



شکل ۲۰-۱

۳-۲-۱ نامعادله: هر نامساوی را که شامل یک یا چند متغیر باشد نامعادله می نامند. برای حل نامعادلات، یعنی برای پیدا کردن اعدادی که با جایگزین کردن آن‌ها به جای متغیرها نامعادله تبدیل به نامساوی درست گردد.

مثال ۱: نامعادله‌ی روبه‌رو را حل کنید:

$$\frac{x^2 - 1}{x + 3} < 0$$

حل: ابتدا هریک از عبارات جبری $x^2 - 1$ و $x + 3$ را تعیین علامت می کنیم، سپس برای هریک از بازه‌های $x < -3$ و $-3 < x < -1$ و $-1 < x < 1$ و $x > 1$ علامت‌های $x^2 - 1$ و $x + 3$ را در هم ضرب می کنیم.

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{1} \Rightarrow x = \pm 1$$

$$x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$$

جدول ۳۱-۱

x	-3	-1	1	
$x^2 - 1$	+	+	-	+
$x + 3$	-	+	+	+
$\frac{x^2 - 1}{x + 3}$	-	+	-	+

$$\{x | x \in \mathbb{R} \text{ و } x < -3 \text{ یا } -1 < x < 1\}$$

بنابراین مجموعه جواب برابر است با:

$$\frac{x^2 - 2x + 2}{x} < 1$$

مثال ۲: نامعادله‌ی روبه‌رو را حل کنید.

$$\frac{x^2 - 2x + 2}{x} - 1 < 0$$

حل: همه‌ی جملات را به طرف چپ می آوریم:

$$\frac{x^2 - 2x + 2 - x}{x} < 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 3x + 2}{x} < 0$$

- مخرج مشترک می گیریم:

— با مساوی صفر قرار دادن صورت و مخرج کسر

ریشه‌های آن‌ها را می‌یابیم :

$$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x-1=0 \Rightarrow x=1 \\ x-2=0 \Rightarrow x=2 \text{ و } x=0 \end{cases}$$

جدول ۳۲-۱

x	0	1	2	
$x^2 - 3x + 2$	+	+	-	+
x	-	+	+	+
$\frac{x^2 - 3x + 2}{x}$	-	+	-	+

جواب : $\{x | x \in \mathbb{R}, x < 0 \text{ یا } 1 < x < 2\}$

$$\frac{x+5}{x-3} > \frac{x-3}{x+5}$$

$$\frac{x+5}{x-3} - \frac{x-3}{x+5} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{(x+5)^2 - (x-3)^2}{(x-3)(x+5)} > 0$$

$$\frac{(x+5+x-3)(x+5-(x-3))}{(x-3)(x+5)} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{(2x+2)(8)}{(x-3)(x+5)} > 0$$

$$2x+2=0 \Rightarrow x=-1$$

$$(x-3)(x+5)=0 \Rightarrow \begin{cases} x-3=0 \Rightarrow x=3 \\ \text{یا} \\ x+5=0 \Rightarrow x=-5 \end{cases}$$

جدول ۳۳-۱

x	-5	-1	3	
$8(2x+2)$	-	-	+	+
$x-3$	-	-	-	+
$x+5$	-	+	+	+
$\frac{8(2x+2)}{(x-3)(x+5)}$	-	+	-	+

نامعین

نامعین

پس از رسم جدول، صورت و مخرج کسرها را تعیین علامت

کرده و با ضرب کردن علامت $x^2 - 3x + 2$ و x در هریک از

بازه‌های $x < 0$ و $0 < x < 1$ و $1 < x < 2$ و $x > 2$ علامت کل

نامعادله را تعیین می‌کنیم و در آخر با توجه به علامت نامعادله،

مقادیر منفی را به عنوان جواب می‌پذیریم.

مثال ۳: نامعادله‌ی روبه‌رو را حل کنید.

حل: همه‌ی جملات را به طرف چپ معادله می‌آوریم؛

— مخرج مشترک می‌گیریم؛

— صورت کسر را به کمک اتحاد مزدوج و یا مربع دو

جمله‌ای ساده می‌کنیم؛

— با مساوی صفر قرار دادن صورت و مخرج، ریشه‌های

عبارت را می‌یابیم؛

پس از رسم جدول صورت و مخرج کسر را تعیین علامت

کرده و با ضرب کردن علامت صورت و مخرج در هریک از

بازه‌های $x < -5$ ، $-5 < x < -1$ ، $-1 < x < 3$ و $x > 3$

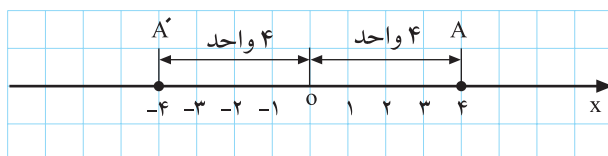
علامت عبارت را در هر یک از این بازه‌ها مشخص می‌نمایم و در ستون آخر با توجه به علامت نامعادله ریشه‌هایی که در فواصل علائم مثبت قرار دارد به عنوان جواب می‌پذیریم.

جواب : $\{x | x \in \mathbb{R} \dots -5 < x < -1 \text{ یا } x > 3\}$

تمرین

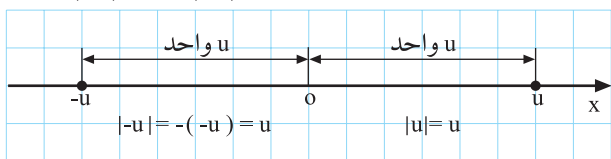
نامعادله‌ی زیر را حل کنید.

$$5x^2 + x < +6$$

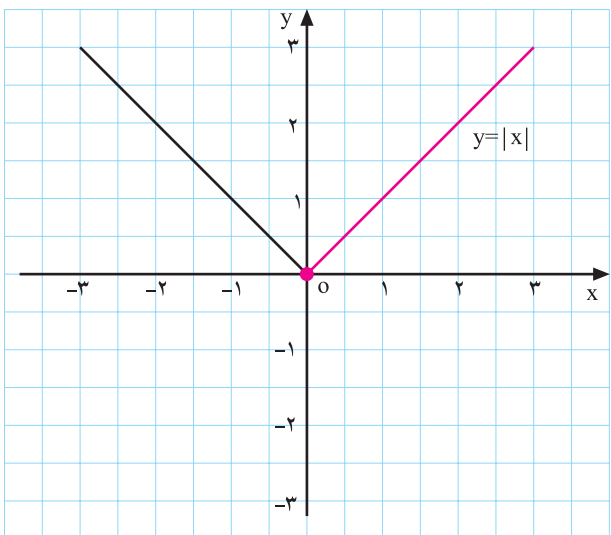


شکل ۱-۲۱

$$|-4| = 4 \text{ و } |-4| = -(-4) = 4$$



شکل ۱-۲۲



شکل ۱-۲۳

۱-۲-۴ قدر مطلق: بر روی شکل ۱-۲۱ دو نقطه‌ی

A و A' را به مختصات ۴ و -۴ مشاهده می‌کنید.

فاصله‌ی این دو نقطه از مبدأ (نقطه‌ی O) قدر مطلق این

اعداد نامیده می‌شود که برابر با عدد ۴ است.

این مطلب را به زبان ریاضی می‌توان به صورت شکل

۱-۲۲ نوشت.

به طور کلی برای نمایش فاصله‌ی یک نقطه از صفر که در

آن جهت مهم نمی‌باشد از قدر مطلق استفاده می‌کنیم. قدر مطلق

عدد x را که با علامت |x| نمایش می‌دهند به صورت زیر تعریف

می‌کنیم:

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

مثال ۱: قدرمطلق عبارت روبه‌رو را بیابید.

$$|\sqrt{2}-1|$$

حل: $\sqrt{2}$ بزرگ‌تر از یک است، پس می‌نویسیم:

$$\sqrt{2} > 1$$

– $\sqrt{2}-1$ عددی مثبت است، یعنی:

$$\sqrt{2}-1 > 0$$

– بنابراین قدرمطلق آن $(\sqrt{2}-1)$ خودش می‌باشد.

$$|\sqrt{2}-1| = \sqrt{2}-1$$

$x > 0$ x

مثال ۲: قدرمطلق عبارت روبه‌رو را بیابید.

$$|\sqrt{5}-3|$$

حل: عدد $\sqrt{5}$ از عدد ۳ کوچک‌تر است، یعنی:

$$\sqrt{5} < 3$$

– حاصل عبارت $\sqrt{5}-3$ منفی است، پس داریم:

$$\sqrt{5}-3 < 0$$

$\sqrt{5}-3$ عدد منفی است بنابراین برای یافتن قدرمطلق آن

باید در عدد منفی یک ضرب شود.

$$|\sqrt{5}-3| = -(\sqrt{5}-3) = 3-\sqrt{5}$$

$x < 0$ x

مثال ۳: اگر $x > 3$ باشد قدرمطلق عبارت روبه‌رو را به

دست آورید.

$$|x-3|$$

حل: چون $x > 3$ می‌باشد، پس:

$$x-3 > 0$$

بنابراین قدرمطلق آن برابر خودش می‌باشد:

$$|x-3| = x-3$$

مثال ۴: اگر $x < -1$ باشد قدرمطلق عبارت مقابل را به

دست آورید.

$$|x+1|, x < -1$$

حل: چون $x < -1$ است، داریم:

$$x+1 < 0$$

– برای محاسبه‌ی قدرمطلق عبارت داخل آن قرینه می‌گردد:

$$|x+1| = -(x+1) = -x-1 \\ \Rightarrow |x+1| = -x-1, \quad x < -1$$

مثال ۵: اگر $x < 2$ باشد حاصل عبارت مقابل را بیابید:

$$|2-x| - |x-3|$$

حل: چون $x > 2$ بنابراین $2-x > 0$ ، که پس از بیرون آمدن از قدرمطلق تغییر نمی‌کند.

$$|2-x| = 2-x$$

– عبارت $x-3$ منفی است، پس از بیرون آمدن از قدرمطلق در منفی ضرب می‌شود.

$$|x-3| = -(x-3) = -x+3$$

– حاصل عبارت برابر است با:

$$|2-x| - |x-3| = 2-x+x-3 = -1$$

بعضی خواص قدرمطلق اعداد حقیقی
خاصیت اول قدر مطلق:

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

$$\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5, \quad \sqrt{3^2} = |3| = 3$$

$$\sqrt{x^2 + 2x + 1} + |x-1|, \quad -1 < x < 1$$

مثال ۶: حاصل عبارت‌های روبه‌رو را بیابید.

$$\sqrt{(x+1)^2} + |x-1| = |x+1| + |x-1|$$

حل: چون $-1 < x < 1$ ، $x+1$ مثبت و $x-1$ منفی است.

$$= x+1 - (x-1) = x+1-x+1 = 2$$

آنگاه داریم:

$$|x|^2 = x^2$$

نکته‌ی ۱: همواره برای هر عدد حقیقی x داریم:

مثال ۷: نامعادله‌ی مقابل را حل کنید.

$$|x-2| < 3$$

حل: با استفاده از نکته‌ی ۱ می‌توان نوشت:

$$(|x-2|)^2 = (x-2)^2$$

– دو طرف نامعادله را به توان ۲ می‌رسانیم.

$$(|x-2|)^2 < 3^2 \Rightarrow (x-2)^2 < 3^2$$

$$\Rightarrow (x-2)^2 - 3^2 < 0$$

– همه‌ی جملات نامعادله را به یک طرف انتقال می‌دهیم:

$$\Rightarrow (x-2-3)(x-2+3) < 0$$

با استفاده از اتحاد مزدوج داریم:

$$\Rightarrow (x-5)(x+1) < 0$$

– نامعادله به دو عامل ضرب تبدیل می‌شود.

– هر یک از عامل‌های نامعادله را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$x-5=0 \Rightarrow x=5$$

– ریشه را به دست می‌آوریم:

$$x+1=0 \Rightarrow x=-1$$

– ریشه‌ها را به ترتیب نزولی به صعودی در جدول ۱-۳۴

جدول ۱-۳۴

x	$x < -1$	-1	$-1 < x < 5$	5	$x > 5$
x+1	-	o	+		+
x-5	-		-	o	+
(x-5)(x+1)	+	o	-	o	+

جواب

می‌نویسیم.

– عوامل مربوط به دو ریشه را تعیین علامت می‌کنیم.

– علامت کلی نامعادله را از ضرب علامت‌های هر یک از

ستون عمودی به دست می‌آوریم.

– با توجه به شرط نامعادله، مجموعه جواب برابر با:

$$\{x | x \in \mathbb{R} \text{ و } -1 < x < 5\} = (-1, 5)$$

$$|2x-1| > |x+2|$$

مثال ۸: نامعادله‌ی مقابل را حل کنید:

$$(2x-1)^2 > (x+2)^2$$

حل: دو طرف نامعادله را به توان دو می‌رسانیم:

$$\Rightarrow (2x-1)^2 - (x+2)^2 > 0$$

– همه‌ی عبارات را به یک طرف انتقال می‌دهیم:

$$\Rightarrow (2x-1-(x+2))(2x-1+x+2) > 0$$

– با استفاده از اتحاد مزدوج داریم:

$$\Rightarrow (x-3)(3x+1) > 0$$

– نامعادله را به حاصل ضرب دو عامل تبدیل می‌کنیم:

– ریشه‌های هر یک از عامل‌های نامعادله را به دست

می‌آوریم.

$$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$

$$3x + 1 = 0 \Rightarrow 3x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$$

جدول ۳۵-۱

x	$-\frac{1}{3}$	3	
$x-3$	-	-	+
$3x+1$	-	+	+
$(x-3)(3x+1)$	جواب	-	جواب

– ریشه را به ترتیب صعودی در جدول ۳۵-۱ می‌نویسیم:

– تک تک عوامل را تعیین علامت می‌کنیم.

– علامت کلی نامعادله را از ضرب علامت‌های هر یک از

ستون‌های عمودی به دست می‌آوریم:

– با توجه به جهت علامت نامعادله مجموعه جواب برابر

است با:

$$ج.م = \left\{ x \mid x \in \mathbb{R}, x < -\frac{1}{3} \text{ یا } x > 3 \right\}$$

خاصیت دوم قدرمطلق

$$۲) |x| = |-x| \text{ یا } |a-b| = |b-a|$$

مثال ۹: معادله‌ی مقابل را حل کنید:

$$|x+3|=4$$

حل: فاصله‌ی $x+3$ از صفر برابر ۴ واحد می‌باشد،

بنابراین $x+3$ می‌تواند ۴ یا -۴ باشد.

$$|x+3|=4 \Rightarrow x+3 = \pm 4 \Rightarrow$$

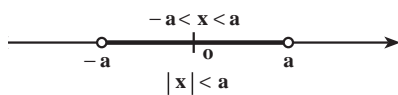
$$\begin{cases} x+3=4 \Rightarrow x=4-3 \Rightarrow x=1 \\ \text{یا} \\ x+3=-4 \Rightarrow x=-4-3 \Rightarrow x=-7 \end{cases}$$

– مجموعه‌ی جواب‌ها برابر است با:

$$\{-7, 1\}$$

خاصیت سوم قدرمطلق:

(a عدد حقیقی و مثبت) $-a < x < a$. $|x| < a$



شکل ۲۴-۱

$$|x-2| < 1$$

مثال ۱۰: نامعادله‌ی مقابل را حل کنید.

$$|x-2| < 1$$

حل: فاصله $x-2$ از صفر، کوچک‌تر از ۱ می‌باشد.

$x-2$ کوچک‌تر از ۱ و بزرگ‌تر از -1 می‌باشد (طبق

$$-1 < x-2 < 1$$

خاصیت سوم قدرمطلق)

$$\Rightarrow -1+2 < x-2+2 < 1+2$$

به همه طرف‌های نامعادله عدد ۲ را اضافه می‌کنیم:

$$\Rightarrow 1 < x < 3$$

پس جواب نامعادله برابر است، با:

نکته‌ی ۲: $|a-b|$ فاصله‌ی بین دو نقطه‌ی a و b را روی محور نشان می‌دهد، بدون آن که مشخص کند کدام بزرگ‌تر می‌باشد. مثلاً فاصله‌ی دو نقطه‌ی ۱ و ۷ برابر ۶ است.

$$|1-7| = 6$$

فاصله‌ی دو نقطه‌ی ۲ و ۵ برابر با ۳ است.

$$|5-2| = 3$$

الف) $|x-2| < 1$

مثال ۱۱: نامعادله‌های روبه‌رو را در قالب یک جمله‌ی

ب) $|x-10| > 5$

کوتاه بنویسید.

جواب الف: مجموعه‌ی همه‌ی نقاطی که فاصله‌ی آن‌ها

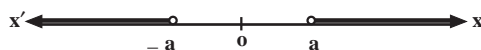
از ۲ کمتر از ۱ می‌باشد.

جواب ب: همه‌ی نقاطی که فاصله‌ی آن‌ها از ۱۰ از ۵

بیش‌تر است.

$|x| > a$ 4 $x > a$ یا $x < -a$ (a عدد حقیقی و مثبت)

خاصیت چهارم قدرمطلق:



شکل ۱-۲۵

$$|x-3| > 2$$

مثال ۱۲: نامعادله‌ی مقابل را حل کنید.

$$\Rightarrow x-3 > 2 \text{ یا } x-3 < -2$$

2

حل: در این مثال می‌خواهیم همه‌ی اعدادی را که فاصله‌ی

آن‌ها از ۳ بیش‌تر از ۲ است مشخص کنیم؛ بنابراین خاصیت چهارم

$x > 5$ یا $x < 1$

قدرمطلق:

ج. م = $\{x | x \in \mathbb{R} \text{ و } x > 5 \text{ یا } x < 1\}$

بنابر این مجموعه جواب معادله برابر است با:

تمرین

۱- حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$\sqrt{(4-\sqrt{5})^2} + |2-\sqrt{5}| - |-3| = ?$$

۲- نامعادله‌های زیر را حل کنید.

۱) $|5x - 7| > 4$

۲) $|3x - 1| < |x + 2|$

۳) $|1 - 7x| < 3$

۳- عبارات زیر را با قدرمطلق نشان دهید.

الف : مجموعه‌ی اعدادی که فاصله‌ی آن‌ها از ۲- بیش‌تر از ۳ باشد.

جواب $|x + 2| > 3$

ب : مجموعه‌ی اعدادی که فاصله‌ی آن‌ها از ۱ کمتر از ۷ باشد.

ج : مجموعه‌ی اعدادی که فاصله‌ی آن‌ها از ۱- برابر با ۲ باشد.

۴- اگر $0 \leq x < 1$ باشد حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$|x| + |x - 1| = ?$$

آزمون پایانی (۲)

محل پاسخ به سوالات آزمون پایانی (۲)

۱- عبارت‌های زیر را تعیین علامت کنید.
(الف)

$$p = \frac{2x+1}{3x-2} + 4$$

(ب)

$$p = 4x^2 - 7x + 3$$

۲- نامعادله‌های زیر را حل کنید.

$$۱) \frac{3}{2x-5} > 4$$

$$۲) x^2 < +1 \cdot x - 9$$

$$۳) 2 \leq \frac{5}{4}x - 1 < 7$$

$$۴) |3x - 1| \geq 4$$

$$۵) |-5x + 1| < 2$$