

۲-۴- دامنه‌ی تابع با ضابطه

دامنه‌ی توابع را در چند حالت بررسی می‌کنیم.

۲-۴-۱- دامنه‌ی توابع چند جمله‌ی از x ، اعداد حقیقی

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

می‌باشد.

$$a_n \neq 0, n \in \mathbb{Z}$$

$$D_f = \mathbb{R}$$

به بیان دیگر:

مثال: در زیر دو تابع داده شده‌اند، دامنه‌ی آن‌ها را بیابید.

الف) $D_f = \mathbb{R}$

$$f(x) = 4x + 5$$

ب) $D_f = \mathbb{R}$

$$f(x) = 3x^4 - 5x + 7$$

۲-۴-۲- دامنه‌ی توابع کسری

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

دامنه‌ی توابع کسری به صورت $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ و $q(x)$ چند جمله‌ای برحسب x عبارت است از مجموعه‌ی اعداد حقیقی منهای ریشه‌های مخرج کسر (زیرا به ازای ریشه‌های مخرج کسر، تابع تعریف نشده است)

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{x \mid x \in \mathbb{R}, q(x) = 0\}$$

مثال ۱: دامنه‌ی تابع مقابل را بیابید.

$$f(x) = \frac{3x + 1}{5x - 1}$$

حل: ریشه‌ی مخرج کسر را پیدا می‌کنیم:

$$5x - 1 = 0 \Rightarrow 5x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{5}$$

– دامنه‌ی تابع برابر است با:

$$D_f = \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{5} \right\}$$

مثال ۲: دامنه‌ی تابع مقابل را بیابید.

$$g(x) = \frac{5x + 4}{x^2 + 7x + 6}$$

حل: مخرج کسر را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$x^2 + 7x + 6 = 0 \Rightarrow (x + 6)(x + 1) = 0$$

– ریشه‌های مخرج عبارتند از:

$$\begin{aligned} x + 6 &= 0 \Rightarrow x = -6 \\ x + 1 &= 0 \Rightarrow x = -1 \end{aligned}$$

– دامنه‌ی تابع برابر است با:

$$D_g = \mathbb{R} - \{-6, -1\}$$

مثال ۳: دامنه‌ی تابع مقابل را بنویسید.

$$k(x) = \frac{x \cdot 3}{x^2 \cdot 2x - 3}$$

$$x^2 \cdot 2x - 3 = (x \cdot 3)(x - 1)$$

حل: مخرج کسر را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$x \cdot 3 = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$D_k = \mathbb{R} - \{0, 1\}$$

– ریشه‌های مخرج عبارتند از:

دامنه‌ی تابع k برابر است با:

تذکر: در تابع با ضابطه‌ی $\frac{p(x)}{q(x)}$ ، برای پیدا کردن دامنه نباید عبارت کسری را ساده کنیم (مثال ۳).

تمرین

دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی مقابل را بیابید.

$$f(x) = \frac{5x^2 \cdot x}{x^2 - 2x}$$

۳-۴-۲- دامنه‌ی تابع‌های شامل رادیکال (به

این گونه توابع، توابع اصم نیز می‌گوئیم): دامنه‌ی توابع رادیکالی را در دو حالت با فرجه‌ی فرد و با فرجه‌ی زوج بررسی می‌کنیم.

$$f(x) = \sqrt[n]{f(x)}$$

دامنه‌ی تابع اصم با فرجه‌ی فرد:

$$f(x) = \sqrt[k]{p(x)}, \quad k \in \mathbb{N}$$

– دامنه‌ی تابع f برابر است با:

$$D_f = D_p$$

مثال ۱: دامنه‌ی توابع داده‌شده را بیابید.

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$f(x) = \sqrt[3]{1 - 5x} \quad (\text{الف})$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{x \mid x \in \mathbb{R}, x^2 - 16 = 0\}$$

$$f(x) = \sqrt[3]{\frac{1 - 5x}{x^2 - 16}} \quad (\text{ب})$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{-4, 4\}$$

$$f(x) = \sqrt[k]{p(x)}, \quad k \in \mathbb{N}$$

دامنه‌ی تابع اصم با فرجه‌ی زوج

$$D_f = \{x \in \mathbb{R}, p(x) \geq 0\}$$

هرگاه $f(x) = \sqrt[k]{p(x)}$, $k \in \mathbb{N}$ آنگاه:

$$g(x) = \sqrt{1-x}$$

مثال ۲: دامنه‌ی تابع مقابل را پیدا کنید.

$$D_g = \{x \in \mathbb{R}, 1-x \geq 0\} = (-\infty, 1]$$

حل: چون فرجه زوج است دامنه برابر است با:

$$k(x) = \sqrt{3x-8}$$

مثال ۳: دامنه‌ی تابع مقابل را بیابید.

$$D_k = \{x \in \mathbb{R}, 3x-8 \geq 0\}$$

حل: چون فرجه زوج است، پس:

$$3x-8 \geq 0 \Rightarrow 3x \geq 8 \Rightarrow x \geq \frac{8}{3}$$

– نامعادله‌ی مقابل را حل می‌کنیم؛

$$D_k = \left\{x \in \mathbb{R}, x \geq \frac{8}{3}\right\} = \left[\frac{8}{3}, \infty\right)$$

– دامنه‌ی تابع k برابر است با:

$$f(x) = \sqrt{\frac{7-2x}{3x-8}}$$

مثال ۴: دامنه‌ی تابع مقابل را بیابید.

$$D_f = \left\{x \in \mathbb{R}, \frac{7-2x}{3x-8} \geq 0\right\}$$

حل: چون فرجه زوج است، پس:

$$\frac{7-2x}{3x-8} \geq 0$$

برای پیدا کردن D_f نامعادله‌ی مقابل را حل می‌کنیم.

$$7-2x \geq 0 \Rightarrow 7 \geq 2x \Rightarrow x \leq \frac{7}{2}$$

– ریشه‌های صورت و مخرج کسر را به دست می‌آوریم.

$$3x-8 \geq 0 \Rightarrow 3x \geq 8 \Rightarrow x \geq \frac{8}{3}$$

– با توجه به ریشه‌های نامعادله، جدول ۱۲-۲ را تعیین

جدول ۱۲-۲

x	$-\infty$	$\frac{8}{3}$	$\frac{7}{2}$	∞
$7-2x$	+	+	-	-
$3x-8$	-	0	+	+
$\frac{7-2x}{3x-8}$	-	+	-	+

تغییر نشده
جواب

علامت می‌کنیم.

با توجه به جدول ۲-۱۲ دامنه را می‌یابیم، پس:

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{5}{2}\} \cup \left[\frac{1}{3}, \frac{5}{2}\right)$$

فعالیت ۲-۹

تابع مقابل مفروض است.

$$f(x) = \sqrt{\frac{3-4x}{x^2-9}}$$

- (الف) ریشه‌ی عبارت $3-4x$ را به دست آورید.
 (ب) ریشه‌های عبارت x^2-9 را به دست آورید.
 (ج) به ازای چه مقادیری از x تابع f تعریف نشده است؟
 (د) دامنه‌ی تابع f را بیابید.
 مثال ۶: دامنه تابع مقابل را به دست آورید.

$$g(x) = \sqrt{\frac{5-7x}{x^2-x-12}}$$

$$5-7x \leq 0 \Rightarrow 5 \leq 7x \Rightarrow x \geq \frac{5}{7}$$

حل: ریشه‌ی صورت کسر را به دست می‌آوریم.

– مخرج کسر را به حاصل ضرب دو عامل تبدیل می‌کنیم.

$$x^2-x-12 = (x-4)(x+3)$$

– ریشه‌های مخرج کسر را به دست می‌آوریم.

$$x-4 = 0 \Rightarrow x = 4$$

$$x+3 = 0 \Rightarrow x = -3$$

– دامنه‌ی g برابر است با:

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{5-7x}{x^2-x-12} \neq 0\}$$

– با توجه به ریشه‌های صورت و مخرج کسر، جدول ۲-۱۳

را تعیین علامت می‌کنیم.

جدول ۲-۱۳

x	-	- ۳	$\frac{5}{7}$	۴	..
$5-7x$	+	+	+	-	-
x^2-x-12	-	+	+	-	+
$\frac{5-7x}{x^2-x-12}$	+	+	+	-	-
$\frac{5-7x}{x^2-x-12}$	جواب	تعریف نشده	جواب	تعریف نشده	جواب

$$D_g = \left(-\infty, -3\right) \cup \left(\frac{5}{7}, 4\right) \cup \left(4, \infty\right)$$

– دامنه‌ی تابع g برابر با:

مثال ۷: دامنه‌ی تابع مقابل را محاسبه کنید.

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = 3x^2 - 5x + 4$$

$$D_f = \mathbb{R}$$

حل: دامنه‌ی توابع چندجمله‌ای برابر اعداد حقیقی \mathbb{R}

است.

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \sqrt{64 - x^2}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid 64 - x^2 \geq 0\}$$

مثال ۸: دامنه‌ی تابع مقابل را به دست آورید.

حل: چون فرجه‌ی رادیکال زوج است، داریم:

– عبارت زیر رادیکال را برابر صفر قرار داده، ریشه‌های

آن را به دست می‌آوریم.

$$64 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 64 \Rightarrow x = \pm 8$$

– ریشه‌ها را به ترتیب صعودی در جدول ۲-۱۴ می‌نویسیم

و عبارت زیر رادیکال را تعیین علامت می‌کنیم.

جدول ۲-۱۴

x	-	$x < -8$	-8	$-8 < x < 8$	8	$x > 8$
$64 - x^2$		-		+		-
		جواب				

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid -8 \leq x \leq 8\} = [-8, 8]$$

با توجه به جدول ۲-۱۴ دامنه برابر است با:

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \sqrt{64 - x^2}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{N} \mid -12 \leq x \leq 8\}$$

مثال ۹: دامنه‌ی تابع مقابل را به دست آورید.

حل: با توجه به حل مثال ۸ دامنه‌ی تابع f برابر است با:

$$D_f = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

– با شرط $x \in \mathbb{N}$ ، دامنه‌ی تابع f برابر است با:

$$f(x) = \sqrt{3x^2 - 5x - 2}$$

مثال ۱۰: دامنه‌ی تابع مقابل را به دست آورید.

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid 3x^2 - 5x - 2 \geq 0\}$$

حل: چون فرجه‌ی رادیکال زوج است، دامنه برابر است با:

– برای تعیین ریشه‌ها، عبارت را مساوی صفر قرار

می‌دهیم:

$$3x^2 - 5x - 2 = 0 \quad \cdot \quad 3x^2 - 5x - 2 = 0 \quad \cdot$$

– با توجه به ضرایب a, b, c معین معادله را تشکیل می‌دهیم: $49 \cdot 24 \cdot 25 \cdot (-2) \cdot (-4) \cdot (-5)^2 \cdot (-4ac - b^2) \dots$

چون $0 \neq \Delta$ ، معادله دارای دو ریشه x_1 و x_2 است.

$$x_1 \text{ و } x_2 \cdot \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \frac{-(-5) \pm \sqrt{49}}{2(3)}$$

– ریشه‌های x_1 و x_2 برابر است با:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{5 + 7}{6} = \frac{12}{6} = 2 \\ x_2 &= \frac{5 - 7}{6} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

جدول ۱۵-۲

x	$x < -\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	2	$x > 2$
$3x^2 - 5x - 2$	جواب		جواب	

$$x \neq -\frac{1}{3} \text{ یا } x \neq 2$$

$$D_f \cdot \cdot x|x \in \mathbb{R}, x \neq -\frac{1}{3} \text{ یا } x \neq 2$$

$$D_f \cdot \cdot \dots, -\frac{1}{3}, 3, \dots$$

– ریشه‌ها را به ترتیب نزولی به صعودی در جدول ۱۵-۲

می‌نویسیم سپس عبارت $3x^2 - 5x - 2$ را تعیین علامت می‌کنیم.

– با توجه به علامت نامعادله جواب مورد قبول برابر است

با:

– دامنه‌ی تابع f به صورت مجموعه برابر است با:

– به صورت بازه، دامنه برابر است با:

مثال ۱۱: دامنه‌ی تابع مقابل را به دست آورید.

$$Z(x) = \frac{3 \cdot x^2}{x^2 - 5x}$$

حل: ریشه‌ها را محاسبه می‌کنیم:

$$x^2 - 5x = x(x - 5) = 0 \quad \cdot \quad \begin{aligned} x &= 0 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

دامنه Z برابر با:

$$D_Z = \mathbb{R} - \{0, 5\}$$

مثال ۱۲: رابطه‌ی f به صورت مقابل مفروض است.

$$f : (x, y) \mid x \cdot 3y^2 = 27, x, y \in \mathbb{R}$$

آیا f یک تابع است؟ چرا؟

حل: به ازای $x = 0$ چون دو مقدار برای y به دست می‌آید

$$x = 0 \cdot 3y^2 = 27 \cdot y^2 = 9 \cdot y = 3$$

پس f یک تابع نیست.

مثال ۱۳: دامنه‌ی تابع مقابل را به دست آورید.

$$f(x) = \frac{3x + 1}{\sqrt{9 - x^2}}$$

حل: چون فرجه زوج و عبارت زیر رادیکال مخرج کسر

است، پس:

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid 9 - x^2 > 0\}$$

$$9 - x^2 > 0 \iff x^2 < 9 \iff |x| < 3 \iff -3 < x < 3$$

– نامعادله‌ی مقابل را حل می‌کنیم:

$$D_f = (-3, 3)$$

– دامنه‌ی تابع f برابر است با:

نکته: تابع f به صورت چند ضابطه‌ای در مقابل مفروض است دامنه‌ی تابع f برابر با اجتماع D_1 و D_2 و ...

D_n است، یعنی:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in D_1 \\ \vdots \\ f_2(x), & x \in D_2 \\ \vdots \\ f_{n-1}(x), & x \in D_{n-1} \\ \vdots \\ f_n(x), & x \in D_n \end{cases}$$

$$D_f = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup \dots \cup D_n$$

بنابراین، دامنه‌ی تابع f برابر است با:

مثال ۱۴: دامنه‌ی تابع مقابل را به دست آورید.

$$f(x) = \begin{cases} 5 - 2x^4, & x \in \mathbb{R} \\ -5, & x \neq 4 \end{cases}$$

حل: دامنه‌ی تابع f برابر با اجتماع دامنه‌های تک تک

آن‌هاست، یعنی:

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid 5 - 2x^4 \text{ تعریف شده است}\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 4\}$$

$$= \mathbb{R} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 4\} = \mathbb{R}$$

– دامنه‌ی f برابر با:

مثال: الف) دامنه‌ی تابع مقابل را بیابید.

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 0 \\ -x, & x = 0 \end{cases}$$

ب) مقادیر $f(0)$ و $f(-1)$ را بیابید.

ج) تابع f را رسم کنید.

حل:

الف) هرگاه $f_1(x) = x^2$ و $f_2(x) = x - 3$ دامنه‌ی f

برابر است با:

$$D_f \cdot D_{f_1} \cdot D_{f_2} \cdot [0, \dots) \cup (-\infty, 0) \cup (-\infty, \dots) \cdot \mathbb{R}$$

$$f(0) = 0^2 = 0$$

ب) $x = 0$ را در ضابطه‌ی x^2 قرار می‌دهیم،

پس:

۱. $x = -1$ را در ضابطه‌ی $x - 3$ قرار می‌دهیم،

یعنی:

$$f(-1) = (-1) - 3 = -4$$

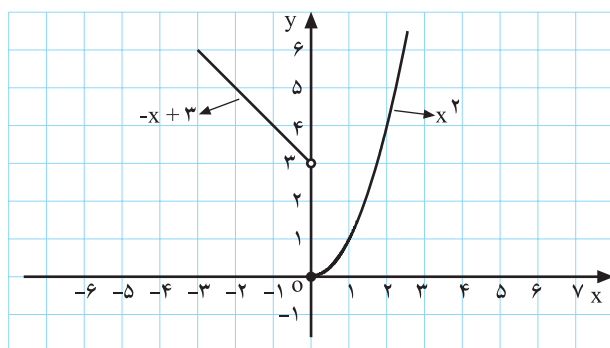
ج) با توجه به شرط‌های تابع، به ازای مقادیر دلخواه x

مقادیر $f(x)$ را برای هر ضابطه به دست می‌آوریم (جدول ۲-۱۶-۲)

الف و ب).

جدول ۲-۱۶

$x \#$	$f(x)$	$x \circ$	$f(x)$
۰	۰	۰	۳
۱	۱	-۱	۴
۲	۴	-۲	۵
(الف)		(ب)	



شکل ۲-۸۳

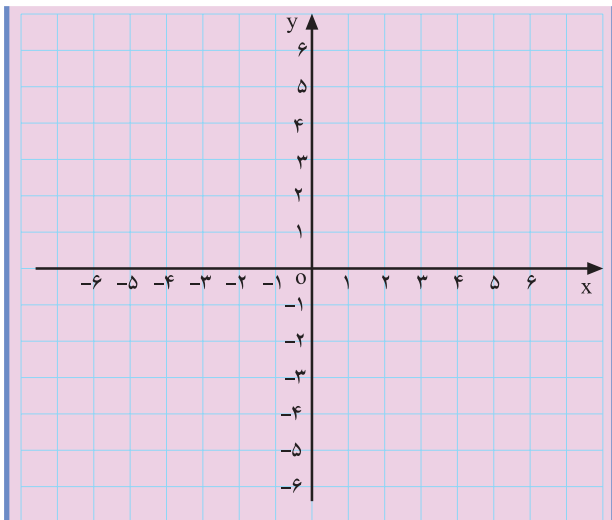
– مقادیر جدول ۲-۱۶(الف) و (ب) را در دستگاه

محورهای مختصات مشخص می‌کنیم و نمودار هر یک را رسم

می‌کنیم (شکل ۲-۸۳).

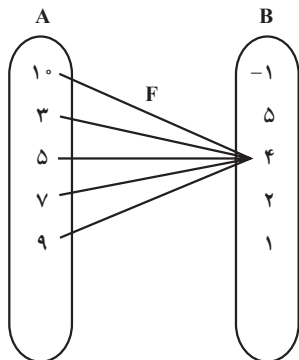
تمرین ۱: تابع روبه‌رو مفروض است.

$$U(x) = \begin{cases} x \circ \\ \vdots \\ 1 \cdot x \# \end{cases}$$



شکل ۲-۸۴

$$g(x) = \begin{cases} x! & x \leq 0 \\ x & 0 < x < 1 \\ -1 & x = 1 \end{cases}$$



شکل ۲-۸۵

$$f(3) = 4, f(5) = 4, f(7) = 4,$$

$$f(9) = 4, f(1) = 4$$

$$f = \{(1, 4), (3, 4), (5, 4), (7, 4), (9, 4)\}$$

$$D_f = \{1, 3, 5, 7, 9\} \quad R_f = \{4\}$$

$$D_f = R_f = \{4\} \text{ یا } 4$$

$$D_f = R_f = \{1, 3, 5, 7, 9, 4\}$$

$$f(1) = 4, f(3) = 4, f(5) = 4, f(7) = 4, f(9) = 4$$

الف) نمودار تابع U را رسم کنید.

ب) دامنه‌ی تابع $U(x)$ را تعیین کنید.

تمرین ۲: دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی مقابل را به دست آورید.

مثال ۱۶: اگر شکل ۲-۸۵ نمایش مجموعه‌ی تابع f باشد،

$$f: A \rightarrow B$$

یعنی:

به سؤال‌های زیر پاسخ دهید:

الف) مقادیر $f(3)$, $f(5)$, $f(7)$, $f(9)$, $f(1)$ را

محاسبه کنید.

ب) تابع f را به صورت زوج مرتب نمایش دهید.

سپس دامنه و برد آن را مشخص کنید.

ج) D_f و R_f را بیابید.

د) D_f و R_f را پیدا کنید.

ه) آیا می‌توانید ضابطه‌ای برای تابع f بنویسید؟

– پس به ازای هر x از A ، داریم:

$$f(x) = 4$$

نکته: تابع بالا را تابع ثابت می‌نامیم که در ادامه مطالب، معرفی می‌گردد.

مثلاً تابع‌های مقابل:

$$f(x) = \sqrt{v}, g(x) = 1, t(x) = \frac{5}{3} \cdot \sqrt{v}$$

مثال ۱۷: تابع مقابل مفروض است. مقادیر زیر را محاسبه

کنید.

$$f(x) = x = 3$$

الف) $f(4)$: به جای x ، عدد ۴ را قرار می‌دهیم، پس:

$$f(4) = 4 = 3 \cdot 4 = 12$$

ب) $f(x \dots x)$: به جای x ، $x \dots x$ را قرار می‌دهیم،

یعنی:

$$f(x \dots x) = (x \dots x) = 3$$

ج) $f(x \dots x) - f(x)$:

$$f(x \dots x) - f(x) = x \dots x - 3 = (x \dots x) - 3$$

تفاضل برابر است با:

– پس از ساده کردن تفاضل به دست می‌آید.

$$f(x \dots x) - f(x) = x \dots x - 3 = x \dots x - 3 = x \dots x - 3$$

مثال ۱۸: تابع با ضابطه‌ی مقابل مفروض است. مقادیر زیر

را محاسبه کنید.

$$f(x) = 3x^2 - 5x$$

الف) $f(2)$: در تابع f به جای x ، عدد ۲ را قرار می‌دهیم،

پس:

$$f(2) = 3(2)^2 - 5(2) = 12 - 10 = 2$$

ب) $f(2 \dots h) - f(2)$:

در تابع f به جای x مقدار $2 \dots h$ را قرار می‌دهیم، یعنی:

$$f(2 \dots h) = 3(2 \dots h)^2 - 5(2 \dots h)$$

– مقدار $f(2 \dots h)$ برابر است با:

$$3(4 \dots 4h \dots h^2) - 10 - 5h = 3h^2 + 4h - 2$$

– با توجه به مقادیر $f(2)$ و $f(2+h)$ ، تفاضل $f(2+h) - f(2)$

و $f(2)$ برابر با:

$$f(2+h) - f(2) = 3h^2 + 7h + 2 - 2 = 3h^2 + 7h$$

تمرین

۱- تابع باضابطه‌ی $g(x) = \begin{cases} 3x + 5 & x < -2 \\ x^2 + 4x & x \geq -2 \end{cases}$ مفروض

است.

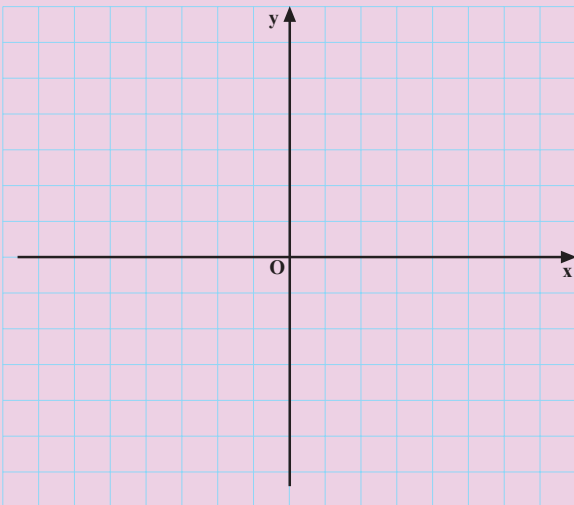
کارهای زیر را انجام دهید:

الف) جدول ۲-۱۷ (الف) و (ب) را تکمیل کنید.

جدول ۲-۱۷

$x < -2$		$x \geq -2$	
x	$g(x)$	x	$g(x)$
-2		-2	
-3		-1	
-4		0	

(الف) (ب)



شکل ۲-۸۶

جدول ۲-۱۸

5	0	1	2	3	4
$f(5)$	4	<input type="checkbox"/>	6	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

$f = \{(0, 4), (1, \quad), (2, \quad), (3, \quad), (4, \quad)\}$

(ب) نمودار تابع g را با توجه به مقادیر به دست آمده از جدول

۲-۱۷ (الف) و (ب) رسم کنید.

۲- هرگاه $4 = 5 - 35^2 = f(5)$ و $0, 1, 2, 3, 4 \in D_f$

باشند.

الف) جدول ۲-۱۸ را تکمیل کنید.

ب) مؤلفه‌ی دوم تابع f را بنویسید.

ج) آیا می‌توان گفت $f\left(\frac{5}{3}\right) = 0$ ؟ چرا؟

آزمون پایانی (۴)

محل پاسخ به سوالات آزمون پایانی (۴)

۱- دامنه‌ی هریک از توابع زیر را بنویسید :

۱) $f(x) = 5x^2 - 4x - 1$

۲) $f(x) = \frac{-4x - 1}{x^2 - 7x - 12}$

۳) $f(x) = \sqrt[3]{\frac{3x-1}{5-7x}}$

۴) $f(x) = \frac{7x - 1}{5x^2 - 8}$

۵) $f(x) = x - \sqrt{1-x^2}$

۶) $f(x) = \sqrt{\frac{3x-1}{x^2-1}}$

۲- $f(x)$ و D_f در مقابل مفروض اند :

- تابع f را به صورت زوج مرتب و جدول نوشته و برد آن را بنویسید.

۱. $f(x) = 2 \sin x$ و $D_f = \left\{ \frac{6}{2}, \frac{6}{3}, \frac{6}{6} \right\}$

	-۲	۰	۲	۳
$f(x)$: ۲/۵	۳	۲	۵
	: ۷	۵	۲	۷

۳- تابع چندضابطه‌ای f در مقابل مفروض است دامنه و برد تابع f را بنویسید.