بسم الله الرحمن الرحیم

ریاضی

سال سوم آموزش متوسّطه

رشته‌های ادبیّات و علوم انسانی ـ علوم و معارف اسلامی

وزارت آموزش و پرورش

سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

برنامه‌ریزی محتوا و نظارت بر تألیف : **دفتر تألیف کتاب‌های درسی ابتدایی و متوسطه نظری**

نام کتاب : **ریاضی ـ ۲۵۸/۶**

مؤلفان : **زهرا گویا، مریم گویا**

آماده‌سازی و نظارت بر چاپ و توزیع : **ادارهٔ کلّ نظارت بر نشر و توزیع مواد آموزشی**

تهران : خیابان ایرانشهر شمالی ـ ساختمان شمارهٔ ۴ آموزش و پرورش (شهید موسوی)

تلفن : ۹ـ ۸۸۸۳۱۱۶۱، دورنگار : ۸۸۳۰۹۲۶۶، کدپستی : ۱۵۸۴۷۴۷۳۵۹،

وب‌سایت : www.chap.sch.ir

رسام : **هدیه بندار**

صفحه‌آرا : **مریم نصرتی**

طراح جلد : **مریم کیوان**

ناشر : **شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران : تهران ـ کیلومتر ۱۷ جادهٔ مخصوص کرج ـ خیابان ۶۱ (داروپخش)**

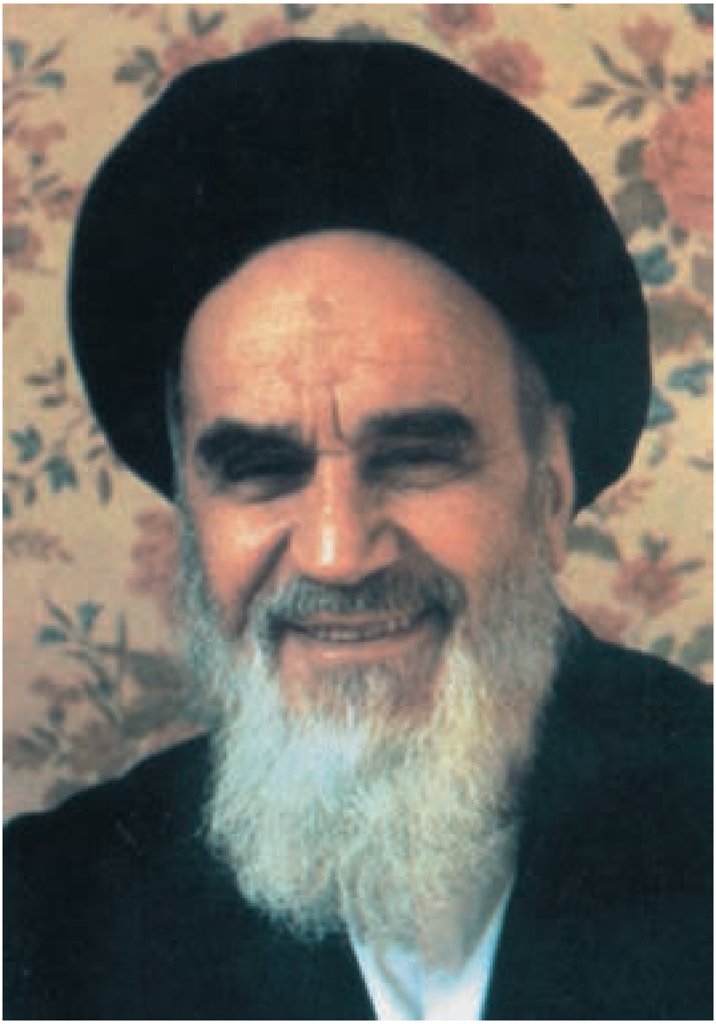
تلفن : ۵ ـ ۴۴۹۸۵۱۶۱، دورنگار : ۴۴۹۸۵۱۶۰، صندوق پستی : ۱۳۹ـ ۳۷۵۱۵

چاپخانه : **شرکت چاپ و نشر کتابهای درسی ایران «سهامی خاص»**

سال انتشار و نوبت چاپ : **چاپ پانزدهم ۱۳۹۴**

ISBN 964-05-0993-0 شابک ۰-۰۹۹۳-۰۵-۹۶۴

۱۳۹۴



امام طلبه‌ها را به تحقیق و تتبع وادار می‌کردند. به شاگردان مجال می‌دادند تا نظرات خود را بیان کنند. اگر روزی در سر درس کسی اشکال نمی‌کرد، امام با حالت اعتراض می‌فرمودند :

«مگر اینجا مجلس ختم است که ساکت نشسته‌اید».

فهرست مطالب

فصل اوّل

۱ــ تابع ۱

۱ــ۱ــ متغیر مستقل و متغیر وابسته ؛ دامنه و بُرد تابع ۶

۲ــ۱ــ نمایش تابع ۱۲

۳ــ۱ــ نماد تابع ۱۴

۴ــ۱ــ مقدار تابع ۱۵

۵ــ۱ــ محاسبهٔ مقدار تابع ۱۸

۶ــ۱ــ عملیات با تابع‌ها ۲۱

۷ــ۱ــ رسم نمودار تابع ۲۶

۱ــ۷ــ۱ــ نمودار تابع خطی ۲۷

۲ــ۷ــ۱ــ قاعدهٔ رسم نمودار تابع خطی ۳۰

۸ــ۱ــ خانوادهٔ تابع‌های خطی ۳۷

۹ــ۱ــ خانوادهٔ تابع‌های توانی ۴۱

فصل دوم

۲ــ معادله و تابع‌های درجهٔ دوم ۵۰

۱ــ۲ــ تابع درجهٔ دوم ۵۲

۲ــ۲ــ تخمین جواب‌های معادلات درجهٔ دوم ۵۲

۳ــ۲ــ حل معادلهٔ درجهٔ دوم ۵۴

۱ــ۳ــ۲ــ حل معادلهٔ درجهٔ دوم با استفاده از خاصیت ریشهٔ زوج ۵۷

۲ــ۳ــ۲ــ حل معادلهٔ درجهٔ دوم به روش مربع کامل‌کردن ۵۹

۳ــ۳ــ۲ــ فرمول حل معادلهٔ درجهٔ دوم در حالت کلّی ۶۲

۴ــ۲ــ معادله‌های کسری ۷۰

۵ــ۲ــ حل معادلات رادیکالی ۷۱

۶ــ۲ــ کاربردهای معادلهٔ درجهٔ دوم ۷۵

۷ــ۲ــ رسم نمودارهای تابع درجهٔ دوم ۸۲

۱ــ۷ــ۲ــ رأس سهمی و نقاط تلاقی سهمی با محورهای مختصات ۸۸

فصل سوم

۳ــ ترکیبیات ۹۶

۱ــ۳ــ اصل اساسی شمارش ۹۷

۲ــ۳ــ انتخاب‌های مستقل و وابسته ۱۰۵

۳ــ۳ــ جایگشت ۱۰۸

۱ــ۳ــ۳ــ جایگشت‌های r شیء از n شیء متمایز ۱۱۳

۲ــ۳ــ۳ــ جایگشت‌های متمایز ۱۱۶

۴ــ۳ــ ترکیب ۱۲۰

منابع ۱۲۹

بـه‌نـام خـداونـد جـان و خـرد　　　　کزین برتر اندیشه برنگذرد

پیشگفتار

در عصر حاضر، که به حق عصر دانایی لقب گرفته، گستره‌ای از اطلاعات گوناگون پیش روی هر یک از انسانها است. در چنین شرایطی، کسانی توان مقابله و رویارویی با جهان پیشرفته را دارند که دارای ذهنی پویا، متفکر و نقّاد بوده و توانایی پردازش اطلاعات، انتخاب مفیدترین آنها از بین حجم وسیع اطلاعات در دسترس را داشته باشند تا بتوانند در زمان مناسب بهترین تصمیم ممکن را گرفته و از دور عقب‌ماندگی و ناآگاهی رها گردند.

دانش‌آموزان امروز که به‌عنوان نسل جوان جامعهٔ ما در مدخل ورود به این عصر قرار گرفته‌اند باید بیاموزند و به‌خوبی بیاموزند تا از دانش و آگاهیهای روز بهره گرفته و توانایی تکنولوژیکی مناسبی فراهم نمایند تا قدرت رقابت با جهان توسعه‌یافته را در نوآوری و تولید داشته باشند. آنچه مسلّم است از عوامل اصلی و زیربنایی پیشرفت در زمینهٔ تکنولوژی، دانش ریاضی است. از این‌رو تمامی دانش‌آموزان نیازمند هستند که ریاضی بیشتر و اغلب متفاوت را فرا بگیرند. ریاضی‌ای که بتواند خواسته‌های افرادِ دارای علایق متفاوت، حتی آنهایی که غیرمتعارف امّا مؤثر و عمیق می‌اندیشند و یا افراد متعلق به گروههای خاص (مانند نابینایان) را ارضا نماید.

ریاضی واقعی با داده‌های واقعی سر و کار دارد. داده‌هایی که اغلب غیرصریح، پیچیده و متنوع هستند. ریاضی واقعی مدل‌ساز پدیده‌های طبیعی است و تکنولوژی بستر مناسب چنین ریاضیاتی است. تکنولوژی فرصت توسعهٔ مفاهیم ریاضی و گسترش انتخاب را ایجاد کرده و باعث توسعهٔ مهارتهای کیفی می‌شود. برای مثال توانایی‌های حدسیه‌سازی، مدل‌سازی، استدلال کردن

به روشهای مختلف و حل مسأله در یک پارادایم تکنولوژیکی به‌خوبی قابل ایجاد هستند. در چنین پارادایمی یادگیری دیگر حفظ کردن، دریافت و پس دادن مطالب نیست. یادگیری به معنای درگیر شدن، ساختن، اشتباه کردن، دوباره ساختن و تولید دانش جدید است. برای ایجاد فرصتهای مناسب و متناسب با ریاضی بیشتر و متفاوت برای تمامی دانش‌آموزان بایستی کلاسهای درس ریاضی، دوباره‌نگری شده و تبدیل به اجتماعات یادگیری شوند. این دوباره‌نگری نیازمند توجه به‌فرهنگ ریاضی و فرهنگهای بومی است که در آن ریاضی تدریس می‌شود (بیشاب، دومین کنفرانس آموزش ریاضی).

تدریس مؤثر ریاضی نیازمند درک چیزهایی است که دانش‌آموزان می‌دانند و چیزهایی که نیاز به یادگیری آن دارند. پس از اطمینان از درک دانسته‌ها و نیازهای دانش‌آموزان، بایستی کوشید تا با به چالش انداختن و حمایت آنان، این گروه را در فرایند یادگیری سهیم نمود.

به‌همین دلیل توصیه می‌شود تدریس از طریق حل مسأله، کار در گروههای کوچک، بحث همگانی در کلاس و نوشتن نقادانه (بازتابی) دربارهٔ موضوعهای بحث شده انجام گرفته و یا حتی‌الامکان فعالیتهای کتاب در گروههای کوچک به بحث همگانی گذاشته شود. بدین‌طریق دانش‌آموزان درگیر حل مسأله و انتخاب استدلال موجه‌تر از بین چند استدلال صحیح و یا انتخاب بهترین راه برای حل یک مسأله شده و این توانایی کیفی به‌تدریج در آنان ایجاد می‌گردد.

در این قرن، همهٔ دانش‌آموزان متوسطه به‌طور فزاینده‌ای برای ورود به آموزش عالی، اشتغال و ایفای وظیفهٔ شهروندی به ریاضیات متناسب با نیازهای خود احتیاج دارند.

به همین دلیل کتاب حاضر به منظور توسعهٔ دانش ریاضی و استمرار آموزش ریاضی دانش‌آموزان رشتهٔ علوم‌انسانی تدوین شده است. در تدوین مطالب، سعی بر این بوده است تا دانش‌آموزان با کاربردهای ریاضی در زندگی روزمره تا حدودی آشنا شده، بر ارزش ریاضی در زندگی خود پی برده و قدردان راهگشاییهای ریاضی برای حل مسایل خود باشند. از این گذشته انتظار می‌رود بسیاری از مهارتهای کمی و کیفی ریاضی به‌طور ضمنی در دانش‌آموزان ایجاد شود که از آن جمله می‌توان به توانایی تصمیم‌گیری و انتخاب اشاره نمود.

در تألیف کتاب هدفهای زیر مورد توجه بوده است :

۱ــ ادامهٔ آموزش ریاضی سال اول و دوم جهت حفظ تداوم یادگیری ریاضی، تعمیق آموخته‌ها، توسعهٔ مفاهیم جدید متناسب با نیازهای رشتهٔ علوم‌انسانی و علوم و معارف اسلامی و ایجاد مبانی لازم برای یادگیری ریاضی پایهٔ پیش‌دانشگاهی. مثالهای حل شده در کتاب و مجلات ریاضی به این هدف کمک می‌کند اما بخش مجلات ریاضی و زنگ تفریح ریاضی برای مطالعهٔ

علاقه‌مندان بوده و جهت طرح سؤالات امتحانی در نظر گرفته نشده است.

۲ــ آشنایی با مفاهیم پراستفادهٔ ریاضی، تکنیکهای به‌کارگیری این مفاهیم و ایجاد مهارتهای عملیاتی و کاربردی از طریق فعالیتهای مختلف.

۳ــ توجه به تفاوتهای فردی با توجه به تنوع رشته‌های علوم انسانی و معارف اسلامی و تنوع دانش‌آموزانی که وارد این رشته‌ها می‌شوند.

۴ــ ایجاد علاقه و نگرش مثبت به ریاضی در دانش‌آموزان.

۵ــ افزایش توانایی حل مسأله از طریق طراحی فعالیتهای متنوع و باز ــ پاسخ برای رسیدن به درک رابطه‌ای.

۶ــ استفاده از تکنولوژی، به‌خصوص ماشین‌حساب، به‌عنوان پداگوژی، نه آنکه فقط ابزار محاسباتی برای افزایش مهارتهای شناختی، مهارتی و نگرشی نسبت به ریاضی.

ارزشیابی موفقیّت تحصیلی باید به‌طور مستمر و براساس نوع فعالیتهای انجام شده توسط دانش‌آموزان در کلاس درس صورت پذیرد. البته ارزشیابی‌های پایانی نیز پاسخگوی بخشی از ارزشیابی جامع خواهد بود.

کوتاه سخن اینکه ارزیابی باید حامی یادگیری ریاضیات مهمی باشد که دانش‌آموز یاد گرفته است و اطلاعات مفیدی، هم به معلمان و هم به دانش‌آموزان ارائه نماید.

لازم به ذکر است که براساس نظرخواهی از معلمان گرامی، که به‌طور تصادفی انجام شده است و بازخوانی نوشته‌های اولیه توسط عده‌ای از دبیران محترم و دانش‌آموزان عزیز، جرح و تعدیلهایی در سرفصل برنامه‌های پیش‌بینی شده و مطالب تهیه شده صورت گرفته است و امیدواریم کتاب حاضر با خواسته‌ها و توقعات اکثریت افراد استفاده‌کننده همراستا باشد. با این وجود، از آنجا که برآورده کردن خواسته‌های همگان امکان‌پذیر نیست، امیدواریم کژیها و کاستیها را بر ما ببخشایند و با دیدهٔ اغماض بنگرند.

از همهٔ عزیزانی که به‌نحوی با این کتاب در ارتباطند، تقاضا داریم نقطه نظرات و انتقادات خود را مرقوم نموده و ما را از راهنماییهای خود بهره‌مند فرمایند.

در پایان لازم می‌دانیم از راهنماییها و زحمات بی‌شائبه و گرانقدر و خالصانه سرکار خانم سهیلا غلام‌آزاد که در تمام مراحل تدوین کتاب حضور فعال داشته و مساعدت لازم را نمودند، تشکر و قدردانی کرده و برایشان آرزوی توفیق کنیم. مطمئناً بدون کمکهای مؤثر ایشان تدوین این کتاب میسر نمی‌شد.

مؤلفان

فصل اوّل

تابع

ظهر گرم تابستان را به یاد آورید! وقتی که دوست دارید بعد از ظهر چرتی بزنید وصدای جیرجیرک‌ها مانع می‌شوند! شاید فکر کنید **چرا** جیرجیرک‌ها در روزهای گرم تابستان،از همیشه پُر سر و صداتر هستند و بیشتر جیرجیر می‌کنند؟ اگر به ویژگی ظهر گرم تابستان ؛ که همان درجهٔ حرارت بالاست ؛ توجّه کنید، علّت را یافته‌اید.

همین‌طور است! تعداد جیرجیرِ جیرجیرک‌ها، با درجهٔ حرارت متناسب است. یعنی هر چه هوا گرم‌تر باشد، تعداد جیرجیرِ جیرجیرک‌ها نیز، بیشتر می‌شود.

دانشمندان علوم تجربی، بین تعداد جیرجیرِ جیرجیرک‌ها در هر دقیقه و درجهٔ حرارت به‌سانتیگراد، رابطهٔ زیر را پیدا کرده‌اند.

۳۲ـ(۷/۵ برابر درجهٔ حرارت به سانتیگراد) = تعداد جیرجیرها در هر دقیقه

اگر تعداد جیرجیرها در هر دقیقه را با n و درجهٔ حرارت به سانتیگراد را با C نشان دهیم، آنگاه این رابطهٔ تجربی[1] را می‌توانیم به‌صورت فرمول زیر بنویسیم :

$$n = ۷/۵C - ۳۲ \qquad (۱)$$

فعالیت ۱ــ۱

۱ــ در گرمای ۱۶ درجهٔ سانتیگراد، تعداد جیرجیرها در هر دقیقه چندتاست؟

۲ــ در گرمای ۱۰ درجهٔ سانتیگراد، تعداد جیرجیرها در هر دقیقه چندتاست؟

جدول ۱

درجهٔ حرارت به سانتیگراد	۴	۱۰	۱۵	۱۶	۱۸	۲۱	۲۷	۳۲
تعداد جیرجیرِ جیرجیرک‌ها در هر دقیقه			۸۰/۵					

۳ــ اعداد به‌دست‌آمده در بندهای ۱ و ۲ را در جدول فوق بنویسید و جدول را کامل کنید :

۴ــ در مورد تعداد جیرجیرها در چهار درجهٔ سانتیگراد چه می‌گویید؟

۵ــ در صفر درجهٔ سانتیگراد، آیا صدای جیرجیری از جیرجیرک‌ها شنیده می‌شود؟

درست حدس زدید! نطق جیرجیرک‌ها در سرما خاموش می‌شود!

۶ــ به فرمول (۱) و جدول (۱) توجّه بیشتری کنید. آیا می‌توانید برای هر درجهٔ حرارت به سانتیگراد، تعداد جیرجیرهای متفاوتی پیدا کنید؟ دلیل خود را برای پاسخی که می‌دهید، بنویسید.

۱ــ توجّه کنید که این فرمول، حاصل مشاهدات متعدد،منظم کردن آن مشاهدات و پیداکردن الگویی در آنها بوده است که فرمول پیشنهادی نشان‌دهندهٔ آن الگوست.

پاسخ های خود را به خاطر بسپارید. این پاسخ یک نتیجهٔ مهمّ را معرفی می‌کند. دوباره به آن باز می‌گردیم.

فعالیت ۲ــ۱

یک بنّا و یک کارگر ساختمانی با هم در یک محلّ مشغول به کار هستند. کارگر ساختمانی روزی ۸ ساعت (با احتساب ساعت نماز وناهار) و بنّا، روزی ۶ساعت کار می‌کنند. دستمزد کارگر ساختمانی ساعتی ۵۰۰ تومان و دستمزد بنّا (به دلیل کار تخصصّی که می‌کند)، ساعتی ۱۲۵۰ تومان است. کارگر ساختمانی از ۸ صبح و بنا از ۱۰ صبح، مشغول به کار می‌شوند.

نمای داخلی کتابخانه تازه تأسیس هویزه

۱ــ جدول ۲ را کامل کنید :

جدول ۲

زمان	ساعت‌هایی که کارگر ساختمانی کار کرده	دستمزد کارگر ساختمانی به تومان	ساعت‌هایی که بنّا کار کرده	دستمزد بنّا به تومان
۸ صبح	—	—	—	—
۹ صبح	۱	۵۰۰	—	—
۱۰ صبح	۲	$۲\times۵۰۰=۱۰۰۰$	—	—
۱۱ صبح	۳	$۳\times۵۰۰=۱۵۰۰$	۱	۱۲۵۰
۱۲ ظهر				
۱ بعد از ظهر				
۲ بعد از ظهر				
۳ بعداز ظهر				
۴ بعد از ظهر				

۲ــ بعد از آن که کارگر ساختمانی، ۴ ساعت کارکرد، بنّا چند ساعت کار کرده است؟

۳ــ چگونه دستمزد کارگر ساختمانی و بنّا را، از روی ساعت‌هایی که کار کرده‌اند، مشخّص می‌کنیم؟

۴ــ فرمولی پیدا کنید که با آن، دستمزد بنّا را از روی تعداد ساعت‌هایی که کارگر ساختمانی کار کرده است، تعیین کنیم.

۵ــ بعد از ۴ ساعت کارکردن کارگر ساختمانی، دستمزد او بیشتر است یا دستمزد بنّا؟ (یعنی در ساعت ۱۲ ظهر)

۶ــ بعد از ۸ ساعت کارکردن کارگر ساختمانی (در ساعت ۴ بعد از ظهر)، دستمزد او بیشتر است یا دستمزد بنّا؟ چرا؟

۷ــ آیا بعد از تعداد ساعت کار انجام شده، کارگر ساختمانی می‌تواند دو دستمزد متفاوت دریافت کند؟ چرا؟

۸ ــ آیا بعد ازتعداد ساعت کارانجام‌شده، بنّا می‌تواند دو دستمزد متفاوت دریافت کند ؟ چرا؟

پاسخ سؤال ۶ فعالیت ۱ــ۱ و پاسخ سؤال‌های ۷ و ۸ فعالیت ۲ــ۱ را با هم مقایسه کنید و نتیجه را با بیان خود، بنویسید.

همان‌طورکه خود نتیجه گرفتید، در هر درجهٔ حرارت، تعداد جیرجیرها مشخّص بود ؛ در مقابل تعداد ساعت کار انجام‌شده توسط کارگر ساختمانی نیز، دستمزد او مشخّص بود، هم‌چنان که در مقابل تعداد ساعت کار انجام شده توسط بنّا نیز، دستمزد او مشخّص بود.

هم‌چنین، تعداد جیرجیرها از درجهٔ حرارت **تبعیت** می‌کردند و دستمزد کارگر ساختمانی و بنّا، از تعداد ساعت‌هایی که هریک کار کرده بودند، **تبعیت** می‌نمودند، در واقع، تعداد جیرجیرها **تابعی** از **درجهٔ حرارت** و دستمزد کارگر ساختمانی و بنّا، **تابعی** از **ساعت‌های کاری** است.

بنابراین :

یک کمیّت مانند n (تعداد جیرجیرِ جیرجیرک‌ها)، تابعی از یک کمیّت دیگر مانند C (درجه حرارت برحسب سانتیگراد) است، اگر برای هر مقدار C، یک مقدار منحصربه‌فرد برای n نتیجه شود، این را به‌صورت $n=f(C)$ (بخوانید اِف ِ C[1]) نشان می‌دهیم.

در واقع :

اگر درجهٔ حرارت‌ها بر حسب سانتیگراد را مجموعهٔ A و تعداد جیرجیرِ جیرجیرک‌ها در هر دقیقه را مجموعهٔ B بنامیم، یک تابع f از A به B، قانونی است که به هر عضو C در مجموعهٔ A، دقیقاً یک عضو n از مجموعهٔ B را نسبت می‌دهد. مجموعهٔ A **دامنهٔ**[2] تابع f و مجموعهٔ B، **بُرد**[3] تابع f نامیده می‌شود.

پس در حالت کلّی، می‌توانیم تعریف زیر را برای تابع داشته باشیم :

تعریف

یک کمیّت مانند y، تابعی از یک کمیّت دیگر مانند x است، اگر برای هر مقدار x، یک و فقط یک مقدار برای y، نتیجه شود. این تابع را به‌صورت $y=f(x)$ نشان می‌دهیم.

می‌توانیم تابع را به‌صورت دیگری نیز تعریف کنیم.

۱ــ اِف (f) اوّل واژهٔ Function به‌معنی تابع است.

۲ــ Domain ۳ــ Range

تعریف

یک تابع f از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B، قانونی است که به هر عضو x در مجموعهٔ A، دقیقاً یک عنصر y از مجموعهٔ B را نسبت دهد. مجموعهٔ A **دامنهٔ** تابع f و مجموعهٔ B، **بُرد** تابع f نامیده می‌شود.

تمرین ۱

با توجّه به تعریف تابع، آیا جدول ۲ که دستمزد کارگر ساختمانی و بنّا را برحسب تعداد ساعت‌هایی که هریک کار کرده‌اند، نشان می‌دهد ؛ یک تابع را نشان می‌دهند؟ چرا؟ توضیح دهید.

در فعالیت‌های ۱ــ۱ و ۲ــ۱ دیدید که با تغییر درجهٔ حرارت و تعداد ساعت ؛ تعداد جیرجیرها و مقدار دستمزدها، تغییر می‌کند. به کمیّتی که تغییر می‌کند، **متغیّر** گفته می‌شود.

تمرین ۲

در فعالیت‌های ۱ــ۱ و ۲ــ۱، **متغیّرها** را نام ببرید.

تمرین ۳

فرق بین متغیّرهای فعالیّت ۱ــ۱ چیست؟

تمرین ۴

متغیرهای فعالیت ۲ــ۱، چه فرقی با هم دارند؟

۱ــ۱ــ متغیر مستقل و متغیّر وابسته؛ دامنه و برد تابع

در فعالیت ۱ــ۱ تغییرات n یعنی تعداد جیرجیرها در هر دقیقه، وابسته به تغییرات درجهٔ

حرارت به سانتیگراد یعنی C است. پس C **متغیّر مستقل** و n، **متغیّر وابسته** است.

در فعالیت ۲ــ۱ نیز، تغییرات R یعنی دستمزد در هر ساعت، وابسته به تغییرات زمان، یعنی تعداد ساعت‌های کاری یا h است. پس h **متغیّر مستقل**، و R **متغیّر وابسته** است.

با این اطلاّعات، می‌توانیم **دامنه** و **بُرد** یک تابع را تعریف کنیم :

تعریف

دامنهٔ یک تابع، مجموعهٔ مقدارهایی است که یک **متغیّر مستقل** می‌تواند داشته باشد.

بُرد یک تابع، مجموعهٔ مقدارهایی است که یک **متغیّر وابسته** می‌تواند داشته باشد.

مثال

نمودار تابع $n = ۷/۵C - ۳۲$ را رسم کنید و دامنه و برد آن را مشخّص کنید.

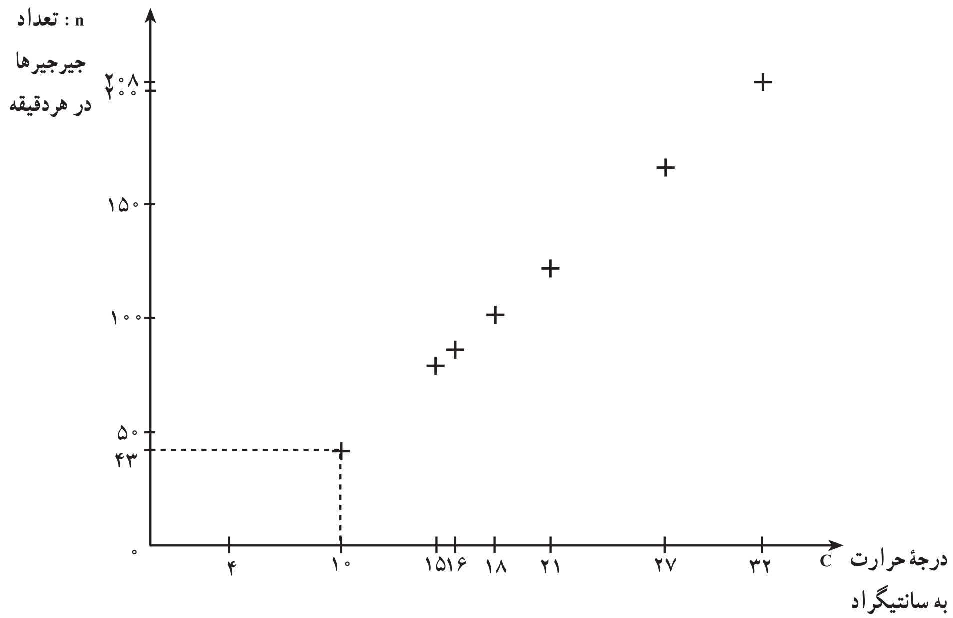
حل: جدول ۱ را که تکمیل کرده‌اید، دوباره می‌نویسیم :

جدول ۳

درجهٔ حرارت به سانتیگراد	۴	۱۰	۱۵	۱۶	۱۸	۲۱	۲۷	۳۲
تعداد جیرجیرِ جیرجیرک‌ها در هر دقیقه[۱]	۰	۴۳	۸۱	۸۸	۱۰۳	۱۲۶	۱۷۱	۲۰۸

هر جفت از اعداد ردیف اول ودوم، یکی از نقاط نمودار این تابع است که آنها را در صفحهٔ مختصات مشخّص می‌کنیم و سپس، نمودار را رسم می‌کنیم.

۱ــ توجه داشته باشید که فرمول $n = ۷/۵C - ۳۲$ یک یافتهٔ تجربی و تقریبی است و چون نیم جیرجیر معنای واقعی ندارد، درنتیجه، وقتی که تعداد جیرجیرها عدد اعشاری می‌شود، آن عدد را گرد می‌کنیم و از اعشار آن، صرف نظر می‌نماییم.



اگر n=۷/۵ C–۳۲ را فقط یک رابطهٔ ریاضی بین C و n در نظر بگیریم، هر مقدار حقیقی برای C، ممکن است وهمین‌طور، هر مقدار حقیقی برای n، ممکن می‌شود. امّا اگر به این معادله، به‌عنوان رابطهٔ بین تعداد جیرجیرِ جیرجیرک‌ها در هر دقیقه و درجهٔ حرارت برحسب سانتیگراد نگاه کنیم، درنتیجه، Cنمی‌تواند کمتر از ۴ درجه باشد، زیرا همان‌طور که در **فعالیت ۲ــ۱** دیدید، n زیر محور قرار می‌گیرد و منفی می‌شود ومنفی‌بودن **تعداد** جیرجیرها معنایی ندارد.

هم‌چنین، بالاترین درجهٔ حرارت ثبت‌شده توسط ادارهٔ هواشناسی، تقریباً ۵۸°C است، پس این فرمول؛ برای درجهٔ حرارت بیشتر از ۵۸°C، جواب نمی‌دهد. درنتیجه، برای تابع n=۷/۵ C–۳۲،

دامنه تابع : تمام مقدارهای C بین ۴°C و ۵۸°C

بُرد تابع : تمام مقدارهای n بین (۳۲–(۴×۷/۵)) و(۳۲–(۵۸×۷/۵)) یعنی تمام مقدارهای n بین ۰ و ۴۰۳

بنابراین، می‌توانیم بگوییم که

n=۷/۵ C–۳۲

در دامنهٔ ۴≤C≤۵۸، نشان داده می‌شود.

مثال

دامنهٔ $y=x^{۲}$ را تعیین کنید.

حل: در حالت کلّی، دامنهٔ این تابع، مجموعهٔ اعداد حقیقی($\mathbb{R}$) است، با این حال، اگر از $y=x^{۲}$ ، برای نشان‌دادن مساحت مربعی با طول ضلع x استفاده شود ؛ آن‌گاه، فقط مقدارهای مثبت x را در نظر می‌گیریم (چرا؟) و دامنه را به اعداد مثبت محدود می‌کنیم.

مثال

دامنهٔ تابع‌های زیر را مشخّص کنید :

الف) $y=x^{۳}+۱$

ب) $y=\frac{۱}{x+۲}$

پ) $y=\sqrt{۴-x}$

حل:

الف) دامنهٔ $y=x^{۳}+۱$ تمام اعداد حقیقی است زیرا دلیلی برای محدودکردن x در این تابع، وجود ندارد.

ب) دامنهٔ $f(x)=\frac{۱}{x+۲}$ تمام اعداد حقیقی به جز $x=-۲$ است. زیرا اگر $x=-۲$ باشد، آن‌گاه مخرج مساوی صفر شده و تقسیم عدد بر صفر بی‌معنی است، پس مقدار تابع، عدد حقیقی نخواهد بود.

پ) چون مقدار زیر رادیکال نمی‌تواند منفی باشد، پس مقدار $۴-x$ باید بزرگ‌تر یا مساوی صفر شود. یعنی

$$۴-x\geq ۰$$

با اضافه‌کردن x به طرفین نامعادله نتیجه می‌شود.

$$۴-x+x\geq x$$

یا

$$۴\geq x$$

پس برای آن‌که مقدارزیر رادیکال منفی نشود، x باید کوچکتر یا مساوی ۴ باشد. بنابراین دامنهٔ تابع در این حالت مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی کوچکتر یا مساوی ۴ است.

تمرین

دامنهٔ تابع‌های زیر را پیدا کنید :

الف) $y = \frac{۱}{x - ۳}$

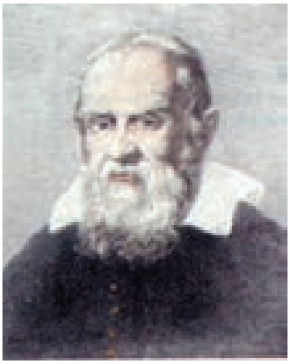
ب) $y = ۳x^{۳} - ۴$

پ) $y = \sqrt{x - ۹}$

مجلهٔ ریاضی

تابع‌ها، نقش مهمّی در علوم بازی می‌کنند. بارها دیده‌اید که یک کمیّت، تابعی از یک کمیّت دیگر است. دانشمندان علوم تجربی و ریاضیدان‌ها، سعی کرده‌اند تا برای این تابع‌ها، فرمولی پیدا کنند تا روابط بین کمیّت‌ها را نشان دهد.

برای مثال، تا قبل از سال ۱۵۹۰، هیچ ایدهٔ کمّی در مورد درجهٔ حرارت وجود نداشت. البتّه مردم، اندیشه‌های نسبی مانند **گرمتر** و **سردتر** را درک می‌کردند و با بعضی اندیشه‌های مطلق مانند داغ یعنی جوش‌آمدن و سرد یعنی منجمد شدن، آشنایی داشتند.



گالیله، فیزیکدان و منجم ایتالیایی (۱۶۴۲ــ۱۵۶۴)

با این حال، اندازهٔ عددی برای درجهٔ حرارت، وجود نداشت. بالاخره، گالیله با نبوغ خویش، تشخیص داد که منبسط‌شدن مایعات براثر گرم‌شدن، کلید اندازه‌گیری درجهٔ حرارت است.

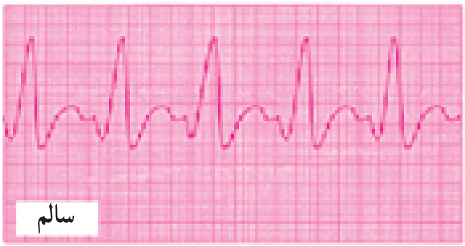
گالیله ؛ اوّلین کسی بود که به درجهٔ حرارت، به عنوان تابعی از حجم مایع، توجّه کرد.

پیداکردن تابعی که معرّف یک موقعیت داده شده باشد، ساختن یک مدل ریاضی نامیده می‌شود. چنان مدلی، می‌تواند روابط بین متغیرها را روشن کند و درنتیجه، به ما کمک می‌کند تا بتوانیم پیش‌بینی کنیم.

همان‌طور که در فعالیت ۱ــ۱ و ۲ــ۱ دیدید، فرمول $n=f(C)=۷/۵C-۳۲$ و $R=۱۲۵۰(h-۲)$ ، مدل‌های ریاضی بودند تا بتوانیم با آنها، تعداد جیرجیرها و دستمزد بنّا را پیش‌بینی کنیم.

فعالیت ۳ــ۱

به نمودار زیر نگاه کنید :



این نمودار، مربوط به نوار قلبی دو انسان سالم و بیمار است که الگوی ضربان قلب آن دو را نشان می‌دهد. به این الگو در اصطلاح پزشکی، الکتروکاردیوگرام[1] یا EKG گفته می‌شود. EKG، تابعی از زمان است.

اگرچه ساختن یک فرمول، برای تقریب زدن یک تابع EKG ممکن است، امّا متداول نیست. الگوی تکرار ضربات چیزی است که یک پزشک، نیازمند دانستن آن است و این الگوها، از طریق نمودار، خیلی راحت‌تر دیده می‌شوند تا از طریق فرمول یا جدول.

۱ــ ضربان قلب، تابع چه کمیّتی است؟

۲ــ اگر ضربان قلب را با EKG و زمان را با t نشان دهیم، کدام یک متغیر مستقل و کدام یک متغیّر وابسته هستند؟

۱ــ Electro Kardio Gram (EKG)

۲ــ۱ــ نمایش تابع

در فعالیت ۱ــ۱، تعداد جیرجیرِ جیرجیرک‌ها را که تابعی از درجهٔ حرارت برحسب سانتیگراد بود، با یک فرمول نشان دادیم. البتّه این رابطه را با جدول و نمودار هم نشان دادیم.

در فعالیت ۲ــ۱ ؛ دستمزد کارگر ساختمانی و بنّا را که تابعی از تعداد ساعت‌های کاری بودند، با یک جدول نشان دادیم، با این حال، رابطهٔ بین کمیت‌های آن جدول را می‌توانیم با فرمول یا نمودار هم نشان دهیم (و این کار را خواهیم کرد).

در فعالیت ۳ــ۱ ، ضربان قلب را که تابعی از زمان است، با یک نمودار نشان دادیم. درصورتی که می‌توانیم این تابع را، به شکل جدول یا فرمول نیز نمایش دهیم.

نتیجه

تابع‌ها را می‌توان به سه شکل مختلف یعنی به‌وسیلهٔ فرمول‌ها، به‌وسیلهٔ جدول‌ها یا به‌وسیلهٔ نمودارها نشان داد.

در سه فعّالیت قبلی، از هر کدام از شکل‌های مختلف نمایش تابع که مناسب‌تر بودند، استفاده شد. شما هم همین کار را بکنید و بدانید که این سه شکل، هر سه معتبر هستند و ابزار مناسبی برای نمایش تابع می‌باشند.

مثال

با توجّه به پاسخ‌های سؤال‌های ۳ و ۴ فعالیت ۲ــ۱، نشان دهید در چه زمانی، کارگر ساختمانی و بنّا، دستمزد یکسان دارند.

حل: همان‌طورکه در پاسخ به سؤال ۳ فعالیت ۲ــ۱ نوشتید، اگر ساعت را با h [1] نشان دهیم، دستمزد کارگر ساختمانی در هر ساعت برابر $۵۰۰h_۱$ و دستمزد بنّا برابر $۱۲۵۰h_۲$ است.

در پاسخ سؤال ۴ فعالیّت ۲ــ۱، چون دستمزد بنّا را برحسب ساعت‌های کاری کارگر ساختمانی خواسته بود، درنتیجه شما به‌درستی، به جای $h_۲$ ، مقدار $(h_۱ - ۲)$ را جایگزین کردید، زیرا بنّا

۱ــ اوّل واژهٔ Hour به معنای ساعت است.

دو ساعت دیرتر از کارگر ساختمانی شروع به کار می‌کرد. درنتیجه

$$دستمزد بنّا = ۱۲۵۰(h_۱ - ۲)$$

پس پیدا کردن ساعتی که دستمزد بنّا و دستمزد کارگر ساختمانی با هم برابر باشند، یعنی حل معادلهٔ

$$۱۲۵۰(h_۱ - ۲) = ۵۰۰h_۱$$

با حل این معادله، $h_۱$ یعنی ساعتی که دو دستمزد با هم برابر می‌شوند، پیدا می‌شود:

$$۱۲۵۰h_۱ - ۲۵۰۰ = ۵۰۰h_۱$$

$$۱۲۵۰h_۱ - ۵۰۰h_۱ - ۲۵۰۰ = ۵۰۰h_۱ - ۵۰۰h_۱$$ کم‌کردن $۵۰۰h_۱$ از طرفین

$$۷۵۰h_۱ - ۲۵۰۰ = ۰$$

$$۷۵۰h_۱ - ۲۵۰۰ + ۲۵۰۰ = ۲۵۰۰$$ اضافه‌کردن ۲۵۰۰ به طرفین

$$۷۵۰h_۱ = ۲۵۰۰$$

$$h_۱ = \frac{۲۵۰۰}{۷۵۰} = ۳/۳۳$$ تقسیم طرفین بر ضریب $h_۱$

این همان ساعتی بود که از روی جدول (۲) پیش‌بینی کرده بودید.

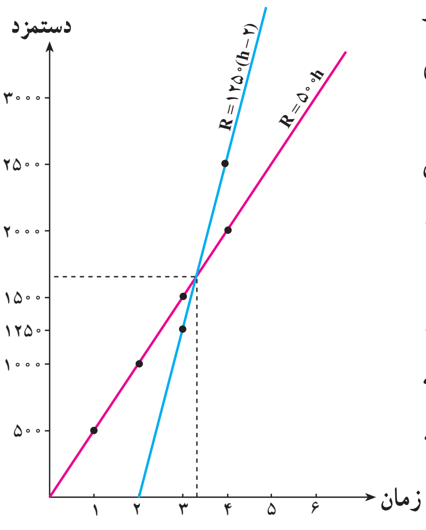
مثال

نمودار دو تابع دستمزد بنّا و کارگر را رسم کنید و نقطهٔ تقاطع آن‌ها را روی شکل، مشخص کنید.

حل: معادلهٔ $R = ۵۰۰h$ معرّف تابع دستمزد کارگر ساختمانی ومعادلهٔ $R = ۱۲۵۰(h-۲)$، معرّف تابع دستمزد بنا است.

با استفاده ازنقطه‌یابی و نشان‌دادن دستمزدها روی محور yها و ساعت های کاری (زمان) روی محور xها، نمودار این دو تابع را رسم می‌کنیم.

همان نتیجه‌ای را که از جدول و از فرمول گرفتید، از نمودار هم به‌دست آوردید. یعنی با استفاده ازهر سه نمایش تابع، نشان دادید که در $h \cong ۳/۳۳$، دستمزد کارگر ساختمانی و بنّا، با هم برابر می‌شوند.



۳ــ۱ــ نماد تابع

وقتی یک تابع به‌وسیلهٔ یک عبارت جبری یا یک ضابطه که همان فرمول است، نمایش داده می‌شود، معمولاً از **نماد تابع** استفاده می‌شود تا هم به‌راحتی، بتوان به آن عبارت جبری ارجاع داد و هم مقدار آن عبارت جبری را به‌ازای مقدارهای مختلف متغیّر مستقل، محاسبه کرد.

نماد $f(x)$ (اِف x) نشان می‌دهد که نام تابع f است ومتغیّر مستقل، x است. می‌توانیم از نمادهای دیگری نیز به جای $f(x)$ استفاده کنیم. برای مثال، $f(x)=x^{۲}+۱$ را می‌توانیم بنویسیم $y=x^{۲}+۱$. در هر صورت مقدار $f(x)$ یا y، **مقدارتابع** است که متغیّر وابسته به متغیّر مستقل است.

همان‌طورکه می‌توان از هر حرفی به غیر از x، برای نشان‌دادن متغیّر مستقل استفاده کرد، می‌توان ازهر حرفی به غیر از f نیز برای نشان دادن تابع، استفاده کرد. تابع‌های زیر، مثال‌هایی هستند که با **نماد تابع** نوشته شده‌اند :

الف) $h(x)=۳-۲(x+۱)$

ب) $g(t)=|۳t-۲|$

پ) $k(w)=\frac{w+۲}{w-۱}$

ت) $r(g)=\sqrt{g+۲}$

توجّه کنید که در هر فرمول، حرف داخل پرانتز، نشان دهندهٔ متغیّر مستقل است. پس هر متغیّر مستقلی در آن فرمول، باید با نماد داخل پرانتز معرفی شود. با دقّت در چهار مثال قبلی، این نکته بهتر دیده می‌شود.

هم‌چنین، در بیشتر فرمول‌هایی که تا به حال دیده‌اید، مقدارهایی وجود دارند که همیشه ثابت هستند، مانند $n=۷/۵C-۳۲$ که در آن، ۷/۵ و ۳۲− همیشه ثابت هستند. به این مقدارها، **مقدار ثابت** گفته می‌شود.

تمرین

در هریک از مثال‌های (الف)، (ب)، (پ) و (ت)، **متغیّر مستقل**، **متغیّر وابسته** را مشخّص کرده و بنویسید.

۴ــ۱ــ مقدار تابع

وقتی که تعداد جیرجیرِ جیرجیرک‌ها را به عنوان تابعی ازدرجهٔ حرارت به سانتیگراد معرّفی کردیم، نوشتیم $n=f(C)$ و رابطهٔ بین آنها را با $n=۷/۵C-۳۲$ نشان دادیم.

برای مثال، برای پیداکردن تعداد جیرجیرها در $۲۸^{\circ}C$ [1]، یعنی برای پیداکردن $n=f(۲۸)$، ابتدا ۲۸ را در ۷/۵ ضرب می کنیم و سپس، ۳۲ را از آن کم می‌کنیم :

$$\begin{aligned} n &= f(۲۸) \\ &= (۷/۵\times ۲۸)-۳۲ \\ &= ۱۷۸ \end{aligned}$$

به همین ترتیب، تمام اعداد ردیف دوم جدول (۱) را در هر درجهٔ حرارت داده شده در ردیف اوّل، به‌دست می‌آوریم. به فرمول $۷/۵C-۳۲$ **ضابطهٔ تابع** و به $f(C)$، **مقدار تابع** گفته می‌شود.

مثال

آیا جدول زیر، معرّف یک تابع است؟ چرا؟ ضابطهٔ این تابع را بنویسید.

جدول ۴

x	۱	۲	۳	۴	۵	۶
y	۱۲	۶	۴	۳	۲/۴	۲

حل: نخست آن که این جدول، معرّف یک تابع است زیرا برای هر x از ردیف اول جدول، یک و فقط یک y از ردیف دوم، وجود دارد. دوم آن که با دقّت در اعداد دو سطر، می‌بینیم که ۱۲، برعددهای ردیف اوّل تقسیم شده است تا عددهای ردیف دوم، به‌دست آمده‌اند، پس ضابطهٔ تابع برابر $\frac{۱۲}{x}$ است یعنی $y=f(x)=\frac{۱۲}{x}$.

مثال

تابع $y=f(x)=x^{۲}+۱۰$ را در نظر بگیرید و مقادیر تابع را به‌ازای مقادیر داده شده در

۱ــ علامت ∘ نشان‌دهندهٔ **درجه** و C اول واژهٔ Celsuis یا سانتیگراد است.

جـدول زیر، یادداشت کنید :

جدول ۵

x	۰	۱	۲	۳	۴	۵
y						

حل: ضابطهٔ تابع ، $x^۲+۱۰$ است، یعنی این تابع، قانونی (ضابطه‌ای) دارد که طبق آن، هر جا xای وجود داشت، آن‌را به توان دو رساند و حاصل را با ۱۰ جمع می‌کند.

یعنی :

$$y=f(x)=x^۲+۱۰$$

پس برای پیداکردن $f(۰)$ ، $f(۱)$ ، $f(۲)$ ، $f(۳)$ ، $f(۴)$ و $f(۵)$ ، از این فرمول یا ضابطه، استفاده می‌کنیم :

$$y=f(۰)=(۰)^۲+۱۰=۱۰$$
$$y=f(۱)=(۱)^۲+۱۰=۱۱$$
$$y=f(۲)=(۲)^۲+۱۰=۱۴$$
$$y=f(۳)=(۳)^۲+۱۰=۱۹$$
$$y=f(۴)=(۴)^۲+۱۰=۲۶$$
$$y=f(۵)=(۵)^۲+۱۰=۳۵$$

مسایل

یکی از راه های نمایش تابع، جدول است. هریک از جدول‌های زیر را برای تابع‌هایی که فرمول (ضابطه) آن داده شده است، تکمیل کنید.

۱) $y=f(x)=۳-x$

x	۰	۱	۲	۳	۴	۵
y	۳					

۲) $y=f(x)=۵x-۶$

x	۰	۱	۲	۳	۴	۵
y	-۶					

۳) $y = f(x) = x^{۲}$

x	۰	۱	۲	۳	۴	۵
y						

۴) $y = f(x) = x^{۳}$

x	۰	۱	۲	۳	۴	۵
y						

۵) $y = f(x) = ۲^{x}$

x	۰	۱	۲	۳	۴	۵
y						

برای هریک از تابع‌های زیر که به‌صورت جدول نمایش داده‌شده‌اند،یک فرمول (ضابطه) بنویسید.

۶)

x	۳	۴	۵	۶	۷
y	۹	۱۶	۲۵	۳۶	۴۹

$y =$

۷)

x	۶	۷	۸	۹	۱۰
y	۲	۳	۴	۵	۶

$y =$

۸)

x	۲	۳	۴	۵	۶
y	۲۱	۳۱	۴۱	۵۱	۶۱

$y =$

۹)

x	۲	۳	۴	۵	۶
y	۲۲	۳۳	۴۴	۵۵	۶۶

$y =$

۱۰)

x	۱	۲	۳	۴	۵
y	۱	۸	۲۷	۶۴	۱۲۵

$y =$

۱۱)

x	۱	۲	۳	۴	۵
y	۴	۱۱	۳۰	۶۷	۱۲۸

y =

۱۲)

x	۱	۲	۳	۴	۵
y	۴۹	۴۸	۴۷	۴۶	۴۵

y =

۱۳)

x	۲	۳	۴	۵	۶
y	۹	۲۷	۸۱	۲۴۳	۷۲۹

y =

۱۴)

x	۱	۲	۳	۴	۵
y	۴۰	۲۰	$\frac{۴۰}{۳}$	۱۰	۸

y =

۵ــ۱ــ محاسبهٔ مقدار تابع

همان‌طور که در بخش قبلی دیدید، محاسبهٔ مقدار تابع یعنی پیداکردن مقدار $y = f(x)$ به ازای مقدارهای مختلفی که به متغیّر مستقل x داده می شود[۱].

برای نمونه، اگر $f(x) = ۳x^۲ + ۲x - ۴$ باشد، آن‌گاه $f(۲)$ نشان‌دهندهٔ مقدار تابع است وقتی که به جای x، ۲ را قرار می‌دهیم:

$$f(x) = ۳x^۲ + ۲x - ۴$$

$$f(۲) = ۳(۲)^۲ + ۲(۲) - ۴$$ جابه جایی x با ۲

$$= ۱۲ + ۴ - ۴$$

$$= ۱۲$$

توجه کنید که چون $f(۲) = ۱۲$ ، پس نقطه‌ای به مختصات $(۲,۱۲)$ ، یکی از نقاط نمودار این تابع است. مقدار $y = f(۲)$ ، عرض نقطه‌ای است که طول آن، $x = ۲$ است.

۱ــ باز هم توجّه کنید که به جای f، x و y ؛ از هر نماد دیگری می‌توانید استفاده کنید.

مثال

تابع $h(t)=-t^{۲}+۲t-۴$ را در نظر بگیرید و $h(-۲)$ را محاسبه کنید.

حل:

$$h(t)=-t^{۲}+۲t-۴$$

$$h(-۲)=-(-۲)^{۲}+۲(-۲)-۴$$

$$=-۴-۴-۴$$

$$=-۱۲$$

مثال

تابع $g(x)=|۲-۳x|$ و $t(x)=\frac{۱۰}{x}$ را در نظر بگیرید و هریک از مقدارهای زیر را محاسبه کنید :

الف) $g(۴)$ ب) $t(۲)$ پ) $g(۰)-t(-۲)$

حل:

الف)

$$g(x)=|۲-۳x|$$

جابه‌جایی x با ۴

$$g(۴)=|۲-۳\times۴|$$

$$=|۲-۱۲|$$

$$=|-۱۰|$$

$$=۱۰$$

ب)

$$t(x)=\frac{۱۰}{x}$$

جابه‌جایی x با ۲

$$t(۲)=\frac{۱۰}{۲}$$

$$=۵$$

پ)

$$g(۰)=|۲-۳\times۰|=|۲-۰|=|۲|=۲$$

$$t(-۲)=\frac{۱۰}{-۲}=-۵$$

بنابراین،

$$g(۰)-t(-۲)=۲-(-۵)=۷$$

می‌توان مقدار تابع را به‌ازای یک عبارت جبری نیز پیدا کرد.

مثال

اگر $g(x)=\sqrt{x^۳+۲}$ باشد، $g(h)$ و $g(۲h)$ را پیدا کنید.

حل:

$$g(x)=\sqrt{x^۳+۲}$$

جابه‌جایی x با h

$$g(h)=\sqrt{h^۳+۲}$$

جابه‌جایی x با ۲h

$$g(۲h)=\sqrt{(۲h)^۳+۲}$$

$$=\sqrt{۸h^۳+۲}$$

مسایل

برای تابع‌های زیر، مقدارهای خواسته‌شده را پیدا کنید.

۱) $t(x)=۲۱-x^۲$ $\quad t(۰)=?$ $\quad t(۱)=?$

۲) $g(x)=۲x^۳-۴x+۵$ $\quad g(t)=?$ $\quad g(-۱)=?$

۳) $f(t)=\sqrt{۳t+۵}$ $\quad f(-۱)=?$ $\quad f(۰)=?$

۴) $f(x)=۴x+۳$ $\quad f(a-۴)=?$ $\quad f(۲t)=?$

۵) $g(x)=x+۳$ $\quad g(-۳)=?$ $\quad g(t)=?$

۶) $k(h)=۳h^۲-h-۴$ $\quad k(۰)=?$ $\quad k(-۱)=?$

برای تابع‌های زیر، مقدارهای جدیدی با توجّه به متغیّر مستقل جدید، به‌دست آمده است. آن متغیّرها را پیدا کنید :

۷) $f(x)=-۲x^۲+۵x-۳$ $\quad f(\square)=-۲b^۲+۵b-۳$

۸) $g(t)=at^۳-۴t^۲+t-۱$ $\quad g(\square)=ax^۳-۴x^۲+x-۱$

۹) $t(x)=|x-۳|$ $\quad t(\square)=|c-۱|$

۱۰) $f(t)=|۲t+۵|$ $\quad f(\square)=|۲b+۵|$

۱۱) $h(x)=\frac{۲x-x^۳}{۴}$ $\quad h(\square)=\frac{۲a-a^۳}{۴}$

۱۲ـ فرض کنید نمودار تابعی شامل نقطهٔ $(-۳,۵)$ است. اگر تابع را با $f(x)$ نشان دهیم، $f(-۳)$ چقدر است؟ جواب خود را توضیح دهید.

۶ـ۱ـ عملیات با تابع‌ها

مثال

تابع $f(x)=۴x-۵$ را در نظر بگیرید. سپس هریک از مقدارهای زیر را حساب کنید:

الف) $f(۳)$ ب) $f(۳+h)$ پ) $f(۳+h)-f(۳)$

ت) $\dfrac{f(۳+h)-f(۳)}{h}$ ، $h\neq ۰$ اگر

حل:

الف) $f(x)=۴x-۵$

پس $f(۳)=۴(۳)-۵=۱۲-۵=۷$

ب) $f(۳+h)=۴(۳+h)-۵=۱۲+۴h-۵=۷+۴h$

پ) مقدارهای $f(۳)$ و $f(۳+h)$ را از (الف) و (ب)، جایگزین می‌کنیم:

$$f(۳+h)-f(۳)=(۷+۴h)-۷=۴h$$

ت) نتیجهٔ قسمت (پ) را در صورت می‌نویسیم: $\dfrac{f(۳+h)-f(۳)}{h}=\dfrac{۴h}{h}$

$$=۴$$

مثال

اگر $f(t)=|۲t-۵|$ و $h(t)=\dfrac{۳t}{t^۲+۱}$ باشد، عبارت‌های زیر را محاسبه کنید:

الف) $۲f(۱)+h(۰)$ ب) $h(۱)-f(-۲)$ پ) $\dfrac{h(\frac{۱}{۲})}{f(\frac{۱}{۲})}$

ت) $h(\frac{۱}{۲}).f(\frac{۱}{۲})$

حل:

الف) اوّل $f(۱)$ و $h(۰)$ را محاسبه می‌کنیم. سپس آنها را با هم جمع می‌کنیم :

$$f(t) = |۲t - ۵|$$

جابه‌جایی t با ۱ $\quad ۲f(۱) = ۲|۲(۱) - ۵| = ۲|۲ - ۵| = ۲|-۳| = ۲.۳ = ۶$

$$h(t) = \frac{۳t}{t^۲ + ۱}$$

جابه‌جایی t با ۰ $\quad h(۰) = \frac{۳(۰)}{(۰)^۲ + ۱} = \frac{۰}{۱} = ۰$

پس $\quad ۲f(۱) + h(۰) = ۶ + ۰ = ۶$

ب) اوّل $h(۱)$ و $f(-۲)$ را محاسبه می‌کنیم. سپس آنها را از هم کم می‌کنیم :

$$h(۱) = \frac{۳(۱)}{(۱)^۲ + ۱} = \frac{۳}{۱+۱} = \frac{۳}{۲}$$

$$f(-۲) = |۲(-۲) - ۵| = |-۴ - ۵| = |-۹| = ۹$$

پس $\quad h(۱) - f(-۲) = \frac{۳}{۲} - ۹ = \frac{۳}{۲} - \frac{۱۸}{۲} = \frac{-۱۵}{۲}$

پ) باز هم اوّل $h(\frac{۱}{۲})$ و $f(\frac{۱}{۲})$ را محاسبه می‌کنیم و سپس، مقدارهای به‌دست‌آمده را بر هم تقسیم می‌کنیم :

$$h(\frac{۱}{۲}) = \frac{۳(\frac{۱}{۲})}{(\frac{۱}{۲})^۲ + ۱} = \frac{\frac{۳}{۲}}{\frac{۱}{۴} + ۱} = \frac{\frac{۳}{۲}}{\frac{۱}{۴} + \frac{۴}{۴}} = \frac{\frac{۳}{۲}}{\frac{۵}{۴}} = \frac{\overset{۲}{\cancel{۴}} \times ۳}{\cancel{۲} \times ۵}$$

$$h(\frac{۱}{۲}) = \frac{۶}{۵}$$

$$f(\frac{۱}{۲}) = \left|۲(\frac{۱}{۲}) - ۵\right| = \left|\frac{۲}{۲} - ۵\right| = |۱ - ۵| = |-۴| = ۴$$

پس $\quad \frac{h(\frac{۱}{۲})}{f(\frac{۱}{۲})} = \frac{\frac{۶}{۵}}{۴} = \frac{۶}{۲۰} = \frac{۳}{۱۰}$

ت) مقدارهای به‌دست‌آمده برای $h(\frac{۱}{۲})$ و $f(\frac{۱}{۲})$ را در هم ضرب می‌کنیم :

$$h(\frac{۱}{۲})f(\frac{۱}{۲}) = \frac{۶}{۵} \times ۴ = \frac{۲۴}{۵}$$

نتیجه

وقتی می‌خواهیم عملی را روی دو یا چند تابع انجام دهیم، ابتدا مقدار هرتابع را به‌ازای متغیّر مستقلِ داده شده محاسبه می‌کنیم. سپس عملیات خواسته شده روی مقدارهای تابع‌ها را مانند عملیات با اعداد، انجام می‌دهیم.

مسایل

۱ــ برای تابع‌های $P(x)=x^{۲}-۳x+۵$ و $Q(x)=x^{۲}+۴x-۸$ ، عبارت‌های زیر را محاسبه کنید:

الف) $P(-۱).Q(۲)$ ب) $Q(۱)$ پ) $Q(۲)+P(۰)$

ت) $\dfrac{Q(۰)}{P(۰)}$

۲ــ تابع $f(x)=\sqrt{x^{۲}+۵}$ و $g(x)=۶x+۲$ را در نظر بگیرید. سپس عبارت های زیر را محاسبه کنید:

الف) $f(-۲)$ ب) $g(۳+z)$ پ) $g(-۳b)$

ت) $f(-۲).g(۲)$ ث) $\dfrac{g(\frac{۱}{۲})}{f(۲)}$

۳ــ اگر $f(x)=۴-۳x$ باشد، $f(۲+h)$ را تعیین کنید.

۴ــ اگر $f(x)=x^{۳}-۲x+۷$ و $g(x)=۲x^{۳}+۳x-۲$ باشد، مقدارهای زیر را محاسبه کنید:

الف) $g(\frac{۱}{۲})$ ب) $f(-۲/۳)$ پ) $g(۱).f(۱)$

ت) $g(۱)+f(۱)$ ث) $g(۱)-f(۱)$ ج) $\dfrac{f(۱)}{g(۱)}$

۵ــ اگر $g(x)=-x^{۲}+۲x+۱$ ؛

الف) $g(۲)$ را حساب کنید.

ب) $g(x+۲)$ را پیدا کنید.

پ) نشان دهید $g(x+۲)\neq g(x)+g(۲)$.

مجلهٔ ریاضی

اجازه دهید یک بار دیگر، مفهوم تابع را با یک مثال مرور کنیم :

تابع $f(x)=x^{۳}+۲x-۳$ را در نظر بگیرید. اگر به جای متغیّر مستقل x، هر مقدار دیگری را بگذاریم، تابع f کاری که می‌کند آن است که

۱ــ اوّل آن مقدار را به توان ۳ می‌رساند.

۲ــ دو برابر آن مقدار را به آن اضافه می‌کند.

۳ــ از مجموع آنها، ۳ را کم می‌کند.

برای مثال، $f(۲+a)=(۲+a)^{۳}+۲(۲+a)-۳$

یا $f(-۲)=(-۲)^{۳}+۲(-۲)-۳$

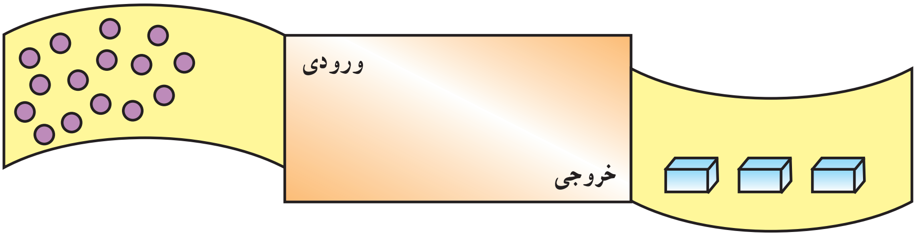
در واقع، تابع مانند ماشینی است که مجموعهٔ متغیّرهای مستقل یعنی دامنهٔ تابع، ورودی‌های آن هستند. ضابطه یا قانون تابع،عملی است که آن ماشین انجام می‌دهد و بالاخره، مقدار تابع یعنی متغیّر وابسته، خروجی‌های این ماشین هستند.

به اطراف خود با دقّت نگاه کنید و چند پدیدهٔ واقعی را که مانند تابع عمل می‌کنند، نام ببرید. سپس بگویید که چرا هریک تابع هستند. می‌توانید با پدیدهٔ مشک‌زدن دوغ و کره درست‌کردن، به‌شرط آن که همهٔ دوغ کره شود ؛ یا چرخ گوشت ؛ شروع کنید! موفق باشید!

زن روستایی اسالم در حال تهیهٔ کره

تمرین

ماشین زیر را در نظر بگیرید. ۱۵ شیء به درون ماشین وارد شده و ۳ بسته از آن خارج می‌شود.



جدول زیر، اطلاعات بیشتری دربارهٔ این ماشین به شما می‌دهد :

تعداد بسته‌هایی که خارج می‌شوند	تعداد اشیایی که وارد می‌شوند
۳	۱۵
۵	۲۵
۱	۵
۱۲	۶۰

با توجّه به اطلاعات داده شده، جاهای خالی را در جدول‌های زیر، پُر کنید :

جدول ۶

(الف)

تعداد بسته‌هایی که خارج می‌شوند	تعداد اشیایی که وارد می‌شوند
۱	۹
—	۲۵
—	۶۰
—	۹۸
—	۸۱

(ب)

تعداد بسته‌هایی که خارج می‌شوند	تعداد اشیایی که وارد می‌شوند
۱۰	—
۴۰	—
۲۰۰	—
۱۷	—
۰	۳

۷ــ۱ــ رسم نمودار تابع

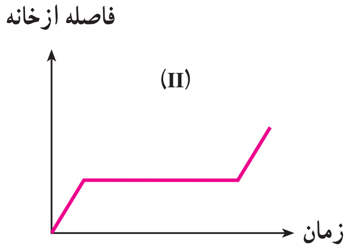
فعالیت ۴ــ۱

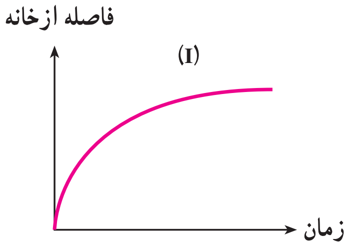
الف) سه داستان، برای سه نمودار زیر داده شده است. بگویید هرنمودار، مربوط به کدام داستان است. برای نمودار باقی مانده یک داستان بنویسید.

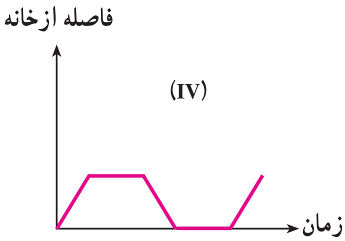
۱ــ تازه ازخانه بیرون آمده بودم که متوجه شدم کتابهایم را فراموش کرده‌ام. درنتیجه به خانه برگشتم تا آنها را بردارم.

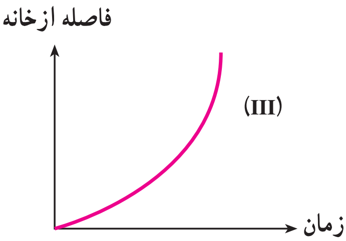
۲ــ در حال رانندگی بودیم و اوضاع به‌خوبی پیش می‌رفت تا آن‌که ماشین پنچر شد، پس از گرفتن پنچری به راه افتادیم.

۳ــ من با آرامی مشغول قدم‌زدن به‌سمت مدرسه بودم، امّا وقتی متوجّه شدم که دیر شده است، سرعتم را زیاد کردم.









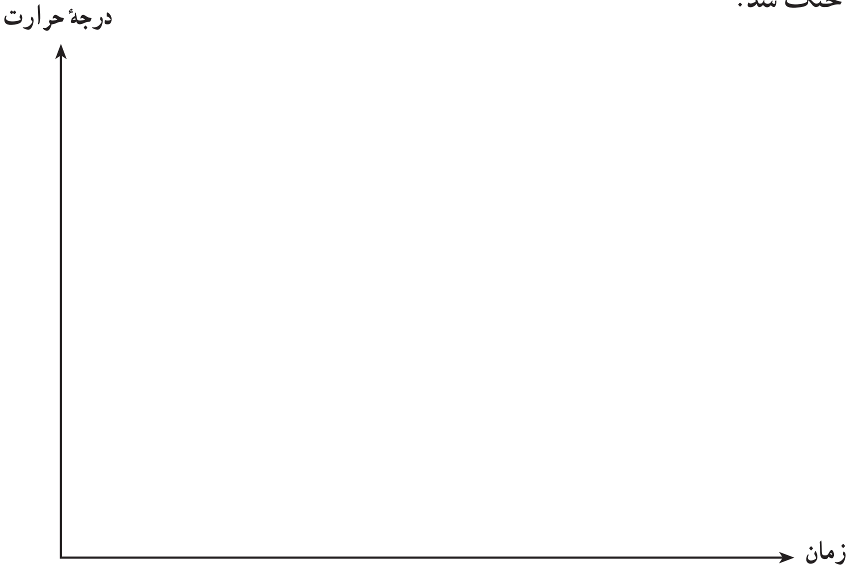
ب) چرا هریک از نمودارها، معرّف یک تابع هستند؟ توضیح دهید.

پ) چرا هریک از داستان‌ها، معرّف یک تابع هستند؟ توضیح دهید.

ت) موقعیّت زیر را در نظر بگیرید. نخست بگویید که چرا این موقعیّت، معرّف

یک تابع است. سپس نمودار آن را رسم کنید :

تمام صبح، هوا گرم بود. ناگهان حدود ظهر، طوفان شدیدی آمد و هوا خیلی خنک شد. بعد از طوفان، دوباره هوا گرم شد. سپس با غروب آفتاب، هوا مجدداً خنک شد.



۱ــ۷ــ۱ــ نمودار تابع خطی

همان‌طورکه در ابتدای این فصل دیدید ؛ نمودارها یکی ازابزارهای مفید برای نشان‌دادن تابع و رابطهٔ بین دو کمیّت هستند. در فعّالیّت ۴ــ۱ دیدید که چگونه با استفاده از نمودارها، می‌توانید پدیده‌های طبیعی و حوادث روزانهٔ زندگی خویش را به‌سادگی به زبان ریاضی نشان دهید، به‌طوری که برای همه قابل فهم باشد.

برخی از پدیده‌هایی که روزانه با آنها سر و کار داریم، تابع‌های خطی هستند، یعنی تابع‌هایی که نمودار آنها، به شکل یک خط است. در حالت کلّی، نمودار تابع‌های خطی به شکل

$$y = f(x) = mx + n$$

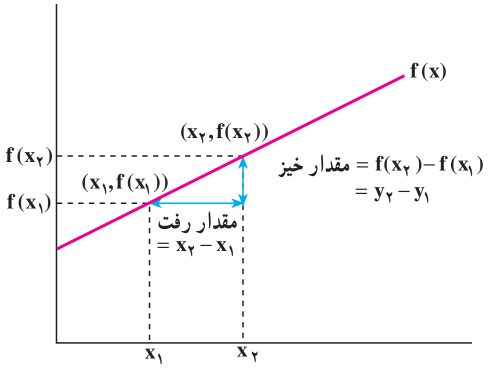
یک خط است[1] که در آن :

m ضریب زاویه یا نسبت تغییرات y به تغییرات x است (یعنی نسبت تغییرات عرض نقاط روی خط به تغییرات طول نقاط که نشان‌دهندهٔ شیب خط است.)

۱ــ در سال سوم راهنمایی و اوّل دبیرستان، با معادلهٔ خط آشنا شده‌اید.

n محلّ تقاطع خط با محور عمودی یا مقدار y است وقتی که $x = 0$. توجّه کنید که وقتی $m = 0$ ، یعنی ضریب زاویه صفر است و معادلهٔ خط تبدیل به $y = f(x) = n$ می‌شود و آن وقت، یک خط افقی خواهیم داشت.

یادآوری: ضریب زاویهٔ تابع خطی $f(x)$ ، از فرمول زیر به‌دست می‌آید :



$$m = \frac{\text{مقدار خیز}^{1}}{\text{مقدار رفت}} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

چون $f(x_1) = y_1$ و $f(x_2) = y_2$ پس

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

فعالیت ۵ــ۱

تعداد کلماتی که در گنجینهٔ لغات کودک وجود دارد، تابعی از سنّ او است.

فرمول تجربی زیر، اندازهٔ این گنجینهٔ لغات را در کودکان معمولی بین ۲۰ ماهگی و ۵۰ ماهگی نشان می‌دهد :

$$n = 60a - 900$$

که در آن، a معرّف سن کودک به ماه (متغیّر مستقل) و n نشان‌دهندهٔ تعداد کلماتی که کودک به‌درستی استفاده می‌کند (متغیّر وابسته) هستند.

۱ــ در کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی، جرج توماس ترجمهٔ مهدی بهزاد و سیامک کاظمی، از واژهٔ «خیز» برای Rise و از واژهٔ «رفت» برای Run، استفاده شده است.

بچه‌ها در کوچه (۱۳۷۶) اثر مرتضی کاتوزیان

۱ــ جدول زیر را کامل کنید :

جدول ۷

a	۲۰	۲۵	۳۰	۳۵	۴۰	۴۵	۵۰
n							

۲ــ نمودار این تابع را بکشید. محور افقی را محور aها (سن کودک برحسب ماه) و محور عمودی را محور nها (تعداد کلمات) در نظر بگیرید.

۳ــ یک کودک معمولی، در ۲۰ ماهگی چند کلمه در گنجینهٔ لغاتش وجود دارد؟

۴ــ یک کودک معمولی، در ۵۰ ماهگی چند کلمه در گنجینهٔ لغاتش وجود دارد؟

۵ــ از سن ۲۰ ماهگی تا سن ۵۰ ماهگی، یک کودک معمولی در هر ماه، چند کلمهٔ جدید یاد می‌گیرد؟

۶ــ آیا این فرمول، می‌تواند برای یک کودک در سن ۱۰ ماهگی، درست باشد؟ توضیح دهید.

۲ـ۷ـ۱ـ قاعدهٔ رسم نمودار تابع خطی

مثال

نمودار تابع $f(x)$، خطی به معادلهٔ $۳x + ۴y = -۱۲$ است. شیب این خط را پیدا کنید.

حل: برای پیداکردن شیب خط، مختصات دو نقطه روی آن را لازم داریم. می‌توانیم محل تقاطع خط با محور xها و yها را انتخاب کنیم.

الف) محل تقاطع خط با محور xها، یعنی جایی که $y = ۰$ است. پس در معادلهٔ $۳x + ۴y = -۱۲$ به جای y، صفر قرار می‌دهیم:

$$۳x + ۴(۰) = -۱۲$$

$$۳x = -۱۲$$

منبر چوبی منبت‌کاری شده، زیارت‌گاه ابیانه

$$x=-\frac{۱۲}{۳}=-۴$$

پس مختصات یکی از نقطه‌های انتخابی، $(-۴,۰)$ است. به طول این نقطه **طول از مبدأ** گفته می‌شود.

ب) محل تقاطع خط با محور yها، یعنی جایی که $x=۰$. پس در معادلهٔ $۳x+۴y=-۱۲$، به جای x، صفر قرار می‌دهیم:

$$۳(۰)+۴y=-۱۲$$

$$۴y=-۱۲$$

$$y=-\frac{۱۲}{۴}=-۳$$

پس مختصات یک نقطهٔ انتخابی دیگر، $(۰,-۳)$ است که **عرض آن عرض از مبدأ** نامیده می‌شود.

بنابراین[1]،

$$\text{شیب خط}=m=\frac{\text{مقدار خیز}}{\text{مقدار رفت}}=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}$$

با توجه به دو نقطهٔ $(-۴,۰)$ و $(۰,-۳)$،

$$x_۱=۰\quad,\quad y_۱=-۳$$

$$x_۲=-۴\quad,y_۲=۰$$

عبارت است از

$$m=\frac{۰-(-۳)}{-۴-۰}=\frac{۳}{-۴}=-\frac{۳}{۴}$$

از طرف دیگر، می‌توانیم معادلهٔ $۳x+۴y=-۱۲$ را برحسب y حل کنیم:

$$۴y=-۳x-۱۲$$

$$y=-\frac{۳}{۴}x-۳$$

مقداری که برای ضریب زاویه به‌دست آوردیم، با ضریب x برابر است.

نتیجه

اگر معادلهٔ خط را برحسب y و به‌صورت $y=mx+n$ بنویسیم، آن‌گاه به جای

۱ــ فرقی نمی‌کند که مختصات کدام نقطه را $x_۱$ و $y_۱$ و کدام را $x_۲$ و $y_۲$ انتخاب می‌کنید. فقط توجّه داشته باشید که $x_۱$ و $y_۱$ متعلق به یک نقطه و $x_۲$ و $y_۲$ متعلّق به نقطهٔ دیگر باشند.

محاسبهٔ ضریب زاویه از فرمول $\frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱}$ ، ضریب x را که همان ضریب زاویه است، می‌نویسیم.

حالت‌های خاص

مثال

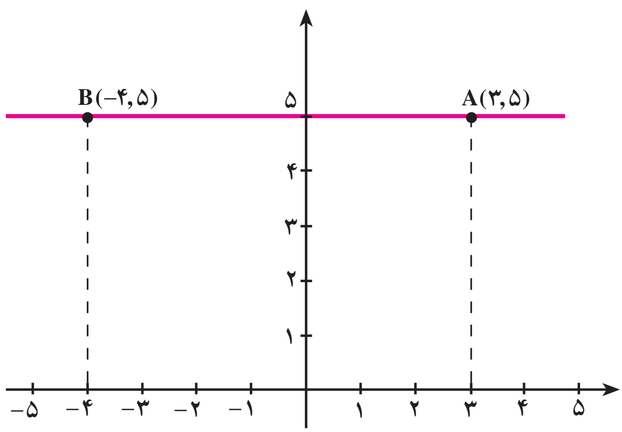
ضریب زاویهٔ خط‌های زیر را تعیین کنید :

الف) خط $y = ۵$

ب) خطی که دارای دو نقطهٔ $(۲,۳)$ و $(۲,۶)$ باشد.

حل:

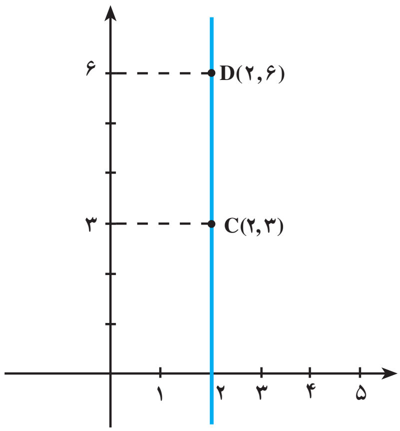
الف) دو نقطه از خط $y = ۵$ در شکل زیر نشان داده شده است :



توجّه کنید که عرض هر دو نقطهٔ A و B روی خط $y = ۵$ ، برابر است. پس

$$m = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱} = \frac{۵ - ۵}{-۴ - ۳} = \frac{۰}{-۷} = ۰$$

ب) چون طول هر دو نقطه با هم برابرند، پس روی یک خط عمودی قرار می‌گیرند :



پس فرمول ضریب زاویه برای چنین حالتی، قابل استفاده نیست زیرا

$$\frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱} = \frac{۶-۳}{۲-۲} = \frac{۳}{۰}$$

که **تعریف‌نشده** است. به طور کلّی، ضریب زاویهٔ خط عمودی، تعریف نشده است.

تذکر: برای این دو حالت خاص، به تفاوت بین ضریب زاویهٔ صفر و ضریب زاویهٔ تعریف‌نشده توجّه کنید.

تعریف خط به صورت ضریب زاویه ــ عرض ازمبدأ

خط $y = mx + n$ به‌صورت ضریب زاویه ــ عرض ازمبدأ نوشته شده است. ضریب زاویهٔ این خط m و عرض از مبدأ آن، n است (یعنی محل تقاطع خط با محور yها، نقطهٔ $(۰,n)$ است).

روش رسم خط

برای رسم خط، با استفاده از ضریب زاویه و عرض ازمبدأ ؛ مراحل زیر را انجام دهید :

۱ــ معادلهٔ خط را به شکل $y = mx + n$ بنویسید.

۲ــ نقطهٔ $(۰,n)$ ، یعنی عرض از مبدأ را روی محور yها مشخّص کنید،

۳ــ ضریب زاویه را به‌صورت $m = \frac{\text{خیز}}{\text{رفت}}$ بنویسید. سپس از عرض از مبدأ شروع کنید و به‌اندازه‌ای که **خیز** مشخّص کرده است، به سمت بالا یا پایین حرکت کنید. آن‌گاه، به‌اندازهٔ **رفت**،

به سمت راست یا چپ، حرکت کنید و نقطه‌ای که به آن رسیدید را به‌عنوان دومین نقطهٔ خط، روی صفحهٔ مختصات مشخّص کنید.

توجّه: در حالتی که m یک عدد صحیح باشد، خیز برابر m و رفت برابر ۱ است.

۴ــ خط را طوری رسم کنید که از این دو نقطه بگذرد.

مثال

خط $۲x - ۳y = ۹$ را با استفاده از ضریب زاویه و عرض از مبدأ، رسم کنید.

حل:

۱ــ با استفاده از روش رسم خط، گام اوّل را برمی‌داریم و معادله را به شکل $y = mx + n$ می‌نویسیم :

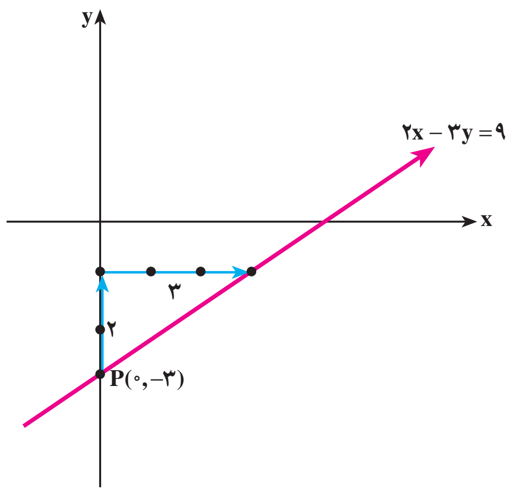
$$۲x - ۳y = ۹$$

$$-۳y = -۲x + ۹$$

$$y = \frac{-۲x}{-۳} + \frac{۹}{-۳}$$

$$y = \frac{۲}{۳}x - ۳$$

۲ــ عرض ازمبدأ (محل تقاطع خط با محور yها) یعنی $P(۰, -۳)$ را روی محور yها در صفحهٔ مختصات، مشخّص می‌کنیم.



۳ــ ضریب‌زاویه $m=\frac{۲}{۳}$ است. پس برای یافتن نقطه‌ای دیگر از این خط، از نقطهٔ $P(۰,-۳)$ شروع می‌کنیم و به‌اندازهٔ **خیز** یعنی ۲ واحد به سمت بالا رفته و سپس، به‌اندازهٔ **رفت** یعنی ۳ واحد به سمت راست، حرکت می‌کنیم.

۴ــ خطی که از این دو نقطه می‌گذرد، نمودار معادلهٔ $y=\frac{۲}{۳}x-۳$ است.

مسایل

۱ــ معادله‌های زیر را به شکل $y=mx+n$ بنویسید و سپس، با استفاده از **روش رسم نمودار خطی**، آن را رسم کنید :

الف) $۲x+۵y=۱۰$

ب) $x+۳y-۶=۰$

پ) $y+۳x=۰$

ت) $x-۲=۵$

ث) $y-۴=-۳$

۲ــ خطی رسم کنید که ضریب زاویه و یک نقطهٔ آن داده شده است.

الف) $m=\frac{۳}{۴}$ و $(۰,۳)$

ب) m تعریف نشده است. و $(-۵,۰)$

پ) $m=۰$ و $(۰,۲)$

ت) $m=\frac{۲}{۳}$ و $(-۲,-۳)$

۳ــ نمودار معادله‌های زیر را رسم کنید :

الف) $y=\frac{۳}{۴}x+۳$

ب) $y=x$

پ) $y=-\frac{۳}{۵}x$

ت) $y=۲x+۳$

ث) $y=-x$

ج) $x=-۴$

فعالیت ۶ــ۱

با مشورت هم‌کلاسی‌های خود، به سؤالها پاسخ دهید و برای هر پاسخ، دلیل قانع‌کننده ارایه دهید.

۱ــ بدون محاسبه، بگویید که هر یک از نمودارهای زیر مربوط به کدام معادله است؟

الف) $y = x - 5$

ب) $-3x + 4 = y$

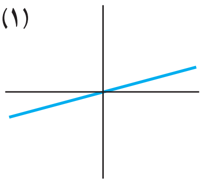
پ) $5 = y$

ت) $y = -4x - 5$

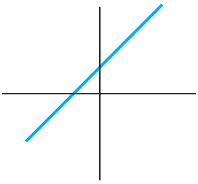
ث) $y = x + 6$

ج) $y = \frac{x}{2}$

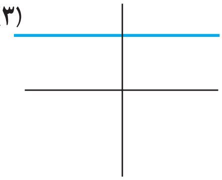
(۱)



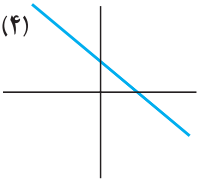
(۲)



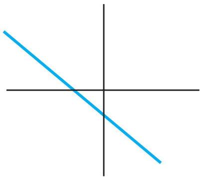
(۳)



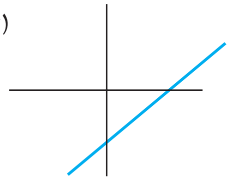
(۴)



(۵)

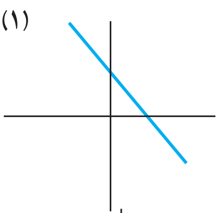


(۶)

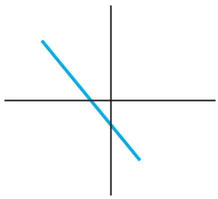


۲ــ بدون محاسبه، بگویید که هر معادله، معرّف کدام یک ازنمودارهای زیر است و چرا؟

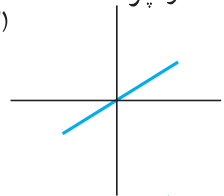
(۱)



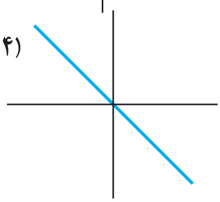
(۲)



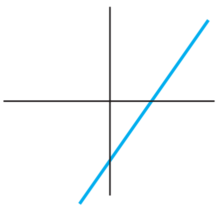
(۳)



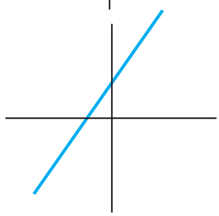
(۴)



(۵)



(۶)



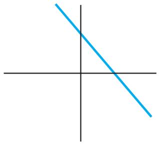
الف) $y=-۲/۷۲x$ ‌‌‌‌‌‌ ب) $y=۰/۰۱+۰/۰۰۱x$

پ) $y=۲۷/۹-۰/۰۱x$ ‌‌‌‌‌‌ ت) $y=۰/۱x-۲۷/۹$

ث) $y=-۵/۷-۲۰۰x$ ‌‌‌‌‌‌ ج) $y=\frac{x}{۳/۱۴}$

۳ــ دلایل خود را منظم کنید و از آن‌ها، روشی برای رسم نمودار تابع خطی پیشنهاد کنید تا بدون محاسبه، بتوان وضعیت خط را در صفحه مشخّص کرد.

برای مثال، می‌توانید بگویید :

«در یک تابع خطی به شکل $y=mx+n$ ، اگر ضریب زاویه منفی و عرض از مبدأ مثبت باشد، شکل تقریبی نمودار تابع،

است.»

بقیه حالت‌ها را شما بنویسید.

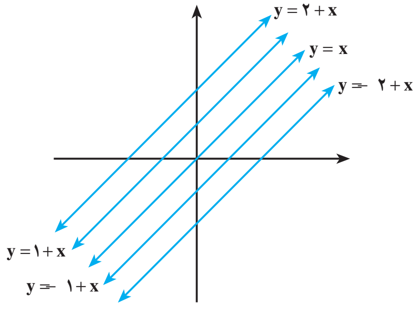
۸ــ۱ــ خانوادۀ تابع‌های خطی

فرمول‌هایی مانند

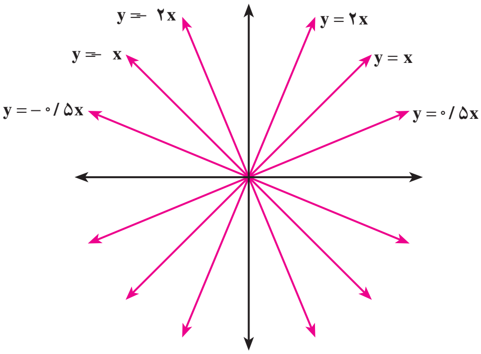
$$y=f(x)=mx+n$$

و $y=f(x)=mx$ که شامل ثابت‌های m و n هستند، از یک خانواده می‌باشند. معمولاً از خانوادۀ تابع‌های خطی، برای مدل‌سازی پدیده‌های خطی استفاده می‌کنیم. معنای مقدارهای مختلف m و n در خانوادۀ $f(x)=mx+n$ ، در شکل‌های صفحۀ بعد نشان داده شده است.

شمس‌العماره، تهران



خانوادهٔ تابع‌های $y = x + n$ (با $m = ۱$)



خانوادهٔ تابع‌های $y = mx$ (با $n = ۰$)

فعالیت ۷ــ۱

الف) خانوادهٔ تابع‌های به شکل $y = ax + ۲$ را در نظر بگیرید (a ضریب زاویه است). نمودار تابع‌ها را در حالت‌های زیر بررسی کنید.

۱ــ a مثبت و بزرگتر از یک

۲ــ a منفی و بزرگتر از منفی یک

۳ــ a مثبت و کوچکتر از یک

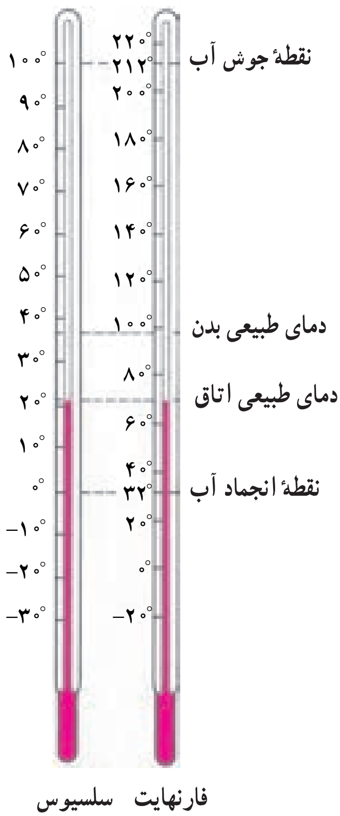
۴ــ a منفی و کوچکتر از منفی یک

ب) به نقش a در نمودار تابع‌های این خانواده توجّه کنید. چگونه a بر نمودار خط، تأثیر می‌گذارد؟

پ) اندازهٔ a (یعنی $|a|$) چه تأثیری بر نمودار خط می‌گذارد؟

ت) علامت a چه تأثیری برنمودار خط دارد؟

ث) نتایج به‌دست‌آمده را به‌عنوان روشی برای رسم نمودارهای این خانواده از تابع‌ها، بنویسید.



مثال

درجهٔ فارنهایت را در مقابل درجهٔ سلسیوس درنظر بگیرید، $212^\circ F$ (درجهٔ فارنهایت) و $100^\circ C$ (درجهٔ سانتیگراد)، هر دو معرّف درجهٔ حرارتی است که آب در آن می‌جوشد. به‌طور مشابه، $32^\circ F$ و $0^\circ C$، نقطهٔ انجماد آب را نشان می‌دهد.

الف) درجهٔ سانتیگراد را روی محور xها و درجهٔ فارنهایت را روی محور yها نشان دهید و با استفاده از این دو نقطه، نمودار خط را رسم کنید.

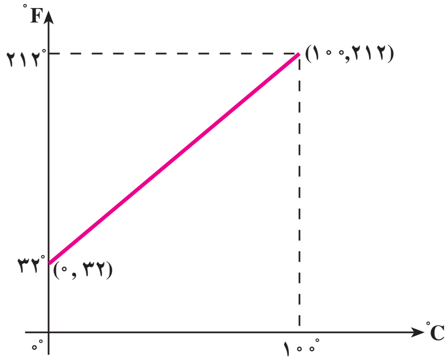
ب) معادلهٔ این خط چیست؟

پ) با استفاده از این معادله، بگویید $20^\circ C$، برابر چند درجهٔ فارنهایت است؟

ت) در چه درجهٔ حرارتی، درجهٔ سانتیگراد و فارنهایت با هم برابرند؟

حل:

الف)



ب) با استفاده از دو نقطهٔ جوش و انجماد برحسب درجهٔ فارنهایت و سانتیگراد یعنی $(100,212)$ و $(0,32)$، ضریب زاویهٔ خط را محاسبه می‌کنیم.

$$\text{ضریب زاویه} = \frac{212-32}{100-0} = \frac{180}{100} = 1/8$$

محل تقاطع خط با محور Fها یعنی عرض ازمبدأ، ۳۲ است. پس معادلهٔ خط را در حالت کلی می‌نویسیم :

$$y = mx + n$$

با جایگزین‌کردن $y = F$ (درجهٔ فارنهایت)، $x = C$ (درجهٔ سانتیگراد)، $m = 1/8$ (ضریب زاویه) و $n = 32$ (عرض ازمبدأ)، معادلهٔ این خط را مشخّص می‌کنیم :

$$F = 1/8C + 32$$

پ) حالا به جای C، 20° را می‌گذاریم تا F° را به‌دست آوریم :

$$F = 1/8(20) + 32 = 36 + 32 = 68^\circ F$$

ت) چون می‌خواهیم F° و C° با هم برابرباشند، پس در معادلهٔ

$$F = 1/8C + 32$$

به جای C ، F را قرار می‌دهیم :

$$F = 1/8F + 32$$

$$F - 1/8F = 32$$

$$-0/8F = 32$$

$$F = -\frac{32}{0/8}$$

$$\boxed{F = -40^\circ}$$

پس در -40° ، درجهٔ حرارت سانتیگراد و فارنهایت، با هم برابر می‌شوند.

نتیجه: برای تبدیل درجه‌های سانتیگراد و فارنهایت به یکدیگر، از نمودار این مثال، استفاده می‌کنیم و فرمول پیداکردن ضریب زاویه را می‌نویسیم. چون در حالت کلی می‌خواهیم هر Fای را به C و هر Cای را به F تبدیل کنیم، پس در

$$m = \frac{212 - 32}{100 - 0}$$

که برای یک حالت خاص بود، به جای ۲۱۲، F و به جای ۱۰۰، C را قرار می‌دهیم :

$$m = \frac{F - 32}{C - 0}$$

امّا چون نمودار، یک خط راست است ؛ پس ضریب زاویهٔ آن در تمام نقاط روی آن، یکسان است. بنابراین،

$$\frac{F - 32}{C - 0} = \frac{212 - 32}{100 - 0} = \frac{180}{100}$$

با استفاده از خاصیّت کسرها، تساوی بالا را به‌صورت زیر می‌نویسیم :

$$\frac{F - 32}{180} = \frac{C}{100}$$

کسر را ساده می‌کنیم :

$$\frac{F-۳۲}{۹}=\frac{C}{۵}$$

این معادله را یک بار برای C و یک بار برای F حل می‌کنیم :

(۱) $\boxed{F=\frac{۹}{۵}C+۳۲}$ یا $F-۳۲=\frac{۹}{۵}C$

(۲) $\boxed{C=\frac{۵}{۹}F-\frac{۱۶۰}{۹}}$ یا $۹C=۵F-۱۶۰$

توجّه کنید که برای تبدیل درجهٔ حرارت سانتیگراد به فارنهایت، از (۱) یا (۲) می‌توانید استفاده کنید.

تمرین

با استفاده از فرمول ۱، در فعالیت ۱ــ۱، تعداد جیرجیرِ جیرجیرک‌ها را برحسب درجهٔ فارنهایت محاسبه کنید. یعنی، فرمول تجربی

$$n=۷/۵C-۳۲$$

را برحسب درجهٔ فارنهایت بنویسید.

۹ــ۱ــ خانوادهٔ تابع‌های توانی

تابع‌های توانی، خانوادهٔ مهمّی از تابع‌ها هستند. برای مثال، مساحت یک مربع، تابعی از ضلع آن است و از فرمول $A=f(s)=s^{۲}$ [۱] به‌دست می‌آید.

هم‌چنین، حجم کره که تابعی از شعاع آن است، از فرمول $V=f(r)=\frac{۴}{۳}\pi r^{۳}$ [۲] به‌دست می‌آید.

تعریف

یک تابع توانی به شکل

$$y=f(x)=kx^{P}$$

است که در آن k هر ثابت غیرصفری می‌تواند باشد و P عددی طبیعی است.

۱ــ S اوّل کلمهٔ Side به‌معنی ضلع است و A، اوّل کلمهٔ Area به معنی مساحت است.

۲ــ V اوّل کلمهٔ Volume به معنای حجم است و r اول کلمهٔ Radius به‌معنای شعاع است.

نمای جنوبی، خانهٔ طباطبایی، کاشان

تابع خطی $y=f(x)=mx$ (با ثابت m) نیز یک تابع توانی است که در آن، توان x برابر یک است.

بنابراین، تابع‌های خطی نیز عضوی از خانوادهٔ تابع‌های توانی به‌شمار می‌آیند.

فعالیت ۸ــ۱

تابع‌های توانی به شکل $y=f(x)=x^n$ را در نظر بگیرید که در آن، n یک عدد صحیح مثبت باشد.

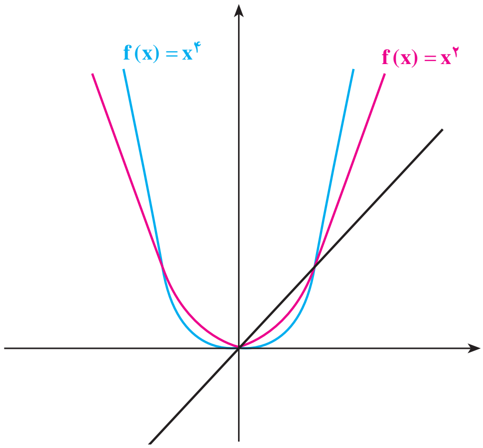
۱ــ فقط با نقطه‌یابی، نمودار تقریبی x^2، x^3، x^4 و x^5 را رسم کنید.

۲ــ موارد مشابه و متفاوت هریک را بنویسید.

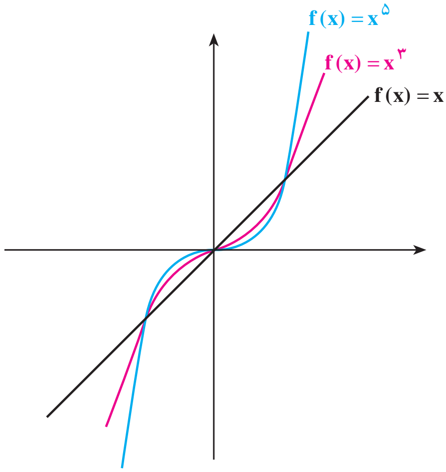
۳ــ آیا می‌توانید نمودارها را دسته‌بندی کنید؟ اگر جواب مثبت است، نمودارها در چند دسته قرار می‌گیرند؟

۴ــ رابطهٔ بین توان‌های x و دسته‌بندی شما چیست؟

به‌طور کلّی نمودار تابع‌های توانی وقتی توان x زوج باشد، به شکل صفحهٔ بعد است :

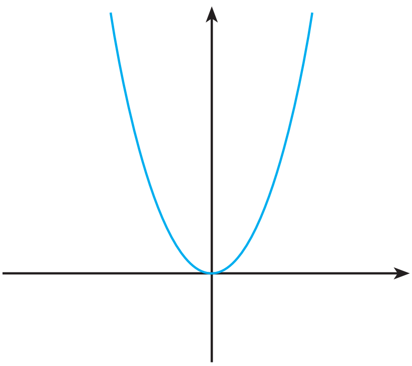


هم‌چنین، نمودار تابع‌های توانی وقتی توان x فرد باشد نیز، به شکل زیر است :



یکی از معروف‌ترین تابع‌های توانی، $y = f(x) = x^{۲}$ است. این تابع‌ها، بسیاری از پدیده‌های طبیعی را مدل‌سازی می‌کنند. برای مثال، تابع سود، تابع درآمد، تابع پرتاب یک شیء و تابع افتادن یک توپ به زمین و حرکت آن تا زمان توقّف بر روی زمین، همگی تابع توانی هستند که در آن‌ها، توان x برابر **۲** است. به دلیل اهمیت این خانواده از تابع‌ها، به آن‌ها نام خاصّی داده شده و به **سهمی** معروف هستند. فصل دوم، اختصاص به این خانواده ازتابع‌ها دارد.

در هنگام مدل‌سازی، بیش از آن که به رسم دقیق نمودار تابع نیاز باشد، به شکل تقریبی آن احتیاج است. برای مثال، می‌توانید با ماشین‌حساب یا با نقطه‌یابی، نمودار سهمی $f(x) = x^{۲}$ را بکشید :

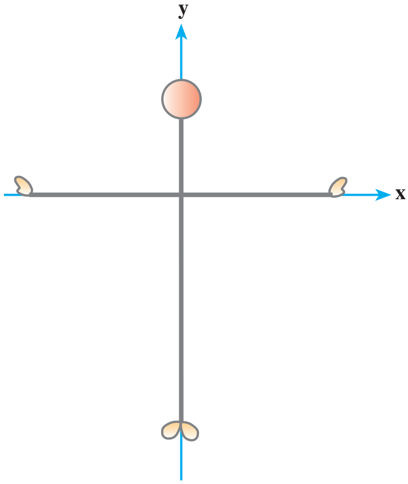


و زمانی که می‌خواهید بر مبنای این سهمی، نمودار $f(x) = x^{۲} + ۱$ را رسم کنید، کافی است بدانید که سهمی قبلی شما، به اندازهٔ یک واحد بالا می‌پرد!

زنگ تفریح ریاضی!

برای رفع خستگی از زحمتی که برای فصل اوّل کشیده‌اید، ورزش بدن‌سازی زیر را انجام دهید تا سهمی‌ها را برای همیشه، درخاطر داشته باشید! این ورزش، فقط با حرکت دستهاست.

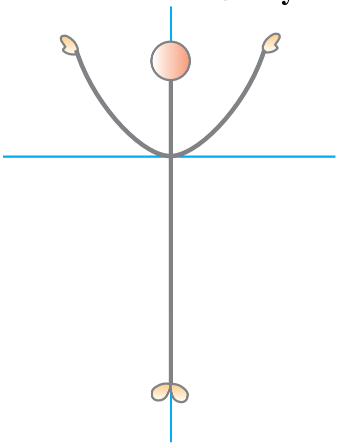
فرض کنید روی محور مختصات طوری ایستاده‌اید که مرکز مختصات، هم سطح با شانه‌ها و دقیقاً زیر نقطهٔ میانی گردن شما باشد.



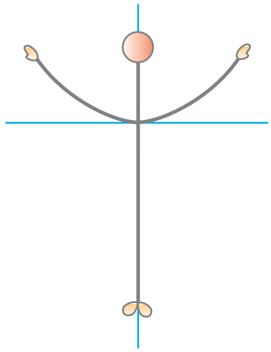
تمرین ۱: دست‌ها را به‌آهستگی و منحنی‌وار، به‌طرف بالا حرکت دهید. این حالت استاندارد را $y = x^2$ می‌نامیم.

هریک از تمرین‌های ورزشی را از $y = x^2$ شروع کرده و به آن، خاتمه دهید.

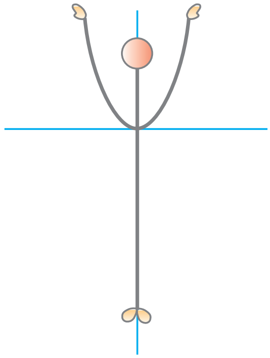
یعنی نقطهٔ شروع و پایان، $y = x^2$ است.



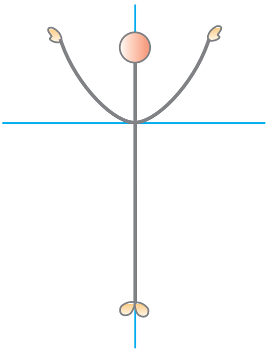
تمرین ۲: شکل‌های زیر، نشان می‌دهند که اگر ضریب x را (که در $y = x^{۲}$ یک است) تغییر دهیم، سهمی تنگ‌تر یا گشادتر می‌شود.



$y = \frac{۱}{۲}x^{۲}$



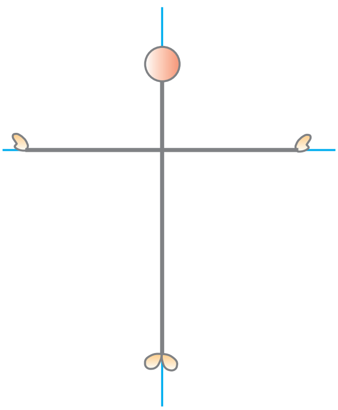
$y = ۲x^{۲}$



$y = x^{۲}$

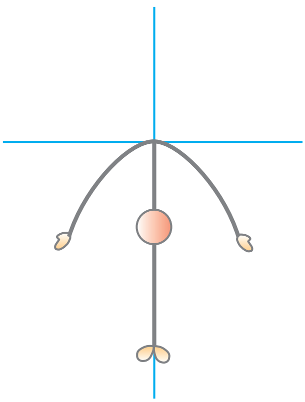
حالا اگر $y = ۰x^{۲}$ باشد چه می‌شود؟

درست است! باید دست‌ها در امتداد محور xها باز شود.



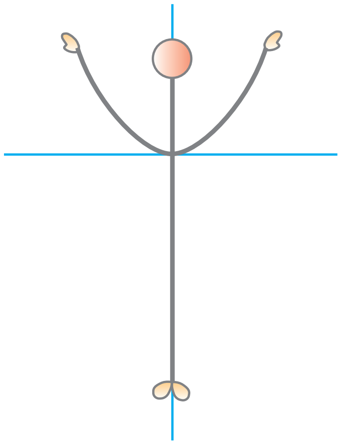
$y = ۰x^{۲}$

خوب! حالا پاها را جفت کنید و خَم شوید!



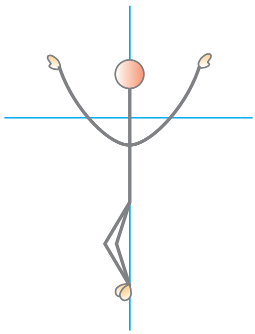
$y = -x^{۲}$

سپس دوباره به حالت اوّل باز گردید.

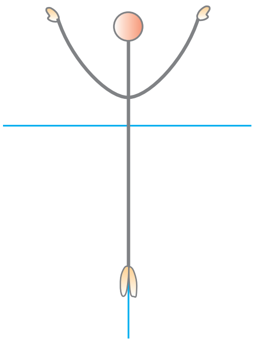


$y = x^2$

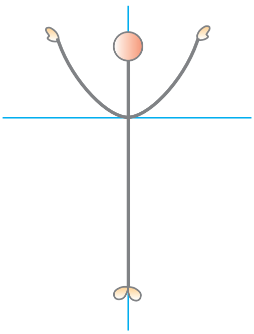
تمرین ۳: این تمرین‌ها نشان می‌دهند که چگونه اضافه‌کردن یک مقدار ثابت به سمت راست معادلهٔ $y = x^2$ ، حرکت‌های بالا و پایین سهمی را تغییر می‌دهد. شما طبق شکل، به ورزش بدن‌سازی خود، ادامه دهید!



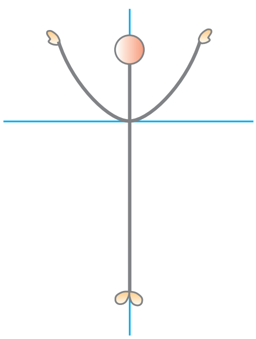
$y = x^2 - 1$



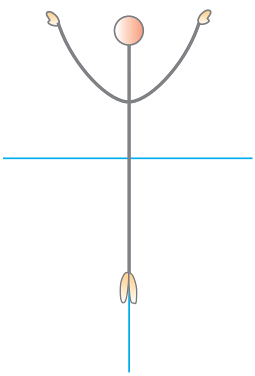
$y = x^2 + 1$



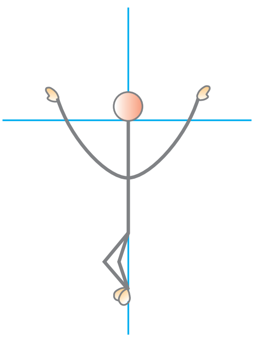
$y = x^2 + 0$



$y = x^2$

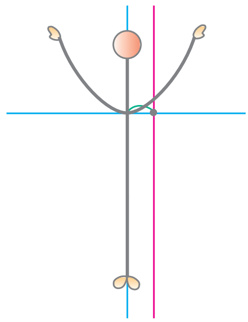


$y = x^2 + 2$

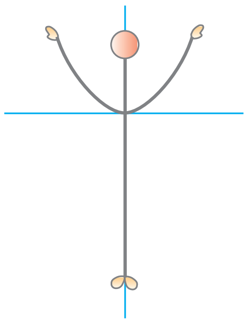


$y = x^2 - 2$

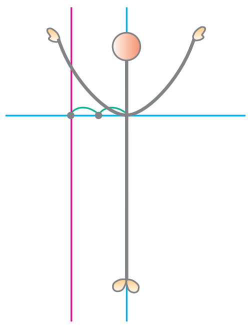
تمرین ۴: تمرین‌های این قسمت، نیازمند تحرّک بیشتری است و حرکت سهمی به‌سمت راست یا چپ را نشان می‌دهد. شما هم با تحرّک بیشتر، به ورزش خود ادامه دهید!



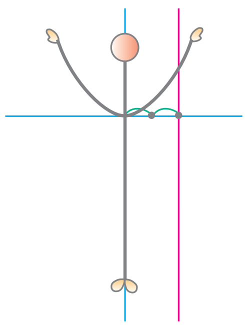
$y=(x-۱)^۲$



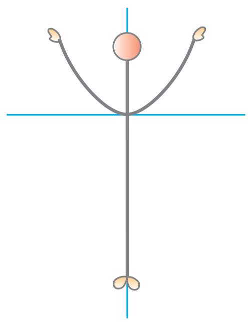
$y=(x+۰)^۲$



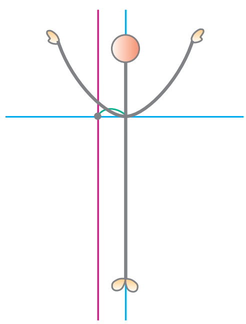
$y=(x+۲)^۲$



$y=(x-۲)^۲$

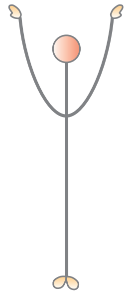


$y=x^۲$

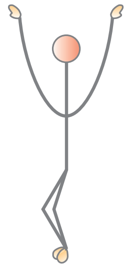


$y=(x+۱)^۲$

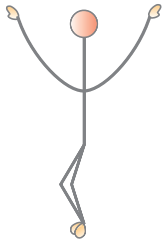
تمرین ۵: حالا که عضلات شما به‌کار افتاده‌اند و آمادگی بیشتری پیدا کرده‌اید، حرکات ورزشی خود را با تنوّع و تحرک بیشتری، مانند شکل‌های زیر، انجام دهید!



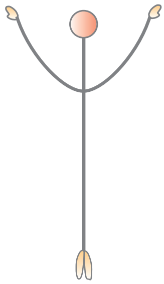
$y = 2x^2 + 0$



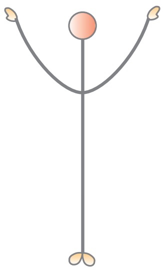
$y = 2x^2 - 1$



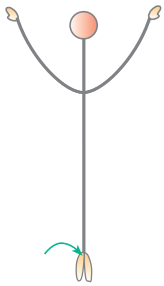
$y = x^2 - 1$



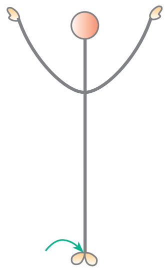
$y = x^2 + 1$



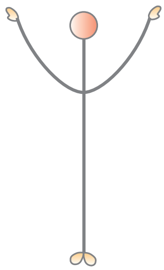
$y = x^2$



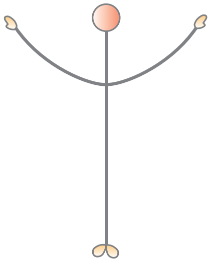
$y = (x-1)^2 + 1$



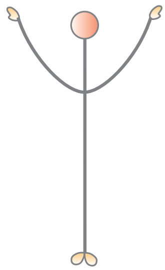
$y = (x-1)^2$



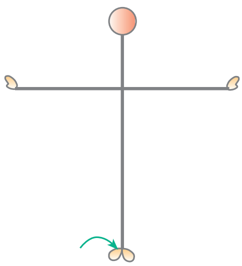
$y = x^2$



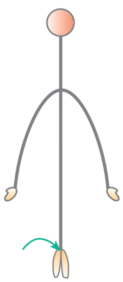
$y = \frac{1}{2}x^2$



$y = x^2$



$y = 0(x-1)^2 + 1$



$y = -2(x-1)^2 + 1$

فصل دوم

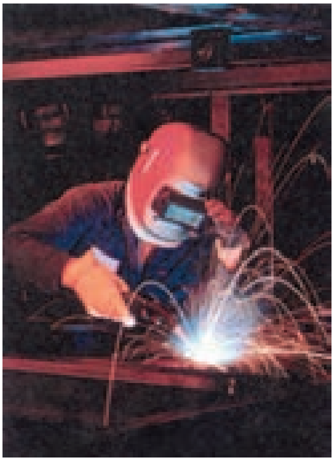
معادله و تابع‌های درجهٔ دوم

معادلهٔ درجهٔ دوم به معادلاتی گفته می‌شود که دارای چندجمله‌ای‌های با درجهٔ ۲ باشند.

تعریف

یک معادلهٔ درجهٔ دوم، معادله‌ای به شکل $ax^2 + bx + c = 0$ است که در آن؛ a و b و c، اعداد حقیقی هستند و a مخالف صفر است.

در این تعریف، ax^2 جملهٔ درجهٔ ۲، bx جملهٔ درجهٔ ۱ و c، جملهٔ ثابت نامیده می‌شوند.



مثال

$5x^2+3x+4=0$ یک معادلهٔ درجهٔ ۲ است که در آن، $5x^2$ جملهٔ درجهٔ دو، $3x$ جملهٔ درجهٔ یک و ۴ جملهٔ ثابت نامیده می‌شوند.

تمرین

در معادله‌های درجهٔ دوم زیر، جملهٔ درجهٔ ۲، جملهٔ درجهٔ ۱ و جملهٔ ثابت را مشخص کنید :

الف) $3x^2+50x-1=0$

ب) $-\frac{1}{2}x^2-3x+2=0$

مثال

در معادله‌های درجهٔ دوم زیر، جملهٔ درجهٔ دو، جملهٔ درجه یک و جملهٔ ثابت را مشخّص کنید :

الف) $ax^2-4=0$

ب) $\frac{1}{50}x^2-3x=0$

پ) $x^2=0$

حل:

الف) در این معادله، جملهٔ درجهٔ ۲ برابر ax^2 و جملهٔ درجهٔ ۱ برابر صفر و جملهٔ ثابت برابر -4 است، زیرا می‌توانیم معادله را به شکل زیر بنویسیم :

$$ax^2+0x+(-4)=0$$

ب) معادلهٔ $\frac{1}{50}x^2-3x=0$ را به شکل زیر می‌نویسیم :

$$\frac{1}{50}x^2+(-3)x+0=0$$

پس جملهٔ درجهٔ ۲ مساوی $\frac{1}{50}x^2$، جملهٔ درجهٔ ۱ برابر $-3x$ و جملهٔ ثابت برابر صفر است.

پ) معادلهٔ $x^2=0$ را به شکل $x^2+0x+0=0$ می‌نویسیم.

در این معادله، جملهٔ درجهٔ ۲ مساوی x^2، جملهٔ درجهٔ ۱ مساوی صفر و جملهٔ ثابت نیز مساوی صفر است.

تمرین

در معادله‌های زیر ؛ جملهٔ درجهٔ ۲، جملهٔ درجهٔ ۱ و جملهٔ ثابت را مشخّص کنید :

الف) $3x^2 - bx = 0$ ب) $3x^2 - 2 = 0$

پ) $3x^2 = 0$ ت) $\frac{1}{3}x^2 - bx + c = 0$

شکل استاندارد معادلهٔ درجهٔ دوم، به‌صورت $ax^2 + bx + c = 0$ است.

۱ــ۲ــ تابع درجهٔ دوم

تابع‌های درجهٔ دوم، به شکل $f(x) = ax^2 + bx + c$ هستند که در آن، a و b و c ؛ اعداد حقیقی هستند و a مخالف صفر است.

توجّه: به تفاوت بین یک **معادلهٔ درجهٔ دوم** که می‌توان آن را به شکل $ax^2 + bx + c = 0$ نوشت و یک تابع درجهٔ دوم که می‌توان آن را به شکل $f(x) = ax^2 + bx + c$ نوشت، توجّه کنید.

معادلهٔ درجهٔ دوم، یک مورد خاص $f(x) = 0$ است و **ریشه‌های** این معادله، محلّ تقاطع نمودار $f(x)$ ، با محور xها است.

۲ــ۲ــ تخمین جواب‌های معادلات درجهٔ دوم

حل معادله‌ای مانند $x^2 - 2x - 5 = 3$ ، به معنای پیدا کردن مقادیری برای x است که به‌ازای

جدول ۱

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
x^2-2x-5	10	3	-2	-5	-6	-5	-2	3	10

آن مقادیر ؛ $x^2 - 2x - 5$ دارای مقدار ۳ باشد. جدول بالا را در نظر بگیرید.

با توجّه به جدول، مقدار عبارت $x^2 - 2x - 5$ به‌ازای دو مقدار متفاوت x یعنی ۲ − و ۴، مساوی ۳ می‌شود. یعنی معادلهٔ $x^2 - 2x - 5 = 3$ دارای دو جواب ۲− و ۴ است.

تعریف

مقادیری از x که به‌ازای آن‌ها، معادله برقرار است ؛ **جواب** معادله نامیده می‌شوند.

همان طور که در جدول می‌بینید، به‌ازای $x=1$ ، مقدار عبارت x^2-2x-5 مساوی -6 می‌شود. یعنی معادلهٔ $x^2-2x-5=-6$ دارای یک جواب است.

مثال

آیا معادلهٔ $x^2-2x-5=-10$ جواب دارد؟ توضیح دهید.

حل: با توجّه به جدول ۱، دیده می‌شود که کمترین مقدار عبارت x^2-2x-5 برابر -6 است. بنابراین، معادلهٔ $x^2-2x-5=-10$ جواب ندارد، یعنی xای وجود ندارد که به‌ازای آن، مقدار x^2-2x-5 ، برابر -10 شود.

مثال

آیا معادله‌های زیر، درجهٔ دوم هستند؟ هر معادله دارای چند جواب است؟

الف) $(7-2x)^2=(2x-7)^2$

ب) $(2x+1)^2=(3+2x)^2$

حل:

الف) دو طرف معادله را با استفاده از اتحاد مربع تفاضل دو جمله به توان می‌رسانیم :

$$(7-2x)^2=(2x-7)^2$$

$$\cancel{49}+\cancel{4x^2}-\cancel{28x}=\cancel{4x^2}-\cancel{28x}+\cancel{49}$$

$$0=0$$

توجّه: این معادله دارای ویژگی خاصّی است یعنی به ازای **تمام** مقادیر x، معادله درست است. به این نوع معادله، **اتّحاد** گفته می‌شود[1].

۱ــ توجه داشته باشید که در ریاضی سال اوّل، به تفصیل با اتّحادها کار کرده‌اید.

ب)

$$(۲x+۱)^۲ = (۳+۲x)^۲$$

$$\cancel{۴x^۲} + ۴x + ۱ = ۹ + ۱۲x + \cancel{۴x^۲}$$

$$۴x + ۱ - ۹ - ۱۲x = ۰$$

$$-۸x - ۸ = ۰ \Rightarrow \quad ۸x = ۸ \Rightarrow \boxed{x = -۱}$$

پس این معادله، درجه اول است و تنها یک جواب دارد.

۳ــ۲ــ حل معادلهٔ درجهٔ دوم

اگر بتوان یک عبارت درجهٔ دوم را به‌صورت حاصل‌ضرب دو عبارت درجهٔ اوّل نوشت، اصطلاحاً گفته می‌شود که عبارت درجهٔ دوم، به حاصل‌ضرب دو عبارت درجهٔ اوّل، **تجزیه** شده است.

به مثال‌های زیر توجّه کنید :

اتّحاد جملهٔ مشترک	الف) $x^۲ + ۴x + ۳ = (x+۳)(x+۱)$
فاکتورگیری	ب) $۲x^۲ + ۵x = x(۲x+۵)$
اتّحاد مزدوج	پ) $x^۲ - ۹ = (x-۳)(x+۳)$
اتّحاد مربع مجموع دو جمله	ت) $x^۲ + ۶x + ۹ = (x+۳)(x+۳) = (x+۳)^۲$
اتّحاد مربع تفاضل دو جمله	ث) $x^۲ - ۶x + ۹ = (x-۳)(x-۳) = (x-۳)^۲$

معادلهٔ نظیر هر یک از عبارت‌های درجهٔ دوم بالا، به شکل زیر است :

الف) $x^۲ + ۴x + ۳ = ۰$

ب) $۲x^۲ + ۵x = ۰$

پ) $x^۲ - ۹ = ۰$

ت) $x^۲ + ۶x + ۹ = ۰$

ث) $x^۲ - ۶x + ۹ = ۰$

برای حل این معادله‌ها، می‌توانیم از یک خاصیت ساده امّا مهمّ اعداد حقیقی استفاده کنیم :

> **خاصیّت فاکتور (عامل) صفر:** برای هر دو عدد حقیقی a و b، اگر $ab = ۰$ ، آن‌گاه $a = ۰$ یا $b = ۰$.

حل معادلات نمونه

الف) $x^۲+۴x+۳=۰$

با استفاده از اتّحاد جملهٔ مشترک،معادله را تجزیه می‌کنیم. $(x+۳)(x+۱)=۰$

با استفاده از خاصیت فاکتور (عامل) صفر $x+۳=۰$ یا $x+۱=۰$

$\boxed{x=-۳}$ یا $\boxed{x=-۱}$

ب) $۲x^۲+۵x=۰$

با استفاده از فاکتورگیری $x(۲x+۵)=۰$

با استفاده از خاصیت فاکتور صفر $\boxed{x=۰}$ یا $۲x+۵=۰\Rightarrow\boxed{x=-\frac{۵}{۲}}$

پ) $x^۲-۹=۰$

اتّحاد مزدوج $(x-۳)(x+۳)=۰$

خاصیت فاکتور صفر $x-۳=۰$ یا $x+۳=۰$

$\boxed{x=۳}$ یا $\boxed{x=-۳}$

ت) $x^۲+۶x+۹=۰$

اتّحاد مربع مجموع دو جمله $(x+۳)(x+۳)=(x+۳)^۲=۰$

خاصیت فاکتور صفر $x+۳=۰$ یا $x+۳=۰$

$\boxed{x=-۳}$ یا $\boxed{x=-۳}$

پس معادله، دارای دو جواب مساوی است که به آن، **ریشهٔ مضاعف** گفته می‌شود.

ث) $x^۲-۶x+۹=۰$

اتّحاد مربع تفاضل دو جمله $(x-۳)(x-۳)=(x-۳)^۲=۰$

خاصیت فاکتور صفر $x-۳=۰$ یا $x-۳=۰$

$\boxed{x=۳}$ یا $\boxed{x=۳}$

پس معادله، دارای یک جواب است یعنی یک **ریشهٔ** مضاعف دارد.

ریشهٔ یک معادله، همان جواب معادله است.

همان‌طور که در حل معادلات نمونه دیدید :

برای استفاده از خاصیت فاکتور (عامل) صفر، دو شرط **باید** وجود داشته باشد :
۱ــ یک طرف معادله صفر باشد ؛
۲ــ طرف دیگر معادله، یک حاصل‌ضرب باشد.

مسایل

در صورت امکان، جواب معادله‌های زیر را به‌دست آورید.

۱ــ $۵x = x^۲$

۲ــ $P^۲ + ۳۶ = ۰$

۳ــ $x^۲ = ۱/۲۱$

۴ــ $x - ۲ = -\frac{۳۵}{x}$

توجه: همان‌طورکه در بسیاری حالت‌ها، دو جواب برای معادله‌های درجهٔ دوم به‌دست آوردیم، می‌توانیم با داشتن دو جواب نیز، یک معادلهٔ درجهٔ دوم بنویسیم.

مثال

معادلهٔ درجهٔ دومی بنویسید که ۳ و ۷ــ ، جواب‌های آن باشند.

حل: ۳ و ۷ــ جواب معادله هستند، پس

$\boxed{x = ۳}$ یا $\boxed{x = -۷}$

$x - ۳ = ۰$ یا $x + ۷ = ۰$

$(x - ۳)(x + ۷) = ۰$

$x^۲ + ۴x - ۲۱ = ۰$

تمرین

معادلهٔ درجهٔ دومی بنویسید که جواب‌های آن، جفت عددهای زیر باشد :

الف) $۴,۴$ ب) $۲,۷$ پ) $-۲,-۳$

۱ـ۳ـ۲ـ حل معادلهٔ درجهٔ دوم با استفاده از خاصیت ریشهٔ زوج: در شکل استاندارد معادلهٔ درجهٔ دوم یعنی $ax^۲ + bx + c = ۰$ ،

الف) اگر $c = ۰$ باشد، آن‌گاه $ax^۲ + bx = ۰$ می‌شود. درنتیجه، با استفاده از خاصیت فاکتور صفر، معادله را که همیشه جواب حقیقی دارد، حل می‌کنیم :

$$ax^۲ + bx = ۰$$

$$x(ax + b) = ۰$$

$$\boxed{x = ۰} \text{ یا } ax + b = ۰ \Rightarrow \boxed{x = -\frac{b}{a}}$$

ب) اگر $b = ۰$ ، آن‌گاه $ax^۲ + c = ۰$. در این حالت برای پیداکردن جواب معادله، به طریق زیر عمل می‌کنیم :

$$ax^۲ + c = ۰$$

دو طرف معادله را بر a تقسیم می‌کنیم.

$$x^۲ + \frac{c}{a} = ۰$$

از دو طرف، $\frac{c}{a}$ را کم می‌کنیم.

$$x^۲ = -\frac{c}{a}$$

این معادله، وقتی جواب دارد که $-\frac{c}{a} \geq ۰$ (چرا؟)

در این صورت :

$$\boxed{x = \sqrt{-\frac{c}{a}}} \text{ یا } \boxed{x = -\sqrt{-\frac{c}{a}}}$$

اگر $-\frac{c}{a} < ۰$ ، معادله جواب ندارد (چرا؟).

در حالت کلّی :

اگر $x^۲ = k$ و $k > ۰$ ، آن‌گاه $x = \sqrt{k}$ یا $x = -\sqrt{k}$. این طریق پیدا کردن جواب‌های معادله $x^۲ = k$ ، استفاده از **خاصیت ریشهٔ زوج** است.

مثال

معادلهٔ درجهٔ دوم $۵-x^۲=۰$ را حل کنید.

حل: ابتدا معادله را به شکل $x^۲=۵$ می‌نویسیم؛

با استفاده از خاصیت ریشهٔ زوج: $x=-\sqrt{۵}$ یا $x=\sqrt{۵}$.

مثال

با استفاده از خاصیت ریشهٔ زوج، معادلهٔ $(۲x+۱)^۲=۵$ را حل کنید.

از خاصیت ریشهٔ زوج با $k>۰$ استفاده می‌کنیم:

$$۲x+۱=\pm\sqrt{۵}$$

به دو طرف معادله (-۱) را اضافه می‌کنیم:

$$۲x=\pm\sqrt{۵}-۱$$

دو طرف را بر ۲ تقسیم می‌کنیم:

$$x=\frac{\pm\sqrt{۵}-۱}{۲} \Rightarrow \boxed{x=\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}} \text{ یا } \boxed{x=\frac{-\sqrt{۵}-۱}{۲}}$$

توجه داشته باشید که نماد $(\pm)$ نشانگر دو جواب است، یک جواب با علامت مثبت و جواب دیگر با علامت منفی خواهد بود.

تمرین

معادله‌های زیر را حل کنید:

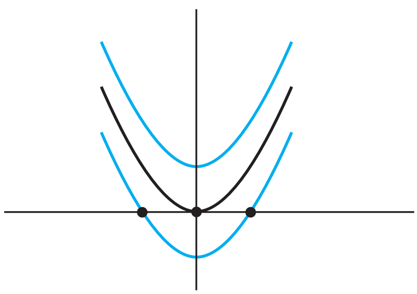
الف) $(۲x+۵)^۲=(x-۱)^۲$

ب) $x^۲+۷x+۶=۰$ پ) $x^۲=x$

ت) $(۵x-۴)^۲=۹$ ث) $(۳x-۲)^۲=۱۵$

بررسی تعداد جواب‌های معادلهٔ درجهٔ دوم

با توجه به «زنگ تفریح ریاضی» پایان فصل اوّل، تابع $y=f(x)=x^۲$ را در نظر می‌گیریم و نمودار آن را رسم می‌کنیم:



آن‌گاه، نمودار تابع $f(x)=x^{۲}-۱$ را روی همان صفحهٔ مختصات رسم می‌کنیم. سپس، نمودار تابع $f(x)=x^{۲}+۱$ را نیز در همان صفحهٔ مختصات رسم می‌کنیم. نتیجه‌ها را بررسی می‌کنیم :

۱ــ نمودار تابع $y=f(x)=x^{۲}$ **یک ریشه** دارد (محلّ تقاطع نمودار با محور xها)، درنتیجه ؛ معادلهٔ $y=x^{۲}=۰$ دارای **یک** جواب حقیقی یا به‌عبارت دیگر، دارای یک ریشهٔ مضاعف است.

۲ــ نمودار تابع $y=f(x)=x^{۲}-۱$ **دو ریشه** دارد (یعنی نمودار تابع ؛ محور xها را در دو نقطه قطع کرده است).درنتیجه، معادلهٔ $y=x^{۲}-۱=۰$ دارای **دو جواب** حقیقی است.

۳ــ نمودار تابع $y=f(x)=x^{۲}+۱$ **هیچ ریشه** ندارد (یعنی نمودار تابع، اصلاً محور xها را قطع نکرده است). درنتیجه، معادلهٔ $y=x^{۲}+۱=۰$ دارای **جواب** حقیقی نیست.

تمرین

معادله‌های $۵-x^{۲}=۰$ و $۵+x^{۲}=۰$ ، خیلی شبیه هستند اما، از نظر تعدادِ جواب‌ها متفاوت هستند. با استفاده از خاصیّت ریشهٔ زوج، توضیح دهید چرا یک معادله دو جواب دارد، امّا معادلهٔ دیگر، هیچ جواب حقیقی ندارد؟

۲ــ۳ــ۲ــ حلّ معادلهٔ درجهٔ دوم به روش مربع کامل‌کردن

به مثال زیر توجه کنید :

مثال

جواب‌های معادلهٔ $۴x^{۲}-۴x-۸=۰$ را پیدا کنید.

حل: معادله را به شکل زیر می‌نویسیم :

$$(۴x^{۲}-۴x)-۸=۰$$

$$\left[(۲x)^{۲}-۲(۲x)+\square\right]-۸-\square=۰ \qquad (۱)$$

سعی می‌کنیم عبارت داخل پرانتز را به صورت مربع کامل درآوریم : توجّه کنید مقداری را که به داخل کروشه اضافه کرده‌ایم، مجدداً کم می‌کنیم تا **تعادل** معادله، به‌هم نخورد!

عبارت داخل کروشه، مربع تفاضل دو جمله است که جملهٔ سوم آن مجهول است. چون جملهٔ وسطی، دو برابر حاصل ضرب جملهٔ اوّل در دوم است. $\left((a-b)^{۲}=a^{۲}-۲ab+b^{۲}\right)$

پس $\boxed{}.2(2x) = 2(2x)$. می‌بینید که مقدار $\boxed{}$ باید ۱ باشد تا معادله برقرار باشد، پس در (۱)، مقدار $\boxed{}$ را با 1^2 جایگزین می‌کنیم :

$$\left[(2x)^2 - 2(2x) + 1^2\right] - 8 - 1^2 = 0$$

$$(2x-1)^2 - 9 = 0$$

$$(2x-1)^2 = 9$$

$$2x - 1 = \pm\sqrt{9} = \pm 3$$

$$2x - 1 = 3 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow \lfloor x = 2 \rfloor$$

یا

$$2x - 1 = -3 \Rightarrow 2x = -2 \Rightarrow \lfloor x = -1 \rfloor$$

مربع کامل کردن، یعنی نوشتن معادلهٔ درجهٔ دوم به شکل $(x+h)^2 = k$ که در آن h و k اعداد حقیقی هستند.

حل یک معادلهٔ درجه دوم با مربع کامل‌کردن

۱ــ اگر لازم باشد، دو طرف معادله را بر ضریب x^2 تقسیم کنید تا ضریب آن ۱ شود.

۲ــ معادله را به شکل $x^2 + bx = k$ بنویسید.

۳ــ $(\frac{b}{2})^2$ را به هر دو طرف تساوی اضافه کنید تا جملهٔ سمت چپ، مربع کامل شود.

۴ــ سه جمله‌ای کامل شده را به‌صورت مربع مجموع یا مربع تفاضل دو جمله بنویسید.

۵ــ با استفاده از خاصیت ریشهٔ زوج، معادله را حل کنید.

مثال

معادله‌های درجه دوم زیر را با روش مربع کامل کردن حل کنید.

الف) $x^2 - 10x - 1 = 0$

حل: به هر دو طرف معادله، ۱ را اضافه کنید. $x^{۲}-۱۰x=۱$

مربع (مجذور) نصف ضریب x یعنی $۲۵=(\frac{-۱۰}{۲})^{۲}$ را به هر دو طرف معادله اضافه کنید، تا سه‌جمله‌ای به صورت مربع کامل درآید.

$$x^{۲}-۱۰x+۲۵=۱+۲۵$$

سپس سه‌جمله‌ای را به‌صورت مربع تفاضل دو جمله بنویسید.

$$(x-۵)^{۲}=۲۶$$

از خاصیت ریشهٔ زوج (مربع) استفاده کنید.

$$x-۵=\pm\sqrt{۲۶}$$

به دو طرف معادله، ۵ را اضافه کنید.

$$x=۵\pm\sqrt{۲۶}$$

$$x=۵+\sqrt{۲۶} \text{ یا } x=۵-\sqrt{۲۶}$$

توجه: با استفاده از ماشین‌حساب، مقدار تقریبی x را حساب کنید.

ب) $x(۲x+۳)=۶$

حل: پرانتزها را بردارید. $۲x^{۲}+۳x=۶$

دو طرف را بر ضریب درجهٔ دوم ($x^{۲}$) تقسیم کنید. $x^{۲}+\frac{۳}{۲}x=۳$

به دو طرف، مجذور نصف ضریب x یعنی $\frac{۹}{۱۶}=(\frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{۲})^{۲}$ را اضافه کنید.

$$x^{۲}+\frac{۳}{۲}x+\frac{۹}{۱۶}=\frac{۳}{۱}+\frac{۹}{۱۶}$$

طرف چپ مربع کامل است. $(x+\frac{۳}{۴})^{۲}=\frac{۵۷}{۱۶}$

از خاصیت ریشهٔ زوج استفاده کنید. $x+\frac{۳}{۴}=\pm\sqrt{\frac{۵۷}{۱۶}}$

$$x+\frac{۳}{۴}=\pm\frac{\sqrt{۵۷}}{۴}$$

از دو طرف $\frac{۳}{۴}$ را کم کنید تا جواب x به‌دست آید. $x=-\frac{۳}{۴}\pm\frac{\sqrt{۵۷}}{۴}$

با استفاده از ماشین حساب، مقدار تقریبی x را حساب کنید.

$\boxed{x \cong 1/14}$ یا $\boxed{x \cong -2/64}$

پ) $x^2 + 6x + 8 = 0$

از دو طرف ۸ را کم کنید. $x^2 + 6x = -8$

مجذور نصف ضریب x یعنی $(\frac{6}{2})^2 = 9$ را به دو طرف اضافه کنید تا سه جمله‌ای، مربع کامل شود.

$$x^2 + 6x + 9 = -8 + 9$$

$$x^2 + 6x + 9 = 1$$

سه جمله‌ای را به‌صورت مربع مجموع دو جمله بنویسید. $(x+3)^2 = 1$

از خاصیت ریشهٔ زوج استفاده کنید. $x + 3 = \pm\sqrt{1}$

از دو طرف ۳ را کم کنید. $x = -3 \pm 1$

$\boxed{x = -2}$ یا $\boxed{x = -4}$

تمرین

معادله‌های زیر را ازطریق **مربع کامل‌کردن** ؛ حل کنید :

الف) $x^2 + 2x = 5$ ب) $x(2x-3) = 1$

پ) $x^2 + 6x + 8 = 0$

۳ــ۳ــ۲ــ فرمول حل معادلهٔ درجهٔ دوم در حالت کلّی

اگر مراحل حل معادلهٔ درجهٔ دوم را به **روش مربع کامل‌کردن**، برای معادلهٔ درجهٔ دوم به شکل استاندارد $ax^2 + bx + c = 0$ انجام دهیم، می‌توانیم یک فرمول کلّی برای پیداکردن جواب‌های معادله‌های درجهٔ دوم پیدا کنیم. زیرا اگر a، b و c، هر سه مخالف صفر باشند، آن گاه، استفاده از خاصیت فاکتور صفر یا استفاده از خاصیت ریشهٔ زوج، همیشه به‌سادگی، امکان‌پذیر نیست. به همین دلیل، به ابزار دیگری برای حل معادله‌های درجهٔ دوم در حالت کلّی، نیاز داریم.

مراحل به‌دست‌آوردن فرمول معادلهٔ درجهٔ دوم

شکل استاندارد معادلهٔ درجهٔ دوم

$$ax^{۲} + bx + c = ۰$$

کم‌کردن c از دو طرف

$$ax^{۲} + bx = -c$$

تبدیل ضریب جملهٔ درجه دوم به ۱ با تقسیم دو طرف معادله بر a

$$x^{۲} + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

اضافه‌کردن مجذور نصف ضریب x یعنی $(\frac{۱}{۲} \times \frac{b}{a})^{۲} = \frac{b^{۲}}{۴a^{۲}}$ به دو طرف

$$x^{۲} + \frac{b}{a}x + \frac{b^{۲}}{۴a^{۲}} = -\frac{c}{a} + \frac{b^{۲}}{۴a^{۲}}$$

یکسان کردن مخرج کسرها در سمت راست

$$x^{۲} + \frac{b}{a}x + \frac{b^{۲}}{۴a^{۲}} = \frac{-۴ac}{۴a^{۲}} + \frac{b^{۲}}{۴a^{۲}}$$

ترکیب دو کسر در سمت راست

$$x^{۲} + \frac{b}{a}x + \frac{b^{۲}}{۴a^{۲}} = \frac{b^{۲} - ۴ac}{۴a^{۲}}$$

سه‌جمله‌ای سمت چپ، مربع کامل است. نوشتن سمت چپ به صورت توانی

$$(x + \frac{b}{۲a})^{۲} = \frac{b^{۲} - ۴ac}{۴a^{۲}}$$

توجه کنید که تساوی به‌دست‌آمده، با توجه به مثبت بودن $۴a^{۲}$ تنها وقتی معنی‌داراست که

$$b^{۲} - ۴ac \geq ۰$$

استفاده از خاصیت ریشهٔ زوج

$$x+\frac{b}{2a}=\frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

کم‌کردن $\frac{b}{2a}$ از دو طرف برای پیدا کردن x

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

ترکیب دو کسر در سمت راست

$$\boxed{x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

این فرمول، **فرمول حل معادلهٔ درجهٔ دوم** نامیده می‌شود.

فرمول حل معادلهٔ درجهٔ دوم

برای اعداد حقیقی a، b و c و با شرط $a\neq 0$ ، جواب‌های حقیقی معادلهٔ درجه‌دوم $ax^2+bx+c=0$ در صورت وجود عبارتند از :

$$x=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2}\quad,\quad x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2}$$

توجه: قبل از استفاده از فرمول به‌دست‌آمده، معادلهٔ درجهٔ دوم باید به شکل استاندارد نوشته شود.

فکر کنید: چرا در فرمول حل معادلهٔ درجهٔ دوم، b و c می‌توانند صفر باشند امّا a نمی‌تواند صفر شود؟ چرا این حالت معنی ندارد؟

مثال

با استفاده از فرمول حل معادلهٔ درجهٔ دوم، معادلهٔ $3x^2-13x=30$ را حل کنید.

حلّ: نوشتن معادله به شکل استاندارد $\quad 3x^2-13x-30=0$

$a=۳$ ، $b=-۱۳$ و $c=-۳۰$ را در فرمول قرار می‌دهیم :

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^{۲}-۴ac}}{۲a}$$

$$x=\frac{-(-۱۳)\pm\sqrt{(-۱۳)^{۲}-۴(۳)(-۳۰)}}{۲(۳)}$$

رادیکال را ساده می‌کنیم :

$$x=\frac{۱۳\pm\sqrt{۱۶۹+۳۶۰}}{۶}$$

۵۲۹ مربع کامل است درنتیجه :

$$x=\frac{۱۳\pm\sqrt{۵۲۹}}{۶}$$

$$x=\frac{۱۳\pm۲۳}{۶}\begin{cases}=\dfrac{۱۳+۲۳}{۶}=۶\\[2ex]=\dfrac{۱۳-۲۳}{۶}=-\dfrac{۵}{۳}\end{cases}$$

مبیّن

در فرمول معادلهٔ درجهٔ دوم در حالت کلّی یعنی،

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^{۲}-۴ac}}{۲a}$$

مقدار زیر رادیکال یعنی $b^{۲}-۴ac$ **مبیّن** نامیده می‌شود و با علامت Δ (بخوانید دلتا) نشان داده می‌شود. **مبیّن**، اطلاعاتی در مورد تعداد جواب‌های یک معادلهٔ درجهٔ دوم با ضرایب حقیقی را، **بیان می‌کند**.

اطلاعات به‌دست‌آمده از مبیّن

اگر a، b و c، اعداد حقیقی باشند ؛ مبیّن تعداد جواب‌های یک معادلهٔ درجهٔ دوم را به‌شرح زیر، بیان می‌کند :

۱ــ اگر $\Delta=b^{۲}-۴ac>۰$ ، معادله دارای دو جواب متمایز $\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}$ و $\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}$ است.

۲ــ اگر $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ ، معادله یک جواب به‌صورت $-\frac{b}{2a}$ دارد (ریشهٔ مضاعف).

۳ــ اگر $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ ، معادله هیچ جواب حقیقی ندارد (اعداد منفی جذر ندارند).

مثال

با تشکیل مبیّن هر معادله، تعداد جواب‌های آن را تعیین کنید.

الف) $3x^2 + 1 = 2x$

ب) $x(5x+1) = 12$

پ) $25x^2 - 20x + 4 = 0$

حل:

الف) $3x^2 + 1 = 2x$

نوشتن معادله به شکل استاندارد $\quad 3x^2 - 2x + 1 = 0$

تشکیل مبیّن معادله $\quad \Delta = b^2 - 4ac$

$$\Delta = (-2)^2 - 4(3)(1) = 4 - 12 = -8$$

چون مبیّن منفی است، پس معادله جواب حقیقی ندارد.

ب) $x(5x+1) = 12$

نوشتن معادله به شکل استاندارد $\quad 5x^2 + x - 12 = 0$

تشکیل مبیّن معادله $\quad \Delta = b^2 - 4ac$

$$= (1)^2 - 4(5)(-12) = 1 + 240 = 241$$

مبیّن مثبت است، پس معادله دو جواب متمایز دارد.

پ) $25x^2 - 20x + 4 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-20)^2 - 4(25)(4) = 400 - 400 = 0$$

مبیّن صفر است، پس معادله دارای یک جواب حقیقی (ریشهٔ مضاعف) است.

مسایل

۱ــ معادله‌های زیر را اوّل به‌صورت استاندارد بنویسید و بعد مقادیر a، b و c را مشخص کنید.

الف) $x(3x-2)=7x+6$

ب) $(x-2)^2=-4x$

پ) $1=4x(2x-5)$

۲ــ معادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $x^2+16=8x$

ب) $2x^2=7x-3$

پ) $x^2=5x$

ت) $2x^2+7x=4$

ث) $x^2+1=2x$

۳ــ با استفاده از مبیّن، تعداد جواب‌های معادله‌های زیر را تعیین کنید :

الف) $4x^2+12x=7$

ب) $3x^2+4x-8=0$

پ) $x^2+12=8x$

ت) $1+6x-9x^2=0$

۴ــ چرا معادلهٔ $x^2+ax-5=0$ ، همیشه جواب‌های حقیقی دارد؟ (بدون توجّه به مقدار a).

مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌ها

مثال

با استفاده از فرمول معادلهٔ درجهٔ دوم، نشان دهید که مجموع ریشه‌های معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ برابر $-\frac{b}{a}$ است. نتیجه را با حل معادلهٔ $2x^2-7x-15=0$ امتحان کنید.

حل: با استفاده از فرمول معادلهٔ درجهٔ دوم،

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{و} \quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

پس

$$x_1+x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

مخرج مشترک می‌گیریم.

$$x_۱ + x_۲ = \frac{-b + \cancel{\sqrt{b^۲ - ۴ac}} - b - \cancel{\sqrt{b^۲ - ۴ac}}}{۲a}$$

$$= \frac{-۲b}{۲a} = -\frac{b}{a}$$

حال، نتیجه را در معادلهٔ $۲x^۲ - ۷x - ۱۵ = ۰$ امتحان می‌کنیم:

$$۲x^۲ - ۷x - ۱۵ = ۰$$

$$x = \frac{۷ \pm \sqrt{۴۹ + ۱۲۰}}{۴} = \frac{۷ \pm \sqrt{۱۶۹}}{۴}$$

$$x = \frac{۷ \pm ۱۳}{۴}$$

$$x_۱ = \frac{۷ + ۱۳}{۴} = \frac{۲۰}{۴} = ۵ \quad \text{و} \quad x_۲ = \frac{۷ - ۱۳}{۴} = -\frac{۶}{۴} = -\frac{۳}{۲}$$

پس

$$x_۱ + x_۲ = ۵ - \frac{۳}{۲} = \frac{۱۰}{۲} - \frac{۳}{۲} = \frac{۷}{۲}$$

از طرفی،

$$x_۱ + x_۲ = -\frac{b}{a} = -\frac{(-۷)}{۲} = \frac{۷}{۲}$$

یعنی نتیجهٔ به‌دست‌آمده در بالا، تأیید شد.

مجموع ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم

$ax^۲ + bx + c = ۰$،

برابر با $-\frac{b}{a}$ است.

مثال

الف) با استفاده از فرمول معادلهٔ درجهٔ دوم، حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ $ax^۲ + bx + c = ۰$ را به‌دست آورید.

حل: برای معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$،

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^۲ - ۴ac}}{۲a}$$

$$x_۱ = \frac{-b + \sqrt{b^۲ - ۴ac}}{۲a} \quad و \quad x_۲ = \frac{-b - \sqrt{b^۲ - ۴ac}}{۲a}$$

حاصل‌ضرب ریشه‌ها برابر است با :

$$x_۱x_۲ = \frac{-b + \sqrt{b^۲ - ۴ac}}{۲a} \times \frac{-b - \sqrt{b^۲ - ۴ac}}{۲a}$$

$$= \frac{b^۲ - (\sqrt{b^۲ - ۴ac})^۲}{۴a^۲}$$ با استفاده از اتّحاد مزدوج

$$= \frac{\cancel{b^۲} - \cancel{b^۲} + ۴ac}{۴a^۲} = \frac{\cancel{۴}ac}{\cancel{۴}a^{\cancel{۲}}}$$

$$= \frac{c}{a}$$

ب) با استفاده از نتیجهٔ (الف)، توضیح دهید که چرا ۴- و ۵ نمی‌توانند جواب‌های $۲x^۲ - ۳x - ۲۰ = ۰$ باشند.

حل: در (الف)، دیدیم که حاصل‌ضرب ریشه‌ها برابر $\frac{c}{a}$ است. در این معادله، $a = ۲$ و $c = -۲۰$ است پس :

$$x_۱.x_۲ = \frac{c}{a} = \frac{-۲۰}{۲} = -۱۰$$

امّا $x_۱ = -۴$ و $x_۲ = ۵$ که حاصل‌ضرب آن‌ها

$$x_۱.x_۲ = ۵.(-۴) = -۲۰$$

است. پس ۴- و ۵، نمی‌توانند ریشه‌های این معادله باشند.

حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$ برابر با $\frac{c}{a}$ است.

مسایل

۱ــ در معادله‌های زیر، مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌ها را بدون حل معادله،

بـه‌دست آورید :

الف) $3x^2 - 2x - 1 = 0$ ب) $x^2 + x + 1 = 0$

پ) $2x^2 - 2x + 1 = 0$ ت) $x^2 - 4x - 1 = 0$

۲ــ برای هر دسته از جواب‌های زیر، یک معادلهٔ درجهٔ دوم بنویسید :

الف) $-5 \pm 2\sqrt{5}$ ب) $-2 \pm 3\sqrt{2}$

۳ــ با استفاده از فرمول حل معادلهٔ درجهٔ دوم، معادله‌های زیر را حل کنید :

الف) $x^2 + \sqrt{3}x - 1 = 0$

ب) $\sqrt{2}x^2 + \sqrt{5}x - \sqrt{8} = 0$

۴ــ۲ــ معادله‌های کسری

گاهی ساده‌کردن کسرهای گویا، به یک معادلهٔ درجهٔ دوم منجر می‌شود.

مثال

معادلهٔ $\frac{2}{t} - \frac{t}{t-2} = 5$ را حل کنید.

حل: توجه داشته باشید که ۲ و صفر مقادیر غیرقابل قبولی برای t هستند. (چرا؟)

مخرج مشترک می‌گیریم $\frac{2}{t} - \frac{t}{t-2} = 5$

ضرب می‌کنیم $\frac{t(t-2)}{1} \times \frac{2}{t} - \frac{t(t-2)}{1} \times \frac{t}{t-2} = 5t(t-2)$

ساده می‌کنیم $2(t-2) - t^2 = 5t^2 - 10t$

معادله را به شکل استاندارد می‌نویسیم $-6t^2 + 12t - 4 = 0$

حال از فرمول حل معادلهٔ درجهٔ دوم برای پیدا کردن t استفاده می‌کنیم :

$$t = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4(-6)(-4)}}{2(-6)} = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 96}}{-12} = \frac{-12 \pm \sqrt{48}}{-12}$$

$$= \frac{-12 \pm \sqrt{16} \times \sqrt{3}}{-12} = \frac{-12 \pm 4\sqrt{3}}{-12} = \frac{3 \mp \sqrt{3}}{3}$$

هردو جواب معادله قابل قبول هستند.

$$t \cong ۰/۴۲ \quad \text{یا} \quad t \cong ۱/۵۸$$

۵ــ۲ــ حل معادلات رادیکالی

برای حل معادلات رادیکالی، دو طرف معادله را به توان فرجهٔ رادیکال می‌رسانیم. ممکن است که معادلهٔ نتیجه شده، درجهٔ دوم باشد که در آن صورت، با یکی از ۴ روش موجود آن‌ها را حل می‌کنیم.

مثال

معادله $\sqrt{x+۱} = x-۲$ را حل کنید.

حل: دو طرف معادله را به توان ۲ می‌رسانیم.

$$(\sqrt{x+۱})^{۲} = (x-۲)^{۲}$$

دوجمله‌ای را به توان می‌رسانیم

$$x+۱ = x^{۲} - ۴x + ۴$$

معادله را به شکل استاندارد می‌نویسیم

$$x^{۲} - ۵x + ۳ = ۰$$

حال با استفاده از فرمول حل معادلهٔ درجهٔ دوم، x را به‌دست می‌آوریم:

$$x = \frac{۵ \pm \sqrt{(-۵)^{۲} - ۴(۱)(۳)}}{۲(۱)} = \frac{۵ \pm \sqrt{۱۳}}{۲} = \begin{cases} \dfrac{۵+\sqrt{۱۳}}{۲} \cong ۴/۳۰ \\ \dfrac{۵-\sqrt{۱۳}}{۲} \cong ۰/۷۰ \end{cases}$$

با قراردادن این دو جوابِ ممکن در معادله، می‌بینیم که ۰/۷۰ یک جواب غیرقابل قبول است (چرا؟) پس تنها جواب معادله، $\frac{۵+\sqrt{۱۳}}{۲}$ یا تقریباً ۴/۳۰ است.

تذکّر: بهتر است قبل از حل معادلات رادیکالی، ابتدا دامنهٔ جواب را پیدا کنیم و سپس معادله‌ها را حل کنیم. در مثال بالا، مقدار زیر رادیکال نمی‌تواند منفی باشد یعنی

$$x+1\geq 0 \Rightarrow x\geq -1$$

چون طرف چپ معادله بزرگتر یا مساوی صفر است (نامنفی است)، طرف راست معادله نیز باید نامنفی باشد یعنی

$$x-2\geq 0 \Rightarrow x\geq 2$$

با توجه به دو شرطِ $x\geq -1$ و $x\geq 2$ ، نتیجه می‌شود که $x\geq 2$ قابل قبول است.

توجه: اگر معادله‌ای را بتوان به شکل $au^2+bu+c=0$ نوشت که در آن، u یک عبارت جبری باشد، می‌گوییم معادله به شکل درجهٔ دوم است. برای حل چنین معادله‌ای، جایگزینی انتخاب می‌کنیم تامعادله را بر حسب u بنویسیم. سپس از روش‌های حل معادلهٔ درجهٔ دوم استفاده می‌کنیم.

مثال

معادله‌های زیر را حل کنید :

الف) $x^4-6x^2+8=0$

ب) $16(z-1)^2-8(z-1)-2=0$

حل:

الف) اولین جمله یعنی x^4 ، مربع x^2 در جملهٔ دوم است.

$$x^4-6x^2+8=0$$

x^4 را بر حسب x^2 می‌نویسیم

$$(x^2)^2-6x^2+8=0$$

x^2 را مساوی u قرار می‌دهیم

$$x^2=u \Rightarrow (x^2)^2=u^2$$

سه‌جمله‌ای را بر حسب u می‌نویسیم

$$u^2-6u+8=0$$

سه‌جمله‌ای را به عوامل اول تجزیه می‌کنیم

$$(u-2)(u-4)=0$$

با استفاده از خاصیت فاکتور صفر معادله را حل می‌کنیم

$u-2=0$ یا $u-4=0$

$u=2$ یا $u=4$

به جای u، معادل آن $x^۲$ را قرار می‌دهیم

$$x^۲=۲ \text{ یا } x^۲=۴$$

از خاصیت ریشهٔ زوج استفاده می‌کنیم

$$x=\pm\sqrt{۲}\cong\pm ۱/۴۱ \text{ یا } x=\pm ۲$$

معادله دارای چهار جواب $\pm\sqrt{۲}$ و ± ۲ است.

ب) $۱۶(z-۱)^۲-۸(z-۱)-۲=۰$

u را $z-۱$ انتخاب کنید پس : $u^۲=(z-۱)^۲$ و

$$۱۶u^۲-۸u-۲=۰$$

از حل فرمول معادلهٔ درجهٔ دوم برای به دست‌آوردن u استفاده کنید :

$$u=\frac{۸\pm\sqrt{(-۸)^۲-۴(۱۶)(-۲)}}{۲(۱۶)}=\frac{۸\pm\sqrt{۶۴+۱۲۸}}{۳۲}=\frac{۸\pm\sqrt{۱۹۲}}{۳۲}$$

$$=\frac{۸\pm\sqrt{۶۴}\times\sqrt{۳}}{۳۲}=\frac{۸\pm ۸\sqrt{۳}}{۳۲}=\frac{۸(۱\pm\sqrt{۳})}{۳۲}=\frac{۱\pm\sqrt{۳}}{۴}$$

$$u\cong ۰/۶۸ \text{ یا } u\cong -۰/۱۸$$

برای محاسبهٔ z، مقدار u را در $u=z-۱$ قرار می‌دهیم :

$$z-۱\cong ۰/۶۸\Rightarrow z\cong ۱/۶۸$$

یا

$$z-۱\cong -۰/۱۸\Rightarrow z\cong ۰/۸۲$$

فعالیت ۱ــ۲

الف) معادلهٔ $\frac{۱}{(x-۲)^۲}+\frac{۲}{x-۲}-۳=۰$ را در نظر بگیرید.

۱ــ آیا این معادلهٔ درجهٔ دوم است؟

۲ــ اگر معادله درجهٔ دوم باشد، آیا جایگزینی $u=x-۲$ را انتخاب می‌کنید یا $u=\frac{۱}{x-۲}$؟

۳ــ آیا هر دو جایگزینی جواب یکسانی برای u و x به‌دست می‌دهد؟

ب)

۱ــ معادلهٔ $\frac{۵-۴x}{x-۱} - \frac{۱}{x-۱} + x = ۰$ را در نظر بگیرید ؛ نشان دهید که نتیجهٔ کسرهای ساده شده ؛ معادلهٔ $x^۲ + ۳x - ۴ = ۰$ است که دارای دو جواب است. آن‌گاه نشان دهید که اگر اول جمع و تفریق را انجام دهیم و بعد نتیجه را ساده کنیم، یک معادلهٔ درجهٔ یک با یک جواب به‌دست می‌آوریم. علّت این اختلاف را توضیح دهید.

۲ــ به جز پیدا کردن اشتباهات جبری، چرا امتحان‌کردن جواب معادله‌های با عبارت‌های گویا، اساسی است؟ بحث کنید.

مسایل

۱ــ معادله‌های زیر را حل کنید :

الف) $\frac{۳}{x} = ۲ + \frac{۴}{x^۲}$

ب) $\frac{y}{y+۱} = \frac{y+۱}{۳}$

پ) $\frac{t-۳}{t} = \frac{۲}{t-۳}$

ت) $x+۱ = \frac{۲}{۲x+۳}$

ث) $\frac{x}{x-۳} - \frac{۱}{۲x-۱} = \frac{۵x}{۲x^۲ - ۷x + ۳}$

۲ــ معادلهٔ $\sqrt{x^۲-۵} + ۲\sqrt{x} = ۰$ را حل کنید. سپس در مورد قابل قبول بودن ریشه‌های آن بحث کنید. آیا بدون حل نیز می‌توانستید به این نتیجه برسید؟

۳ــ به جز پیدا کردن اشتباهات جبری، چرا امتحان‌کردن جواب‌های معادلاتی با عبارت‌های رادیکالی اساسی است؟

۴ــ معادلات رادیکالی زیر را حل کنید :

الف) $۵ = ۳\sqrt{x} + \frac{۲}{\sqrt{x}}$

ت) $\sqrt{x} \times \sqrt{x+۳} = ۱$

ب) $\sqrt{x+۱} - \frac{۲}{\sqrt{x+۱}} = ۱$

ث) $۲y + ۱ = \sqrt{۱۱y - ۱}$

پ) $\sqrt{۳x+۴} = \sqrt{x-۲} - ۳$

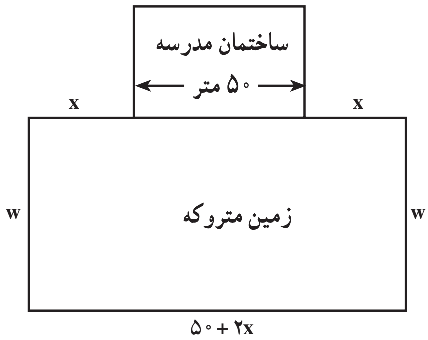
ج) $\sqrt{۲x} \times \sqrt{x-۳} = ۶$

۶ــ۲ــ کاربردهای معادلهٔ درجهٔ دوم

یکی از کاربردهای مهمّ معادلهٔ درجهٔ دوم، مدل‌سازی پدیده‌های طبیعی توسط آن است. مسألهٔ زیر نمونه‌ای از یک پدیدهٔ واقعی است که به وسیلهٔ یک معادلهٔ درجهٔ دوم، مدل‌سازی شده است.

مثال

محاسبهٔ مساحت زمین بازی



پس از تلاش‌های فراوان، مدیر یک دبیرستان موفّق شد قطعه زمین مستطیل شکلی را به مساحت ۲۸۰۰ مترمربع که پشت ساختمان مدرسه به‌صورت مخروبه درآمده بود، خریداری کند و دور آن را نرده بکشد. برای این کار ۱۷۰ متر نرده لازم است. طرز قرارگرفتن زمین مخروبه و ساختمان مدرسه به شکل مقابل است :

ابعاد (طول و عرض) زمین را به دست آورید.

حل: با توجّه به شکل، طول زمین مستطیل شکل که با L نشان می‌دهیم، برابر با $۵۰+۲x$ می‌شود. عرض زمین بازی را w در نظر می‌گیریم. توجه داشته باشید که در قسمت پشت ساختمان نیازی به‌نرده نیست.

پس کل نردهٔ استفاده شده عبارت خواهد بود از :

$$x+w+(۵۰+۲x)+w+x=۱۷۰$$

عبارت را ساده می‌کنیم $\qquad ۲w+۴x+۵۰=۱۷۰$

عبارت را برای w حل می‌کنیم $\qquad ۲w=۱۲۰-۴x$

$$w=۶۰-۲x$$

مساحت مستطیل از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید :

$$A=L.w$$

مقادیر A[۱]، L[۲] و w[۳] را جایگزین می‌کنیم :

۱ــ A اوّل کلمهٔ Area به‌معنی مساحت است.

۲ــ L اوّل کلمهٔ Length به معنی طول است.

۳ــ W اوّل کلمهٔ Width به‌معنی عرض است.

$$۲۸۰۰ = (۵۰ + ۲x)(۶۰ - ۲x)$$

$$۲۸۰۰ = ۳۰۰۰ + ۲۰x - ۴x^۲$$

معادله را به شکل استاندارد می‌نویسیم

$$۴x^۲ - ۲۰x - ۲۰۰ = ۰$$

دو طرف معادله را بر ۴ تقسیم می‌کنیم

$$x^۲ - ۵x - ۵۰ = ۰$$

سه‌جمله‌ای را تجزیه می‌کنیم

$$(x - ۱۰)(x + ۵) = ۰$$

از خاصیت فاکتور صفر استفاده می‌کنیم

$x + ۵ = ۰$ یا $x - ۱۰ = ۰$

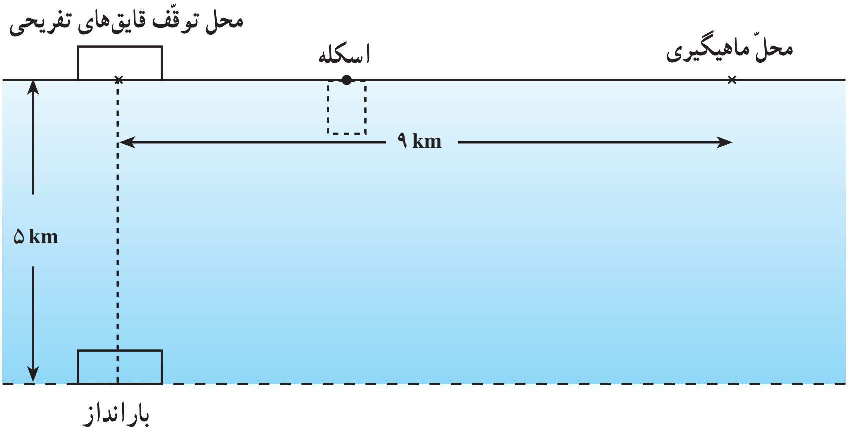
$x = -۵$ یا $x = ۱۰$

چون فاصله نمی‌تواند منفی باشد پس $x = ۱۰$ قابل قبول است درنتیجه :

$L = ۵۰ + (۲ \times ۱۰) = ۷۰$ متر

$W = ۶۰ - (۲ \times ۱۰) = ۴۰$ متر

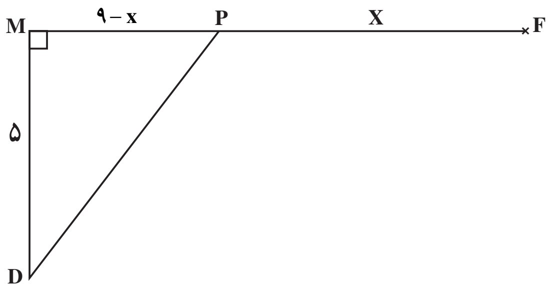
مثال: یک دریاچهٔ تفریحی را با موقعیّت زیر، در نظر بگیرید :



یک ماهیگیر با قایق و با سرعت ۸ کیلومتر در ساعت، از بارانداز به‌سمت اسکله حرکت کرد. سپس پیاده و با سرعت ۶ کیلومتر در ساعت، از اسکله به سمت محلّ ماهیگیری حرکت کرد. اگر فاصلهٔ محلّ توقّف قایق‌های تفریحی تا محلّ ماهیگیری ۹ کیلومتر باشد و زمان رفتن از بارانداز تا محل ماهیگیری، ۱/۵ ساعت طول کشیده باشد، ماهیگیر چند کیلومتر پیاده‌روی کرده است؟

صید با تور دستی (سالیه) و قایق گُردِنه (قایقی از شاخ و برگ نخل). بندر زیارت

حل: در شکل زیر، مکان ها را با حروف مشخّص کرده‌ایم.



D[1]: بارانداز

M[2]: محل توقّف‌گاه قایق‌های تفریحی

P[3]: اسکله

F[4]: محلّ ماهیگیری

فاصله‌ای را که ماهیگیر از اسکله تا محل ماهیگیری (یعنی از P تا F) طی می‌کند، با x نشان می‌دهیم. چون فاصلهٔ از M تا F ۹ کیلومتر است، درنتیجهٔ فاصلهٔ M تا P برابر $۹ - x$ می‌شود. با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ DMP ، فاصلهٔ بارانداز تا اسکله (DP) یعنی مسافتی را که قایق طی کرده است، به‌دست می‌آوریم :

$$(DP)^{۲} = (DM)^{۲} + (MP)^{۲}$$

$$(DP)^{۲} = (۵)^{۲} + (۹ - x)^{۲} = ۲۵ + (۹ - x)^{۲}$$

$$DP = \sqrt{۲۵ + (۹ - x)^{۲}}$$

مدت‌زمانی که ماهیگیر طی می‌کند تا از بارانداز به محل ماهیگیری برسد مشخص است. یعنی :

(۱) ساعت ۱/۵ = مدّت زمان پیاده‌روی + مدّت زمان طی‌شده با قایق

برای یافتن این مدّت زمان‌ها از فرمول سرعت استفاده می‌کنیم :

$$\text{سرعت} = \frac{\text{فاصله}}{\text{زمان}} \Rightarrow \text{زمان} = \frac{\text{فاصله}}{\text{سرعت}}$$

و با استفاده از جدول (۲)، این زمان‌ها را پیدا می‌کنیم.

۱ــ D اوّل کلمهٔ Dock به معنی بارانداز است.

۲ــ M اوّل کلمهٔ Marina به معنی محلّ توقف‌گاه قایق‌های تفریحی است.

۳ــ P اوّل کلمهٔ Pier به معنی اسکله است.

۴ــ F اوّل کلمهٔ Fishing spot به معنی محلّ ماهیگیری است.

جدول ۲

	فاصله به کیلومتر	سرعت ($\frac{\text{کیلومتر}}{\text{ساعت}}$)	زمان (ساعت)
قایق	$\sqrt{25+(9-x)^2}$ (از بارانداز تا اسکله)	۸	$\frac{\sqrt{25+(9-x)^2}}{8}$
پیاده	x (از اسکله تا محل ماهیگیری)	۶	$\frac{x}{6}$

این زمان‌ها را در رابطهٔ (۱) جایگزین می‌کنیم :

$$\frac{\sqrt{25+(9-x)^2}}{8}+\frac{x}{6}=1/5$$

زمان کل سفر (با قایق و پیاده) ۱/۵ ساعت است.

کسرها را با ضرب‌کردن دو طرف در ک، م، م مخرج که ۲۴ است، ساده می‌کنیم.

$$\frac{24}{1}\cdot\frac{\sqrt{25+(9-x)^2}}{8}+\frac{24}{1}\cdot\frac{x}{6}=24\times 1/5$$

ساده می‌کنیم
$$3\sqrt{25+(9-x)^2}+4x=36$$

رادیکال را در یک طرف نگه می‌داریم

$$\left[3\sqrt{25+(9-x)^2}\right]=36-4x$$

دو طرف را به توان ۲ می‌رسانیم.

$$\left[3\sqrt{25+(9-x)^2}\right]^2=(36-4x)^2$$

از خاصیت $(ab)^2=a^2b^2$ برای سمت چپ، استفاده می‌کنیم.

$$9\left[25+(9-x)^2\right]=(36-4x)^2$$

با استفاده از اتّحاد مربع تفاضل دو جمله، دو طرف را به توان می رسانیم.

$$9\left[25+81-18x+x^2\right]=1296-288x+16x^2$$

۹ را در پرانتز ضرب می‌کنیم

$$225+729-162x+9x^2=1296-288x+16x^2$$

معادله را ساده کرده و به شکل استاندارد می‌نویسیم

$$-۷x^۲ + ۱۲۶x - ۳۴۲ = ۰$$

دو طرف را در (-۱) ضرب می‌کنیم

$$۷x^۲ - ۱۲۶x + ۳۴۲ = ۰$$

از فرمول حل معادلهٔ درجهٔ دوم استفاده می‌کنیم.

$$x = \frac{۱۲۶ \pm \sqrt{(۱۲۶)^۲ - ۴ \times ۷ \times ۳۴۲}}{۲ \times ۷}$$

$$= \frac{۱۲۶ \pm \sqrt{۱۵۸۷۶ - ۹۵۷۶}}{۱۴}$$

$$= \frac{۱۲۶ \pm \sqrt{۶۳۰۰}}{۱۴}$$

چون $\sqrt{۶۳۰۰}$ ، مربع کامل نیست، مقدار تقریبی آن را می‌نویسیم،

$$\cong \frac{۱۲۶ \pm ۷۹/۳۷}{۱۴}$$

بنابر این

$$x \cong \frac{۱۲۶ - ۷۹/۳۷}{۱۴} \cong ۳/۳۳ \quad \text{یا} \quad x \cong \frac{۱۲۶ + ۷۹/۳۷}{۱۴} \cong ۱۴/۶۷$$

هر دو جواب x را امتحان می‌کنیم[1] :

اگر $x = ۱۴/۶۷$ آنگاه $۹ - x = ۹ - ۱۴/۶۷ = -۵/۶۷$ که قابل قبول نیست، زیرا فاصله نمی‌تواند منفی باشد.

اگر $x = ۳/۳۳$ ، آنگاه $۹ - x = ۹ - ۳/۳۳ = ۵/۶۷$ که قابل قبول است.

پس ماهیگیر، ۳/۳۳ کیلومتر، پیاده‌روی کرده است.

نسبت و تناسب

از نظر ریاضیدان‌های یونان قدیم، زیباترین مستطیل‌ها، آن‌هایی بودند که اندازهٔ طول و عرض آنها، متناسب با $\frac{L}{W+L} = \frac{W}{L}$ بود. این نسبت، به **نسبت طلایی**[2] معروف است.

۱ــ امتحان کردن جواب های به‌دست‌آمده در مسأله‌های کاربردی و دنیای واقعی، یک ضرورت است.

۲ــ Golden Ratio

مثال

یک زمین ورزش مستطیل شکل. به‌گونه‌ای ساخته شده است که اندازهٔ طول و عرض آن متناسب با نسبت طلایی است. محیط این زمین ۲۰۰۰ متر است. طول و عرض آن چقدر است؟

حل: L را برابر طول مستطیل، W را برابر عرض آن و P[1] را محیط آن که مساوی ۲۰۰۰ متر است در نظر می‌گیریم:

$$۲L+۲W=P$$

$$۲L+۲W=۲۰۰۰$$

$$L+W=۱۰۰۰$$

$$W=۱۰۰۰-L$$

W را با $۱۰۰۰-L$ در فرمول نسبت طلایی جایگزین می‌کنیم:

$$\frac{W}{L}=\frac{L}{W+L}$$

$$\frac{۱۰۰۰-L}{L}=\frac{L}{۱۰۰۰}$$

دو طرف را در ۱۰۰۰L که همان ک.م.م (کوچکترین مضرب مشترک) مخرج‌هاست ضرب می‌کنیم:

$$\frac{۱۰۰۰L}{۱}\times\frac{۱۰۰۰-L}{L}=\frac{L}{۱۰۰۰}\times\frac{۱۰۰۰L}{۱}$$

تساوی را ساده می‌کنیم

$$۱۰۰۰۰۰۰-۱۰۰۰L=L^۲$$

معادله را به شکل استاندارد می‌نویسیم

$$L^۲+۱۰۰۰L-۱۰۰۰۰۰۰=۰$$

با استفاده از فرمول حل معادلهٔ درجهٔ دوم، مقدار L را پیدا می‌کنیم:

$$L=\frac{-۱۰۰۰\pm\sqrt{(۱۰۰۰)^۲-۴(-۱۰۰۰۰۰۰)}}{۲}=\frac{-۱۰۰۰\pm\sqrt{۱۰۰۰۰۰۰+۴۰۰۰۰۰۰}}{۲}$$

$$=\frac{-۱۰۰۰\pm\sqrt{۵\times۱۰^۶}}{۲}=\frac{-۱۰۰۰\pm۱۰۰۰\sqrt{۵}}{۲}=-۵۰۰\pm۵۰۰\sqrt{۵}$$

۱ـ Premeter

چون طول مثبت است پس

$$L = ۵۰۰\sqrt{۵} - ۵۰۰ = ۵۰۰(\sqrt{۵} - ۱)$$

قابل قبول است.

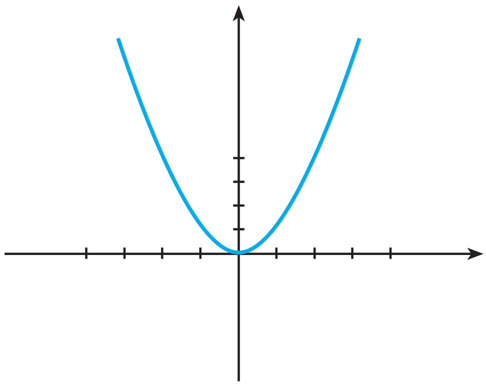
نکتهٔ خواندنی

اگر از یک مستطیل طلایی، یک مربع جدا شود، مستطیل باقی‌مانده نیز، یک مستطیل طلایی است.

۷ــ۲ــ رسم نمودارهای تابع درجهٔ دوم

برای رسم نمودار $y = f(x)$ ، نقاط (x,y) را که مختصات آنها در ضابطهٔ تابع صدق می‌کند، در صفحهٔ مختصات تعیین می‌کنیم. به‌طور مثال، برای رسم ساده ترین معادلهٔ درجهٔ دوم یعنی $y = x^۲$ ، می‌توانیم با جدول مقادیر تابع شروع کنیم. سپس با استفاده از نقاط به‌دست‌آمده و تعیین آن‌ها در صفحه مختصات، نمودار $y = x^۲$ را رسم می‌کنیم.

x	...	-۳	-۲	-۱	۰	۱	۲	۳	...
$x^۲$	...	۹	۴	۱	۰	۱	۴	۹	...



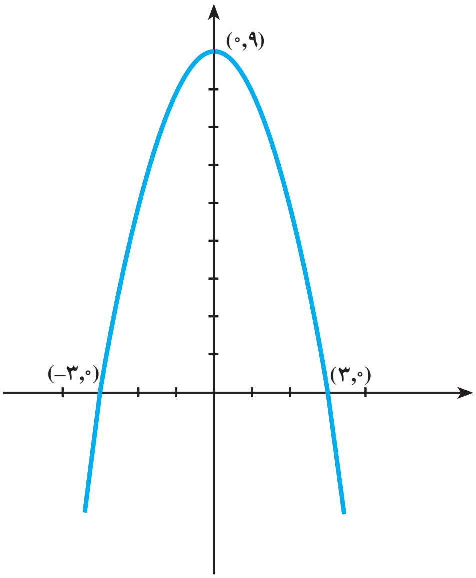
مثال

نمودار $f(x) = ۹ - x^۲$ را رسم کنید.

حل: جدول مقادیر تابع $f(x) = ۹ - x^۲$ را تشکیل می‌دهیم :

x	...	-۴	-۳	-۱	۰	۱	۳	۴	...
$۹ - x^۲$	...	-۷	۰	۸	۹	۸	۰	-۷	...

سپس با تعیین نقاط به‌دست‌آمده در صفحهٔ مختصات و اتّصال آن‌ها به یکدیگر، نمودار زیر به‌دست می‌آید.



نمودار تابع درجهٔ دوم، **سهمی** نامیده می‌شود.

سهمی $y = x^۲$ به سمت بالا باز شده است. در این حالت، سهمی دارای کمترین مقدار است.

$y = ۹ - x^۲$ سهمی **وارونه** شده است. (به سمت پایین باز شده است) و دارای بیشترین مقدار است.

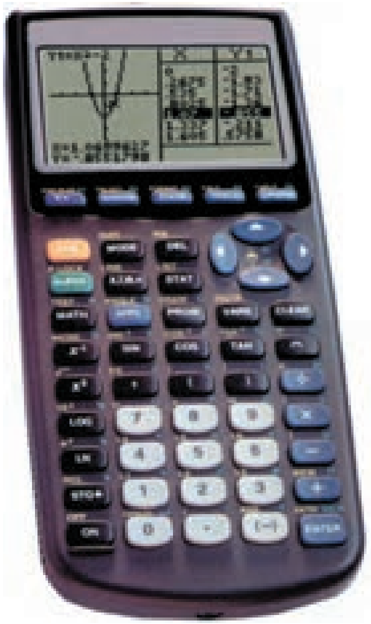
نقطه‌ای که در آن، سهمی دارای **بیشترین** یا **کمترین** مقدار است **رأس** سهمی نامیده می‌شود.

سهمی‌های شکل‌های بالا نسبت به خط عمودی که از رأس می‌گذرد متقارن هستند. این خط **محور تقارن** نامیده می‌شود. اگر نمودارها را روی این محور تا کنیم، دو طرف سهمی بر هم منطبق می‌شوند.

انواع نمودار $y = x^۲$

اغلب نمودارهای تابع درجهٔ دوم را می‌توان با مقایسهٔ آن‌ها با تابع $y = x^۲$ رسم کرد. (به زنگ تفریح ریاضی پایان فصل اول توجه کنید.)

فعالیت ۲ـ۲



اگر ماشین‌حساب گرافیکی در اختیار دارید، این فعالیت را با استفاده از آن انجام دهید. در غیر این صورت با استفاده از جدول مقادیر، نمودارهای خواسته شده را با توجه به نمودار $y=x^۲$ و $y=-x^۲$ رسم کنید.

الف)

۱ــ نمودار تابع‌های $y=۲x^۲$ و $y=-۲x^۲$ را رسم کنید.

۲ــ نمودار تابع‌های $y=۳x^۲$ و $y=-۳x^۲$ را رسم کنید.

۳ــ نمودار تابع‌های $y=۵x^۲$ و $y=-۵x^۲$ را رسم کنید.

۴ــ در حالت کلّی، نمودار تابع $y=ax^۲$ را که a عدد صحیح باشد، رسم کنید.

۵ــ فرق این نمودارها با نمودارهای $y=x^۲$ و $y=-x^۲$ چیست؟

۶ــ اگر ضریب $x^۲$ را یک عدد خیلی بزرگ انتخاب کنیم، چه اتّفاقی می‌افتد؟

۷ــ اگر ضریب $x^۲$ را یک عدد خیلی کوچک انتخاب کنیم، چه اتّفاقی می‌افتد؟

ب)

۱ــ نمودار تابع‌های $y=\frac{۱}{۲}x^۲$ و $y=-\frac{۱}{۲}x^۲$ را رسم کنید.

۲ــ نمودار تابع‌های $y=\frac{۱}{۳}x^۲$ و $y=-\frac{۱}{۳}x^۲$ را رسم کنید.

۳ــ نمودار تابع‌های $y=\frac{۱}{۵}x^۲$ و $y=-\frac{۱}{۵}x^۲$ را رسم کنید.

۴ــ فرق این نمودارها، با نمودارهای $y=x^۲$ و $y=-x^۲$ چیست؟

۵ــ اگر در $y=\frac{۱}{a}x^۲$ (a عدد طبیعی است) a بزرگ و بزرگتر شود، چه اتفاقی می‌افتد؟

۶ــ اگر در $y=-\frac{1}{a}x^2$ (a عدد طبیعی است)، a بزرگ و بزرگتر شود چه اتفاقی می‌افتد؟

با توجّه به نتایجی که به دست آورده‌اید، یک قانون کلی برای رسم نمودارهای $y=ax^2$ و $y=\frac{1}{a}x^2$ (a عدد صحیح و غیر صفر) پیدا کنید.

حال با توجه به قانون به‌دست آمده و بدون تشکیل جدول مقادیر، سهمی‌های ax^2 و $\frac{1}{a}x^2$ را در مقایسه با x^2 رسم کنید.

با توجّه به نتایج به‌دست‌آمده، جاهای خالی زیر را پُر کنید :

◆ اگر $|a|$ افزایش یابد، سهمی … و … می‌شود.

◆ اگر $\left|\frac{1}{a}\right|$ کاهش یابد، سهمی … و … می‌شود.

می‌بینیم که مقدار a، باعث **باز** و **بسته‌شدن سهمی** می‌شود و علامت a، **جهت** سهمی را مشخص می‌کند (رو به بالا یا رو به پایین بودن سهمی).

توجّه: رأس تمام سهمی‌های $y=ax^2$ ، مبدأ مختصات است.

فعالیت ۳ــ۲

الف)

۱ــ نمودار $f(x)=x^2$ را رسم کنید.

۲ــ نمودار $f(x)=x^2+1$ را رسم کنید.

۳ــ نمودار $f(x)=x^2-1$ را رسم کنید.

۴ــ نمودار $f(x)=x^2+5$ را رسم کنید.

۵ــ نمودار $f(x)=x^2-4$ را رسم کنید.

۶ــ نمودار $f(x)=x^2-8$ را رسم کنید.

ب)

۱ــ این نمودارها با نمودار $f(x)=x^2$ چه فرقی دارند؟

۲ــ نمودار $f(x)=x^2+a$ چه فرقی با نمودار $f(x)=x^2$ دارد؟ (در حالتی که

$a>0$ یا $a<0$ باشد).

۳ــ یک قاعدهٔ کلی برای رسم نمودارهای $f(x)=x^2+a$ در مقایسه با $f(x)=x^2$ به‌دست آورید. (بدون آن‌که به تشکیل جدول مقادیر نیاز داشته باشیم).

فعالیت ۴ــ۲

الف)

۱ــ نمودار $f(x)=x^2$ را رسم کنید.

۲ــ نمودار $f(x)=(x+2)^2$ را رسم کنید و فرق آن را با نمودار $f(x)=x^2$ بیان نمایید.

۳ــ نمودار $f(x)=(x-2)^2$ را رسم کنید و فرق آن را با نمودار $f(x)=x^2$ بیان نمایید.

۴ــ نمودار $f(x)=(x+6)^2$ را رسم کنید و فرق آن را با نمودار $f(x)=x^2$ بیان کنید.

۵ــ نمودار $f(x)=(x-6)^2$ را رسم کنید و فرق آن‌را با نمودار $f(x)=x^2$ بیان نمایید.

ب)

۱ــ نمودار $f(x)=(x+a)^2$ $(a<0 \ , \ a>0)$ چه فرقی با نمودار $f(x)=x^2$ دارد؟

۲ــ یک قاعدهٔ کلی برای رسم نمودارهای $f(x)=(x+a)^2$ در مقایسه با نمودار $f(x)=x^2$ پیدا کنید. $(a<0 \ , \ a>0)$

نتیجه

رأس نمودار تابع‌های $f(x)=x^2+a$ در مقایسه با $f(x)=x^2$ به‌اندازهٔ a واحد روی محور yها انتقال می‌یابد (اگر $a>0$ باشد به سمت بالا و اگر $a<0$ باشد به‌اندازهٔ $|a|$ واحد به‌سمت پایین می‌رود) رأس سهمی نیز به اندازهٔ a واحد بالا یا پایین مبدأ مختصات قرار می‌گیرد. محور تقارن سهمی همان محور yها است که نسبت به محور تقارن $f(x)=x^2$ ثابت می‌ماند.

رأس نمودار $f(x)=(x+a)^2$ به اندازهٔ a واحد از مبدأ مختصات روی محور xها انتقال

می‌یابد. (اگر $a>0$ ، سهمی به‌اندازهٔ a واحد به سمت چپ منتقل می‌شود و اگر $a<0$ ؛ سهمی به‌اندازهٔ $|a|$ واحد به سمت راست منتقل می شود.)

محور تقارن نمودار $f(x)=(x+a)^2$ نیز نسبت به نمودار $f(x)=x^2$ به اندازهٔ $|a|$ واحد به سمت چپ یا راست محور xها انتقال می‌یابد.

نتیجهٔ فعالیت‌های ۳ــ۲ و ۴ــ۲ را می‌توان در جدول زیر، خلاصه کرد.

جدول ۳

محور تقارن سهمی	رأس سهمی	سهمی
$x=0$	$(0,k)$	$f(x)=x^2+k$
$x=-a$	$(-a,0)$	$g(x)=(x+a)^2$

مثال

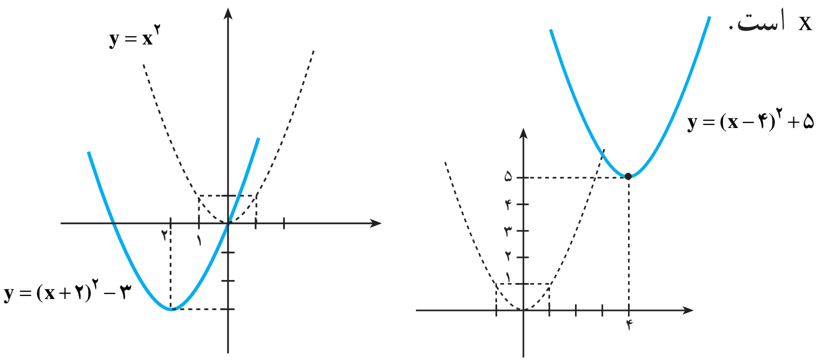
با استفاده از نمودار $y=x^2$ به عنوان راهنما، نمودار هریک از تابع‌های زیر را رسم کرده و رأس سهمی و محور تقارن هریک را تعیین کنید.

ب) $g(x)=(x-4)^2+5$ الف) $f(x)=(x+2)^2-3$

حل :

الف) نمودار $f(x)=(x+2)^2-3$ همان نمودار $y=x^2$ است که رأس آن ۲ واحد به‌سمت چپ و ۳ واحد به سمت پایین انتقال یافته است. مختصات رأس این نمودار $(-2,-3)$ است و محور تقارن آن خط $x=-2$ می‌باشد.

ب) نمودار $g(x)=(x-4)^2+5$ همان نمودار $y=x^2$ است که رأس آن ۴ واحد به سمت راست و ۵ واحد به سمت بالا انتقال یافته است. مختصات رأس این نمودار $(4,5)$ و محور تقارن، خط $x=4$ است.



نمودار تابع $f(x)=a(x-h)^۲+k$ همان نمودار تابع $y=ax^۲$ است که رأس آن به نقطهٔ (h,k) انتقال یافته است.

۱ــ۷ــ۲ــ رأس سهمی و نقاط تلاقی سهمی با محورهای مختصات

در رسم نمودار یک تابع درجه دوم، تعیین رأس سهمی مهم است. برای تعیین مختصات رأس، می‌توانیم از روش مربع کامل کردن برای نوشتن تابع به شکل $f(x)=a(x-h)^۲+k$ استفاده کنیم.

تعیین رأس سهمی با مربع کامل‌کردن

مثال

رأس نمودار $f(x)=x^۲-۸x+۱۰$ را تعیین کنید.

حل: با استفاده از روش مربع کامل‌کردن، تابع را به شکل $f(x)=(x-h)^۲+k$ می‌نویسیم.

$$f(x)=x^۲-۸x+۱۰$$

کم‌کردن ۱۰ از دو طرف $\qquad f(x)-۱۰=x^۲-۸x$

اضافه‌کردن مجذور نصف ضریب x یعنی $(-\frac{۸}{۲})^۲=۱۶$ به دو طرف

$$f(x)-۱۰+۱۶=x^۲-۸x+۱۶$$

طرف دوم مربع کامل است. آن را به‌صورت توانی می‌نویسیم $\qquad f(x)+۶=(x-۴)^۲$

۶ـ را به دو طرف اضافه می‌کنیم: $\qquad f(x)=(x-۴)^۲-۶$

در این صورت در تابع درجهٔ دوم $f(x)$، $h=۴$ و $k=-۶$ پس مختصات رأس سهمی برابر $(۴,-۶)$ است.

با این ترتیب برای به‌دست‌آوردن رأس سهمی، هر بار باید این فرایند را طی کرد. اگر همین روش را برای شکل عمومی توابع درجهٔ دوم یعنی: $f(x)=ax^۲+bx+c$ به‌کار ببریم، آن‌گاه می‌توانیم فرمولی برای پیدا کردن مختصات رأس $V(h,k)$ [۱] پیدا کنیم.

۱ــV اوّل کلمهٔ Vertex به معنی رأس است.

برای پیداکردن مختصات رأس سهمی در حالت کلّی، به ترتیب زیر عمل می کنیم :

الف) شکل عمومی تابع های درجهٔ دوم را می‌نویسیم : $f(x) = ax^2 + bx + c$

ب) c را از دو طرف کم می کنیم : $f(x) - c = ax^2 + bx$

پ) دو طرف را بر a تقسیم می کنیم : $\frac{f(x)-c}{a} = x^2 + \frac{b}{a}x$

ت) با استفاده از روش مربع کامل کردن، سمت راست را به‌صورت مربع یک دوجمله‌ای می‌نویسیم : $\frac{f(x)}{a} - \frac{c}{a} = x^2 + \frac{b}{a}x$

مجذور نصف ضریب x یعنی ؛ $(\frac{1}{2} \times \frac{b}{a})^2 = \frac{b^2}{4a^2}$ را به دو طرف معادله اضافه می کنیم.

$$\frac{f(x)}{a} - \frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}$$

کسر را ساده می کنیم : $\frac{f(x)}{a} + \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = (x + \frac{b}{2a})^2$

$\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ را از دو طرف کم می کنیم :

$$\frac{f(x)}{a} = (x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

دو طرف را در a ضرب می کنیم تا $f(x)$ به‌دست آید :

$$f(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

$$f(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

که در آن $h = \frac{-b}{2a}$ و $k = \frac{4ac - b^2}{4a}$ است.

پس مختصات رأس برابر است با :

$$V = (-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a})$$

فرمول مختصات رأس سهمی

مختصات رأس سهمی $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ برابر است با :

$$V=(-\frac{b}{۲a}\ ,\ \frac{۴ac-b^{۲}}{۴a})$$

توجّه: برای تعیین مختصات رأس سهمی، بعد از پیدا کردن مختص اول از رابطهٔ $-\frac{b}{۲a}$، می‌توانید مختص دوم را از طریق $f(-\frac{b}{۲a})$ تعیین کنید.

محاسبهٔ رأس به‌صورت جبری

مثال

رأس نمودار $f(x)=۲x^{۲}+۱۲x+۱۷$ را تعیین کنید.

حل: مختص اوّل رأس برابر است با :

$$x=-\frac{b}{۲a}=\frac{-۱۲}{۲(۲)}=-۳$$

و برای تعیین مختص دوم :

$$f(-۳)=۲(-۳)^{۲}+۱۲(-۳)+۱۷=-۱$$

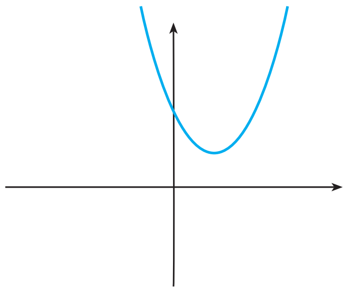
پس مختصات رأس برابر است با $V(-۳,-۱)$.

در حالت کلی، محل تقاطع نمودار با محور yها، نقطه‌ای است که مختص اوّل آن برابر صفر باشد. یعنی، برای یک تابع درجهٔ دوم $f(x)=ax^{۲}+bx+c$، $f(۰)=c$ محل تقاطع نمودار تابع با محور yها است. پس یک سهمی همیشه محور yها را در نقطهٔ $(۰,c)$ قطع می‌کند.

برای تعیین محلّ تقاطع نمودار با محور xها معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^{۲}+bx+c=۰$ را حل می‌کنیم. می‌دانیم که این معادله، می‌تواند دارای یک یا دو جواب حقیقی باشد یا اصلاً، جواب حقیقی نداشته باشد. درنتیجه، ممکن است نمودار یک تابع درجه دو، محور xها را در یک یا دو نقطه قطع کند یا اصلاً محور xها را قطع نکند.

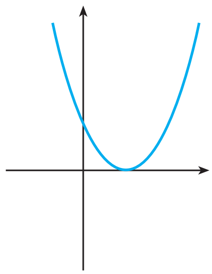
نتایج به‌دست‌آمده را می‌توان در نمودارهای صفحهٔ بعد خلاصه کرد :

$a>۰$



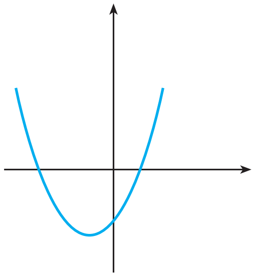
$b^{۲}-۴ac<۰$

سهمی محور xها را قطع نمی‌کند



$b^{۲}-۴ac=۰$

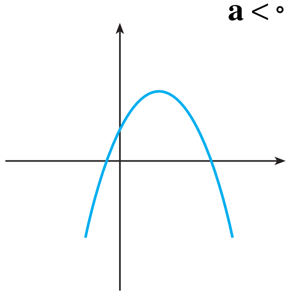
سهمی محور xها را در یک نقطه قطع می‌کند (بر آن مماس است)



$b^{۲}-۴ac>۰$

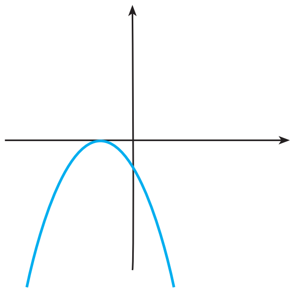
سهمی محور xها را در دو نقطه قطع می‌کند

$a<۰$



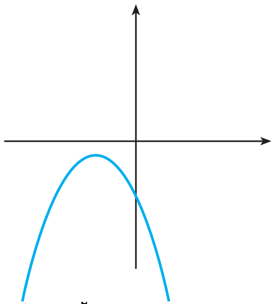
$b^{۲}-۴ac>۰$

سهمی محور xها را در دو نقطه قطع می‌کند



$b^{۲}-۴ac=۰$

سهمی محور xها را در یک نقطه قطع می‌کند (بر آن مماس است)



$b^{۲}-۴ac<۰$

سهمی محور xها را قطع نمی‌کند

تذکّر: بهتر است برای رسم نمودار سهمی ابتدا مختصات رأس و محل‌های تقاطع با محور xها و محور yها را تعیین کنید.

روش رسم تابع درجهٔ دوم $f(x)=ax^{۲}+bx+c$

۱ــ محل تقاطع با محور yها $(۰,c)$ را تعیین کنید.

۲ــ محل تقاطع با محور xها را از طریق حل $ax^{۲}+bx+c=۰$ تعیین کنید.

۳ــ با استفاده از روش مربع کامل کردن یا با استفاده از فرمول رأس، مختصات رأس را پیدا کنید.

۴ــ نقاط به‌دست‌آمده در سه مرحلهٔ بالا را روی صفحهٔ مختصات مشخص کنید.

۵ــ در صورت لزوم، دو نقطهٔ کمکی در دو طرف رأس سهمی مشخّص کرده و آن‌ها را در

صفحهٔ مختصات معین کنید. نقاط به‌دست‌آمده را به هم متصل کرده و ادامه دهید.

۶ــ اگر $a > ۰$ سهمی رو به بالا باز می‌شود و اگر $a < ۰$، سهمی به سمت پایین باز می‌شود.

مثال

با تعیین رأس و نقاط تلاقی سهمی با محورها، نمودار تابع‌های زیر را رسم کنید.

الف) $f(x) = ۸ - ۲x - x^۲$

ب) $h(x) = x^۲ - ۴x + ۱$

پ) $g(x) = ۴x^۲ - ۱۲x + ۹$

ت) $s(x) = -۲x^۲ + ۱۲x - ۱۹$

حل

الف) در تابع $f(x) = ۸ - ۲x - x^۲$، چون $a < ۰ \ (a = -۱)$، پس سهمی به سمت پایین باز می‌شود. محل تقاطع با محور yها $(۰,۸)$ است. برای تعیین نقاط تقاطع با محور xها، معادله را نسبت به x حل می‌کنیم:

$$۸ - ۲x - x^۲ = ۰ \Rightarrow x^۲ + ۲x - ۸ = ۰$$

$$(x + ۴)(x - ۲) = ۰ \Rightarrow x + ۴ = ۰ \ \text{یا} \ x - ۲ = ۰$$

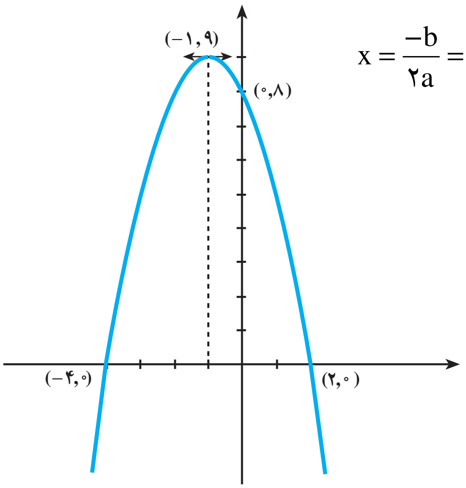
$$\Rightarrow x = -۴ \ \text{یا} \ x = ۲$$

پس نقاط تلاقی با محور xها $(۲,۰)$ و $(-۴,۰)$ هستند.

حال مختصات رأس را حساب می‌کنیم:

$$x = \frac{-b}{۲a} = \frac{-۲}{۲(-۱)} = -۱$$

چون $f(-۱) = ۹$ پس مختصات رأس برابر است با $(-۱,۹)$. با قراردادن نقاط تلاقی و رأس روی صفحهٔ مختصات و با اطلاعات قبلی (از جمله اینکه سهمی رو به پایین باز می‌شود) نمودار را رسم می‌کنیم:



ب) چون در $h(x)=x^{۲}-۴x+۱$ ، a مثبت است، پس سهمی رو به بالا است. محل تلاقی با محور yها $(۰,۱)$ است. برای تعیین نقاط تلاقی با محور xها، معادله را نسبت به x، حل می‌کنیم :

$$x^{۲}-۴x+۱=۰$$

$$x=\frac{۴\pm\sqrt{(-۴)^{۲}-۴(۱)(۱)}}{۲(۱)}=\frac{۴\pm\sqrt{۱۶-۴}}{۲}=\frac{۴\pm\sqrt{۱۲}}{۲}=\frac{۴\pm۲\sqrt{۳}}{۲}$$

$$=۲\pm\sqrt{۳}$$

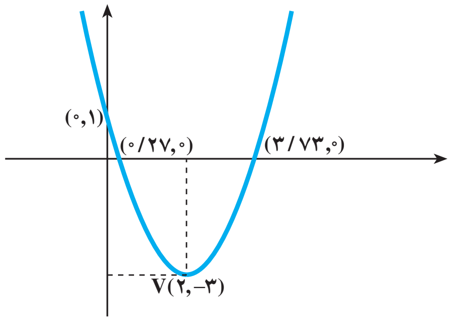
$x\cong۳/۷۳$ یا $x\cong۰/۲۷$

نقاط تلاقی تقریبی عبارتند از : $(۳/۷۳,۰)$ و $(۰/۲۷,۰)$. حال مختصات رأس را به‌دست می‌آوریم :

$$x=-\frac{b}{۲a}=-\frac{-۴}{۲(۱)}=۲$$

$$h(۲)=-۳$$

پس مختصات رأس برابر است با $V(۲,-۳)$ ، با این اطلاعات سهمی را رسم می‌کنیم.



پ)

$$g(x)=۴x^{۲}-۱۲x+۹$$

چون a مثبت است $(a=۴)$ ، پس سهمی رو به بالاست. محل تلاقی با محور yها $(۰,۹)$ است. برای تعیین محل تلاقی با محور xها، معادله را حل می‌کنیم :

$$۴x^{۲}-۱۲x+۹=۰$$

$$(۲x-۳)^{۲}=۰$$

$$۲x-۳=۰$$

$$x=\frac{۳}{۲}$$

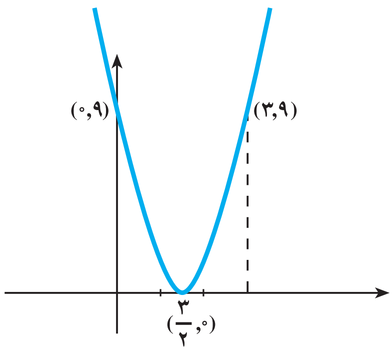
پس محل تلاقی با محور xها $(\frac{۳}{۲},۰)$ است. حال مختصات رأس را پیدا می‌کنیم :

$$x = \frac{-b}{۲a} = -\frac{-۱۲}{۲(۴)} = \frac{۳}{۲}$$

چون $g(\frac{۳}{۲}) = ۰$ است، پس مختصات رأس $(\frac{۳}{۲},۰)$ می‌باشد (توجه کنید که رأس و نقطهٔ تلاقی با محور xها، یک نقطهٔ مشترک است.)

چون تنها دو نقطه برای مشخص‌کردن در صفحهٔ مختصات پیدا کرده‌ایم، یک نقطهٔ دیگر نیز پیدا می‌کنیم تا نمودار بهتر رسم شود.

برای مثال، اگر $x = ۳$، آن‌گاه، $g(۳) = ۹$ پس نقطهٔ $(۳,۹)$ نیز روی نمودار تابع $g(x)$ قرار دارد.



ت) $S(x) = -۲x^۲ + ۱۲x - ۱۹$

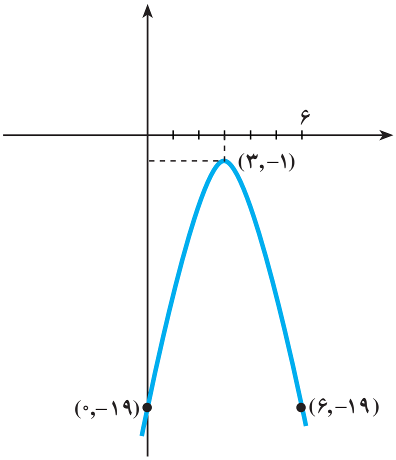
چون a منفی است $(a = -۲)$، پس سهمی رو به پایین باز می‌شود محل تلاقی با محور yها $(۰,-۱۹)$ است. تعداد نقاط تلاقی با محور xها را با محاسبهٔ مبیّن معادله پیدا می‌کنیم :

$$\Delta = b^۲ - ۴ac = (۱۲)^۲ - ۴(-۲)(-۱۹) = ۱۴۴ - ۱۵۲ = -۸$$

چون مبیّن منفی است. پس نمودار با محور xها نقطهٔ تلاقی ندارد. حالا مختصات رأس را حساب می‌کنیم :

$$x = \frac{-b}{۲a} = \frac{-۱۲}{۲(-۲)} = ۳$$

چون $S(۳) = -۱$ پس مختصات رأس سهمی برابر است با $(۳,-۱)$ از آنجا که تنها مختصات دو نقطه را داریم. بهتر است نقطهٔ دیگری پیدا کنیم. برای مثال، اگر $x = ۶$، آن‌گاه $S(۶) = -۱۹$. پس نقطهٔ $(۶,-۱۹)$ نیز روی نمودار تابع $S(x)$ قرار دارد.



مسایل

۱ــ وضعیّت نمودار تابع های زیر را در مقایسه با نمودار $f(x)=x^{۲}$ در صفحهٔ مختصات، توضیح دهید. (توصیه می‌شود که نمودار $y=f(x)=x^{۲}$ را با یک رنگ و نمودار جدید را با رنگ دیگر رسم کنید).

الف) $h(x)=x^{۲}-۴$

ب) $g(x)=x-۴$

پ) $h(x)=-۲x^{۲}$

ت) $h(x)=(x-۳)^{۲}$

ث) $g(x)=-\frac{۱}{۲}x-۲$

ج) $h(x)=-\frac{۱}{۲}(x+۱)^{۲}-۲$

در تمرین‌های این قسمت، موارد زیر را برای هر تابع درجهٔ دوم، به‌دست آورید :

الف) نقاط تلاقی با محور xها و yها

ب) رأس و معادلهٔ محور تقارن

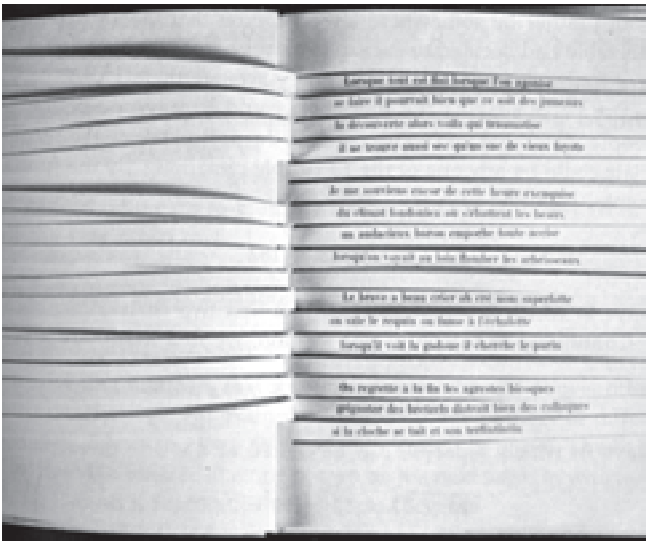
پ) رسم نمودار هر تابع

فصل سوم

ترکیبیات

کتاب شعری[1] شامل صدهزار میلیارد شعر است. هر شعر شامل ۱۴ بیت است و همگی فقط دریک روی صفحهٔ کاغذ نوشته شده‌اند (نه دو طرف آن).

هر صفحهٔ کاغذ به صورت نوارهای افقی بریده شده به طوری که روی هر نوار یک بیت شعر نوشته شده است. هر نوار به طور منفرد قابل برگرداندن است به گونه‌ای که ابیات شعرها به راه‌های مختلف قابل انتخاب باشند. صرف‌نظر از نوع انتخاب ابیات، هنوز اشعار به دست آمده از نظر اصول شعری، وزن و قافیه، درست و با معنی هستند. فکر می‌کنید کتاب باید شامل چند صفحه باشد تا بتواند صدهزار میلیارد شعر تولید کند؟



۱ــ کتاب شعر موسوم به Cent milliards de Poemes نوشتهٔ raymond queneau می‌باشد.

فصل سوم، ابزار مناسبی برای حل این مسأله و مسأله‌های جالب دیگری که همگی با **شمارش** سروکار دارند، به شما می‌دهد.

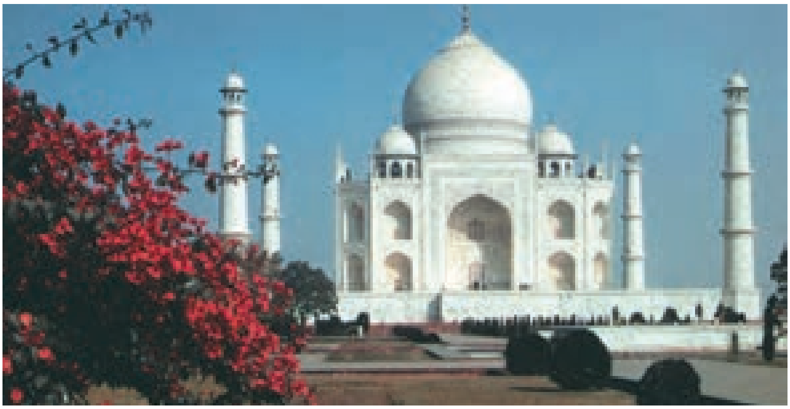
۱ــ۳ــ اصل اساسی شمارش

فعالیت ۱ــ۳

الف) به چند راه ممکن، می‌توانید هر یک از سه سؤال زیر را با یکی از جواب‌های داده شده **جور**[۱] کنید؟ (آزمون جورکردنی)

سؤال	جواب
۱ــ ایالت آگرا، در کدام کشور قرار دارد؟	بنگلادش
۲ــ شهر داکا در کدام کشور واقع است؟	هندوستان
۳ــ شهر لاهور در کدام کشور است؟	پاکستان

توجه: برای هر سؤال، تنها یک جواب درست وجود دارد. اگر آن جواب را برای سؤالی انتخاب کردید، دیگر نمی‌توانید آن را برای سؤال دیگری انتخاب کنید. درواقع، هر سؤال را باید با یک جواب، **جور** کنید.

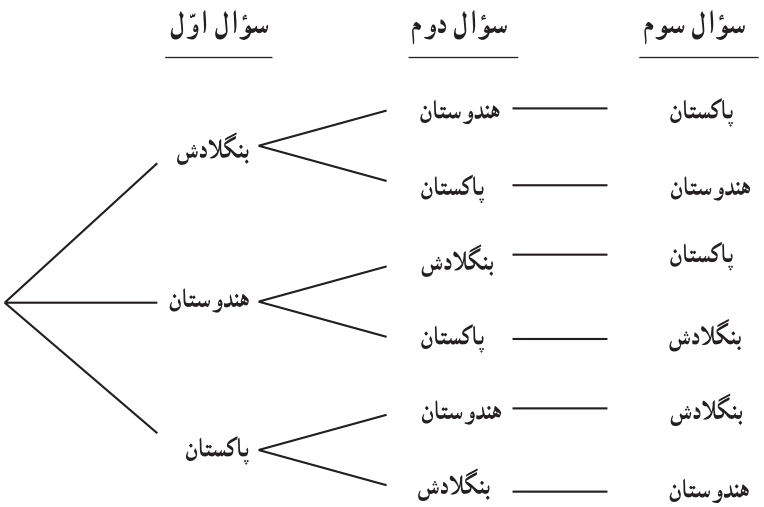


تاج محل ــ هندوستان

۱ــ Matching test

ب) در مجموع، چند راه ممکن برای پاسخگویی به سه سؤال بالا وجود دارد؟ چرا؟

برای پیدا کردن تعداد راه‌های ممکن، می‌توانید از نمودار زیر استفاده کنید :



اگر دقت کنید، این نمودار شبیه درختی با یک ریشه و شاخه‌های متعدّد است. به همین علّت، به **نمودار درختی** معروف است.

پ) این درخت، چند شاخه دارد؟

ت) دو شاخهٔ این درخت ؛ یعنی دو راه ممکن برای پاسخگویی به سه سؤال بالا، در جدول زیر، مشخّص شده است. سایر شاخه‌ها را مشخّص کنید و جدول را تکمیل نمایید.

جدول ۱

سؤال سوم	سؤال دوم	سؤال اول	راه‌های ممکن
پاکستان	هندوستان	بنگلادش	۱
هندوستان	پاکستان	بنگلادش	۲
	بنگلادش		۳
		هندوستان	۴
			۵
هندوستان			۶

ث) جواب قسمت (ب) و قسمت (ت) را با هم مقایسه کنید و نتیجه را بنویسید.

ج) یک آزمون **جورکردنی** با پنج سؤال تهیّه کنید. به چند راه ممکن می‌توانید پاسخ‌ها را با سؤال‌ها جور کنید؟

چ) تعداد راه‌های ممکن پاسخگویی به یک آزمون **جورکردنی** با ۱۰ سؤال را حدس بزنید (بدون رسم نمودار درختی). بگویید چگونه این حدس را زدید؟

ح) آیا می‌توانید از پاسخ خود به قسمت (چ)، یک نتیجهٔ کلّی بگیرید؟ توضیح دهید.

اصل اساسی شمارش: برای پیدا کردن تعداد راه‌های ممکن در یک تصمیم‌گیری چند مرحله‌ای، تعداد انتخاب‌های ممکن در هر مرحله از تصمیم‌گیری، درهم ضرب می‌شوند.

یا به بیانی دیگر؛

اصل اساسی شمارش: اگر یک تصمیم‌گیری دارای k مرحله باشد ($1, 2, 3, \ldots, k$) و تعداد انتخاب‌های ممکن در مرحلهٔ اوّل n_1، در مرحلهٔ دوم n_2، ... و در مرحلهٔ kام، n_k باشد، تعداد انتخاب‌های ممکن در این تصمیم‌گیری، حاصلضرب تعداد انتخاب‌ها در هر مرحله یعنی $n_1 n_2 \ldots n_k$ است.

تمرین

جدول زیر، تعداد راه‌های ممکن برای پاسخگویی به آزمون **جورکردنی** با تعداد سؤال‌های متفاوت را نشان می‌دهد.

این جدول را کامل کنید.

جدول ۲

تعداد سؤال‌های یک آزمون جورکردنی	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
تعداد راه‌های ممکن پاسخگویی به سؤال‌ها	۱	۲	۶				

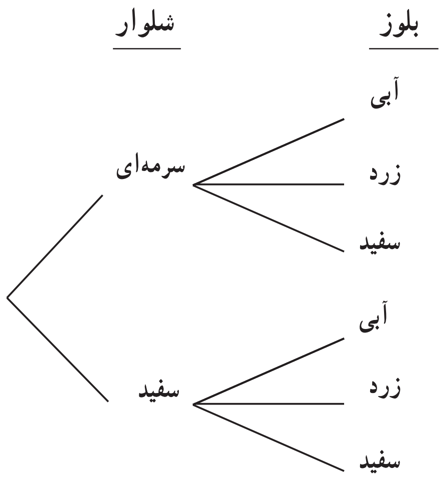
مثال

امیرحسین، دو شلوار به رنگ‌های سُرمه‌ای و سفید و سه بلوز به رنگ‌های آبی، زرد و سفید دارد. نمودار درختی انتخاب‌های ممکن امیرحسین را برای استفاده از لباس‌های خود، رسم کنید و به سؤال‌های زیر پاسخ دهید.

الف) امیرحسین، به چند شکل متفاوت می‌تواند از لباس‌های خود استفاده کند؟

ب) با استفاده از اصل اساسی شمارش، چه عددهایی باید درهم ضرب شوند تا جواب قسمت (الف) به دست آید؟

حل: اوّل، نمودار درختی انتخاب‌های ممکن امیرحسین را برای استفاده از لباس‌های خود، رسم می‌کنیم.



الف) شاخه‌های نمودار درختی بالا، انتخاب‌های امیرحسین را نشان می‌دهند. آنها را به ترتیب می‌نویسیم به‌طوری که در هر پرانتز، اوّل شلوار و بعد، بلوز نوشته شود :

(بلوز ، شلوار)

(آبی ، سرمه‌ای)

(زرد ، سرمه‌ای)

(سفید ، سرمه‌ای)

(آبی ، سفید)

(زرد ، سفید)

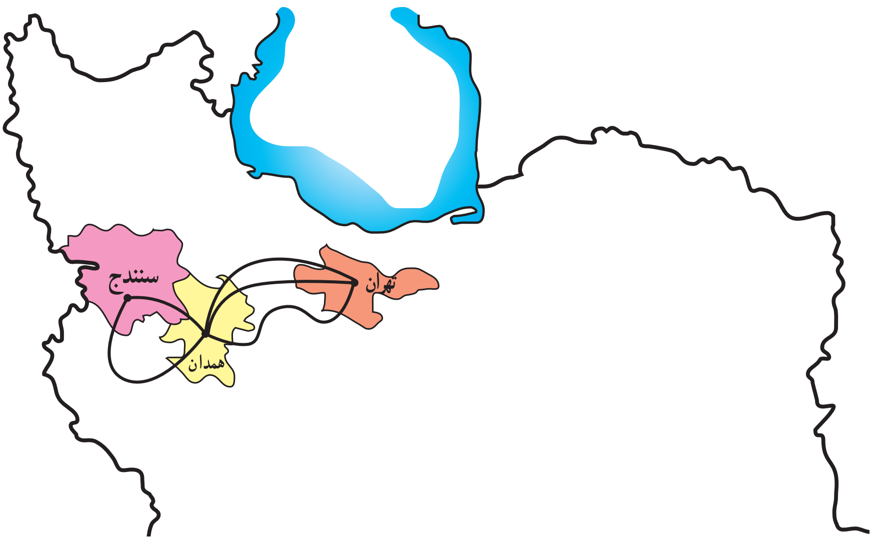
(سفید ، سفید)

پس امیرحسین، به ۶ شکل متفاوت می‌تواند از لباس‌های خود استفاده کند.

ب) با استفاده از اصل اساسی شمارش، چون تعداد انتخاب‌های ممکن برای شلوارها ۲ و تعداد انتخاب‌های ممکن برای بلوزها ۳ است، پس تعداد راه‌های ممکن در این تصمیم‌گیری، $۶ = ۳ \times ۲$ است.

تمرین

نمودار زیر، راه‌های مختلف مسافرت زمینی از تهران به همدان و سپس سنندج را نشان می‌دهد:



با استفاده از اصل اساسی شمارش، تعداد راه‌های ممکن مسافرت زمینی از تهران به سنندج را نشان داده و بنویسید.

تمرین

از بین ۴ نوع مختلف سوپ، ۳ نوع ساندویچ، ۵ نوع نوشابه و ۴ نوع بستنی، چند ناهار مختلف که شامل یک نوع سوپ، یک نوع ساندویچ، یک نوع نوشابه و یک نوع بستنی باشد، می‌توان انتخاب کرد؟

فعالیت ۲ــ۳

الف) به سؤال‌های زیر که هر یک دارای دو گزینهٔ «درست ــ نادرست» هستند پاسخ دهید.

۱ــ درجهٔ حرارت، تابعی از زمان است.

☐ درست ☐ نادرست

۲ــ تابع نظیرِ معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^{2}+bx+c=0$ تابع $f(x)=ax^{2}+bx+c$ است.

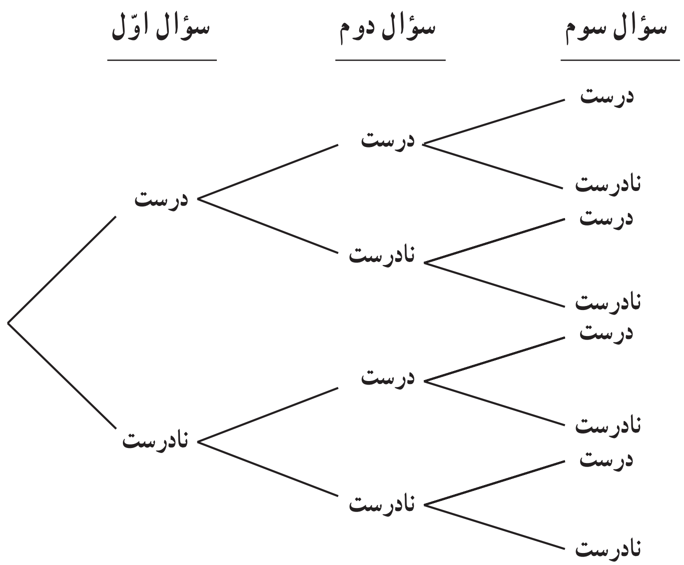
☐ درست ☐ نادرست

۳ــ اگر مقدار مبیّن معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^{2}+bx+c=0$ صفر شود، معادله دارای دو جواب متمایز خواهد بود.

☐ درست ☐ نادرست

ب) برای هر یک از سؤال‌ها، چند جواب ممکن وجود دارد؟

نمودار درختی زیر، راه‌های ممکن پاسخگویی به این سه سؤال را نشان می‌دهد :



پ) دو شاخهٔ این درخت ؛ یعنی دو راه ممکن برای پاسخ‌گویی به سه سؤال بالا، در جدول ۳ مشخّص شده است. سایر شاخه‌ها را مشخّص کنید و جدول را تکمیل نمایید.

جدول ۳

جواب سؤال سوم	جواب سؤال دوم	جواب سؤال اول	راه‌های ممکن
درست	درست	درست	۱
نادرست	درست	درست	۲
درست		درست	۳
	نادرست		۴
			۵
		نادرست	۶
	نادرست		۷
		نادرست	۸

چون برای پاسخ دادن به هر سؤال، دو گزینه وجود دارد، پس طبق اصل اساسی شمارش، تعداد راه‌های ممکن برای پاسخگویی به سؤال‌های این آزمون، ضرب تعداد انتخاب‌های ممکن در هر مرحله از تصمیم‌گیری، یعنی $۸ = ۲ \times ۲ \times ۲$ است.

ت) اگر بخواهید به یک آزمون «درست ــ نادرست» با ۵ سؤال پاسخ دهید، به چند راه ممکن می‌توانید پاسخ‌ها را انتخاب کنید؟

ث) اگر بخواهید به یک آزمون «درست ــ نادرست» با ۱۰ سؤال پاسخ دهید، به چند راه ممکن می‌توانید پاسخ‌ها را انتخاب کنید؟

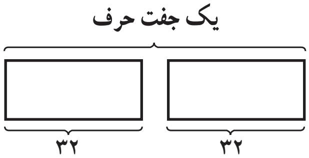
ج) فرق بین نمودار درختی این فعالیت، با نمودار درختی فعالیت ۱ــ۳ چیست؟ توضیح دهید.

چ) تفاوت بین **آزمون جورکردنی** با آزمون «**درست ــ نادرست**» چیست؟ تفاوت بین انتخاب راه‌های ممکن در این دو آزمون کدام است؟

مثال

با استفاده از **اصل اساسی شمارش**، نشان دهید چند جفت از حروف الفبای فارسی می‌توانیم داشته باشیم؟

حل: این تصمیم‌گیری، دارای دو مرحله است. مرحلهٔ اوّل، انتخاب یک حرف از ۳۲ حرف الفبای فارسی و مرحلهٔ دوم نیز، انتخاب یک حرف از ۳۲ حرف الفبای فارسی است. پس، در هر مرحله، ۳۲ انتخاب ممکن وجود دارد.



بنابراین، طبق اصل اساسی شمارش، تعداد جفت حروف الفبای فارسی، برابر

$$۳۲ \times ۳۲ = (۳۲^{۲}) = ۱۰۲۴$$

است.

تمرین

چند کلمهٔ سه حرفی با حروف الفبای فارسی، می‌توان درست کرد؟ (با معنی بودن کلمه‌ها مهّم نیست.)

مثال

در یک محله که پیش شمارهٔ سه رقمی آن مشخّص است (یعنی تغییر نمی‌کند)، چند راه ممکن برای شماره تلفن‌های ۷ رقمی وجود دارد؟

حل: ۷ جعبهٔ خالی زیر را برای ۷ رقم شماره تلفن‌ها در نظر می‌گیریم :

چون پیش شماره تغییر نمی‌کند، پس فقط ۴ رقم آخر تغییر می‌کنند. برای هر رقم هم ۱۰ انتخاب ممکن وجود دارد. پس طبق اصل اساسی شمارش، تعداد راه‌های ممکن برای دادن شماره تلفن‌های ۷ رقمی با پیش شمارهٔ سه رقمی مشخّص (ثابت)، $۱۰\times۱۰\times۱۰\times۱۰=۱۰/۰۰۰$ است.

تمرین

در یک آزمون دو گزینه‌ای «درست ــ نادرست» با **۲۵** سؤال، چند راه ممکن برای پاسخگویی به **۲۵** سؤال، وجود دارد؟

۲ــ۳ــ انتخاب‌های مستقل و وابسته

در آزمون‌های جورکردنی، انتخاب پاسخ برای هر سؤال، **وابسته** به انتخاب‌های انجام شده برای سایر سؤال‌ها است؛ یعنی هر پاسخی که انتخاب شد، دیگر نمی‌توانیم آن را انتخاب کنیم و برای پاسخ به سؤال بعدی، تعداد انتخاب‌ها یکی کمتر از سؤال قبلی است.

امّا در آزمون «درست ــ نادرست»، انتخاب پاسخ‌ها برای هر سؤال **مستقل از هم** هستند؛ یعنی پاسخ هر سؤال، مستقل از سؤال‌های قبل و بعد از آن، می‌تواند یکی از دو گزینهٔ «درست» یا «نادرست» باشد. پس تعداد انتخاب‌ها برای هر سؤال (هر مرحله) با هم برابر هستند.

تمرین

در تمام تمرین‌ها و مثال‌هایی که از شروع فصل سوم تا به حال داشته‌اید، مشخّص کنید که کدام انتخاب‌ها مستقل و کدام‌ها، وابسته هستند.

فعالیت ۳ــ۳

الف) آزمون ۴ سؤالی زیر را با دو گزینهٔ «درست» یا «نادرست» در نظر بگیرید:

سؤال ۱: $(a+b)^{۲}=a^{۲}+b^{۲}$

☐ درست ☐ نادرست

سؤال ۲: اگر $f(x)=۲x^{۲}+۳$ باشد، آنگاه $f(x-۲)=۲(x-۲)^{۲}+۳$

☐ درست ☐ نادرست

سؤال ۳: یک تابع توانی می‌تواند یک تابع خطی باشد.

☐ درست ☐ نادرست

سؤال ۴: اگر مبیّن معادلهٔ درجهٔ دوم منفی باشد، معادله دارای جواب حقیقی است.

☐ درست ☐ نادرست

ب) نمودار درختی راه‌های ممکن پاسخگویی به این آزمون چهار سؤالی دو گزینه‌ای را رسم کنید.

پ) طبق اصل اساسی شمارش، چه عددهایی باید درهم ضرب شوند تا جواب قسمت (ب) به دست آید؟

ت) جدول زیر را تکمیل کنید.

جدول ۴

تعداد سؤال‌های یک آزمون «درست ــ نادرست»	۱	۲	۳	۴	۵	۶	...	۱۰
تعداد راه‌های ممکن پاسخگویی به سؤال‌های این آزمون	۲	۴	۸				...	

ث) پس از تکمیل جدول، راه‌های مختلف پاسخگویی به سؤال‌های این نوع آزمون را، برحسب توان‌های ۲ بنویسید.

ج) آیا می‌توانید برای پیدا کردن راه‌های ممکن پاسخگویی به سؤال‌های آزمون «درست ــ نادرست»، شکل دیگری از اصل اساسی شمارش را بنویسید؟

اگر یک تصمیم‌گیری دارای k مرحله باشد $(1,2,3,\ldots,k)$ و تعداد انتخاب‌های ممکن در هر مرحله، با هم برابر و مساوی n باشند، آنگاه تعداد انتخاب‌های ممکن در این تصمیم‌گیری، حاصل ضرب تعداد انتخاب‌ها در هر مرحله یعنی

$$\underbrace{n.n.n.\ldots n}_{k \text{ بار}}$$

است که مساوی n^k می‌شود.

مثال

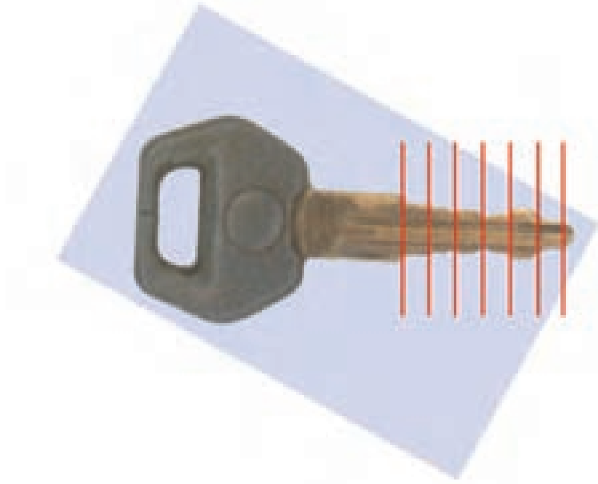
تعداد راه‌های ممکن پاسخگویی به یک آزمون «درست ــ نادرست» با ۱۵ سؤال چند تا است؟

حل : چون برای هر سؤال، دو پاسخ ممکن وجود دارد، پس تعداد راه‌های ممکن، $\underbrace{۲\times۲\times...\times۲}_{۱۵\text{بار}}=۲^{۱۵}$ است.

مسایل

۱ــ سارا می‌خواهد همراه با خانوادهٔ خود، برای تعطیلات عیدنوروز به یکی از شهرهای یزد، کرمان، اهواز، مشهد یا ساری برود. آنها می‌توانند برای مسافرت، از خودرو سواری یا اتوبوس یا قطار استفاده کنند. تعداد راه‌های ممکن را که خانوادهٔ سارا می‌توانند برای انتخاب شهر و وسیلهٔ نقلیه داشته باشند، بنویسید.

۲ــ کلیدهایی با شکل‌های متفاوت، طوری طرّاحی می‌شوند که برای هر قسمت آن‌ها، الگوهای مختلفی وجود دارد. کلیدهای پیکان ۶ قسمت دارند.



الف) قبلاً، برای هر قسمت دو الگو وجود داشت. در آن موقع، چند طرح مختلف برای کلیدهای پیکان ممکن بود وجود داشته باشد؟

ب) در حال حاضر، پیکان از سه الگو برای هر قسمت استفاده می‌کند. به این ترتیب، چند طرح مختلف برای کلیدهای پیکان وجود دارد؟

پ) اگر تعداد الگوها برای هر قسمت، به ۴ تا افزایش یابد، چند طرح مختلف برای کلیدهای پیکان وجود خواهد داشت؟

۳ــ یک اداره، برای شمارهٔ کارت پرسنلی کارمندان خود، از یک کُد ۵ شماره‌ای و یک حرف به شکل زیر، استفاده می‌کند :

عدد	عدد	عدد	حرف	عدد

با این شرط که اولین رقم، نمی‌تواند صفر باشد، تعداد راه‌های ممکن برای شماره کارت‌های مختلف پرسنلی را پیدا کنید.

۳ــ۳ــ جایگشت[۱]

برای شرکت در یک میزگرد تلویزیونی مربوط به آیندهٔ شغلی فارغ‌التحصیلان رشتهٔ علوم انسانی، ۹ کارشناسِ متخصّص، به این برنامه، دعوت شده‌اند.

اولین کسی که می‌خواهد بنشیند، می‌تواند هر یک از ۹ صندلی دور میز را برای نشستن انتخاب کند. نفر دوم می‌تواند هر یک از ۸ صندلی باقی‌مانده را برای نشستن انتخاب کند. طبق اصل اساسی شمارش، این دو نفر به

$$۹ \times ۸ = ۷۲$$

راه ممکن می‌توانند برای خود، جای نشستن انتخاب کنند.

به همین ترتیب

$$۹ \times ۸ \times ۷ = ۵۰۴$$

راه ممکن برای انتخاب جای نشستن سه نفر از کارشناسان، وجود دارد. با ادامهٔ این کار،

$$۹ \times ۸ \times ۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱$$

راه ممکن، برای نشستن این ۹ نفر روی صندلی‌های دور میز، وجود دارد. توجّه کنید که انتخاب

۱ــ Permutation

جای نشستن هر نفر، **وابسته** به انتخاب‌های نفرات قبلی است، زیرا وقتی یک صندلی اشغال شد، نفر بعدی نمی‌تواند روی آن بنشیند. برای همین، هر نفر بعدی، یک انتخاب کمتر از نفر قبل از خودش دارد.

چنین طرز قرار گرفتنی، **جایگشت** نامیده می‌شود. یعنی، هر یک از راه‌های ممکن قرار گرفتن این ۹ نفر در کنار یکدیگر، یک جایگشت از آن ۹ نفر است که تعداد آن‌ها را با $\mathbf{P_{۹}}$ نشان می‌دهیم.

تعریف

هر یک از راه‌های ممکن قرار گرفتن n شیء متمایز کنار یکدیگر، یک **جایگشت** از آن n شیء نامیده می‌شود. تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز، با $\mathbf{P_n}$ نشان داده می‌شود.

برای نوشتن حاصل ضرب ۹×۸×…×۱، می‌توانیم از علامت تعجّب یعنی (!) استفاده کنیم که در ریاضی، به آن **فاکتوریل** گفته می‌شود.

با استفاده از این علامت، به جای ۹×۸×…×۱، می‌نویسیم !۹.

تعریف

!n یعنی ضرب n در تمام اعداد متوالی قبل از خودش تا ۱

پس با توجّه به تعریف جایگشت؛

تعداد جایگشت‌های n شیء مختلف، !n است.

اگر چه در ریاضی، نماد (!) برای تعجّب و شگفتی مورد استفاده قرار نمی‌گیرد، امّا اغلبِ اعدادی که توسط این علامت نشان داده می‌شوند، به‌طور شگفت‌آوری بزرگ هستند!

تمرین

فهرست زیر را تکمیل کنید :

$۱!=۱$

$۲!=۲\times۱=۲$

$۳!=۳\times۲\times۱=۶$

$۴!=$

$۵!=$

$۶!=$

$\vdots$

$۱۰!=$

توجه: طبق قرارداد، $۰!=۱$ تعریف می‌شود.

تمرین

اگر چه ممکن است تساوی $۴!=۲!+۲!$ ، «به‌نظر» درست آید، امّا می‌دانید که نادرست است، زیرا $۲!=۲$ و $۴!=۲۴$ ، در نتیجه $۲۴\neq۲+۲$.

با استفاده از فهرستی که در تمرین قبل ساخته‌اید، تحقیق کنید که کدام یک از تساوی‌های زیر درست، و کدام یک نادرست هستند؟

الف) $۳!+۳!=۶!$

ب) $۱۰!=۱۰\times۹!$

پ) $۱!+۴!+۵!=۱۴۵$

ت) $\frac{۸!}{۴!}=۲!$

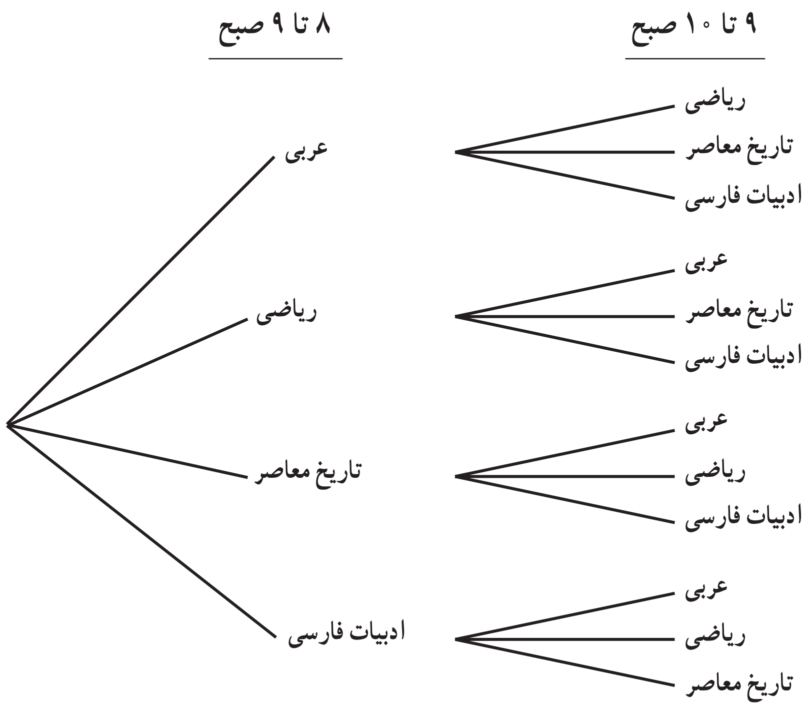
ث) $۶!\times۷!=۱۰!$

فعالیت ۴ــ۳

مدیر یک دبیرستان، برای تنظیم برنامهٔ روز شنبهٔ دانش‌آموزان سال سوم رشتهٔ علوم انسانی، انتخاب‌های زیر را برای ساعت ۸ تا ۱۲ ظهر ــ که طی آن چهار کلاس برگزار می‌شود ــ دارد :

عربی، ریاضی، تاریخ معاصر، ادبیات فارسی

نمودار درختی زیر، نشان می‌دهد چگونه این مدیر، می‌تواند برنامهٔ ساعت ۸ تا ۹ و ۹ تا ۱۰ صبح را، از بین این چهار ساعت انتخاب کند.



۱ــ چند راه مختلف، برای تنظیم ساعت‌های دو درس وجود دارد؟

۲ــ تعداد جایگشت‌های چهار درس در برنامهٔ صبح شنبهٔ رشتهٔ علوم انسانی این دبیرستان، چند تا است؟

۳ــ نمودار درختی بالا را برای ساعت‌های ۸ تا ۹، ۹ تا ۱۰، ۱۰ تا ۱۱ و ۱۱ تا ۱۲، کامل کنید.

۴ــ انتخاب‌های ساعت تدریس برای هر درس، مستقل از هم هستند یا وابسته به هم؟ چرا؟

مسایل

۱ــ دبیرستان جلال‌آل‌احمد، تصمیم گرفته است تا از طریق انتخابات، شورای دانش‌آموزی تشکیل دهد. دانش‌آموزان به چند راه ممکن می‌توانند نام‌های ۵ نامزد انتخاباتی برای شورا را، روی برگه‌های رأی بنویسند؟

۲ــ به چند راه مختلف، از بین ۸ دوندهٔ یک مسابقه، نفرات اول تا سوم می‌توانند مشخص شوند ؛ بدون آن که هیچ دو نفری هم‌زمان، به خط پایان برسند؟

۳ــ به چند راه ممکن، شماره تلفن‌های ۷ رقمی، می‌توانند ساخته شوند، به طوری که در آن‌ها، رقم صفر نباشد؟

۴ــ اگر وجود رقم صفر در بین رقم‌های شماره تلفن‌های ۷ رقمیِ مسألهٔ ۳ جایز باشد، چه تغییری در تعداد راه‌های ممکن ایجاد می‌شود؟ چرا؟

۵ــ به چند راه مختلف، ۸ نفر می‌توانند برای تهیّهٔ بلیط سینما، در یک صف بایستند؟

۶ــ «مرکز گفتگوی تمدن‌ها» در سال ۱۳۸۰، مسابقه‌ای با چهار جایزهٔ ۵۰،۰۰۰ تومانی، ۳۰،۰۰۰ تومانی، ۲۰،۰۰۰ تومانی و ۱۰،۰۰۰ تومانی برای بهترین نقّاشی دانش‌آموزان ۱۴ تا ۱۷ سال و با موضوع «نقش دانش‌آموزان در گفتگوی تمدن‌ها» ترتیب داده است. شرط مسابقه این است که کسی نمی‌تواند بیش از یک جایزه را ببرد.

اگر ۱۰۰۳ دانش‌آموز ۱۴ تا ۱۷ سال، نقاشی‌های خود را برای این مسابقه فرستاده باشند، به سؤال‌های زیر پاسخ دهید :

الف) به چند راه ممکن، دو جایزهٔ اوّل و دوم، کسب خواهند شد؟

ب) به چند راه ممکن، سه جایزهٔ اوّل، دوم و سوم، کسب خواهند شد؟

پ) به چند راه ممکن، هر چهار جایزه، کسب خواهند شد؟

۷ــ تعداد جایگشت‌های حرف‌های کلمهٔ «قناعت» را بنویسید.

۸ــ اگر بخواهید با رقم‌های ۲، ۵، ۶، ۹ و ۳، کدهای ۵ رقمی بسازید، تعداد راه‌های ممکن را بنویسید.

زنگ تفریح ریاضی!

احمد ۱۳ نفر از دوستان خود را برای تماشای یک فیلم به سینما دعوت کرد. او برای این منظور ۱۴ بلیت در یک ردیف رزرو کرده بود. اگر مسئول سالن بخواهد این ۱۴ نفر را به صندلی‌ها راهنمایی کند، هر یک از ۱۴ نفر می‌تواند صندلی اوّل را اشغال کند. بعد از او، صندلی دوم می‌تواند توسط هر یک از ۱۳ نفر باقی مانده اشغال شود. با استفاده از اصل اساسی شمارش، ۱۸۲ = ۱۳×۱۴ راه ممکن وجود دارد که دو نفر، بتوانند دوصندلی از ۱۴ صندلی را اشغال کنند. با همین استدلال، تعداد جایگشت‌های ۱۴ نفر یعنی $P_{۱۴} = ۱۴!$ است که برابر است با :

$$۱۴\times۱۳\times۱۲\times۱۱\times۱۰\times۹\times۸\times۷\times۶\times۵\times۴\times۳\times۲\times۱ = ۸۷,۱۷۸,۲۹۱,۲۰۰$$

یعنی ۸۷،۱۷۸،۲۹۱،۲۰۰ راه ممکن، برای نشستن این ۱۴ نفر روی صندلی‌ها وجود دارد. این عدد آن‌قدر بزرگ است که اگر این ۱۴ نفر، می‌توانستند در هر ثانیه ــ و بدون توقّف ــ یک ترتیب جدید نشستن درست کنند، بیش از ۲۷۰۰ سال طول می‌کشید تا ۱۴ نفر، با هر جایگشت ممکن، روی صندلی‌ها بنشینند! در این مدت آنها چند فیلم می‌توانستند ببینند؟!

۱ــ۳ــ۳ــ جایگشت‌های r شیء از n شیء متمایز: با دقّت در مسأله‌هایی که راجع به جایگشت تا به حال حلّ کرده‌اید، حتماً متوجّه می‌شوید که فعالیت ۴ ــ۳ و مسألهٔ ۶، با سایر مسأله‌ها، کمی فرق داشت. در فعالیت ۴ــ۳، مدیر دبیرستان می‌خواست راه‌های ممکن را برای تنظیم ساعت‌های دو درس از چهار درس خود را پیدا کند. در مسألهٔ ۶ نیز، از تمام ۱۰۰۳ نفر شرکت کننده، تنها ۴ نفر موفّق به کسب جایزه می‌شدند. یعنی، هر کدام از ۱۰۰۳ نفر شرکت کننده، امکان کسب جایزهٔ اوّل را داشتند، امّا به محض آن که جایزه اوّل به برندهٔ آن تعلّق گرفت، جایزهٔ دوم به یکی از ۱۰۰۲ نفر باقی‌ماندهٔ، جایزهٔ سوم به یک نفر از بین ۱۰۰۱ شرکت کنندهٔ دیگر و بالاخره ؛ جایزهٔ چهارم به یکی از ۱۰۰۰ شرکت کننده مسابقه تعلّق می‌گرفت. یعنی تعداد راه‌های مختلفی که چهار جایزه به چهار نفر برگزیده از بین ۱۰۰۳ نفر تعلق می‌گیرد برابر ۱۰۰۰×۱۰۰۱×۱۰۰۲×۱۰۰۳ است که بسیار کوچک‌تر

از !۱۰۰۳ است.

ــ اگر تعداد دانش‌آموزان شرکت‌کننده در مسابقه n نفر باشد چهار جایزهٔ اوّل به چند راه ممکن به چهار نفر از n نفر تعلّق می‌گیرد؟

ــ آیا می‌توانید یک فرمول کلی، برای پیدا کردن تعداد چنین جایگشت‌هایی پیدا کنید؟

برای مثال به مسألهٔ ۲ همین فصل بازگردید؛ دیدید که هر یک از ۸ نفر دونده می‌توانستند برندهٔ مقام اول باشند. وقتی نفر اول تعیین می‌شود، هر یک از ۷ نفر باقیمانده می‌توانند مقام دوم را کسب کنند و بالاخره یکی از بین ۶ نفر باقیمانده مقام سوم را به دست خواهد آورد. پس طبق اصل اساسی شمارش تعداد راه‌های ممکن برای اینکه از بین ۸ دونده ۳ نفر حائز مقام‌های اوّل تا سوم شوند برابر $۸\times۷\times۶=۳۳۶$ خواهد بود.

در این مسأله، در واقع به جای آن که تعداد جایگشت‌های ۸ یعنی !۸ را حساب کنیم؛ تعداد جایگشت‌های ۳ از ۸ را پیدا کردیم یعنی:

$$۸\times۷\times۶=۸(۸-۱)(۸-۲) \qquad (۱)$$

اگر بخواهیم قانونی به دست آوریم که تعداد جایگشت‌های ۳ از ۸ را نشان دهد می‌توانیم به‌طریق زیر عمل کنیم:

می‌دانیم
$$۸!=۸\times۷\times۶\times\underbrace{۵\times۴\times۳\times۲\times۱}$$

به جای $۵\times۴\times۳\times۲\times۱$ می‌توانیم !۵ را قرار دهیم. پس:

$$۸!=۸\times۷\times۶\times۵!$$

دو طرف تساوی را بر !۵ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{۸!}{۵!}=۸\times۷\times۶$$

در رابطهٔ (۱) جایگزین می‌کنیم:

$$\frac{۸!}{۵!}=۸(۸-۱)(۸-۲)$$

اگر $۸(۸-۱)(۸-۲)$ را که جایگشت ۳ از ۸ است با $\mathbf{P(۸,۳)}$ نشان دهیم، آن‌گاه:

$$P(۸,۳)=\frac{۸!}{۵!}$$

از طرفی، !۵ همان $(۸-۳)!$ است پس :

$$P(۸,۳)=\frac{۸!}{(۸-۳)!}$$

در حالت کلی، برای پیدا کردن تعداد جایگشت‌های r شیء از n شیء، یعنی $P(n,r)$ و با فرض این که $r\leq n$ است (چرا؟) با استفاده از الگوی استدلالیِ مثال قبل، می‌نویسیم :

$$P(n,r)=n(n-۱)(n-۲)\dots(n-r+۱)$$

از طرفی،

$$n!=n.(n-۱)(n-۲)\dots(n-r+۱)(n-r)!$$

یا

$$n!=P(n,r)(n-r)!$$

چون می‌خواهیم $P(n,r)$ را محاسبه کنیم، پس دو طرف معادله را بر $(n-r)!$ تقسیم نموده، و معادله را برای $P(n,r)$ حل می‌کنیم :

$$P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}$$

تعریف

اگر n شیء مختلف داشته باشیم، تعداد جایگشت‌های r شیء از این n شیء برابر است با

$$P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}$$

که در آن، $r\leq n$ و r و n، هر دو عدد طبیعی هستند.

مثال

تعداد جایگشت‌های n شیء از n شیء را پیدا کنید.

حل: چون $r=n$، پس :

$$P(n,n)=\frac{n!}{(n-n)!}$$

$$=\frac{n!}{۰!}=n!$$

مسایل

۱ــ به چند راه ممکن، می‌توان با حرف‌های کلمهٔ «دشت مغان» کلمات سه حرفی ساخت (بی‌معنی بودن کلمات اشکالی ندارد).

۲ــ با رقم‌های شماره‌تلفن ۲۳۸۵۴۷۸ ، چند عدد سه رقمی می‌توان ساخت؟

۳ــ هر یک از مقدارهای زیر را محاسبه کنید ؛

الف) $P(۱۳,۵)$ ب) $P(۴,۴)$ پ) $P(n,۰)$

۴ــ به چند راه مختلف، با حرف‌های کلمه «روستا» می‌توان کلمه‌های سه حرفی ساخت؟

۵ــ از بین ۱۲ داوطلب عضویت در هیأت رئیسهٔ یک مؤسسه، یک نفر به عنوان رئیس، یک نفر معاون و یک نفر خزانه‌دار، توسط اعضای مؤسسه انتخاب شدند. تعداد راه‌های ممکن برای انتخاب این هیأت را پیدا کنید.

۶ــ مقدارهای زیر را به دست آورید :

الف) $P(۱۰۰,۱)$ ب) $P(۱۰۰,۵۰)$

پ) $P(n,(n-۱))$ ت) $P((n+۲),۴)$

۷ــ درستی تساوی‌های زیر را نشان دهید ؛

الف) $P(n,(n-۱))=P(n,n)$

ب) $P((n+۲),۴)=P(n,۳)$

پ) $P(n,۵)=۱۸P((n-۲),۴)$

۸ــ از یک گروه ۱۰۰ نفری دانش‌آموزی، به چند راه ممکن می‌توان ۴ نفر را برای فعالیّت‌های فوق برنامهٔ مدرسه انتخاب کرد؟ به‌طوری که یک نفر مسئول گروه سرود، یک نفر مسئول گروه دانش، یک نفر مجری برنامه‌ها و یک نفر مسئول مسابقات علمی شود.

۲ــ۳ــ۳ــ جایگشت‌های متمایز[۱]

مثال

با حروف کلمهٔ BANANA، چند ترتیب مختلف می‌توان ساخت؟

حل: اگر تمام حرف‌های کلمهٔ BANANA از هم متمایز بودند، ما می‌توانستیم !۶ ترتیب مختلف بسازیم (که همان تعداد راه‌های ممکن ساختن کلمات جدید با این ۶ حرف است). درواقع،

۱ــ Distinguishable Permutation

اگر Aها و Nها را شماره‌گذاری کنیم تا از هم متمایز شوند، تعداد راه‌های ممکن، همان تعداد جایگشت‌های ۶ حرف یعنی !۶ است. اما $(A_1A_2A_3)$ می‌توانند به !۳ راه مختلف، جایگشت داشته باشند. تعداد جایگشت‌های (N_1N_2) نیز !۲ است. امّا چون واقعاً Aها و Nها از هم متمایز نیستند، پس !۲×!۳ ترتیب مشابه داریم. یعنی $1\times2\times3\times4\times5\times6 = 6!$، از تعداد واقعی راه‌های ممکن (یا ترتیب‌های ممکن) ساختن کلمات با حرف‌های کلمهٔ BANANA، $12 = 2\times3\times2 = 3!\times2!$ بار بزرگتر است. به همین دلیل، برای پیدا کردن تعداد واقعی راه‌های ممکن، باید !۶ را بر $12 = 3!\times2!$ تقسیم کنیم. برای وضوح بیشتر، به نمونهٔ زیر توجّه کنید:

$A_1BN_1A_3NA_2$	$A_1BN_1A_2NA_3$
$A_1BN_2A_3NA_2$	$A_1BN_2A_2NA_3$
$A_2BN_1A_3NA_1$	$A_2BN_1A_1NA_3$
$A_2BN_2A_3NA_1$	$A_2BN_2A_1NA_3$
$A_3BN_1A_2NA_1$	$A_3BN_1A_1NA_2$
$A_3BN_2A_2NA_1$	$A_3BN_2A_1NA_2$

همان‌طور که می‌بینید، برای هر راه ممکن، ۱۲ گروه از کلماتی داریم که اگر Aها و Nها را با شماره‌گذاری متمایز نکنیم، همگی یکسان هستند؛ پس باید تعداد کل راه‌های ممکن را بر !۲×!۳ که همان ۱۲ باشد، تقسیم کنیم.

به طورکلّی، تعداد جایگشت‌های n شیء، که در آن، a_1 شیء مثل هم a_2 شیء مثل هم و $\cdots a_k$ شیء مثل هم باشند برابر است با:

$$\boxed{\frac{n!}{a_1!\,a_2!\cdots a_k!}}$$

مسایل

۱ــ راه‌های مختلفی که حروف کلمهٔ نادر را می‌توان مرتب کرد، در زیر آمده است:

نادر	نارد	ندار	ندرا	نراد	نردا
اندر	انرد	ادنر	ادرن	ارند	اردن
دنار	دنرا	دانر	دارن	درنا	دران
رناد	رندا	راند	رادن	ردنا	ردان

نشان دهید که بدون تهیّهٔ این فهرست، چگونه این تعداد به دست می‌آید؟

۲ــ فهرستی از تمام راه‌های مختلفی که می‌توان حروف کلمهٔ سارا را مرتّب کرد، تهیّه کنید.

۳ــ چرا تعداد راه‌هایی که می‌توان حروف کلمهٔ سارا را مرتب کرد، کمتر از تعداد راه‌هایی است که می‌توان حروف کلمهٔ نادر را مرتب کرد؟

نشان دهید که بدون تهیّهٔ فهرست، چگونه تعداد راه‌های مرتب کردن حرف‌های کلمهٔ سارا به دست می‌آید؟

۴ــ کدام یک از کلمه‌های زیر، دارای تعداد ترتیب‌های مساوی با کلمهٔ سارا است؟

دارا، سوسن، شبنم، زهرا، مریم و مهدی

۵ــ الف) فهرستی از تمام راه‌هایی که می‌توان حروف کلمهٔ بابا را مرتب کرد، بنویسید.

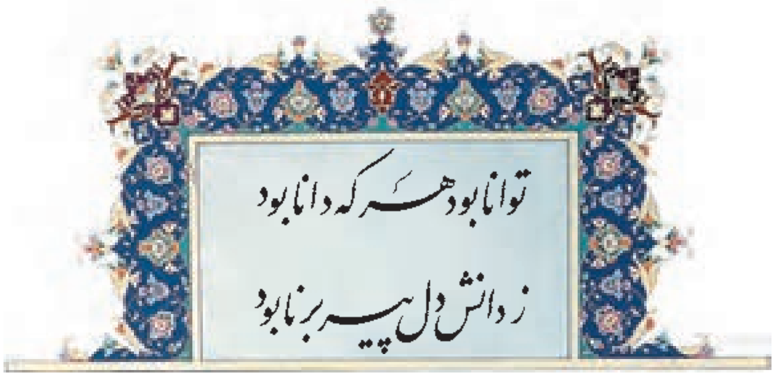
ب) نشان دهید چگونه این تعداد، بدون تهیّهٔ فهرست به دست می‌آید؟

۶ــ به چند طریق ممکن، می‌توان جایگشت‌های مختلفی با رقم‌های عدد ۲۸۵۸۸۸۸۸۸۸۸ ساخت؟

۷ــ شماره پلاک ماشینی ۴۴۴ ک ۲۲ است. چند پلاک ماشین با همین ۵ رقم و حرف «ک» می‌توان ساخت؟

فعالیت ۵ــ۳

شعر فردوسی را در نظر بگیرید :



حسین کیاتنکابنی
تذهیب، گواش و آبرنگ

تمام راه‌های ممکنی که بتوان حروف این بیت شعر را جابه‌جا کرد ؛ یعنی تعداد تمام جایگشت‌های ۳۶ حرف این شعر را پیدا کنید (به عبارتی دیگر، تمام ترتیب‌های مختلف را پیدا کنید). برای این کار، از رابطهٔ زیر می‌توانید استفاده کنید :

$$\frac{36!}{4!6!4!4!6!2!3!}$$

الف) فاکتوریل‌های رابطهٔ بالا از کجا آمده‌اند؟

ب) رابطه‌ای بنویسید که با آن، بتوان تعداد راه‌های مختلف ترتیب حروف ۶ کلمهٔ مصرع اوّل را نوشت.

پ) آن راه‌ها، چند تا هستند؟

ت) رابطه‌ای بنویسید که با آن، بتوان تعداد راه‌های مختلف نوشتن ۱۲ حرف اوّل این بیت را پیدا کرد.

ث) آن راه‌ها، چند تا هستند؟

ج) فرمول $\frac{n!}{a_1!a_2!\cdots a_k!}$ را با نتیجهٔ این فعالیت مقایسه کنید سپس تعریف جایگشت را مجدداً، از زبان خود، بنویسید.

مسایل

۱ــ با استفاده از فرمول $\frac{n!}{a_1!\,a_2!\,a_3!\cdots a_k!}$، تعداد ترتیب‌های مختلف عبارت «آفتاب آمد دلیل آفتاب» را بنویسید.

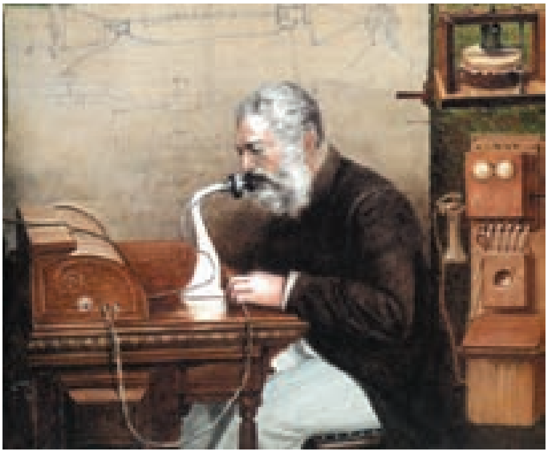
۲ــ با رقم‌های عدد ۲۴۲۲۳۷۳، چند ترتیب مختلف می‌توانید داشته باشید؟

۳ــ عنوان مجله‌ای که با هدف آموزش شهروندان برای استفادهٔ صحیح از نان، به تازگی اجازهٔ انتشار گرفته است، **نان و نان**[۱] است. این عنوان غیرمعمول است ؛ زیرا اگر آن را از سمت چپ هم بخوانید، باز همان **نان و نان** می‌شود. یعنی با برعکس‌کردن ترتیب حرف‌های **نان و نان**، ترتیب عنوان تغییر نمی‌کند.

با استفاده از فرمول «جایگشت‌های متمایز»، تعداد ترتیب‌های مختلف حرف‌های این عنوان را پیدا کنید.

۱ــ به این نوع واژه‌ها که از هر دو طرف یک‌جور خوانده می‌شوند، **متقارن** می‌گویند. برای اطلاعات بیشتر به کتاب «مهارت‌های پایه ریاضی» سال اول متوسطه مراجعه کنید.

۴ــ۳ــ ترکیب[1]



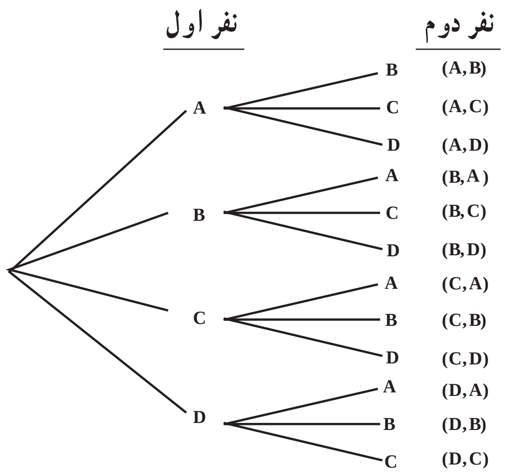
الکساندر گراهام‌بل

اولین مبادلهٔ صدا توسط تلفن، در شهر نیوهِیون در ایالت کانتیکت ایالات متحدهٔ آمریکا، در سال ۱۸۷۸ انجام شد. این شبکه، در توسعهٔ خود توانست ۲۱ مشترک تلفن را به هم مرتبط کند. اوّلین کتاب راهنمای تلفن که در همان سال، در شهر نیوهیون چاپ شد، شامل فهرست نام ۵۰ مشترک تلفن بود. این شبکه در فاز اوّل، توانست ۲۱ مشترک تلفن را به ۲۱۰ راه مختلف، دوبه‌دو به هم مرتبط کند (از طریق مبادلهٔ صدا بین هر جفت از آن‌ها). با راه اندازی فاز بعدی شبکه، ۵۰ مشترک تلفن به ۱۲۲۵ راه مختلف، توانستند دوبه‌دو با هم مرتبط شوند.

به نظر شما، این تعداد راه‌ها، چگونه محاسبه شده‌اند؟

فعالیت ۶ــ۳

راه‌هایی که می‌توان از بین چهار نفر داوطلب نمایندگی شورای شهر، دو نفر را انتخاب کرد، در نمودار درختی زیر نشان داده شده است.



۱ــ Combination

الف) اگر ترتیب مهمّ باشد، چند راه در نمودار نشان داده شده است؟ (یعنی اگر (A,B) با (B,A) فرق داشته باشد).

ب) با استفاده از اصل اساسی شمارش، چه عددهایی را باید در هم ضرب کنید تا این جواب به دست آید؟

پ) اگر ترتیب مهمّ نباشد (مثلاً (A,B) با (B,A) یکی باشد)، چند راه ممکن برای انتخاب دو نماینده، وجود دارد؟

ت) آیا می‌توانید این جواب را، بدون نگاه کردن به نمودار درختی، به دست آورید؟ چگونه؟ بحث کنید.

ترکیب، انتخابی از شیءهاست که در آن، **ترتیب مهّم نیست**.

برای پیدا کردن تعداد ترکیب‌های ممکن، اوّل از **اصل اساسی شمارش** شروع کنید و سپس، بر تعداد راه‌هایی که آن شیءها می‌توانند مرتّب شوند، تقسیم کنید.

در واقع، تفاوت ترکیب با جایگشت r شیء از n شیء در این است که چون ترتیب در ترکیب مهمّ نیست ؛ در نتیجه، تعداد ترکیب‌ها به نسبت جایگشت‌های r یعنی $r!$ ، از $P(n,r)$ کوچک‌تر است.

به همین علّت است که بر تعداد راه‌هایی که rشیء می‌توانند مرتّب شوند، تقسیم می‌کنیم و تعداد ترکیب‌ها را با $C(n,r)$ نشان می‌دهیم :

$$C(n,r)=\frac{P(n,r)}{r!} \qquad (۱)$$

امّا

$$P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!} \qquad (۲)$$

پس با جایگزینی (۲) در (۱)، داریم :

$$\boxed{C(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!r!}}$$

مثال

در روز تولّد امام رضا(ع)، ده نفر در فهرست انتظار پرواز ساعت ۴ بعدازظهر تهران ــ مشهدِ هواپیمایی جمهوری اسلامی ایران ــ هما قرار داشتند.

الف) اگر سه جای خالی در این پرواز وجود داشته باشد، به چند راه مختلف، ممکن است نام سه نفر به ترتیب، برای سوار شدن به هواپیما خوانده شود؟

ب) چند ترکیب مختلف از این سه نفر، برای پرواز ذکر شده می‌توان انتخاب کرد؟

حل:

الف) طبق اصل اساسی شمارش، برای نفر اوّل ۱۰ انتخاب، برای نفر دوم ۹ انتخاب و برای نفر سوم، ۸ انتخاب وجود دارد. یعنی تعداد انتخاب‌های ممکن، $۱۰ \times ۹ \times ۸ = ۷۲۰$ است. این عدد را می‌توان از فرمول جایگشت ۳ از ۱۰ نیز به دست آورد

$$P(۱۰, ۳) = \frac{۱۰!}{(۱۰ - ۳)!} = \frac{۱۰!}{۷!}$$

$$= \frac{۱۰ \times ۹ \times ۸ \times ۷!}{۷!} = ۷۲۰$$

ب) برای پیدا کردن تعداد ترکیب‌های خواسته شده، باید تعداد جایگشت‌ها را بر تعداد جایگشت‌های ۳ یعنی !۳ تقسیم کنیم پس

$$C(۱۰, ۳) = \frac{P(۱۰, ۳)}{۳!} = \frac{۷۲۰}{۳ \times ۲ \times ۱} = ۱۲۰$$

مسایل

۱ــ مقدارهای زیر را محاسبه کنید:

الف) $C(n, n)$ ب) $C(n, ۰)$ پ) $C(۷, ۳)$

۲ــ یکی از راه‌هایی که معمّاها و بازی‌های مختلف کلامی ساخته می‌شوند، به هم ریختن حروف کلمات و ساختن کلمات جدید (با معنی یا بی‌معنی) است، به چند راه مختلف، می‌توان از تغییر ترتیبِ حرف‌های کلمه‌های زیر، ترکیب‌های جدید ساخت؟

الف) کامیاران ب) مینادشت باغدشت پ) سوسنگرد ت) بندر لنگه

فعالیت ۷ــ۳

خط بریل به زبان فارسی که توسط افراد نابینا مورد استفاده قرار می‌گیرد، از کُدی با ۶۳ کاراکتر تشکیل شده است. کاراکترها ترکیب‌هایی از نقاط برجسته هستند که از ۱ تا ۶ در تغییرند.

نمونه‌هایی از حروف فارسی به خط بریل، در زیر نشان داده شده است.

الف	ب	پ	ت	ث	ج	چ
● ○	● ○	● ●	○ ●	● ●	○ ●	● ●
○ ○	● ○	● ○	● ●	○ ●	● ●	○ ○
○ ○	○ ○	● ○	● ○	○ ●	○ ○	○ ○

دایره‌های توپُر معرّف نقاط برجسته و دایره‌های توخالی نشان دهندۀ موقعی هستند که کاغذ صاف است و برجستگی ندارد.

به چند راه مختلف ممکن است :

الف) یکی از ۶ نقطه برجسته شود؟

ب) دو تا از ۶ نقطه برجسته شوند؟

پ) ۳ تا از ۶ نقطه برجسته شوند؟

ت) ۴ تا از ۶ نقطه برجسته شوند؟

ث) ۵ تا از ۶ نقطه برجسته شوند؟

ج) تمام ۶ نقطه برجسته شوند؟

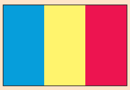
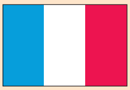
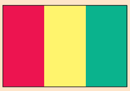
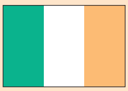
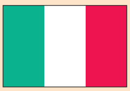
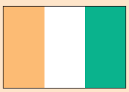
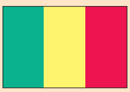
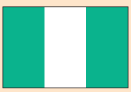
چ) آیا کُد بریل، از تمام ترکیب‌های مختلف ۱ تا ۶ نقطه، استفاده کرده است؟

مسایل

۱ــ پرچم‌های نُه کشور دنیا، الگویی دارند که در زیر می‌بینید ؛

رنگ هر یک از این سه نوار عمودی پرچم، در جدول ۵ آمده است :

جدول ۵

کشور	نوار اول	نوار دوم	نوار سوم	پرچم
بلژیک	سیاه	زرد	قرمز	
چاد	آبی	زرد	قرمز	
فرانسه	آبی	سفید	قرمز	
گینه	قرمز	زرد	سبز	
ایرلند	سبز	سفید	طلایی	
ایتالیا	سبز	سفید	قرمز	
ساحل عاج	طلایی	سفید	سبز	
مالی	سبز	زرد	قرمز	
نیجریه	سبز	سفید	سبز	

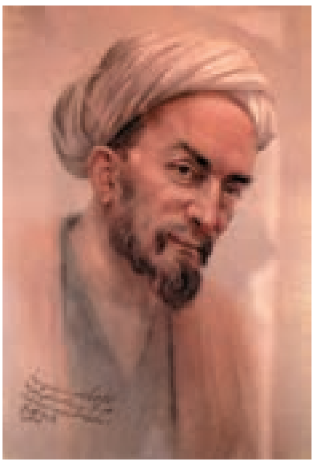
الف) اگر نوارهای اول و سوم فقط سیاه، آبی، طلایی، سبز یا قرمز باشند و نوار دوم سفید یا زرد باشد، چند پرچم مختلف با این الگو ممکن است وجود داشته باشند؟

ب) اگر هر نوار پرچم بتواند یکی از هفت رنگ جدول باشد، امّا هر نوار دارای رنگ متفاوتی باشد، چند پرچم مختلف با این الگو می‌توان داشت؟

۲ــ عبارت‌های زیر را ساده کنید :

الف) $\frac{n!}{(n-۵)!}$ ب) $\frac{(۲n)!}{۴(۲n-۳)!}$

۳ــ نشریه‌ای، تصمیم گرفته بود یک مسابقهٔ ادبی برگزار کند. در این مسابقه، تصویر چهار شاعر معروف ایرانی قرن هفتم هجری قمری ؛ مولانا جلال‌الدّین محمّد بلخی مشهور به مولانا، سعدی شیرازی، خواجوی کرمانی و عطّار نیشابوری ؛ همراه با چهار بیت شعر، چاپ شده و از خوانندگان، خواسته شده بود تا هر بیت شعر را با سرایندهٔ آن جور کنند و برای دریافت یک سکّهٔ بهار آزادی به



عنوان جایزه، حداکثر تا ۱۰ روز پس از انتشار نشریه، جواب‌های خود را به دفتر نشریه ارسال کنند و شانس خود را امتحان کنند! احسان مصرّ بود که این جایزه را ببرد. برای این منظور، او تصمیم گرفت تمام پاسخ‌های ممکن به این سؤال را به دفتر نشریه ارسال کند.

الف) تعداد پاسخ‌های ممکن چند تا بود؟

ب) آیا به نظر منطقی می‌رسید که احسان فکر کند اگر تمام انتخاب‌ها را به درستی انجام دهد، یک سکّهٔ بهار آزادی را حتماً به دست می‌آورد؟

۴ــ از فهرست نام ۲۴ عضو یک باشگاه ورزشی، ۴ نام برای انتخاب رئیس، نایب رئیس، خزانه‌دار و منشی باشگاه، به قید قرعه انتخاب می‌شوند. تعداد راه‌های ممکن برای انتخاب این ۴ نفر چند تاست؟

(توجّه کنید که با وجودی که ترتیب باید مهمّ باشد، امّا این ترتیب رعایت نشده است. چرا؟!)

۵ــ یک بستنی فروشی، ۱۰ طعم مختلف بستنی دارد که عبارتند از ؛ وانیلی، پرتقالی، زعفرانی، توت‌فرنگی، موز، شاه‌توت، آناناس، قهوه، شکلاتی و پسته‌ای.

الف) اگر بخواهید از این بستنی‌فروشی، یک بستنی قیفی با سه طعم مختلف بخرید، چند انتخاب ممکن از بین ۱۰ طعم بالا وجود دارد ؛ به شرطی که ترتیب قرار گرفتن طعم‌های مختلف، برای شما **مهمّ** باشد؟

ب) اگر بخواهید از این بستنی‌فروشی، یک بستنی قیفی با سه طعم مختلف بخرید و اگر ترتیب قرار گرفتن طعم‌های مختلف، برای شما **مهمّ نباشد**، چند انتخاب ممکن از بین ۱۰ طعم بالا، وجود دارد؟

۶ــ درستی تساوی‌های زیر را نشان دهید.

الف) $C(n,m)=\dfrac{P(n,m)}{m!}$ ‏ ‏ ‏ ‏ ب) $C(n,n)=C(n,0)$

۷ــ عبارت «زندگی یعنی امید به آینده»[1] را در نظر بگیرید و به سؤال‌های زیر، پاسخ دهید.

الف) چند ترتیب مختلف با حرف‌های این عبارت می‌توانیم بسازیم؟

ب) اگر بخواهیم کلمهٔ «امید»، همه جا به همین شکل بیاید، آن وقت چند ترتیب مختلف با حرف‌های این عبارت می‌توانیم بسازیم؟

۸ــ ۱۰۰ عضو یک باشگاه کوهنوردی دانش‌آموزی، به همراه دو مربّی، قصد صعود به بلندترین

۱ــ این جمله را استاد بیرشک در موقعی که دانشگاه شهید بهشتی در سال ۱۳۷۷، به ایشان، دکترای افتخاری ریاضی را اعطا کرد، بیان نمودند و گفتند که این عبارت، شعار دانشگاه ملی سابق (شهید بهشتی فعلی) بوده است.

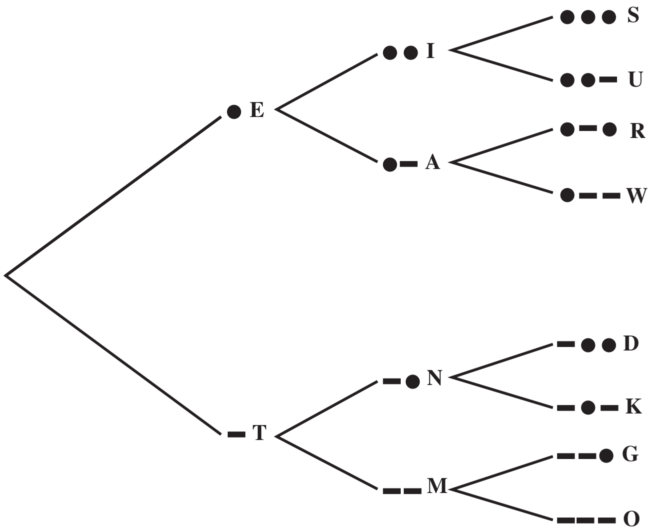
قلّهٔ شهر خود را دارند. قرار است برای حفظ نظم و ایمنیِ دانش‌آموزان، همگی با صف حرکت کنند و یکی از مربّی‌ها پیشاپیش و دیگری، در انتهای صف، به صعود خود ادامه دهند. تعداد ترتیب‌های مختلفی که افراد می‌توانند در صف ظاهر شوند، عددی است که باورنکردنی بزرگ است. نگاه کنید!

۹۳,۳۲۶,۲۱۵,۴۴۳,۹۴۴,۱۵۲,۶۸۱,۶۹۹,۲۳۸,۸۵۶,۲۶۶,۷۰۰,۴۹۰,۷۱۵,۹۶۸,۲۶۴,
۳۸۱,۶۲۱,۴۶۸,۵۹۲,۹۶۳,۸۹۵,۲۱۷,۵۹۹,۹۹۳,۲۲۹,۹۱۵,۶۰۸,۹۴۱,۴۶۳,۹۷۶,۱۵۶,
۵۱۸,۲۸۶,۲۵۳,۶۹۷,۹۲۰,۸۲۷,۲۲۳,۷۵۸,۲۵۱,۱۸۵,۲۱۰,۹۱۶,۸۶۴,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,
۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰

شکل کوتاهتری برای این عدد بنویسید.

مجلهٔ ریاضی

کُد مورس، حدود سال ۱۸۳۸ توسط ساموئل مورس[۱] و برای استفاده در تلگراف، اختراع شد. کُد مورس از الگوهایی که با نقطه و خط فاصله ایجاد شده است استفاده می‌کند تا حروف الفبا را معرفی کند. بخشی از نماد بین‌المللی این کُد، توسط نمودار درختی زیر، نشان داده شده است :



۱ـ Samuel Morse

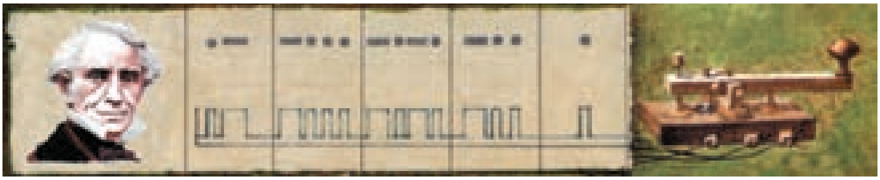
این نمودار نشان می‌دهد که اگر فقط از یک نماد استفاده شود یعنی ● که معرّف E و ــ که معرف T است، دو الگو ممکن است.

الف) چند الگو را می‌توان با استفاده از ۲ نماد ساخت؟

ب) چند الگو را می‌توان با استفاده از ۳ نماد ساخت؟

پ) به نظر شما، با استفاده از ۴ نماد، چند الگو می‌توان ساخت؟

ت) آیا تمام حروف الفبای انگلیسی را می‌توان با الگویی که دارای ۴ نماد یا کمتر هستند، نشان داد؟ توضیح دهید.



ساموئل مورس

منابع

1- Brousseau, G. (1997). **Theory of Didactical Situations in Mathematics**. Edited and translated by N. Balacheff; M.Cooper; R. Sutheland; and V. Warfield. Mathematics Education Library, Kluwer Academic Publishers.

2 - De lange, J. (1998). Real Problems with Real world Mathematics, In C. Alsina & et. al (eds). **Proceedings of the 8th International Congress on Mathematical Education**, S. A. E. M. THALES.

3 - Eisner, E. (1994). **The Educational Imagination: On the Design and Evaluation of school Programs.** Third Edition. Macmillan College Publishing Company.

4 - Ferrini - Mundy, J. & Lauter, D. (1993). Teaching and Learning Calculus. In P. S. Wilson. [ed.] **Research Ideas for the Classroom: High school Mathematics:** National Council of Teachers of Mathematics Research Interpretation Project. Academic Macmilan Publishing Company.

5 - Hubbard, E. & Robinson, R. D. (1999). **Elementary and Intermediate Algebra**. Houghton Mifflin Company. Boston - Ny.

6 - Hughes - Hallett, D. and et. al. (1994). **Calculus: Harvard Project**. John Wiley & Sons, Inc.

7 - Jacobs, H. R. (1982). **Mathematics: A Human Endevor**. (2nd Ed.) Freeman & company, Ny.

8 - Larson, R. E. & Hostetler, R. P. (1993). **Precalculus**. D. C. Heath & Company.

9 - National Council of Teachers of Mathematics (1996). Communication in Mathematics k -12 and Beyond: 1996 year Book. Reston, VA. Author.

10 - National Council of Teachers of Mathematics. (2000). **Principles and**

Standards for school. Reston, Va. Author.

11 - Skemp, R. R. (1978). Relational Understanding and Instrumental understanding. **Arithmetic Teacher**. pp. 9-15.

12 - Spence, L. E & et al. (1990). **Applied Mathematics for the Management, Life, and Social Sciences**. Scott, Foresman / Little, Brown Higher Education.

۱۳ــ انگلیش، لین ووارن، الیزابت، (۱۳۷۷) **معرّفی مفهوم متغیّر از طریق الگویابی**. ترجمهٔ سهیلا غلام‌آزاد. **مجلهٔ رشد آموزش ریاضی**. شمارهٔ ۵۴، زمستان ۱۳۷۷.

۱۴ــ بابلیان، اسماعیل و همکاران (۱۳۸۰)، **ریاضیات ۲: نظری (رشته‌های علوم تجربی ــ ریاضی و فیزیک). فنی و حرفه‌ای**. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

۱۵ــ بیشاپ، آلن (۱۳۷۶). رابطهٔ بین آموزش ریاضی و فرهنگ. ترجمهٔ زهرا گویا. **مجلهٔ رشد آموزش ریاضی**، شمارهٔ ۵۰.

۱۶ــ توماس، جرج و فینی، راس (۱۹۸۸). **حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسهٔ تحلیلی: جلد اوّل**. ترجمهٔ مهدی بهزاد و همکاران. (چاپ اوّل سال ۱۳۷۰ ــ ویرایش هفتم). مرکز نشر دانشگاهی.

۱۷ــ داریوش همدانی، حمیده و همکاران (۱۳۷۹). **مهارت‌های پایهٔ ریاضی. سال اوّل دبیرستان**. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

۱۸ــ غلام‌آزاد، سهیلا (۱۳۸۰). دوباره نگری به برنامهٔ جبر دبیرستانی، **مجلهٔ رشد آموزش ریاضی**. شمارهٔ ۶۳.

۱۹ــ گویا، زهرا و همکاران (چاپ ششم، ۱۳۷۹). **ریاضی پایه دورهٔ پیش‌دانشگاهی رشتهٔ علوم انسانی**. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

۲۰ــ گویا، زهرا (ترجمه) (۱۳۷۷). مرکز بین‌المللی مطالعهٔ تیمز ــ کالج بوستون : سومین مطالعهٔ بین‌المللی ریاضیات و علوم، **مجلهٔ رشد آموزش ریاضی**. شمارهٔ ۵۲، تابستان ۱۳۷۷.

۲۱ــ گویا، زهرا (۱۳۷۷)، روایت معلمان. **مجلهٔ رشد آموزش ریاضی**. شمارهٔ ۵۴، زمستان ۱۳۷۷.