

# بخش چهارم

## مشتق و کاربردهای آن

### هدف کلی بخش

تعیین رفتار تابع‌ها و رسم دقیق نمودار آن‌ها

### جدول عناوین فصل‌ها

شماره‌ی فصل	عنوان فصل
اول	مشتق
دوم	کاربرد مشتق ۱

# بخش چهارم

## فصل اول

### مشتق

#### هدف کلی

درک مفهوم مشتق و به دست آوردن مشتق توابع

هدف‌های رفتاری: پس از پایان این فصل از هنرجو انتظار می‌رود که بتواند:

- ۱- به کمک تعریف حد، مشتق توابع را به دست آورد؛
- ۲- مشتق یک تابع را در یک نقطه تعریف کند؛
- ۳- قضیه‌های مشتق و فرمول‌های آن را برای تعیین مشتق توابع دیگر به کار گیرد.

## پیش‌آزمون (۱)

### محل پاسخ به سؤالات پیش‌آزمون (۱)

$$f(x) = x^2 - 2x$$

$$f(x) = x^2 + 3$$

$$f(x) = -x^3 + 5$$

۱- تابع  $f$  با ضابطه‌ی روبه‌رو مفروض است :

الف)  $f(x+h)$  را حساب کنید.

ب)  $f(x+h) - f(x)$  را به‌دست آورید.

ج)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$  را حساب کنید.

۲- تابع  $f$  با ضابطه‌ی روبه‌رو مفروض است :

الف)  $f(2)$  را حساب کنید.

ب)  $f(x) - f(2)$  را به‌دست آورید.

ج)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$  را حساب کنید.

۳- تابع  $f$  با ضابطه‌ی روبه‌رو مفروض است. هرگاه  $x$

را  $x$  و  $y$  را  $y$  بنامیم :

الف)  $y$  را بیابید. ( $y = ?$ )

ب)  $\frac{y}{x}$  را تعیین کنید.

ج) مقدار  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{y}{x}$  را به‌دست آورید.

۱-۴- **نمو متغیر:** اگر تابعی با ضابطه‌ی  $y = f(x)$  و با دامنه‌ی  $D_f$  و  $x_1$  و  $x_2$  دو مقدار متمایز از  $D_f$  باشند، در این صورت  $x_2 - x_1$  را **نمو متغیر** گوئیم و آن را با  $x$  نمایش می‌دهیم.

$$\text{نمو متغیر} : x = x_2 - x_1 \Rightarrow x_2 = x_1 + x$$

**نمو تابع:** اگر متغیر مستقل  $x$  نموی به اندازه‌ی  $x$  داشته باشد، آن‌گاه متغیر وابسته  $f(x)$  نموی به اندازه‌ی  $y$  خواهد داشت. اگر  $y_1 = f(x_1)$  و  $y_2 = f(x_2)$  دو مقدار از تابع  $f$  با ضابطه‌ی  $y = f(x)$  به ازای  $x_1$  و  $x_2$  باشند، در این صورت  $y_2 - y_1$  را **نمو تابع** گوئیم و آن را با  $y$  نمایش می‌دهیم:

$$\text{نمو تابع} : y = y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1)$$

$$\Rightarrow y = f(x_1 + x) - f(x_1)$$

$$. y = f(x + x) - f(x)$$

**مثال ۱:** تابع  $f$  مفروض است، **نمو تابع** را به دست آورید:

$$f(x) = 3x^2 + 5$$

**حل:** **نمو تابع** عبارت است از:

$$. y = f(x + x) - f(x)$$

– در تابع اصلی به جای متغیر  $x$  مقدار  $x + x$  را قرار می‌دهیم، آن‌گاه خواهیم داشت:

$$. y = 3(x + x)^2 + 5 - (3x^2 + 5) \Rightarrow$$

– عبارت را ساده می‌کنیم:

$$. y = 3x^2 + 6x + 3x^2 + 5 - 3x^2 - 5$$

$y$  برابر است با:

$$\Rightarrow . y = 6x + 3x^2$$

**مثال ۲:** تابع  $f$  با ضابطه‌ی روبه‌رو مفروض است **نمو تابع** را به دست آورید.

$$f(x) = x + 7$$

**حل:** **نمو تابع** برابر است با:

$$. y = f(x + x) - f(x) \Rightarrow . y = (x + x) + 7 - (x + 7)$$

– پس از ساده کردن عبارت،  $y$  برابر است با:

$$\Rightarrow . y = x + x + 7 - x - 7 \Rightarrow . y = x$$

**مثال ۳:** تابع  $f$  با ضابطه‌ی روبه‌رو مفروض است:

$$f(x) = x^2 - 5x$$

الف) به ازای  $x = 2$  و  $x = 1/0$  مقدار  $y$  را به دست آورید.

حل: نمو تابع برابر است با:

$$y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

—  $x + \Delta x$  را به جای متغیر  $f(x)$  قرار می دهیم، آن گاه

$$y = (x + \Delta x)^2 - 5(x + \Delta x) - (x^2 - 5x)$$

خواهیم داشت:

$$\Rightarrow y = x^2 + 2x \cdot \Delta x + \Delta x^2 - 5x - 5 \Delta x - x^2 + 5x$$

— پس از ساده کردن عبارت داریم:

$$y = 2x \cdot \Delta x + \Delta x^2 - 5 \Delta x$$

—  $y$  برابر است با:

$$y = 2(2)(0/1) + 0/1^2 - 5(0/1) \Rightarrow y = -0/09$$

— به ازای  $x = 2$  و  $\Delta x = 0/1$ ،  $y$  را محاسبه می کنیم:

ب) به ازای  $x = 2$  و  $\Delta x = 0/01$ ، مقدار  $y$  را به دست

آورید.

$$y = 2x \cdot \Delta x + \Delta x^2 - 5 \Delta x \Rightarrow$$

حل: با توجه به قسمت الف، داریم:

— به ازای  $\Delta x = 0/01$  و  $x = 2$  مقدار  $y$  را به دست

$$y = 2(2)(0/01) + (0/01)^2 - 5(0/01) = -0/0099$$

می آوریم:

**نکته:** (در تابع پیوسته  $f$ ) از مقایسه ی مقدار  $y$  در حالت الف و ب نتیجه می گیریم که هر قدر مقدار  $\Delta x$  کوچک تر شود مقدار  $y$  نیز کوچک تر خواهد شد.

### ۱-۱-۴- تعریف و محاسبه ی مشتق: مشتق تابع $f$ را

با  $f'(x)$  نمایش می دهیم و به سه روش زیر تعریف می کنیم:

روش ۱: به طور کلی حد نمو تابع به نمو متغیر را مشتق

تابع می نامیم، در صورتی که حد موجود و متناهی باشد. یعنی:

$$1) f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

روش ۲: با تعویض  $h$  به  $\Delta x$  خواهیم داشت:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

روش ۳: مشتق تابع با ضابطه  $f(x)$  در  $x = a$ :

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

مثال ۱: مشتق تابع مقابل را با استفاده از تعریف مشتق حساب کنید.

$$f(x) = 2 - 5x$$

مراحل حل: رابطه‌ی مشتق برابر است با:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ \Rightarrow f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 5(x + \Delta x) - (2 - 5x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-5 \cdot \Delta x}{\Delta x} \end{aligned}$$

–  $x + \Delta x$  را به جای متغیر تابع با ضابطه  $f(x)$  جایگزین می‌کنیم:

– پس از ساده کردن صورت مشتق تابع به دست می‌آید.

$$f'(x) = -5$$

مثال ۲: مشتق تابع روبه‌رو را با استفاده از تعریف مشتق به دست می‌آید:

$$f(x) = x^2 + 6$$

حل: رابطه‌ی مشتق برابر است با:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \Rightarrow$$

– به جای متغیر، در تابع مقدار  $x+h$  را قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 + 6 - (x^2 + 6)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 + \cancel{6} - x^2 - \cancel{6}}{h} \end{aligned}$$

– پس از ساده کردن، مشتق به دست می‌آید.

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x + h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 2x + h$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2x$$

مثال ۳: مشتق تابع  $f$  با ضابطه‌ی روبه‌رو را در نقطه‌ی داده شده حساب کنید.

$$f(x) = x^2 - 4, \quad x_0 = 5$$

حل:  $f(5)$  را حساب می‌کنیم،

$$f(5) = 5^2 - 4 = 25 - 4 \Rightarrow f(5) = 21$$

– مشتق تابع با ضابطه  $f(x)$  در  $x = 5$  برابر است با:

$$f'(5) = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x) - f(5)}{x - 5}$$

– به جای  $f(x)$  و  $f(5)$  مقدار آن‌ها را قرار می‌دهیم، پس:

$$\Rightarrow f'(5) = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x^2 - 4) - 21}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5}$$

– با استفاده از اتحاد مزدوج کسر را ساده می‌کنیم :

$$\Rightarrow f'(\Delta) = \lim_{x \rightarrow \Delta} \frac{\cancel{(x-\Delta)}(x+\Delta)}{\cancel{x-\Delta}} = \lim_{x \rightarrow \Delta} x + \Delta$$

– مشتق تابع در  $x = \Delta$  برابر است با :

$$\Rightarrow f'(\Delta) = 1 \circ$$

مثال ۴: مشتق تابع مقابل را در نقطه‌ی داده شده به دست

آورید.

$$f(x) = x^2 - 5x, \quad x_0 = 3$$

حل: مقدار  $f(3)$  را حساب می‌کنیم :

$$f(3) = 3^2 - 5(3) \Rightarrow f(3) = -6$$

– مشتق تابع  $f$  در  $x = 3$  برابر است با :

$$f'(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x - (-6)}{x - 3}$$

– با استفاده از اتحاد جمله‌ی مشترک صورت کسر تابع

را تجزیه می‌کنیم :

$$\Rightarrow f'(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-2)\cancel{(x-3)}}{\cancel{x-3}}$$

– مشتق تابع با ضابطه  $f(x)$  در  $x = 3$  برابر است با :

$$\Rightarrow f'(3) = \lim_{x \rightarrow 3} x - 2 = 3 - 2 \Rightarrow f'(3) = 1$$

می‌دانیم  $f'(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\Delta y}{\Delta x}$  و از طرفی حد  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  وقتی  $\Delta x$  به صفر میل می‌کند

در صورتی وجود دارد که حد چپ و راست آن برابر باشند؛ به بیان دیگر تابع  $f$  با ضابطه‌ی  $y = f(x)$  در  $x = a$  دارای مشتق است هرگاه داشته باشیم :

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

مثال ۵: مشتق‌پذیری تابع روبه‌رو را در نقطه‌ی داده شده

بررسی کنید.

$$f(x) = |x + 5|, \quad x_0 = -5$$

حل: رابطه‌ی مشتق تابع  $f$  در  $x = a$  برابر با :

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

– مقدار تابع  $f$  را در  $x = -5$  حساب می‌کنیم :

$$f(-5) = |-5 + 5| = 0$$

– مشتق تابع  $f$  در  $x = -5$  برابر است با :

$$f'(-5) = \lim_{x \rightarrow -5} \frac{f(x) - f(-5)}{x - (-5)} = \lim_{x \rightarrow -5} \frac{|x + 5| - 0}{x + 5}$$

– حد تابع را با استفاده از تعریف قدرمطلق حساب می‌کنیم.

– هرگاه  $x > -5$  حد تابع برابر است با :

$$\lim_{x \rightarrow -5^+} \frac{|x+5|}{x+5} = \lim_{x \rightarrow -5^+} \frac{(x+5)}{x+5} = 1$$

– هرگاه  $x < -5$  حد تابع برابر است با :

$$\lim_{x \rightarrow -5^-} \frac{|x+5|}{x+5} = \lim_{x \rightarrow -5^-} \frac{-(x+5)}{x+5} = -1$$

– مشتق  $f$  در  $x = -5$  وجود ندارد، زیرا :

$$1 \neq -1$$

مثال ۶: مشتق تابع مقابل را با استفاده از تعریف مشتق

حساب کنید.

$$f(x) = 3 + 5x$$

حل: رابطه‌ی کلی مشتق را می‌نویسیم :

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

با جای‌گذاری  $f(x + \Delta x)$  و  $f(x)$  در رابطه داریم :

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3 + 5(x + \Delta x) - (3 + 5x)}{\Delta x}$$

– صورت کسر را ساده می‌کنیم.

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cancel{3} + 5\cancel{x} + 5\Delta x - \cancel{3} - 5\cancel{x}}{\Delta x}$$

– مشتق تابع برابر است با :

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{5(\Delta x)}{\Delta x} = 5$$

مثال ۷: مشتق تابع روبه‌رو را با استفاده از تعریف مشتق

به‌دست آورید.

$$f(x) = \frac{5}{x}$$

حل: رابطه‌ی کلی مشتق برابر است با :

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{5}{x + \Delta x} - \frac{5}{x}}{\Delta x}$$

– به جای متغیر  $x$  در تابع  $x + \Delta x$  قرار می‌دهیم.

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{5}{x + \Delta x} - \frac{5}{x}}{\Delta x}$$

– از صورت کسر مخرج مشترک می‌گیریم.

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{5x - 5(x + \Delta x)}{x(x + \Delta x)}}{\Delta x}$$

– کسر مرکب را به کسر ساده تبدیل می‌کنیم.

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-5\cancel{x}}{x(x + \Delta x)} \times \frac{1}{\cancel{\Delta x}}$$

– حد تابع را حساب می‌کنیم.

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-5}{x(x + \Delta x)} = \frac{-5}{x(x + 0)}$$



مشتق تابع برابر است با :

$$f'(x) = \frac{-5}{x^2}$$

$$f(x) = x^3$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} \Rightarrow$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2)}{h}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} 3x^2 + 3xh + h^2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2$$

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad x = 2$$

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$$

$$\Rightarrow f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{(\sqrt{x} - \sqrt{2})(\sqrt{x} + \sqrt{2})}$$

$$\Rightarrow f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{2}}$$

$$f'(2) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$f(x) = x^2 + 5, \quad x = 3$$

$$f(3) = 3^2 + 5 = 14$$

مثال ۸: مشتق تابع روبه رو را با استفاده از تعریف مشتق

به دست آورید.

حل: رابطه‌ی کلی مشتق برابر است با :

– با استفاده از اتحاد مکعب صورت را ساده می‌کنیم.

– از متغیر  $h$  در صورت فاکتور می‌گیریم.

– مشتق تابع برابر است با :

مثال ۹: مشتق تابع روبه‌رو را با استفاده از تعریف مشتق

در نقطه‌ی خواسته شده حساب کنید.

حل: رابطه‌ی کلی مشتق تابع با ضابطه  $f(x)$  در  $x = 2$

برابر است با :

– با توجه به صورت کسر مخرج را با استفاده از اتحاد

مزدوج تجزیه می‌کنیم :

– پس از رفع ابهام از تابع داریم :

– مشتق تابع  $f$  در  $x = 2$  برابر است با :

مثال ۱۰: مشتق تابع روبه‌رو را با استفاده از تعریف مشتق

در نقطه‌ی خواسته شده به دست آورید.

حل: مقدار  $f(x)$  در  $x = 3$  برابر است با :

$$f'(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3}$$

– رابطه‌ی کلی مشتق تابع با ضابطه  $f(x)$  در  $x = 3$  برابر است با :

$$f'(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 5 - 14}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

– به جای  $f(x)$  مقدار تابع را جایگزین می‌کنیم :

$$\Rightarrow f'(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} x + 3$$

– صورت کسر را با استفاده از اتحاد مزدوج تجزیه و ساده می‌کنیم :

$$\Rightarrow f'(3) = 3 + 3 \Rightarrow f'(3) = 6$$

مشتق تابع با ضابطه  $f(x)$  در  $x = 3$  برابر است با :

۲-۱-۲ – برخی از رابطه‌های مشتق  
قاعده‌ی ۱: مشتق تابع ثابت :

$$f(x) = c \text{ و } c \in \mathbb{R}$$

مشتق تابع ثابت همواره برابر صفر است.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$

مشتق تابع ثابت همواره برابر صفر است؛ به بیان دیگر :

$$f(x) = c, c \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = 0$$

مثال:

$$f(x) = -2\sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = 0$$

قاعده‌ی ۲: مشتق تابع درجه اول :

$$f(x) = ax + b, a \neq 0, a, b \in \mathbb{R}$$

– از رابطه‌ی کلی مشتق تابع با ضابطه  $f(x)$  برابر است :

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

– عبارت حاصل را حساب می‌کنیم :

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(x+h) + b - (ax + b)}{h}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{ah}{h} = a$$

مشتق تابع برابر است با :

$$f'(x) = a$$

مشتق تابع با ضابطه  $f(x) = ax + b$  برابر است با :

$$f(x) = -5x + 7$$

مثال ۱: مشتق تابع روبه‌رو را محاسبه کنید.

$$f'(x) = -5$$

– مشتق تابع برابر است با ضریب  $x$ :

$$f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}x - 5\pi$$

مثال ۲: مشتق تابع روبه‌رو را به‌دست آورید.

$$f'(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

حل: مشتق تابع برابر است با ضریب  $x$ :

$$f(x) = x^2$$

مثال ۳: مشتق تابع روبه‌رو را با استفاده از تعریف مشتق،

محاسبه کنید.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \Rightarrow$$

حل: رابطه‌ی کلی مشتق تابع با ضابطه  $f(x)$  برابر است با:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{x^2} + 2xh + h^2 - \cancel{x^2}}{h}$$

– با استفاده از اتحاد مربع کامل عبارت را ساده می‌کنیم:

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 2x+h \Rightarrow f'(x) = 2x$$

– پس از فاکتورگیری از  $h$ ، مشتق تابع برابر است با:

$$\text{نتیجه: هرگاه } f(x) = x^2 \text{ آن‌گاه } f'(x) = 2x$$

در حالت کلی می‌توان قاعده‌ی ۳ را بیان کرد.

$$\text{قاعده‌ی ۳: هرگاه } f(x) = x^n \text{ و } n \in \mathbb{R} \text{ آن‌گاه } f'(x) = nx^{n-1}$$

مثال ۴: مشتق توابع زیر را به‌دست آورید.

$$y' = 2x^{2-1} = 2x$$

$$y = x^2$$

$$y' = 7x^{7-1} = 7x^6$$

$$y = x^7$$

$$y' = -6x^{-6-1} = -6x^{-7} = \frac{-6}{x^7}$$

$$y = x^{-6}$$

$$y' = \frac{4}{3}x^{\frac{4}{3}-1} = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} = \frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$$

$$y = x^{\frac{4}{3}}$$

$$f'(x) = nu'u^{n-1}$$

قاعده‌ی ۴: فرض کنید  $f(x) = u^n$ ،  $f(x)$  بر حسب متغیر  $x$

مثال ۵: مشتق تابع مقابل را بیابید.

$$f(x) = (-4x + 7)^3$$

حل:

– مشتق تابع برابر است با:

$$y' = 3(-4)(-4x + 7)^{3-1} \Rightarrow y' = -12(-4x + 7)^2$$

$$f'(x) = kg'(x)$$

قاعده‌ی ۵: فرض کنید  $f(x) = kg(x)$ ،  $f(x)$  مقدار ثابت آن گاه:

اثبات قاعده‌ی ۵: رابطه‌ی کلی تعریف مشتق عبارت است

از:

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

– در رابطه‌ی کل به جای  $f(x)$  مساوی آن یعنی  $kg(x)$  را

قرار می‌دهیم، پس:

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{kg(x + \Delta x) - kg(x)}{\Delta x}$$

$$= k \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow \boxed{f'(x) = k \cdot g'(x)}$$

در نتیجه مشتق تابع برابر است با:

مثال ۶: مشتق توابع زیر را محاسبه کنید.

$$f(x) = 7x^5 \quad \text{الف)}$$

$$f(x) = -6\left(\frac{3}{4}x + 5\right)^6 \quad \text{ب)}$$

مثال ۷: مشتق توابع زیر را محاسبه کنید.

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \text{الف)}$$

$$f(x) = \sqrt{-3x + 5} \quad \text{ب)}$$

$$f'(x) = 7 \times 5 \times x^4 = 35x^4$$

$$f'(x) = (-6)\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{4}x + 5\right)^{6-1} = -\frac{9}{2}\left(\frac{3}{4}x + 5\right)^5$$

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow y' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f(x) = (-3x + 5)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}(-3)(-3x + 5)^{\frac{1}{2}-1}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{-3}{2}(-3x + 5)^{-\frac{1}{2}} = \frac{-3}{2} \times \frac{1}{(-3x + 5)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{-3}{2\sqrt{-3x + 5}}$$

$$y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

نتیجه‌ی ۱: اگر  $y = \sqrt{u}$  (بر حسب  $x$ ) آن‌گاه

اثبات نتیجه‌ی ۱: می‌دانیم  $u^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{u^n}$  ( $m, n \in \mathbb{N}$ )

$$y = \sqrt{u} = u^{\frac{1}{2}} \Rightarrow y' = \frac{1}{2}(u') \times u^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}u' \cdot u^{-\frac{1}{2}}$$

پس:

– چون  $n \in \mathbb{N}$  و  $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$  مشتق برابر است با:

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{2}u' \times \frac{1}{u^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

$$y' = \frac{nu'}{m\sqrt[m]{u^{m-n}}}$$

نتیجه‌ی ۲: هرگاه  $y = \sqrt[m]{u^n}$  آن‌گاه:

مثال ۸: مشتق تابع مقابل را محاسبه کنید:

$$y = \sqrt[3]{(-4x+3)^2}$$

حل: با استفاده از نتیجه‌ی ۲ مشتق تابع برابر است با:

$$y' = \frac{2(-4)}{3^3\sqrt[3]{(-4x+3)^{3-2}}} = \frac{-8}{3^3\sqrt[3]{-4x+3}}$$

مثال ۹: مشتق تابع روبه‌رو را در نقطه‌ی داده شده حساب

کنید.

$$f(x) = \sqrt{2x+5} \text{ و } x=2$$

حل: با استفاده از نتیجه‌ی ۲ مشتق تابع برابر است با:

$$y' = \frac{2}{2\sqrt{2x+5}} = \frac{1}{\sqrt{2x+5}}$$

– مقدار مشتق به ازای  $x=2$  برابر است با:

$$y'(2) = \frac{1}{\sqrt{2 \times 2 + 5}} = \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$$

مثال ۱۰: مشتق تابع روبه‌رو را در نقطه‌ی داده شده

محاسبه کنید.

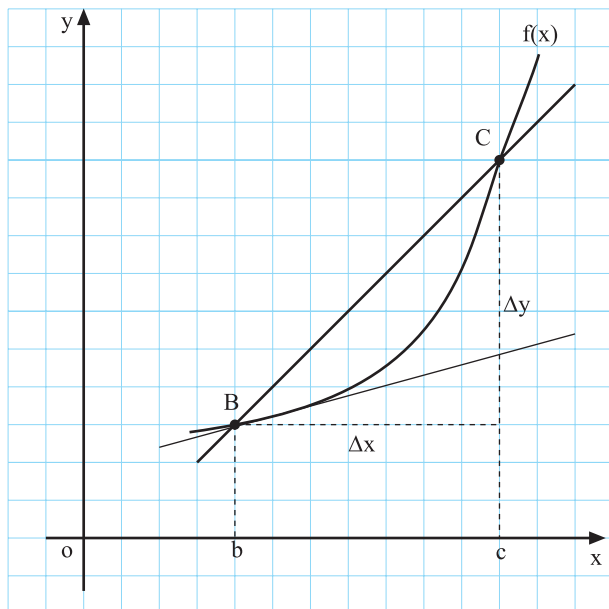
$$f(x) = \sqrt[5]{(2x+1)^3}, \quad x=0$$

حل: با استفاده از نتیجه ۲ مشتق تابع برابر است با:

$$y' = \frac{2 \times 3}{5^5 \sqrt[5]{(2x+1)^{5-3}}} = \frac{6}{5^5 \sqrt[5]{(2x+1)^2}}$$

مقدار مشتق به ازای  $x=0$  برابر است با:

$$\Rightarrow y'(0) = \frac{6}{5^5 \sqrt[5]{(0+1)^2}} = \frac{6}{5}$$



نمودار ۴-۱

۳-۱-۴- تعبير هندسي مشتق: نمودار ۴-۱ را مشاهده

کنید: اگر نقطه‌ای از منحنی باشد،

– شیب خط مماس برابر است با:

$$m = f'(b) = \lim_{x \rightarrow b} \frac{f(b + \Delta x) - f(b)}{\Delta x}$$

نتیجه: شیب خط مماس (ضریب زاویه) بر نمودار  $y=f(x)$  که از نقطه‌ی  $(b, f(b))$  می‌گذرد برابر مشتق تابع  $f$  با ضابطه‌ی  $y=f(x)$  در نقطه‌ی  $x=b$ ، یعنی:

$$m = f'(b)$$

مثال ۱: معادله‌ی خط مماس بر منحنی روبه‌رو را که از نقطه‌ی  $A(-1, 1)$  می‌گذرد بنویسید.

$$f(x) = -x^2 + 2$$

حل: شیب خط مماس بر منحنی تابع  $f(x)$  در  $x=1$  برابر است با:

$$f'(x) = -2x \Rightarrow m = f'(-1) = -2(-1) \Rightarrow m = 2$$

– معادله‌ی خط مماس بر منحنی که از نقطه‌ی  $A(x_1, y_1)$

می‌گذرد برابر است با:

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad (/)$$

$A \left| \begin{matrix} -1 \\ 1 \end{matrix} \right.$  و  $m=2$  را در رابطه‌ی (\*) قرار می‌دهیم:

$$y-1=2(x+1) \Rightarrow y=2x+2+1 \Rightarrow$$

– معادله‌ی خط مماس که از نقطه‌ی A می‌گذرد برابر

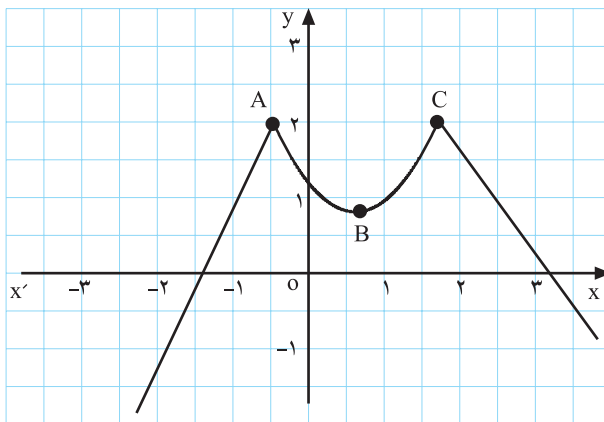
است با:

$$y=2x+3$$

نکته: در نقاطی که مماس بر نمودار وجود نداشته باشد، تابع مشتق ندارد.

مثال ۲: در نقاط A و C در نمودار ۲-۴ مماس وجود

ندارد، پس در این نقاط تابع f مشتق ندارد. ولی در نقطه‌ی B دارای مشتق است، زیرا می‌توان در نقطه‌ی B مماس بر منحنی رسم کرد.



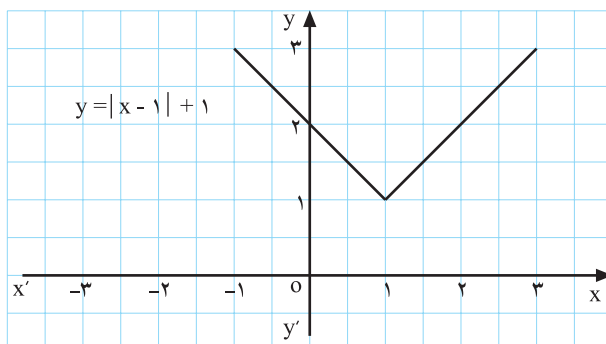
نمودار ۲-۴

مثال ۳: با توجه به نمودار ۳-۴ آیا تابع مقابل در  $x=+1$

دارای مشتق است؟ چرا؟

حل: خیر، زیرا نمی‌توان در نقطه‌ی  $x=1$  مماس بر نمودار

۳-۴ رسم کرد.



نمودار ۳-۴