بخش دوم

تابع و مفاهیم آن

هدف کلی بخش

آشنایی با ویژگی‌ها و شیوه‌های مختلف نمایش یک تابع، عملیات روی تابع‌ها و کاربردهای آن در زمینه‌های مختلف

جدول عناوین فصل‌ها

شماره‌ی فصل	عنوان فصل
اول	محور اعداد
دوم	بازه
سوم	تابع
چهارم	دامنه‌ی توابع
پنجم	چند تابع ویژه
ششم	عملیات روی تابع‌ها
هفتم	ترکیب دو تابع

بخش دوم

فصل اول

محور اعداد

هدف کلی

مطالبی مربوط به محور اعداد و محور مختصات

هدف‌های رفتاری: پس از پایان این فصل از هنرجو انتظار می‌رود که بتواند :

۱ــ محور اعداد را تعریف کند ؛

۲ــ دستگاه مختصات را رسم کند ؛

۳ــ طول پاره‌خط را با استفاده از مختصات محاسبه کند ؛

۴ــ قرینه‌ی یک نقطه را نسبت به محور xها، yها و مبدأ مختصات پیدا کند.

پیش آزمون (۱)

۱ــ x نقطه‌های روی محور را تعیین کنید. (شکل ۱ــ۲).

۲ــ اگر $x_A = 5$ و $x_B = -3$ باشد، $\overline{BA}$ و $\overline{AB}$ را حساب کنید و بگویید چه رابطه‌ای بین آن‌ها وجود دارد؟

۳ــ الف) مختصات B، C و D را مشخص کنید (شکل ۲ــ۲).

ب) طول پاره‌خط‌های DB ، CD و CB را به‌دست آورید.

ج) مساحت مثلث DBC را محاسبه کنید.

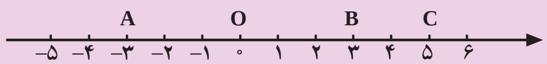
۴ــ هرگاه $A\left|\begin{matrix}0\\3\end{matrix}\right.$ ، $B\left|\begin{matrix}-4\\0\end{matrix}\right.$ ، $C\left|\begin{matrix}-3\\-3\end{matrix}\right.$ و $D\left|\begin{matrix}-4\\4\end{matrix}\right.$ ،

الف) کدام‌یک از نقاط داده شده روی محور xها و کدام یک روی محور yها قرار دارد؟

ب) کدام‌یک از نقاط روی نیمساز ربع دوم و چهارم و کدام یک روی نیمساز ربع اول و سوم قرار دارد؟

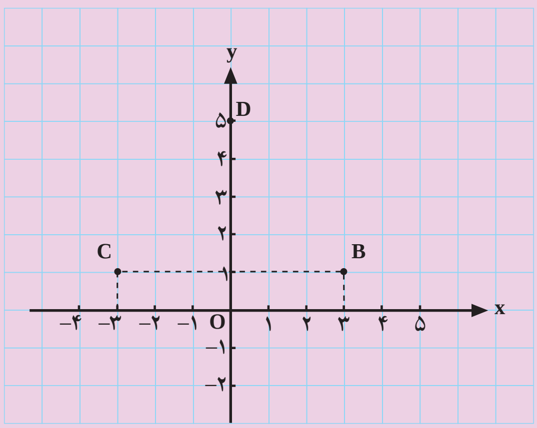
ج) طول پاره‌خط CD را حساب کنید.

محل پاسخ به سؤالات پیش‌آزمون (۱)



شکل ۱ــ۲

$x_A =$ $x_B =$ $x_C =$



شکل ۲ــ۲

۵ ــ الف) نقطه‌های $A\left|\begin{matrix}۲\\۸\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}۸\\۴\end{matrix}\right.$ را روی دستگاه محورهای مختصات (شکل ۳ــ۲) مشخص کنید.

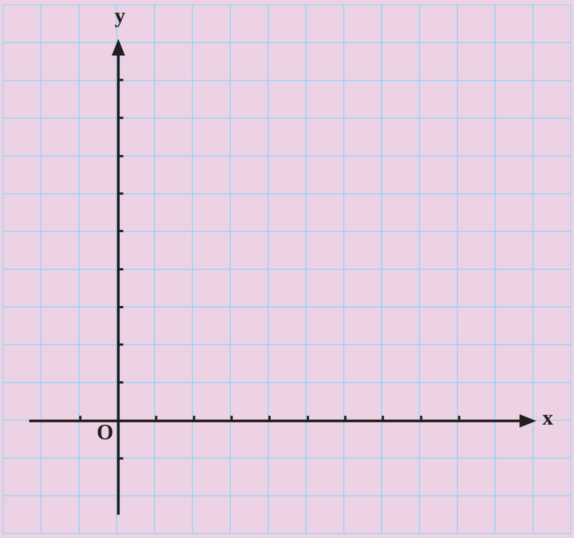
ب) مختصات نقطه‌ی M، وسط پاره‌خط AB را بنویسید.

ج) طول پاره‌خط OM را محاسبه کنید.

۶ ــ مختصات دو نقطه‌ی A و B در مقابل مفروض است.

هرگاه $A = B$ مطلوب است مقدار $۲a + ۳b$.

محل پاسخ به سؤالات پیش‌آزمون (۱)



شکل ۳ــ۲

$A(a-b,۷)$ و $B(۳,a+b)$

۱ــ۲ــ محور اعداد

از سال‌های گذشته به یاد دارید که محور عبارت است از «یک خط راست جهت‌دار که روی آن نقطه‌ای به عنوان مبدأ و طولی به عنوان واحد اندازه‌گیری تعیین شده باشد». جهت محور را نسبت به مبدأ از طرف چپ به راست مثبت و از طرف راست به چپ منفی فرض می‌کنند.

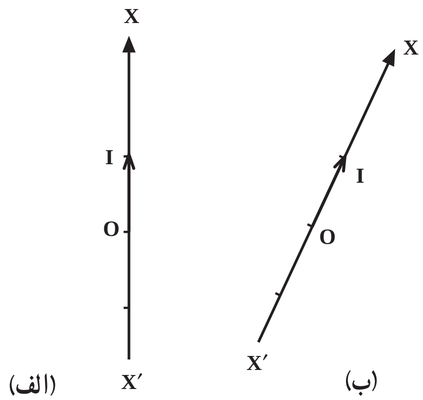
هر عدد حقیقی را با یک نقطه از محور و هر نقطه از محور را با یک عدد حقیقی متناظر می‌کنیم. مثلاً مبدأ O متناظر با عدد صفر و نقطه‌ی واحد (I) متناظر با عدد یک است (شکل ۵ ــ ۲).

شکل ۴ ــ۲ــ دکارت

محور ۵ ــ۲

نکته: محور اعداد به صورت افقی، عمودی و مایل نیز می‌تواند باشد (شکل ۶ ــ۲).

هرگاه محوری افقی باشد، در سمت راست مبدأ آن اعداد مثبت و در سمت چپ اعداد منفی است.



محور۶ ــ۲

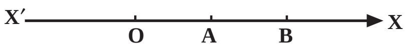
مثال ۱: در شکل ۷ــ۲ X نقطه‌ی A برابر ۲ و X نقطه‌ی B برابر ۳− را مشاهده می‌کنید.

محور ۷ــ۲

۱ــ۱ــ۲ــ طول پاره‌خط از یک محور: اگر X_A و X_B مختص نقاط A و B بر روی محور X′OX باشد. اندازه‌ی جبری پاره‌خط $\overline{AB}$ برابر است با :

$$\overline{AB} = X_B - X_A \quad (*)$$

اثبات فرمول(*) :



محور ۸ ــ۲

با توجه به شکل ۸ ــ۲ داریم :

$$\overline{OB} = \overline{OA} + \overline{AB} \Rightarrow \overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$$

ــ از طرفی مقدار OA و OB برابر است با :

$$\overline{OB} = X_B \text{ و } \overline{OA} = X_A$$

ــ طول پاره‌خط $\overline{AB}$ از فرمول مقابل به‌دست می‌آید :

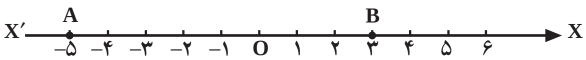
$$\overline{AB} = X_B - X_A$$

مثال ۱: اگر $X_A = -۵$ و $X_B = ۳$:

الف) نقاط A و B را روی محور ۹ــ۲ نشان دهید.

ب) اندازه‌ی جبری $\overline{AB}$ را حساب کنید :

جواب الف)



محور ۹ــ۲

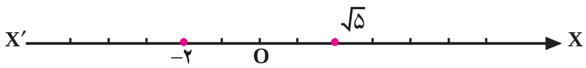
جواب ب)

$$\overline{AB} = X_B - X_A = ۳-(-۵) = ۳+۵$$

$$\Rightarrow \overline{AB} = ۸$$

مثال ۲: نقاط نظیر $\sqrt{۵}$ و ۲− را روی محور اعداد ۱۰ــ۲ نشان دهید.

حل ۲:



محور ۱۰ــ۲

حل: مقدار $\sqrt{۵}$ را از سمت راست صفر و مقدار ۲− را از سمت چپ صفر روی محور جدا می‌کنیم.

مثال ۳: هرگاه $\overline{AB} = ۱۱$ و $X_A = ۵$ باشد مقدار X_B را بیابید.

حل ۳:

$$\overline{AB} = X_B - X_A \Rightarrow ۱۱ = X_B - ۵$$

$$\Rightarrow X_B = ۱۱+۵ \Rightarrow X_B = ۱۶$$

مثال ۴: هرگاه $X_A = ۴$ و $X_B = -۷$ باشد $\overline{BA}$ چه‌قدر است؟

حل ۴:

$$\overline{BA} = X_A - X_B = ۴-(-۷) \Rightarrow \overline{BA} = ۱۱$$

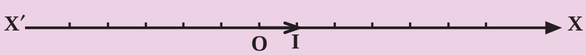
تمرین

۱ــ نقاط نظیر ۵− ، ۷− ، ۳ ، $\frac{۱۱}{۳}$ و $\sqrt{۷}$ را روی محور اعداد حقیقی (۱۱ــ۲) نمایش دهید.

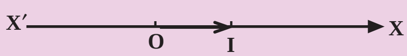
۲ــ هرگاه $\overline{AB} = ۷$ و $X_B = ۳$ باشد X_A را به‌دست آورید و نقطه‌های A و B را روی محور X′OX (۱۲ــ۲) نشان دهید.

۳ــ آیا محور اعداد حقیقی همواره به صورت افقی است؟ مثال بزنید.

۴ــ نقاط A ، B ، C و D روی محور X′OX (۱۳ــ۲) مشخص شده است. به سؤال‌های ذیل پاسخ دهید.



محور ۱۱ــ۲



محور ۱۲ــ۲

محور ۱۳ــ۲

الف) X_D را به‌دست آورید.

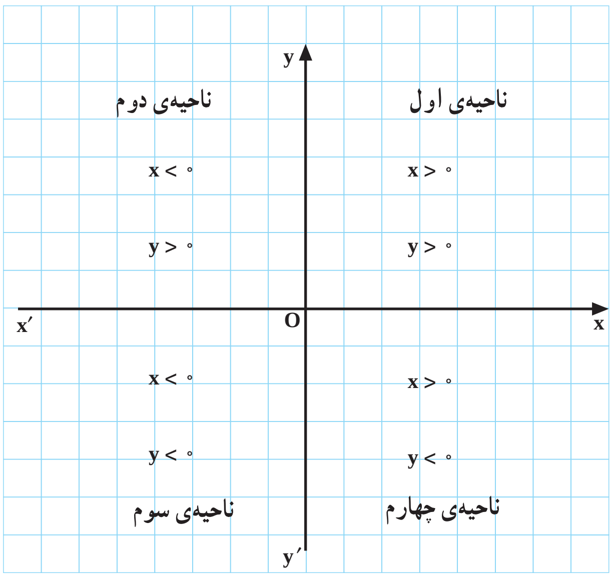
ب) اندازه‌ی جبری پاره‌خط $\overline{DA}$ را حساب کنید.

ج) طول پاره‌خط $\overline{AB}$ و $\overline{BA}$ را به‌دست آورید.

د) آیا همواره می‌توان گفت : $\overline{BA}+\overline{AB}=0$ ؟

۲ــ۱ــ۲ــ محورهای مختصات قائم: هرگاه از نقطه‌ی O بر محور $x'Ox$ ، محور $y'Oy$ را عمود رسم کنیم این دو محور و نقطه‌ی O را دستگاه مختصات قائم می‌گویند (شکل ۱۴ــ۲). دستگاه مختصات صفحه را به چهار ناحیه تقسیم می‌کند (شکل ۱۴ــ۲).

محور $x'Ox$ را محور xها و محور $y'Oy$ را محور yها می‌نامیم.



شکل ۱۴ــ۲

شکل ۱۵ــ۲

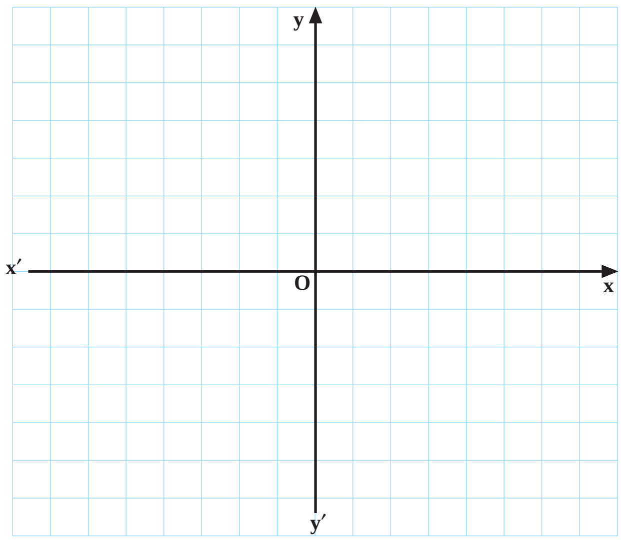
فعالیت ۱ــ۲

اگر $A(۳,۳)$ و $B(-۳,۳)$ و $C(-۳,-۳)$ و $D(۳,-۳)$ رأس‌های یک مستطیل باشند،

الف) مستطیل ABCD را در دستگاه محورهای مختصات (۲ــ۱۶) مشخص کنید.

ب) ناحیه‌ای را که در ربع سوم قرار دارد با رنگ قرمز سایه بزنید.

ج) قرینه‌ی A نسبت به محور yها کدام‌یک از رأس‌های مستطیل است؟



شکل ۱۶ــ۲

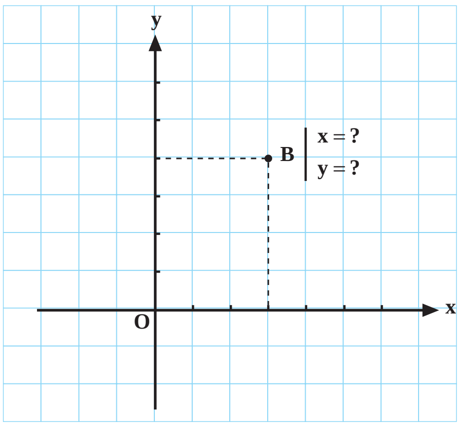
فعالیت ۲ــ۲

الف) مختصات نقطه‌ی B را در دستگاه مختصات ۱۷ــ۲ پیدا کنید.

ب) نقطه‌ی B را به O (مبدأ) وصل کرده به اندازه‌ی خود امتداد دهید. انتهای آن را نقطه‌ی B′ بنامید و مختصات آن را به‌دست آورید.

جواب : B′|

B و B′ نسبت به مبدأ مختصات چه رابطه‌ای دارند؟



شکل ۱۷ــ۲

فعالیت ۳ـــ۲

الف) نقطه‌ی $A(-2,3)$ را روی محور مختصات ۱۹ـــ۲ نشان دهید.

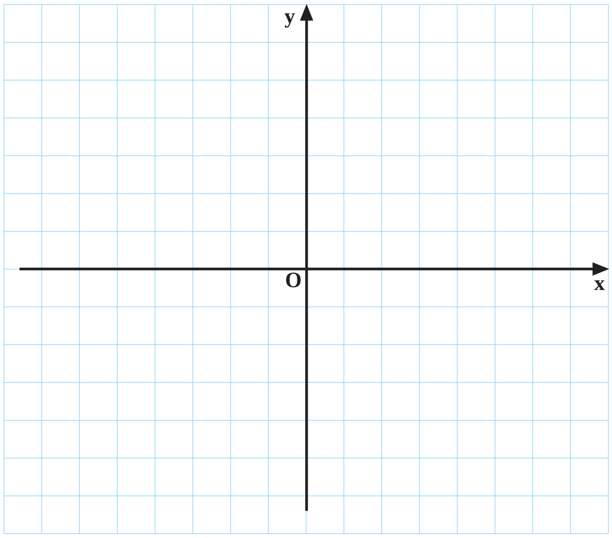
ب) قرینه‌ی A را نسبت به محور xها روی محور مختصات ۱۹ـــ۲ نشان دهید و آن را A' بنامید.

ج) آیا مختصات نقطه‌ی A' ، $(-2,-3)$ خواهد شد؟

بلی ☐ خیر ☐

آیا نقطه‌ی A' را قرینه‌ی نقطه‌ی A نسبت به محور xها می‌نامیم. بلی ☐ خیر ☐

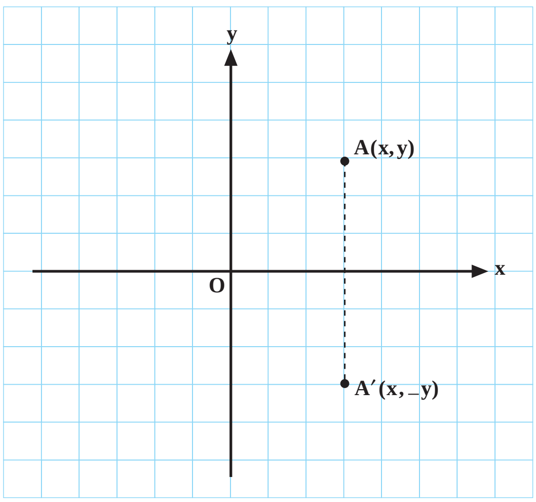
شکل ۱۸ـــ۲



شکل ۱۹ـــ۲

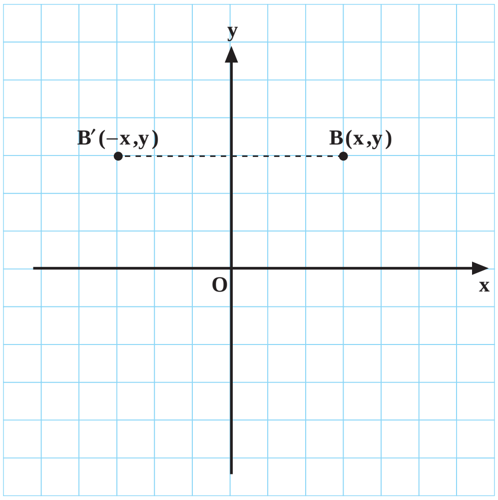
نتیجه: با توجه به سه فعالیت ۱ـــ۲، ۲ـــ۲ و ۳ـــ۲ سه نتیجه‌ی زیر را می‌گیریم.

۱ـــ قرینه‌ی نقطه‌ی $A(x,y)$ نسبت به محور xها نقطه‌ی $A'(x,-y)$ است (شکل ۲۰ـــ۲).



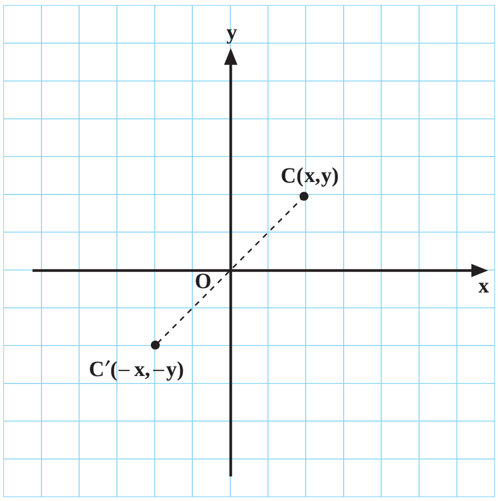
شکل ۲۰ـــ۲

۲ــ قرینه‌ی نقطه‌ی $B(x,y)$ نسبت به محور yها، نقطه‌ی $B'(-x,y)$ است (شکل ۲۱ــ۲).



شکل ۲۱ــ۲

۳ــ قرینه‌ی نقطه‌ی $C(x,y)$ نسبت به مبدأ مختصات، نقطه‌ی $C(-x,-y)$ است (شکل ۲۲ــ۲).



شکل ۲۲ــ۲

مثال۱: قرینه‌ی نقطه‌ی $B(۷,-۳)$ را نسبت به مبدأ مختصات پیدا کنید.

حل ۱:

$$B(۷,-۳) \xrightarrow{\text{نسبت به مبدأ}} B'(-۷,۳)$$

مثال۲: الف) قرینه‌ی نقطه‌ی $A(-۸,-۴)$ را نسبت به محور xها پیدا کنید.

حل ۲:

$$A(-۸,-۴) \xrightarrow{\text{نسبت به xها}} A'(-۸,۴)$$

ب) قرینه‌ی نقطه‌ی $C(-۸,-۴)$ را نسبت به محور yها پیدا کنید.

$$C(-۸,-۴) \xrightarrow{\text{نسبت به yها}} C'(۸,-۴)$$

مثال ۳: عدد m را چنان به‌دست آورید که نقطه‌ی $B(۲m-۳,۵)$ روی محور $y'Oy$ باشد.

حل ۳: $B(x,y) \Rightarrow x=۰$ بر محورyها قرار دارد

$$\Rightarrow ۲m-۳=۰ \Rightarrow m=\frac{۳}{۲}$$

مثال ۴: عدد C را چنان به‌دست آورید که نقطه‌ی $D(۵,۲C-۱)$ روی محور $x'Ox$ باشد.

حل ۴: $C(x,y) \Rightarrow y=۰$ بر محور xها قرار دارد

$$\Rightarrow ۲C-۱=۰ \Rightarrow C=\frac{۱}{۲}$$

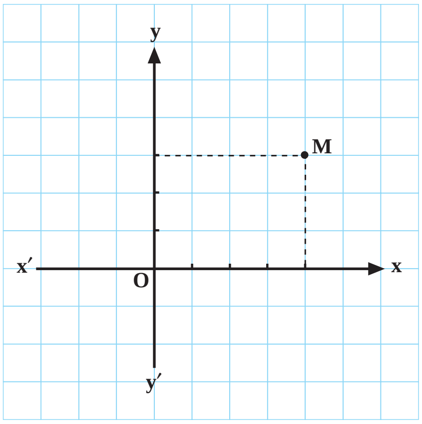
تمرین

۱ــ با توجه به محور مختصات شکل ۲۳ــ۲ کارهای زیر را انجام دهید.

الف) قرینه‌ی نقطه‌ی M نسبت به محور xها را روی شکل نشان دهید.

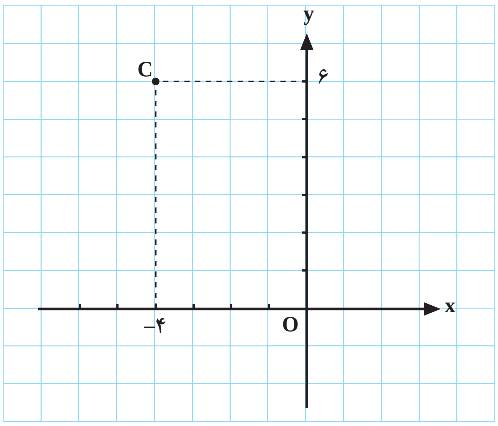
ب) قرینه‌ی نقطه‌ی M را نسبت به محورyها روی شکل نشان دهید.

ج) قرینه‌ی نقطه‌ی M را نسبت به مبدأ مختصات روی شکل ۲۳ــ۲ نشان دهید.



شکل ۲۳ــ۲

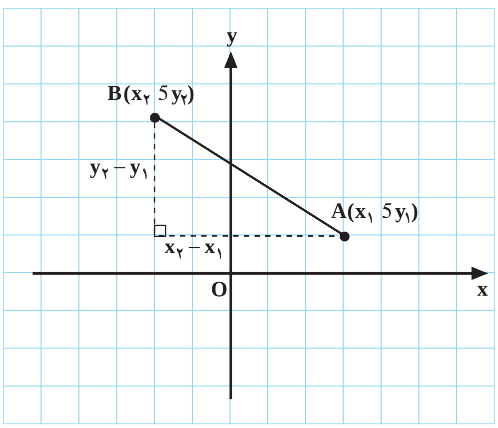
۲ــ با توجه به شکل ۲۴ــ۲، مقدار s و t را در $C(۲t-۳,۵S+۲)$ به‌دست آورید.



شکل ۲۴ــ۲

۳ــ۱ــ۲ــ طول پاره‌خط در صفحه: اگر $A(x_۱,y_۱)$ و $B(x_۲,y_۲)$ دو نقطه‌ی دلخواه باشند، طول پاره‌خط AB (شکل ۲۵ــ۲) از رابطه‌ی زیر حساب می‌شود.

$$AB=\sqrt{(x_۲-x_۱)^۲+(y_۲-y_۱)^۲}$$



شکل ۲۵ــ۲

مثال ۱: نقاط A و B در مقابل مفروض است. طول پاره‌خط AB و OB را بیابید.

$A(۳,-۴)$ و $B(۲,۵)$

حل: از رابطه‌ی طول پاره‌خط داریم :

$$AB=\sqrt{(x_A-x_B)^۲+(y_A-y_B)^۲}$$

ــ x و y، نقاط A و B را در رابطه قرار می‌دهیم :

$$\Rightarrow AB=\sqrt{(۳-۲)^۲+(-۴-۵)^۲}=\sqrt{۱^۲+(-۹)^۲}$$

طول پاره‌خط AB برابر است با :

$$\Rightarrow AB=\sqrt{۱+۸۱}\Rightarrow AB=\sqrt{۸۲}$$

ــ طول پاره‌خط OB از رابطه‌ی مقابل به‌دست می‌آید.

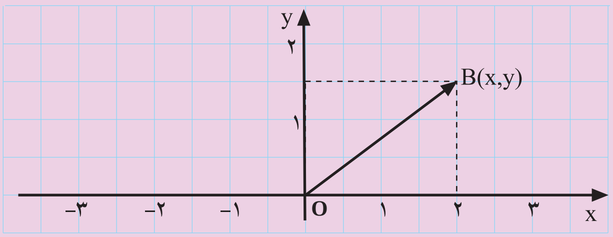
$$OB=\sqrt{{x_B}^۲+{y_B}^۲}=\sqrt{۲^۲+۵^۲}=\sqrt{۴+۲۵}$$

ــ طول OB برابر است با :

$$\Rightarrow OB=\sqrt{۲۹}$$

نتیجه: فاصله‌ی یک نقطه‌ی دلخواه مانند B(x,y) در شکل ۲۶ــ۲ تا مبدأ مختصات برابر است با :

$$OB=\sqrt{{x_B}^۲+{y_B}^۲}$$



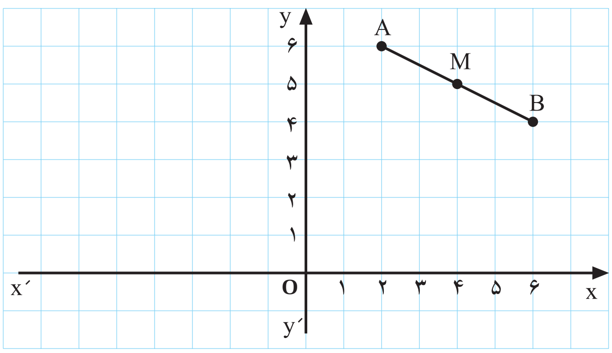
شکل ۲۶ــ۲

۴ــ۱ــ۲ــ مختصات وسط یک پاره‌خط در صفحه

فعالیت ۴ــ۲

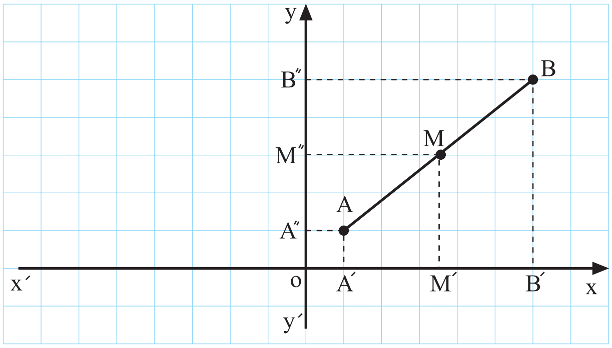
الف) مختصات نقاط A و B را پیدا کنید.

ب) هرگاه نقطه‌ی M وسط پاره‌خط AB باشد مقدار x_M و y_M را پیدا کنید (شکل ۲۷ــ۲).



شکل ۲۷ــ۲

ج) چه ارتباطی بین مختصات A و B با نقطه‌ی M وجود دارد؟



شکل ۲۸ــ۲

نتیجه: هرگاه $A(x_1,y_1)$ و $B(x_2,y_2)$ دو نقطه در صفحه باشند مختصات نقطه‌ی M وسط پاره‌خط AB از دو رابطه‌ی روبه‌رو به‌دست می‌آید (شکل ۲۸ــ۲).

$$x_M=\frac{x_1+x_2}{2}$$

$$y_M=\frac{y_1+y_2}{2}$$

از تساوی $\overline{A'M'}=\overline{M'B'}$ و $\overline{A''M''}=\overline{M''B''}$ چه نتیجه می‌گیرید؟ چرا؟

مثال ۱:

الف) اگر داشته باشیم : $A(5,6)$ و $B(7,-2)$ ، مختصات نقطه‌ی M، وسط پاره‌خط AB را محاسبه کنید.

حل الف)

$$\left.\begin{aligned} x_M&=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{5+7}{2}=6\\ y_M&=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{6+(-2)}{2}=2\end{aligned}\right\}\Rightarrow M(6,2)$$

ب) فاصله‌ی وسط AB تا مبدأ مختصات را محاسبه کنید.

حل ب)

$$OM=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{6^2+2^2}$$

$$=\sqrt{36+4}\Rightarrow OM=\sqrt{40}$$

مثال ۲: هرگاه داشته باشیم $A(2m,5)$ و $B(8,3n-1)$ و نقطه‌ی $M(2,-3)$ وسط پاره‌خط AB باشد مقادیرm و n را به‌دست آورید.

حل ۲)

مقدارm برابر است با :

$$x_M=\frac{x_1+x_2}{2}\Rightarrow 2=\frac{2m+8}{2}\Rightarrow 4=2m+8$$

$$\Rightarrow 2m=-8+4\Rightarrow 2m=-4\Rightarrow m=-2$$

مقدارn برابر است با :

$$y_M=\frac{y_1+y_2}{2}\Rightarrow -3=\frac{5+3n-1}{2}\Rightarrow -6=3n+4$$

$$\Rightarrow 3n=-6-4=-10\Rightarrow n=\frac{-10}{3}$$

تمرین

۱ــ هرگاه $A(-۳,۶)$ و $B(۳,۵)$ باشد :

الف) طول پاره‌خط AB را محاسبه کنید.

ب) فاصله‌ی وسط AB تا مبدأ مختصات را بیابید.

۲ــ دو نقطه‌ی A و B به مختصات مقابل مفروض‌اند. اگر طول پاره‌خط AB برابر ۲۰۰ واحد باشد مقدار m را محاسبه کنید.

$A(۴m,m)$ و $B(-m,m)$

$$AB=\sqrt{(x_۱-x_۲)^۲+(y_۱-y_۲)^۲}$$

$$\Rightarrow ۲۰۰=\sqrt{(۴m-(-m))^۲+(m-m)^۲}$$

$$\Rightarrow ۲۰۰=\sqrt{(۴m+m)^۲+(۰)^۲}=\sqrt{(۵m)^۲}=|۵m|$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۵m=۲۰۰\Rightarrow m=۴۰ \\ -۵m=۲۰۰\Rightarrow m=-۴۰ \end{cases}$$

۳ــ دو نقطه‌ی C و D در مقابل مفروض است.

$C(m,۲m)$ و $D(۲m,۴m)$

اگر طول پاره‌خط CD برابر $۱۰\sqrt{۵}$ واحد باشد مقدار m را محاسبه کنید.

۵ــ۱ــ۲ــ تساوی دو زوج مرتب

دو زوج مرتب (x,y) و (z,t) با هم برابرند هرگاه مختص اول آن‌ها با هم برابر باشند و نیز مختص دوم آن‌ها نیز مساوی باشند و برعکس.

$$(x,y)=(z,t)\ 4\quad x=z, y=t$$

مثال ۱: دو زوج مرتب A و B به مختصات $(۲a-b,۳a+۴)$ و $(۷,۲a+۱۰)$ با شرط روبرو مفروض‌اند، a و b را پیدا کنید.

$$(۲a-b,۳a+۴)=(۷,۲a+۱۰)$$

حل: از برابر بودن مختصات A و B خواهیم داشت :

$$\begin{cases} x_A=x_B\Rightarrow ۲a-b=۷ \\ y_A=y_B\Rightarrow ۳a+۴=۲a+۱۰\Rightarrow \end{cases}$$

ــ با حل معادله مقدار a به‌دست می‌آید.

$$۳a-۲a=۱۰-۴\Rightarrow \boxed{a=۶}$$

ــ با قرار دادن a در معادله b را حساب می‌کنیم :

$$۲a-b=۷\overset{a=۶}{\Rightarrow}۲\times۶-b=۷\Rightarrow b=۱۲-۷=۵$$

مثال ۲: مقدار a را چنان پیدا کنید که نقطه‌ی $B(۲a+۱ , ۳a-۴)$ روی نیمساز ربع اول و سوم باشد.

حل: بنابه خاصیت نیمساز ربع اول و سوم خواهیم داشت :

$$x_B = y_B \Rightarrow ۲a+۱ = ۳a-۴$$

ــ با حل معادله مقدار a برابر با :

$$۳a-۲a = ۱+۴ \Rightarrow \boxed{a=۵}$$

تمرین

۱ــ هرگاه مختصات A و B در مقابل مفروض باشد مقدار a و b را چنان بیابید که دو زوج مرتب A و B برابر باشند ؛ سپس قرینه‌ی A را نسبت به مبدأ مختصات پیدا کنید.

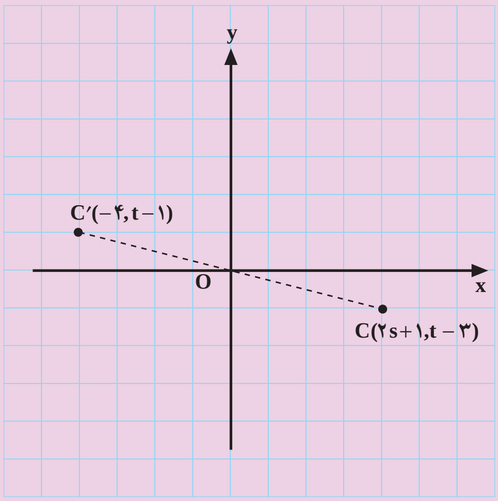
$A(۳a+b,۷)$ و $B(۱۰,۴a-۵)$

۲ــ مقدار b را چنان بیابید که نقطه‌ی C به مختصات روبه‌رو روی نیمساز ربع دوم و چهارم باشد.

$C(۳b-۵,۷b+۱)$

(راهنمایی : نیمساز ربع دوم و چهارم خط $y=-x$ می‌باشد)

۳ــ اگر C و C′ نسبت به مبدأ مختصات قرینه باشند مقدار s و t را بیابید (با توجه به شکل ۲۹ــ۲).



شکل ۲۹ــ۲

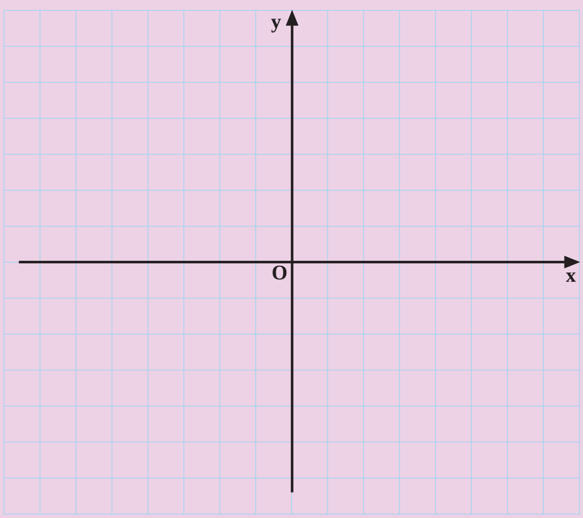
۴ــ هرگاه ABC یک مثلث باشد که $A(۳,۵)$ و B قرینه‌ی نقطه A نسبت به محور xها و C قرینه‌ی A نسبت به محور yها باشد، مثلث ABC را روی محورهای مختصات رسم کنید و سپس طول ضلع BC را محاسبه کنید.

۵ ــ اگر $A(۳,۵)$ و $B(-۸,۵)$ باشند :

الف) نقاط A و B را روی دستگاه مختصات ۳۰ــ۲ مشخص کنید.

ب) مختصات وسط پاره‌خط AB را پیدا کنید.

پ) نقاط A و B را به مبدأ مختصات وصل کنید، سپس محیط مثلث OAB را محاسبه کنید.



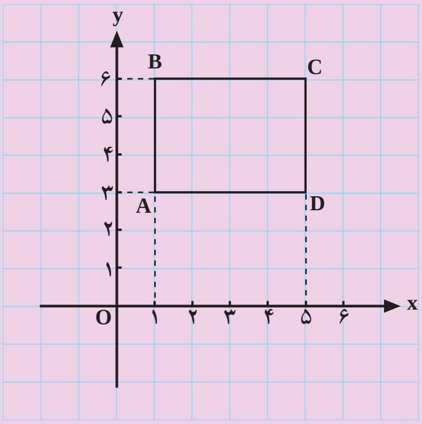
شکل ۳۰ــ۲

۶ـ الف) مختصات رأس‌های C ،D،B و A را در شکل ۳۱ـ۲ بیابید.

ب) قرینه‌ی چهارضلعی ABCD را نسبت به محور xها به‌دست آورید.

پ) قرینه‌ی چهارضلعی ABCD را نسبت به محور yها بیابید.

ت) قرینه‌ی چهارضلعی ABCD را نسبت به مبدأ مختصات به‌دست آورید.



شکل ۳۱ـ۲

آزمون پایانی (۱)

۱ــ اگــر $x_A=5$ و $x_B=-6$ و $\overline{AB}=2\overline{AC}$ باشد مقدار $\overline{AC}$ را بیابید.

۲ــ نقاط $A\begin{vmatrix}6\\2\end{vmatrix}$ ، $B\begin{vmatrix}-6\\2\end{vmatrix}$ و $C\begin{vmatrix}0\\8\end{vmatrix}$ رأس‌های مثلث ABC می‌باشد.

الف) نقاط A، B و C را روی محور مختصات ۳۲ــ۲ مشخص کنید.

ب) مساحت مثلث ABC را به‌دست آورید.

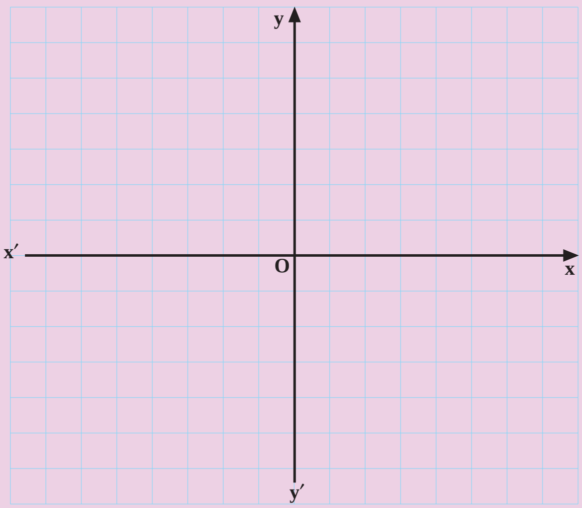
۳ــ هرگاه نقطه‌ی A به مختصات روبه‌رو، روی خط $y=x$ واقع باشد مختصات A را بیابید.

۴ــ نقاط A و B به مختصات روبه‌رو مفروض است.

الف) طول پاره‌خط AB را محاسبه کنید.

ب) مختصات وسط پاره‌خط AB را بیابید.

محل پاسخ به سؤالات آزمون پایانی (۱)



محور ۳۲ــ۲

$A(-2a \text{ و } 2a+1)$

$A\begin{vmatrix}2\\5\end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix}-2\\1\end{vmatrix}$

بخش دوم

فصل دوم

بازه

هدف کلی

یادآوری و تکمیل مفهوم بازه و مفهوم‌های وابسته به آن

هدف‌های رفتاری: پس از پایان این فصل از هنرجو انتظار می‌رود که بتواند :

۱ــ بازه را تعریف کند ؛

۲ــ انواع بازه را به صورت مجموعه بنویسد ؛

۳ــ انواع بازه را روی محور اعداد نمایش دهد ؛

۴ــ اعمال برروی بازه‌ها را انجام دهد.

پیش آزمون (۲)

۱ــ بازه‌های $A=[-۲,۳)$ و $B=(۲,+\infty)$ را روی محور ۳۳ــ۲ نشان دهید.

۲ــ بازه‌های A و B در مقابل مفروض‌اند. بازه‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $A \quad B$

ب) $A \quad B$

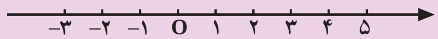
ج) $A-B$

د) متمم A را روی محور ۳۴ــ۲ نشان دهید.

۳ــ جواب نامعادله‌ی مقابل را به‌دست آورید و سپس آن را به صورت بازه بنویسید.

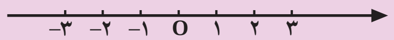
۴ــ جواب نامعادله‌ی مقابل را به صورت بازه نمایش دهید.

محل پاسخ به سؤالات پیش آزمون (۲)



شکل ۳۳ــ۲

$A=\{x | x\in \mathbb{R} \text{ و } x>-۱\}$ و $B=[-۴,۵)$



شکل ۳۴ــ۲

الف) $-۳ \leq \frac{۳x}{۴}+۵<۷$

ب) $(x-۵)(۳x+۴)\geq ۰$

۲ــ۲ــ بازه

دمای آب در شرایط متعارف بیش‌تر از صفر و کم‌تر از ۱۰۰ درجه‌ی سانتی‌گراد می‌باشد. بازه‌ی تغییرات دمای آب را می‌توان با (۰,۱۰۰) نمایش داد. این بازه‌ها را بازه‌ی باز ۰ و ۱۰۰ (صفروصد) می‌نامند.

شکل ۳۵ــ۲ــ نمایش تغییرات دمای آب به صورت نمودار

$\{x|x \in \mathbb{R}\ ,\ ۰ < x < ۱۰۰\}$

نمایش تغییرات دمای آب به صورت مجموعه (علائم ریاضی)

بازه‌ها جزء مهم‌ترین زیرمجموعه‌های اعداد حقیقی می‌باشند و به شکل‌های زیر نمایش داده می‌شوند.

۱ــ۲ــ۲ــ بازه‌ی باز a و b: بازه‌ی باز a و b به‌طوری که $a < b$ را مجموعه‌ی همه‌ی اعداد حقیقی بین a و b تعریف می‌نمایند که نمایش نموداری آن به صورت شکل ۳۶ــ۲ می‌باشد. نمایش مجموعه‌ای با علائم ریاضی به صورت روبه‌رو است.

$]a,b[$ یا (a,b)

شکل ۳۶ــ۲ــ نمایش نموداری بازه‌ی (a,b)

$\{x|x \in \mathbb{R}\ ,\ a < x < b\}$

مثال ۱: نامعادله‌ی روبه‌رو را حل کرده و جواب آن را به‌صورت بازه و مجموعه بنویسید و روی محور مشخص کنید.

$-x^۲ + ۴x > ۰$

حل: نامعادله را مساوی صفر قرار می‌دهیم.

$-x^۲ + ۴x = ۰ \Rightarrow x(-x+۴) = ۰ \Rightarrow$

ــ ریشه‌های معادله را پیدا می‌کنیم.

$\Rightarrow x = ۰$ یا $x = ۴$

ــ معادله‌ی $-x^۲ + ۴x$ را تعیین علامت می‌کنیم.

جدول ۱ــ۲

x		۰		۴	
$-x^۲ + ۴x > ۰$	−	۰	+ جواب	۰	−

با توجه به جدول ۱ــ۲ جواب نامعادله برابر است با :

$(۰,۴) = \{x|x \in \mathbb{R}\ ,\ ۰ < x < ۴\}$

ــ نمایش نموداری بازه (شکل ۳۷ــ۲).

شکل ۳۷ــ۲

۲ــ۲ــ۲ــ بازه‌ی بسته‌ی a و b : اگر $a \le b$ بازه‌ای که علاوه بر نقاط بازه‌ی باز (a, b) شامل نقاط a و b باشد بازه‌ی بسته‌ی $[a,b]$ نامیده می‌شود و نمایش نموداری آن شکل **۳۸ــ۲** است.

$[a,b]$

شکل ۳۸ــ۲

ــ نمایش به صورت مجموعه با علائم ریاضی به صورت روبه‌رو است.

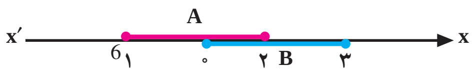
$\{x | x \in \mathbb{R} \ , \ a \le x \le b\}$

مثال ۲: بازه‌های A و B در مقابل مفروض است.

$B=[۰,۳]$ و $A=[-۱,۲]$

الف) نمودار دو بازه‌ی A و B را بر روی محور **۳۹ــ۲** رسم کنید.

حل الف



شکل ۳۹ــ۲

ب) بازه B A را به‌دست آورید.

حل ب)

قسمتی که در هر دو بازه مشترک می‌باشد برابر است با :

$A \quad B=[۰,۲]$

ج) B A را به‌دست آورید.

حل ج)

$A \quad B=[-۱,۳]$

اجتماع دو بازه از نقطه‌ی شروع بازه‌ها یعنی عدد ۱− تا انتهای آن‌ها یعنی عدد ۳ می‌باشد.

۳ــ۲ــ۲ــ بازه‌ی بسته‌ی a و باز b: بازه‌ی بسته‌ی a و باز b به شرط $(a<b)$ را مجموعه‌ی اعداد حقیقی بین a و b، به انضمام عدد a تعریف می‌کنند و نمایش نموداری آن به شکل ۴۰ــ۲ است.

$[a,b[$ یا $[a,b)$

شکل ۴۰ــ۲

ــ نمایش مجموعه‌ای بازه‌ی $[a,b)$ با علائم ریاضی به صورت روبه‌رو است.

$\{x | x \in \mathbb{R} \ , \ a \le x < b\}$

مثال ۳: نامعادله‌ی روبه‌رو را حل کرده و مجموعه‌ی جواب آن را به صورت بازه و مجموعه بنویسید.

$-\frac{۳}{x} \ge ۲$

حل: همه‌ی جمله‌ها را به یک طرف آورده و مخرج مشترک می‌گیریم.

$$-\frac{۳}{x}-۲\geq ۰ \Rightarrow \frac{-۳-۲x}{x}\geq ۰ \Rightarrow$$

ــ ریشه‌های صورت و مخرج نامعادله را پیدا می‌کنیم :

$$x=۰\ ,\ -۳-۲x=۰ \Rightarrow -۳=۲x \Rightarrow x=-\frac{۳}{۲}$$

ــ نامعادله را تعیین علامت می‌کنیم.

جدول ۲ــ۲

x		$-\frac{۳}{۲}$		۰	
$-۳-۲x$	$+$	۰	$-$		$-$
x	$-$		$-$	۰	$+$
$\frac{-۳-۲x}{x}$	$-$	۰	$+$ جواب	تعریف نشده	$-$

مجموعه‌ی جواب‌های نامعادله به صورت بازه یا مجموعه به‌صورت روبه‌رو است :

$$\left[-\frac{۳}{۲},۰\right)=\left\{x|x\in\mathbb{R}\ ,\ -\frac{۳}{۲}\leq x<۰\right\}$$

۴ــ۲ــ۲ــ بازه‌ی باز a و بسته‌ی b : بازه‌ی باز a و بسته‌ی b به شرط $(a<b)$ را مجموعه‌ی همه اعداد حقیقی بین a و b، به انضمام نقطه‌ی b تعریف می‌کنند و نمایش نموداری آن به شکل ۴۱ــ۲ است. نمایش مجموعه‌ای آن با علائم ریاضی به‌صورت روبه‌رو است.

$(a,b]$ یا $]a,b]$

نمودار ۴۱ــ۲

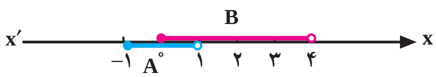
$$\{x|x\in\mathbb{R}\ ,\ a<x\leq b\}$$

مثال ۴: بازه‌های A و B در مقابل مفروض است. به سؤال‌های زیر پاسخ دهید.

$A=\{x|x\in\mathbb{R}\ ,\ -۱\leq x<۱\}$ و

$B=\{x|x\in\mathbb{R}\ ,\ ۰\leq x<۴\}$

ــ بازه‌های A و B را روی نمودار ۴ــ۲ مشاهده می‌کنید.



نمودار ۴۲ــ۲

$A=[-۱,۱)$ و $B=[۰,۴)$

الف) $A \quad B$ را به‌دست آورید.

ــ ناحیه‌ای که در هر دو بازه مشترک است.

$$A \quad B=[۰,۱)$$

ب) $A \quad B$ را به‌دست آورید.

ـ از ابتدای A یعنی ۱- تا انتهای B را شامل می‌شود.

$A \quad B=[-1,4)$

ج) $A-B$ را به‌دست آورید.

از بازه‌ی A بازه‌ی مشترک با B یعنی $[0,1)$ را حذف می‌کنیم، پس :

$A-B=[-1,0)$

د) $B-A$ را محاسبه کنید.

از بازه‌ی B بازه‌ی مشترک با A یعنی $[0,1)$ را بیرون می‌آوریم ؛ یعنی :

$B-A=[1,4)$

معرفی بینهایت:

ـ تعداد ستارگان در آسمان چند عدد است؟

ـ در بازه‌ی (۲،۳) چند عدد حقیقی وجود دارد؟

ـ چند عدد طبیعی وجود دارد؟

شکل ۴۳ــ۲

ریاضی‌دان‌ها برای نمایش چیزی که از هر عدد حقیقی بزرگ‌تر است از نماد $+\infty$ استفاده می‌کنند.

$-(10)^{1000}$ و $-(10)^{100}$ و $-(10)^{10}$ و $(10)^{0}$ و 10^{10} و 10^{100} و ...

به طور مشابه برای نمایش چیزی که از هر عدد منفی کوچک‌تراست از نماد $-\infty$ استفاده می‌کنیم. پس اگر x عددی دلخواه و حقیقی باشد، داریم :

$$-\infty < x < +\infty$$

نکته : $+\infty, -\infty$ عدد نیستند.

۵ ــ۲ــ۲ــ بازه‌ی باز a و $+\infty$: بازه‌ی باز a و $+\infty$ را مجموعه‌ی همه‌ی اعداد حقیقی بیش‌تر از a تعریف می‌کنند و نمایش نموداری آن به شکل ۴۴ــ۲ می‌باشد.

$(a,+\infty)$

شکل ۴۴ــ۲

نمایش مجموعه‌ای آن با علائم ریاضی به صورت روبه‌رو است :

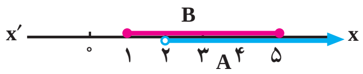
$\{x | x \in \mathbb{R} \ , \ x > a\}$

مثال ۵: بازه‌های A و B در مقابل مفروض‌اند. بازه‌های زیر را تعیین کنید.

$A=(2,+\infty)$ و $B=[1,5]$

۱) $A \quad B$

حل: بازه‌های A و B را در نمودار ۴۵ـ۲ مشاهده می‌کنید.



شکل ۴۵ـ۲

ـ با توجه به نمودار ۴۵ـ۲ اشتراک A و B برابر است با :

$A \quad B=(2,5]$

۲) A B

حل ۲: $A \quad B=[1,+\infty)$

۳) B′ متمم B را به‌دست آورید.

حل: از مجموعه‌ی ℝ (اعداد حقیقی) B را حذف می‌کنیم، پس :

$B'=\mathbb{R}-B=(-\infty,1) \quad (5,+\infty)$

۴) A − B

ـ هرگاه از اعضای A، عضوهای مشترک B را بیرون آوریم داریم :

$A-B=(5,+\infty)$

۶ــ۲ــ۲ــ بازه‌ی بسته‌ی a و باز مثبت بی‌نهایت:

بازه‌ای که علاوه بر نقاط بازه‌ی باز $(a,+\infty)$ شامل نقطه‌ی a باشد بازه‌ی بسته‌ی $[a,+\infty)$ نامیده می‌شود که نمودار آن به شکل ۴۶ـ۲ می‌باشد.

$[a+\infty)$

شکل ۴۶ـ۲

نمایش مجموعه‌ای آن با علائم ریاضی به صورت روبه‌رو است :

$\{x|x\in\mathbb{R} \ , \ x\geq a\}$

مثال ۶: می‌دانیم اگر آب در شرایط متعارف تحت دمای ۱۰۰ درجه‌ی سانتی‌گراد یا بیش‌تر قرار گیرد به بخار تبدیل می‌شود. بازه‌ی تغییرات دمای بخار آب به صورت بازه، مجموعه و نمودار آن به صورت روبه‌رو است.

بازه $[100 \ , \ +\infty)$

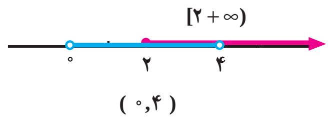
مجموعه $\{x|x\in\mathbb{R} \ , \ x\geq 100\}$

شکل ۴۷ـ۲

مثال ۷: حاصل عبارت مقابل را تعیین کنید.

$[2,+\infty)-(0,4)$

حل: نمایش نموداری $[۲,+\infty)$ و $(۰,۴)$ را در شکل ۴۸ــ۲ می‌بینیم.



شکل ۴۸ــ۲

اگر قسمت مشترک را از $[۲,+\infty)$ حذف کنیم، داریم :

$$[۲,+\infty)-(۰,۴)=[۴,+\infty)$$

۷ــ۲ــ۲ــ بازه‌ی باز $-\infty$ و a : بازه‌ی باز $-\infty$ و a را مجموعه‌ی اعداد حقیقی کم‌تر از a تعریف می‌کنیم و نمودار آن به شکل ۴۹ــ۲ است.

$$]-\infty,a[\text{ یا } (-\infty,a)$$

شکل ۴۹ــ۲

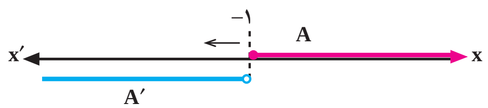
مجموعه با علائم ریاضی

$$\{x|x\in\mathbb{R}\ ,\ x<a\}$$

مثال ۸: مجموعه‌ی A مفروض است. متمم آن را به صورت بازه نمایش دهید.

$$A=\{x|x\in\mathbb{R}\ ,\ x\geq-۱\}$$

حل: با توجه به نمودار ۵۰ــ۲ اگر از محور اعداد حقیقی مجموعه‌ی A را برش دهیم داریم :



شکل ۵۰ــ۲

$$A'=\mathbb{R}-A=(-\infty,-۱)$$

مثال ۹: مجموعه جواب نامعادله‌ی مقابل را به صورت مجموعه و بازه نمایش دهید.

$$\frac{x+۱}{x}<۳$$

حل: همه‌ی جمله‌ها را به یک طرف انتقال می‌دهیم و مخرج‌مشترک می‌گیریم.

$$\frac{x+۱}{x}-۳<۰\Rightarrow\frac{x+۱-۳x}{x}<۰\Rightarrow\frac{-۲x+۱}{x}<۰$$

ــ ریشه‌های صورت و مخرج را به‌دست می‌آوریم.

$$-۲x+۱=۰\Rightarrow x=\frac{۱}{۲} \text{ و } x=۰$$

ــ طبق جدول ۳ــ۲ نامعادله را تعیین علامت می‌کنیم چون نامعادله کوچک‌تر از صفر است منفی‌ها را به عنوان جواب قابل قبول می‌پذیریم.

جدول ۳ــ۲

x	$-\infty$		۰		$\frac{۱}{۲}$	
$-۲x+۱$		+		+	۰	−
x		−	۰	+		+
$\frac{-۲x+۱}{x}<۰$		− جواب	نامعین	+	۰	− جواب

مجموعه‌ی جواب‌های نامعادله‌ی $\frac{x+۱}{x} < ۳$ به‌صورت بازه و مجموعه:

$$(-\infty,۰) \quad (\frac{۱}{۲},+\infty)$$

یا

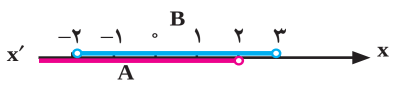
$$\{x|x \in \mathbb{R} \ , \ x<۰ \ \text{یا} \ x>\frac{۱}{۲}\}$$

مثال ۱۰: بازه‌های A، B و C در مقابل مفروض است. حاصل عبارت روبه‌رو را به‌صورت بازه نمایش دهید.

$$A=(-\infty,۲) \ ، \ B=(-۲,۳) \ ، \ C=[۲,+\infty)$$

$$(A \quad B) \quad C$$

حل: نمودار A و B را روی محور مشخص می‌کنیم (شکل ۵۱ــ۲).

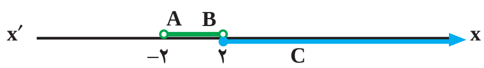


شکل۵۱ــ۲

ــ اشتراک A B برابر است با :

$$A \quad B=(-۲,۲)$$

ــ بازه‌ی C و A B را روی محور مشخص می‌کنیم (شکل ۵۲ــ۲).



شکل۵۲ــ۲

با توجه به نمودار ۵۲ــ۲ داریم :

$$(A \quad B) \quad C=(-۲,+\infty)$$

۸ــ۲ــ۲ــ بازه‌ی باز منفی بی‌نهایت و بسته‌ی a:

هرگاه بازه‌ی باز $-\infty$ و a، a را نیز شامل شود بازه‌ی باز $-\infty$ و بسته‌ی a به دست می‌آید که در نمودار ۵۳ــ۲ نمایش داده شده است.

$$]-\infty,a] \ \text{یا} \ (-\infty,a]$$

شکل۵۳ــ۲

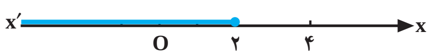
ــ نمایش مجموعه‌ای $(-\infty,a]$ به صورت روبه‌رو است.

$$\{x|x \in \mathbb{R} \ , \ x \leq a\}$$

مثال ۱۱: مجموعه‌ی مقابل را به‌صورت نمودار و بازه نمایش دهید.

$$A=\{x|x \in \mathbb{R} \ , \ x \leq ۲\}$$

حل: نمایش نموداری به صورت شکل ۵۴ــ۲ است.



شکل۵۴ــ۲

ــ نمایش به شکل بازه به صورت روبه‌رواست.

$$A=(-\infty,+۲]$$

مثال ۱۲: حاصل عبارت مقابل را به صورت بازه بنویسید.

$$(-۳,+\infty) \quad (-\infty,۴)$$

حل: هرکدام از بازه‌ها را روی محور مشخص می‌کنیم.

شکل ۵۵ــ۲

با توجه به شکل ۵۵ــ۲حاصل اشتراک دو بازه‌ی $(-۳,+\infty)$ و $(-\infty,۴)$ برابر با :

$$(-۳,+\infty)\quad(-\infty,۴)=(-۳,۴)$$

۹ــ۲ــ۲ــ مجموعه‌ی اعداد حقیقی: بازه‌ی باز $-\infty$ و $+\infty$ را مجموعه‌ی همه‌ی اعداد حقیقی می‌نامند و نمایش نموداری آن به صورت شکل ۵۶ــ۲ و نمایش مجموعه‌ای آن به صورت روبه‌رو است.

$$\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$$

شکل ۵۶ــ۲

$$\{x|x\in\mathbb{R}\ ,\ -\infty<x<+\infty\}=\mathbb{R}$$

مثال ۱۳: با توجه به بازه‌ی B مقابل، مقادیر زیر را به‌دست آورید.

$$B=[۲,+\infty)$$

شکل ۵۷ــ۲

الف) $\mathbb{R}\quad B$

ب) $\mathbb{R}\quad B$

ج) $\mathbb{R}-B$

د) $\mathbb{R}'$

هـ) B'

$$\mathbb{R}\quad B=B$$

$$\mathbb{R}\quad B=\mathbb{R}$$

$$\mathbb{R}-B=(-\infty,۲)$$

$$\mathbb{R}'=\mathbb{R}-\mathbb{R}=.$$

$$B'=\mathbb{R}-B=(-\infty,۲)$$

مثال ۱۴: مجموعه‌ی جواب‌های نامعادله‌ی مقابل را به‌صورت بازه بنویسید.

$$-۲<۲x+۱\leq ۵$$

حل: از دو طرف عدد ۱ را کم می‌کنیم، داریم :

$$\Rightarrow -۳<۲x<۴$$

ــ دو طرف نامعادله را بر عدد ۲ تقسیم می‌کنیم.

$$\Rightarrow -\frac{۳}{۲}<x\leq ۲$$

ــ مجموعه‌ی جواب‌ها برابر است با :

$$\left(-\frac{۳}{۲},۲\right]$$

مثال ۱۵: مجموعه‌ی جواب‌های نامعادله‌ی مقابل را به صورت بازه بنویسید.

$$۵\leq\frac{x}{۴}-۱<۷$$

حل: به دو طرف عدد ۱ را اضافه می‌کنیم ؛

$$\Rightarrow ۶\leq\frac{x}{۴}<۸$$

ــ دو طرف را در عدد ۴ ضرب می‌کنیم ؛

$$\Rightarrow ۲۴\leq x<۳۲$$

ــ مجموعه‌ی جواب‌ها به صورت بازه برابر است با :

$$\Rightarrow[۲۴,۳۲)$$

تمرین

۱ــ هرگاه بازه‌های A ، B و C در مقابل مفروض‌اند، مقادیر زیر را به‌دست آورید.

$A(-۳,۵)\ ,\ B=(-۷,۲)\ ,\ C[۳,۷]$

الف) $C-A$

ب) A'

ج) $A \quad B$

د) $B \quad C$

۲ــ جواب هریک از نامعادله‌های زیر را تعیین کنید و آن‌ها را روی محور $x'ox$ (محور اعداد حقیقی) نمایش دهید، سپس به صورت بازه بنویسید.

۱) $-۳x+۵\geq ۷$

۲) $\frac{۲x+۴}{۳}<\frac{۳x-۲}{۲}$

۳) $۵<\frac{x}{۳}+۲<۷$

۴) $x^{۲}<۵x-۴$

۵) $۲x^{۲}\geq ۳x-۱$

۶) $x^{۲}\leq +۷x-۱۲$

۳ــ نامعادله‌های زیر را حل کنید و جواب را به صورت بازه بنویسید و بر روی نمودار نمایش دهید.

الف) $\frac{x+۳}{x+۲}\leq ۰$

ب) $\frac{x+۲}{۲x-۵}\geq ۲$

۴ــ هرگاه $A=(-۵,۸]$ و $B=[-۲,۱۰)$ باشد، جاهای خالی را با عدد و نماد مناسب پُر کنید.

۱) $B\boxed{}A=(-۵,۱۰)$

۲) $A \quad B=[....\ ,\ ....]$

۳) $A-B=(....\ ,\ ....)$

۵ ــ هرگاه حسن بین ساعت ۹ و ۱۱، حسین بین ساعت ۱۳ و ۱۷ و محمود بین ساعت ۸ و ۱۹ در کتابخانه حضور داشته باشند :

الف) ساعت حضور هر۳ نفر را به صورت بازه بنویسید.

ب) کدام یک از این افراد می‌توانند در کتابخانه همدیگر را ملاقات کنند و در چه بازه‌ی زمانی؟

۶ ــ بازه‌های زیر را با مجموعه نمایش دهید و نمودار آن را رسم کنید.

الف) $(-۳,۷]=$

ب) $[۸,۹)=$

ج) $(-\infty,۳)=$

۷ــ مجموعه‌های زیر را به صورت بازه بنویسید.

۱) $\{x|x\in\mathbb{R}\ ,\ x\geq ۳\}$

۲) $\{x|x\in\mathbb{R}\ ,\ x\leq -۵\}$

۳) $\{x|x\in\mathbb{R}\ ,\ -۵<x<۵\}$

۴) $\left\{x|x\in\mathbb{R}\ ,\ ۰\leq x\leq \frac{۳}{۵}\right\}$

۵) $\{x|x\in\mathbb{R}\ ,\ -\sqrt{۵}\leq x<۸\}$

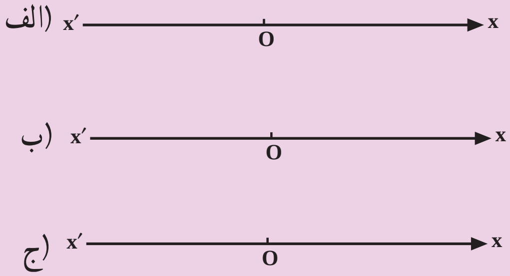
۸ ــ هرگاه $-۲<x\leq ۵$ باشد محدوده‌ی مقادیر زیر را بنویسید.

۱) $۲x+۳$

۲) $-۳x+۴$

۳) $۴x-۷$

۹ــ در شکل ۵۹ــ۲ حدود h را چنان بیابید که مساحت ذوزنقه‌ی شکل (الف) از مساحت مربع شکل (ب) بزرگ‌تر و از مساحت مستطیل شکل (ج) کوچک‌تر باشد.



شکل ۵۸ــ۲

۱)

۲)

۳)

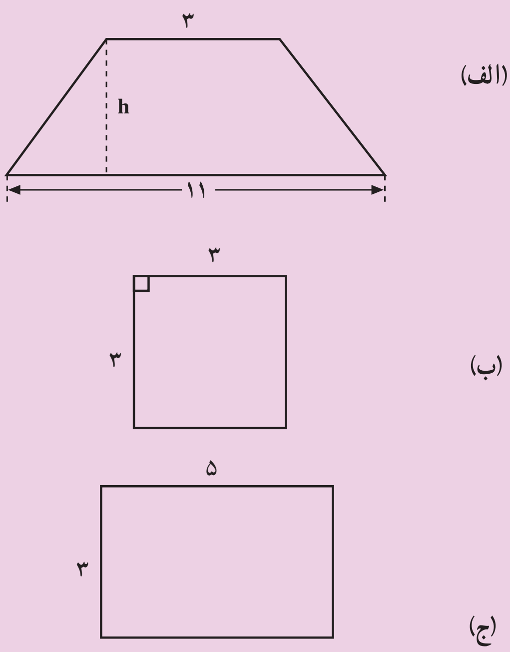
۴)

۵)

۱)

۲)

۳)



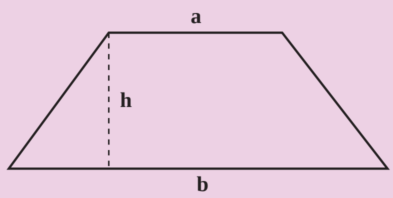
شکل ۵۹ــ۲

یادآوری

مساحت مربع برابر است با حاصل ضرب یک ضلع در خودش.

ــ مساحت مستطیل برابر است با طول× عرض

ــ مساحت ذوزنقه‌ای با قاعده‌های a و b و ارتفاع h، شکل ۶۰ــ۲، برابر است با : $S = \frac{۱}{۲} h(a+b)$.



شکل ۶۰ــ۲

آزمون پایانی (۲)

محل پاسخ به سؤالات آزمون پایانی (۲)

$A = \left(-\infty \ , \ +\frac{۱}{۶}\right) \ [۱ \ , \ +\infty)$

$B = \left(-\infty \ , \ -\frac{۲}{۳}\right) \ \left[\frac{۱}{۷} \ , \ +\infty\right)$

$C = \left(-\frac{۲}{۳} \ , \ \frac{۱}{۷}\right)$

$D = \left[\frac{۵}{-۲۹} \ , \ +\infty\right)$

۱ــ متمم $A = [-۲,۱)$ را مشخص کرده و روی محور شکل ۶۱ــ۲ نشان دهید.

۲ــ هرگاه A مجموعه‌ی جواب نامعادله‌ی $-۲ \leq ۳x + ۱ < ۱۰$ و B مجموعه‌ی جواب نامعادله‌ی $x^۲ > ۴$ باشد مقادیر زیر را به‌صورت بازه بنویسید.

۱) A B

۲) A B

۳) $A - B$

۳ــ کدام یک از بازه‌های A، B، C و D، جواب نامعادله‌های زیر است؟

۱) $\frac{-۳x+۱}{۲} \leq \frac{۷x+۵}{۵}$

۲) $۶x^۲ \geq ۷x - ۱$

۳) $\frac{-۷x+۱}{۳x+۲} \geq ۰$

۴) $\frac{-۷x+۱}{۳x+۲} \leq ۰$