌ای از دسته اهرم به طول ۲۴۰ میلی‌متر به‌جای قرقره کارگر استفاده می‌شود. قطر محورهای دوپله‌ای به ترتیب ۱۱۰ و ۸۰ میلی‌متر است. برای بالا بردن باری به مقدار ۱/۱۲ کیلو نیوتون به نیروی کارگر معادل ۸۰ نیوتون نیاز است. نسبت تندی، بهره مکانیکی و راندمان ماشین را تعیین کنید.

۴ـ راندمان یک قرقره زنجیری (اختلافی) در بالا بردن یک بار ۱/۸۹ کیلو نیوتونی برابر ۳۵ درصد است. تعداد دندانه‌های قرقره‌های بزرگ و کوچک به ترتیب ۲۷ و ۲۴ عدد می‌باشد. نیروی کارگر برای بالا بردن بار چقدر است؟

۵ـ قطر قرقره کوچک یک مجموعه قرقره زنجیری (اختلافی) ۱۳۰ میلی‌متر است. برای بالا بردن باری به مقدار ۵۶۰ نیوتون نیروی کارگر به مقدار ۵۰ نیوتون لازم است. در صورتی که راندمان ماشین ۴۰ درصد باشد. قطر قرقره بزرگ چقدر است؟

۶ـ قطر قرقره کارگر یک ماشین حلزون و چرخ حلزون ۲۰۰ میلی‌متر است. میله حلزون یک راهه و چرخ حلزون دارای ۴۰ دندانه است. قطر قرقره بار ۱۲۵ میلی‌متر است و بار به وسیله قرقره سگکی تحمل می‌شود. نیروی کارگر ۱۵۰ نیوتونی برای بالا بردن باری به مقدار ۶/۷۲ کیلو نیوتون لازم است. راندمان ماشین برای بالا بردن این بار چقدر است؟
نیروی کارگر مطلوب و نیروی مصرف شده برای جبران اصطکاک چقدر است؟

منابع

الف ــ منابع فنّی

1-Reed’s Applied Mechanics For Engineers
Volume 2
William Embleton, Leslie Jackson
Thomas Reed Publications
Fifth Edition 1994 , surrey , UK

2-Reed’s Applied Mechanics For Engineers
Volume 2
William Embleton , J.T. Gunn
Thomas Reed Publications
Fourth Edition , Reprint , 1989 , London , UK

3-Introduction to Mechanics
Irving J. Levinson
Prentice – Hall , Inc. 1968 , Englewood C Liffs , N.J , USA

4-Manufacturing Technology
Stanley A. Komacek ; Ann E. Lawson ; Andrew C. Horton
Delmar Publishers Ins , 1990
Albany , New york , USA

5- Technology Made Simple
Don Mecloy
Heinemann , 1984 , London , UK

۶-Admiralty Manual of Seamanship
Volume 2,1992
London , UK

7-Basic Machines
Naval Education and Training Professional
Development and Technology Center , 1994
USA

ب ــ منابع فرهنگ و تمدن اسلام و ایران

۱ـ ترجمه تفسیر المیزان
علامه سیّد محمّد حسین طباطبایی
ترجمه سیّد محمّد باقر موسوی همدانی
کانون انتشارات محمدی، تهران، ۱۳۶۴

۲ـ تاریخ مصوّر تکنولوژی اسلامی
احمد یوسف حسن، دانالد ر.هیل
ترجمه ناصر موفقیان
شرکت انتشارات علمی و فرهنگی
تهران، ۱۳۷۵

پ ــ منابع فرهنگ و تمدن دینی و باستانی

1-The Holy Bible
King James Version
American Bible Society
New york , 1972 , USA

2-The Dartmouth Bible
Santry Edition
Roy B. chamberlin ; Herman Feldman
Houghton Mifflin Company
Boston , 1961 , USA

3-Could Noah Lift Heavy Objects?
Tim Lovett