

بخش چهارم

فصل دوم

کاربرد مشتق (۱)

هدف کلی

استفاده از مشتق تابع برای رسم خط مماس و قائم در یک نقطه از نمودار تابع، تعیین نزولی یا صعودی بودن یک تابع و به دست آوردن نقطه‌های ماکزیمم یا مینیمم یک تابع.

هدف‌های رفتاری: پس از پایان این فصل از هنرجو انتظار می‌رود که بتواند:

- ۱- معادله‌ی خط مماس در یک نقطه از نمودار یک تابع را بنویسد؛
- ۲- معادله‌ی خط عمود بر یک منحنی را در نقطه‌ای واقع بر آن بنویسد؛
- ۳- با استفاده از مشتق، صعودی یا نزولی بودن تابع را مشخص کند؛
- ۴- جدول تغییرات تابع را تعیین کند؛
- ۵- نقطه‌های ماکسیمم یا مینیمم یک تابع را مشخص کند.

پیش‌آزمون (۲)

محل پاسخ به سوالات پیش‌آزمون (۲)

۱- تابع $f(x) = -2x^2 + 4x + 1$ در \mathbb{R} تعریف شده است.

الف) $f(2)$ را حساب کنید.

ب) اگر شیب خط مماس D که از نقطه‌ی به طول $x = 2$ می‌گذرد برابر $f'(2)$ باشد مقدار آن را بیابید.

ج) معادله‌ی خط مماس (D) را که از نقطه‌ی به طول $x = 2$ می‌گذرد بنویسید.

د) نمودار منحنی $f(x) = -2x^2 + 4x + 1$ و خط D را رسم کنید.

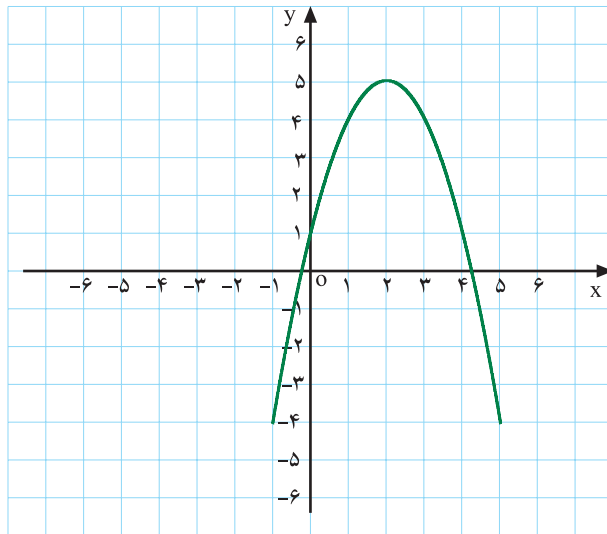
۲- مشتق تابع $f(x) = -3x^2 + 3x + 1$ را در \mathbb{R} تعیین علامت کنید.

۳- ماکسیمم مقدار تابع با ضابطه $f(x) = 6 - 2x^2$ را به دست آورید.

۴-۲- کاربردهای مشتق (۱)

۴-۲-۱- شیب خط مماس و عمود بر یک منحنی

(ضریب زاویه)



نمودار ۴-۴

فعالیت ۴-۱

نمودار منحنی $f(x) = -x^2 + 4x + 1$ را در شکل ۴-۴

مشاهده می‌کنید.

الف) مقدار $f(2)$ را حساب کنید.

ب) مشتق f را به دست آورید.

ج) $f'(2)$ را حساب کنید.

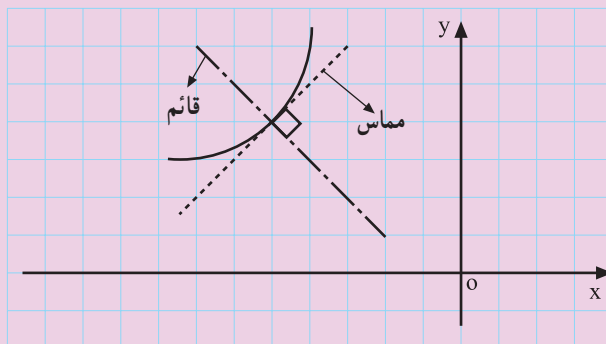
د) آیا می‌توان گفت $f'(2)$ برابر شیب خط مماس بر منحنی

در نقطه‌ی $x=2$ است؟

پاسخ:

نتیجه: ضریب زاویه‌ی خط مماس بر منحنی تابع f با ضابطه‌ی $y = f(x)$ در نقطه‌ی به طول $x = a$ عبارت

است از مشتق تابع در آن نقطه؛ به بیان دیگر: (m) ضریب زاویه است) $f'(a) = m = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$



نمودار ۴-۵

ضریب زاویه‌ی خط عمودی که از نقطه‌ی به طول $x = a$ می‌گذرد برابر است با: (m') ضریب زاویه‌ی عمود)

$$m' = \frac{-1}{f'(a)} \text{ یا } m' = \frac{-1}{m}$$

(m') ضریب زاویه‌ی عمود است.)

مثال: ضریب زاویه‌ی خط مماس و عمود بر منحنی تابع
مقابل در نقطه‌ی داده شده را حساب کنید.

$$y = -3x^2 + 5x + 7, \quad x = 1$$

حل: به ازای $x = 1$ ضریب زاویه‌ی خط مماس برابر است

با:

$$y' = -6x + 5 \Rightarrow m = y'(1) = -6(1) + 5 \Rightarrow m = -1$$

- ضریب زاویه‌ی خط عمود برابر است با:

$$m' = \frac{-1}{m} \Rightarrow m' = \frac{-1}{-1} \Rightarrow m' = 1$$

مثال: ضریب زاویه‌ی خط مماس و عمود بر منحنی تابع

روبه‌رو را در نقطه‌ی داده شده محاسبه کنید.

$$y = \sqrt{5x^3 + 3x + 4}, \quad x = 0$$

حل: ضریب زاویه‌ی خط مماس و خط عمود در نقطه‌ی

$x = 0$ برابر است با:

$$y' = \frac{15x^2 + 3}{2\sqrt{5x^3 + 3x + 4}} \Rightarrow m = y'(0) = \frac{3}{4} \quad \text{و}$$

$$m' = \frac{-1}{m} = \frac{-4}{3}$$

تمرین: ضریب زاویه‌ی خط مماس بر منحنی تابع‌های زیر

را در نقطه‌های داده شده به دست آورید.

۱) $f(x) = 3 + 5 \sin 2x, \quad x = \pi$

۲) $f(x) = -3x^2 + 5x + 7, \quad x = 2$

۳) $g(x) = \frac{-3x}{2x+4}, \quad x = 1$

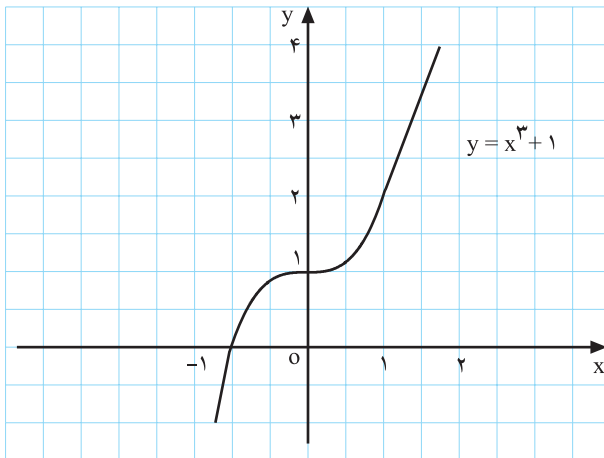
۴) $z(t) = \frac{5}{t}, \quad t = 3$

۵) $f(x) = \sqrt{2x+5}, \quad x = 2$

۲-۲-۴- تعیین معادله‌ی خط مماس و خط عمود

فعالیت ۲-۴

تابع $f(x) = x^3 + 1$ و منحنی آن نمودار ۴-۶ رسم شده است.



نمودار ۴-۶

محل پاسخ:

$$f(2) =$$

$$f'(x) =$$

$$f'(2) =$$

الف) مقدار $f(2)$ را حساب کنید.

ب) مشتق f را به دست آورید.

ج) مقدار $f'(2)$ را حساب کنید.

بلی: خیر:

$$y - f(2) = f'(2)(x - 2)$$

د) آیا می‌توان گفت معادله‌ی روبه‌رو معادله‌ی خط مماس

بر منحنی در نقطه‌ی $x = 2$ است؟

بلی: خیر:

$$y - f(2) = \frac{-1}{f'(2)}(x - 2)$$

ه) آیا معادله‌ی مقابل معادله‌ی خط عمود است؟

نتیجه: هرگاه $A(a, f(a))$ روی منحنی $y = f(x)$ واقع باشد. معادله‌ی خط مماس بر منحنی $y = f(x)$ در نقطه‌ای به طول $x = a$ برابر است با:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

همچنین، معادله‌ی خط قائم بر منحنی $y = f(x)$ در نقطه‌ای به طول $x = a$ برابر با:

$$y - f(a) = \frac{-1}{f'(a)}(x - a)$$

می‌دانیم که ضریب زاویه‌ی خط مماس برابر است با:

$$m = f'(a)$$

– ضریب زاویه‌ی خط عمود نیز برابر است با:

$$m' = \frac{-1}{f'(a)}$$

مثال ۲: معادله‌ی خط مماس و خط عمود بر منحنی تابع
مقابل را در نقطه‌ی داده شده بنویسید :

$$f(x) = -x^2 + 3x, \quad x = 2$$

حل: $f(2)$ در نقطه‌ی داده شده برابر است با :

$$f(2) = -(2)^2 + 3(2) = 2$$

– از تابع مشتق می‌گیریم :

$$f'(x) = -2x + 3$$

– با قرار دادن x نقطه در مشتق، ضریب زاویه به دست می‌آید.

$$m = f'(2) = -2(2) + 3 = -1$$

– مقدار $f(2)$ و $f'(2)$ را در معادله‌ی خط قرار می‌دهیم :

$$y - f(2) = f'(2)(x - 2) \Rightarrow y - 2 = -1(x - 2)$$

– در نتیجه معادله‌ی خط مماس برابر است با :

$$\Rightarrow y = -x + 4$$

– ضریب زاویه‌ی خط مماس را عکس قرینه می‌کنیم و آن را ضریب زاویه‌ی خط عمود بر منحنی قرار می‌دهیم و معادله‌ی خط عمود را به دست می‌آوریم.

$$y - f(2) = -\frac{1}{f'(2)}(x - 2) \Rightarrow y - 2 = \frac{-1}{-1}(x - 2)$$

$$\Rightarrow y = x$$

مثال ۳: معادله‌ی خط مماس بر منحنی مقابل را در نقطه‌ی داده شده بنویسید.

$$y = -2 \sin 2x \quad \text{و} \quad x = \frac{\pi}{6}$$

حل: مقدار y به ازای $x = \frac{\pi}{6}$ برابر است با :

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = -2 \sin 2\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\sqrt{3}$$

– y' را به ازای $x = \frac{\pi}{6}$ محاسبه کرده و آن را برابر ضریب زاویه‌ی خط قرار می‌دهیم :

$$y' = -4 \cos 2x \Rightarrow m = f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -4 \cos \frac{\pi}{3} = -2$$

– معادله‌ی خط مماس برابر است با :

$$y - f\left(\frac{\pi}{6}\right) = f'\left(\frac{\pi}{6}\right)\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

– پس از ساده کردن خواهیم داشت :

$$y + \sqrt{3} = -2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow y = -2x + \frac{\pi}{3} - \sqrt{3}$$

مثال ۴: معادله‌ی خط عمود بر منحنی تابع f را در نقطه‌ی

داده شده بنویسید.

$$f(x) = \tan x \text{ و } x = \frac{\pi}{4}$$

حل: به ازای x نقطه y نقطه برابر است با:

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

– از تابع مشتق می‌گیریم

$$f'(x) = 1 + \tan^2 x$$

– ضریب زاویه‌ی خط مماس به ازای x نقطه در رابطه‌ی

مشتق برابر است با:

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 + \tan^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 + 1 = 2$$

– معادله‌ی خط عمود بر منحنی برابر است با:

$$y - y_1 = \frac{-1}{f'\left(\frac{\pi}{4}\right)}(x - x_1) \Rightarrow$$

– به ازای مختصات نقطه، معادله‌ی خط به دست می‌آید.

$$y - 1 = \frac{-1}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow y = \frac{-1}{2}x + \frac{\pi}{8} + 1$$

تمرین

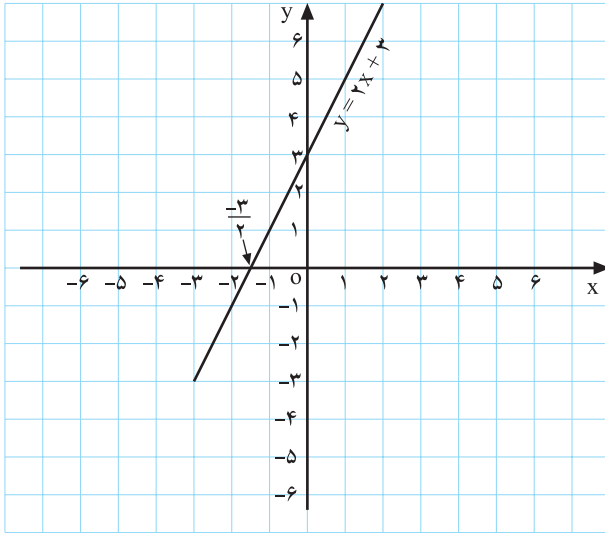
معادله‌ی خط مماس و خط عمود بر منحنی تابع روبه‌رو را

در نقطه‌ی $x = 0$ و $x = 1$ به‌طور جداگانه بنویسید.

شرح عملیات:

$$f(x) = x^3 + 5x - 4$$

فعالیت ۳-۴



نمودار ۴-۷

خط $y = 2x + 3$ و نمودار آن ۴-۷ را مشاهده می‌کنید.

الف) به ازای $f(x_2)$ و $f(x_1)$ ، $x_2 = 0$ و $x_1 = -\frac{3}{2}$

حساب کنید.

ب) آیا نتیجه‌ی روبه‌رو درست است؟

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0 \quad \square : \text{خیر} \quad \square : \text{بلی}$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

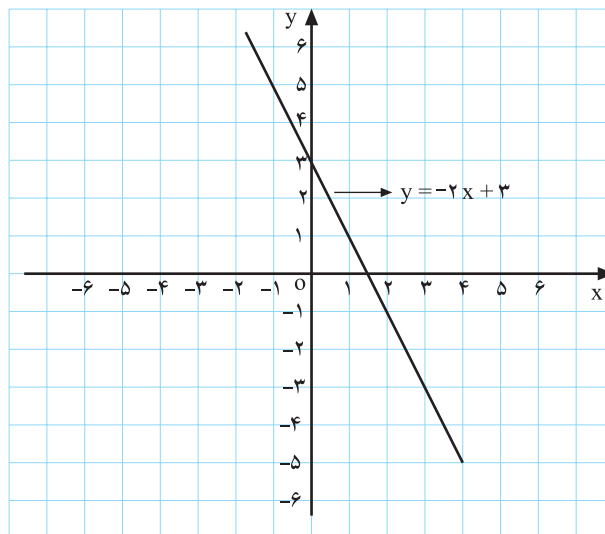
$$y' = 2 > 0$$

ج) با توجه به $D_f = \mathbb{R}$ به ازای هر x_1 و x_2 متعلق به

دامنه، آیا می‌توان نتیجه‌ی مقابل را گرفت؟

- از طرفی y' همواره مثبت است.

اگر تابع $y = f(x)$ بر (a, b) تعریف شده باشد و بر این بازه $y' > 0$ (آنگاه y بر (a, b) صعودی (نزولی) است).



نمودار ۴-۸

مثال: هرگاه $y = -2x + 3$ ، به ازای هر مقدار x از

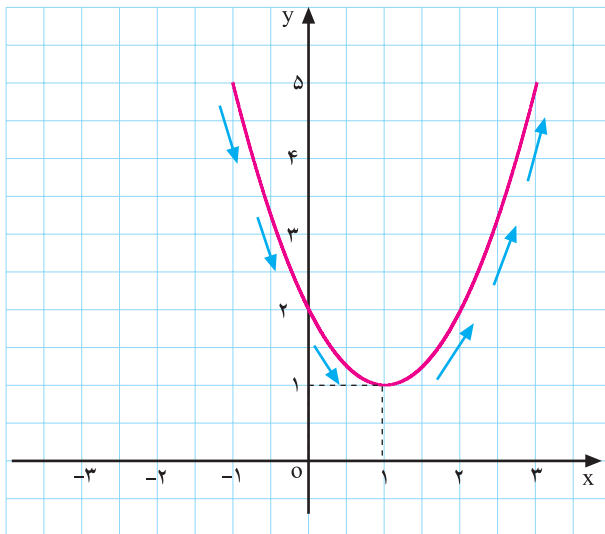
دامنه‌ی تابع $y' = -2 < 0$ باشد می‌گوییم تابع y نزولی است؛ به

بیان دیگر:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

نمودار خط $y = -2x + 3$ را در مقابل مشاهده می‌کنید.

فعالیت ۴-۴



نمودار ۴-۹

منحنی $y = x^2 - 2x + 2$ را در نمودار ۴-۹ مشاهده می‌کنید.

الف) آیا ریشه‌ی مشتق تابع y ، یعنی $y' = 2x - 2$ برابر $x = 1$ است؟ بلی: خیر:

ب) به ازای $x < 1$ ، علامت y' را مشخص کنید. آیا می‌توان گفت در فاصله‌ی $x \in (-\infty, 1)$ تابع نزولی است.

ج) به ازای $x > 1$ ، علامت y' را مشخص کنید. آیا تابع در فاصله‌ی $x \in (1, +\infty)$ صعودی است؟

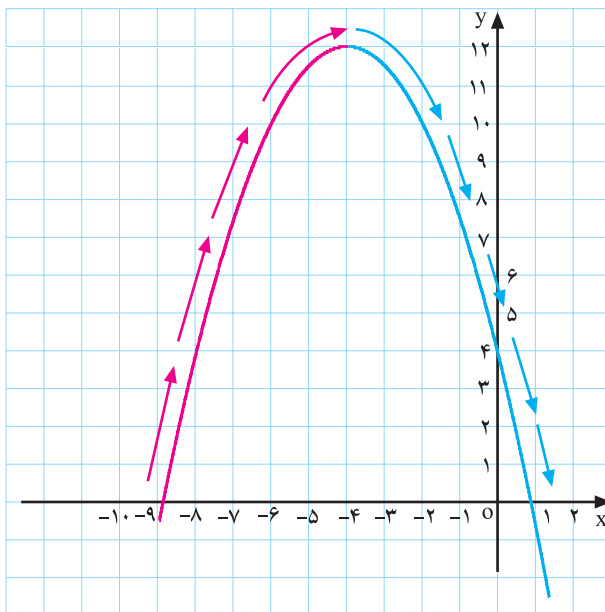
جدول ۴-۱

x	$-\infty$	$x < 1$	1	$x > 1$	$+\infty$
$y' = 2x - 2$		<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>	
y	$+\infty$	\searrow	<input type="checkbox"/>	\nearrow	$+\infty$

د) با توجه به موارد بالا، جدول ۴-۱ را تکمیل کنید.

ه) با توجه به نمودار ۴-۹ و جدول ۴-۱ نقطه‌ی مینیمم

تابع $y = x^2 - 2x + 2$ چه نقطه‌ای است؟



نمودار ۴-۱۰

فعالیت ۴-۵

الف) با توجه به منحنی $y = -\frac{1}{3}x^2 - 4x + 4$ و جدول

۴-۲ منحنی این تابع را رسم کنید (نمودار ۴-۱۰).

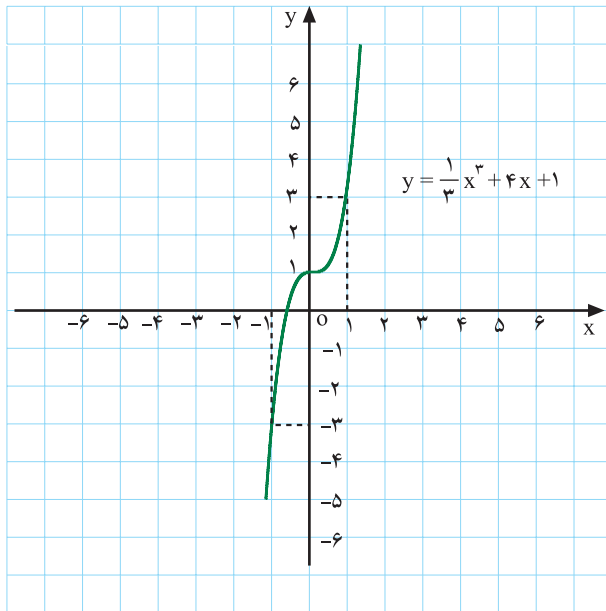
ب) نقطه‌ی ماکزیمم تابع و علامت y' را روی دامنه‌اش

مشخص کنید.

جدول ۴-۲

x	$-\infty$	$x < -4$	-4	$x > -4$	$+\infty$
$y' = -x - 4$					
y	$-\infty$	\nearrow	12	\searrow	$-\infty$

قضیه ۱: فرض کنید تابع f بر بازه I مشتق پذیر باشد و برای هر نقطه x متعلق به I داشته باشیم $f'(x) \geq 0$ ، در این صورت تابع f بر I صعودی است.

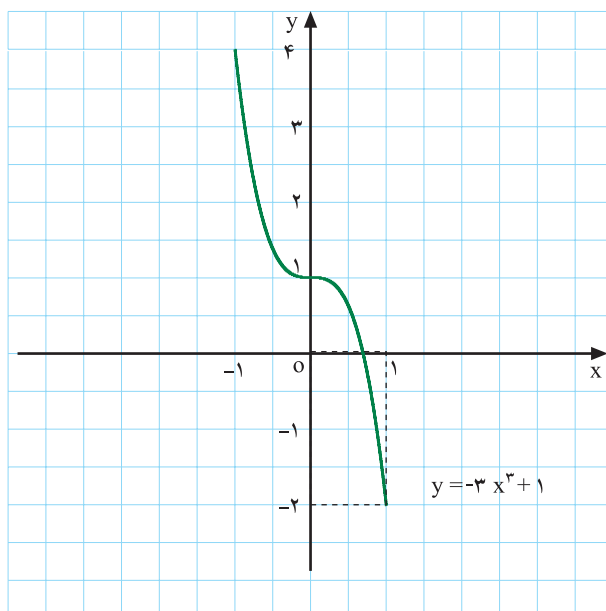


نمودار ۴-۱۱- یک تابع صعودی

مثال ۱: منحنی تابع $y = \frac{1}{3}x^3 + 4x + 1$ را مشاهده می کنید (نمودار ۴-۱۱).

– مشتق این تابع همواره صعودی است، زیرا $y' = x^2 + 4 > 0$.

قضیه ۲: اگر تابع f بر بازه I مشتق پذیر باشد و برای هر نقطه x متعلق به I داشته باشیم $f'(x) \leq 0$ ، آنگاه تابع f بر I نزولی است.



نمودار ۴-۱۲- یک تابع نزولی

مثال ۲: تابع $y = -3x^3 + 1$ مفروض است. چون $y' = -9x^2 \leq 0$ بنابراین تابع نزولی است (نمودار ۴-۱۲).

تعریف: تابع f را بر بازه‌ی I یکنوا گوئیم در صورتی که f بر I صعودی یا نزولی باشد.

مثال ۳: رفتار تابع روبه‌رو را به دست آورید.

$$y = 4x - 1 \cdot 5, \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

حل: مشتق تابع برابر است با:

$$y' = 4 > 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

بنابراین تابع $y = 4x - 1 \cdot 5$ بر \mathbb{R} صعودی است.

مثال ۴: رفتار تابع روبه‌رو را بررسی کنید.

$$y = \frac{3x+1}{2x-1}, \quad x \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

حل: مشتق تابع y را حساب می‌کنیم.

$$y' = \frac{3(2x-1) - 2(3x+1)}{(2x-1)^2} = \frac{6x-3-6x-2}{(2x-1)^2} \Rightarrow$$

$$y' = \frac{-5}{(2x-1)^2} < 0$$

– با توجه به علامت y' ، تابع روی $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ نزولی است.

$$y = \tan x - x, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

مثال ۵: رفتار تابع روبه‌رو را بررسی کنید.

$$y' = 1 + \tan^2 x - 1 \Rightarrow y' = \tan^2 x \geq 0$$

حل: با توجه به مشتق تابع، روی بازه‌ی $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$$y = \cot 3x - 5x, \quad x \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$$

صعودی است.

مثال ۶: رفتار تابع روبه‌رو را بررسی کنید.

$$y' = -3(1 + \cot^2 3x) - 5 \Rightarrow y' = -8 - 3 \cot^2 3x < 0$$

حل: با توجه به علامت y' ، تابع روی $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$ نزولی

است.

$$y = \frac{-1}{3}x^3 - 5x + 11$$

مثال ۷: رفتار تابع روبه‌رو را بررسی کنید.

$$y' = -x^2 - 5 < 0$$

حل: با توجه به علامت y' ، تابع نزولی است.

$$y = \frac{2x+b}{3x-5}$$

مثال ۸: تابع y مفروض است. حدود b را چنان محاسبه

کنید که تابع همواره در بازه‌ی $\left(-\infty, \frac{5}{3}\right)$ در بازه‌ی نزولی باشد.

$$y' = \frac{2(3x-5) - 3(2x+b)}{(3x-5)^2} = \frac{6x-10-6x-3b}{(3x-5)^2}$$

حل: مشتق تابع (y') را به دست می‌آوریم:

چون می خواهیم تابع همواره نزولی باشد باید $y' \leq 0$:
 - حدود b برابر است با :

$$\Rightarrow y' = \frac{-10 - 3b}{(3x - 5)^2} \leq 0 \Rightarrow -10 - 3b \leq 0 \Rightarrow$$

$$-3b \leq 10 \Rightarrow b \geq -\frac{10}{3}$$

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 5x & x < 0 \\ -5x + 4 & x > 0 \end{cases}$$

مثال ۹: رفتار تابع f را بررسی کنید.

حل: مشتق تابع برابر است با :

$$f'(x) = \begin{cases} 6x + 5 & x < 0 \\ -5 & x > 0 \end{cases}$$

- به ازای $x < 0$ تابع همواره صعودی است، زیرا :

$$f'(x) = 6x + 5 > 0$$

- به ازای $x > 0$ تابع همواره نزولی است، زیرا :

$$f'(x) = -5 < 0$$

مثال ۱۰: ثابت کنید تابع مقابل بردارمنه اش یکنواست.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x & x > 1 \\ 1 + 2x & x < 1 \end{cases}$$

حل: مشتق تابع f برابر است با :

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 4 & x > 1 \\ 2 & x < 1 \end{cases}$$

- به ازای $x > 1$ ، تابع f صعودی است، زیرا :

$$f'(x) = 2x + 4 > 0, \quad x > 1$$

- به ازای $x < 1$ تابع f صعودی است، زیرا :

$$f'(x) = 2 > 0 \quad x < 1$$

- با توجه به مقادیر مشتق، تابع f یکنواست.

$$\Rightarrow f'(x) > 0 \quad x \in \mathbb{R} - \{1\}$$

محل پاسخ

$$y = \frac{-3x + m}{5x + 2}$$

$$g(x) = \begin{cases} -2x + 1, & x > 0 \\ x^2 + 4, & x < 0 \end{cases}$$

$$f(x) = (3b + 2)x - 11$$

تمرین

۱- رفتار تابع‌های زیر را بررسی کنید (صعودی یا نزولی

بودن)

$$۱) y = (2x - 3)^2$$

$$۲) y = \frac{-2x}{4x + 5}$$

$$۳) y = 5 \tan 3x + 4x^3$$

۲- تابع مقابل مفروض است. حدود m را در بازه‌ی

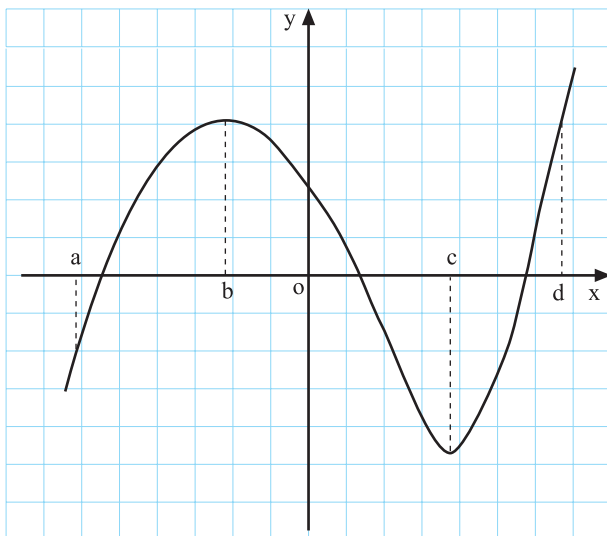
$(-\frac{2}{5}, +\infty)$ چنان بیابید که این تابع همواره نزولی باشد.

۳- تابع g در مقابل مفروض است. آیا g بر دامنه‌اش

یکنواست.

۴- حدود b را در تابع مقابل چنان بیابید که همواره تابع f

صعودی باشد.



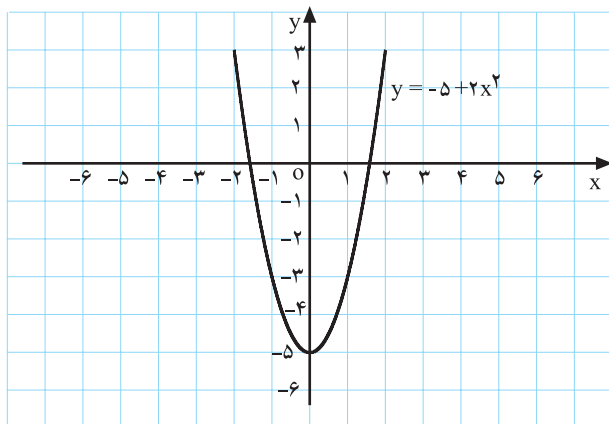
شکل ۴-۱۳

$$y = -5 + 2x^2$$

$$y' = 4x = 0 \Rightarrow x = 0$$

جدول ۴-۳

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	-		+
y	$+\infty$	-5	$+\infty$
	نزولی		صعودی



نمودار تابع ۴-۱۴

۴-۲-۴ تغییرات تابع: منحنی تابع f را در شکل

۴-۱۳ مشاهده می کنید.

- در بازه های (a,b) ، (c,d) تابع صعودی است.

- در بازه ی (b,c) تابع نزولی است.

نکته: منظور از بررسی تغییرات تابع، معین کردن

قسمت هایی از دامنه است که تابع در آن صعودی یا نزولی می باشد.

که برای رسم دقیق نمودار یک تابع به کار برده می شود.

مثال ۱: تابع مقابل مفروض است. جدول تغییرات این

تابع را مورد بررسی قرار دهید و منحنی آن را رسم کنید.

حل: ریشه ی مشتق را به دست می آوریم.

- جدول تغییرات تابع را با توجه به ریشه ی مشتق تابع

تنظیم کرده و تابع را تعیین علامت می کنیم.

- با توجه به جدول ۴-۳ تابع در فاصله ی $(-\infty, 0)$ نزولی

و در فاصله ی $(0, +\infty)$ صعودی است.

- نمودار ۴-۱۴ با توجه به جدول ۴-۳ رسم شده است.

مثال ۲: تغییرات تابع مقابل را بررسی کنید. (بدون رسم)

$$y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + 2, \quad x \in \mathbb{R}$$

حل: از تابع مشتق می‌گیریم:

$$y' = x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1) = 0$$

– ریشه‌های مشتق را به دست می‌آوریم:

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \\ \text{یا} \\ x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \end{cases}$$

جدول ۴-۴

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
y'		+	-	+
y	$-\infty \rightarrow$	$\frac{19}{6}$	$-\frac{4}{3}$	$\rightarrow +\infty$
		max	min	

$$y = (2x - 1)^2 + 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

حل: ریشه‌های مشتق تابع را به دست می‌آوریم:

$$y' = 4(2x - 1) = 0 \Rightarrow 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

جدول ۴-۵

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
y'		-	+
y	$+\infty \searrow$	1	$\nearrow +\infty$

– با تعیین علامت ریشه‌های مشتق تغییرات تابع را در

جدول ۴-۴ مشخص می‌کنیم.

با مشاهده‌ی جدول ۴-۴ در می‌یابیم که در بازه‌ی $(-\infty, -1)$

و بازه‌ی $(2, +\infty)$ تابع صعودی و در بازه‌ی $(-1, 2)$ نزولی است.

مثال ۳: تغییرات تابع مقابل را بررسی کنید (بدون رسم)

حل: ریشه‌های مشتق تابع را به دست می‌آوریم:

– با توجه به جدول ۴-۵ تابع در بازه‌ی $(-\infty, \frac{1}{2})$ نزولی

و در بازه‌ی $(\frac{1}{2}, +\infty)$ صعودی است.

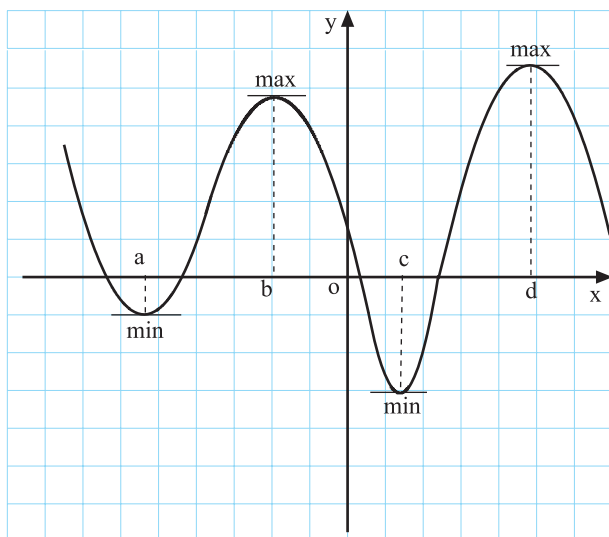
تمرین

تغییرات تابع‌های زیر را بررسی کنید (بدون رسم نمودار)

الف) $y = -2x^2 + 8x$

ب) $y = 4x - \frac{1}{6}x^3$

محل پاسخ:



نمودار ۴-۱۵

۵-۲-۴- ماکسیمم و مینیمم نسبی یک تابع: در نمودار ۴-۱۵ تابع در نقاط b و d ماکسیمم نسبی و در نقاط a و c مینیمم نسبی دارد.

اگر بخواهیم با استفاده از جدول تغییرات و مشتق تابع این نقاط را به دست آوریم چه مراحل باید انجام گیرد؟ برای این منظور فعالیت ۴-۶ را انجام دهید.

فعالیت ۴-۶

تابع f با ضابطه‌ی روبه‌رو مفروض است.

$$f(x) = x^3 - 12x + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \square, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \square$$

جدول ۴-۶

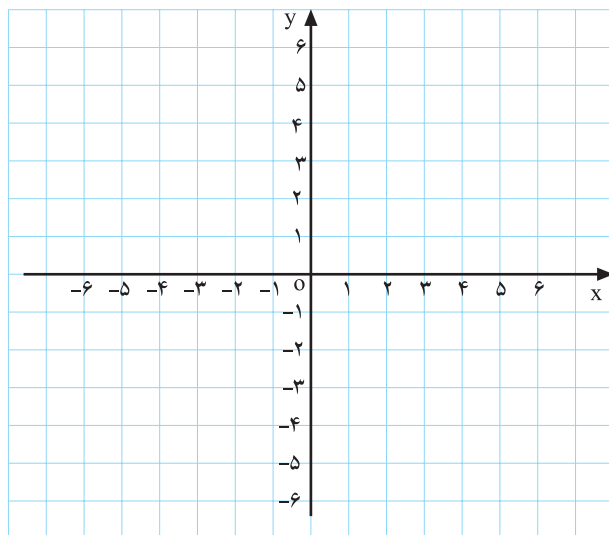
x	$-\infty$	\square	\square	$+\infty$
y'		\vdots	\vdots	
y	$-\infty$	\square	\square	$+\infty$

الف) حدهای روبه‌رو را محاسبه کنید.

ب) ریشه‌های مشتق تابع f را به دست آورید.

ج) جدول ۴-۶ را تکمیل کنید.

د) با توجه به تعیین علامت، نقاط ماکسیمم و مینیمم تابع را تعیین کنید.



نمودار ۴-۱۶

ه) با استفاده از جدول نمودار تابع f را رسم کنید.

تعریف ۱: تابع f در نقطه‌ی $(x_0, f(x_0))$ دارای مینیمم نسبی است در صورتی که بازه‌ای باز شامل x_0 ، مانند $(a, b) \subset D_f$ باشد به قسمی که برای هر x از این بازه داشته باشیم:

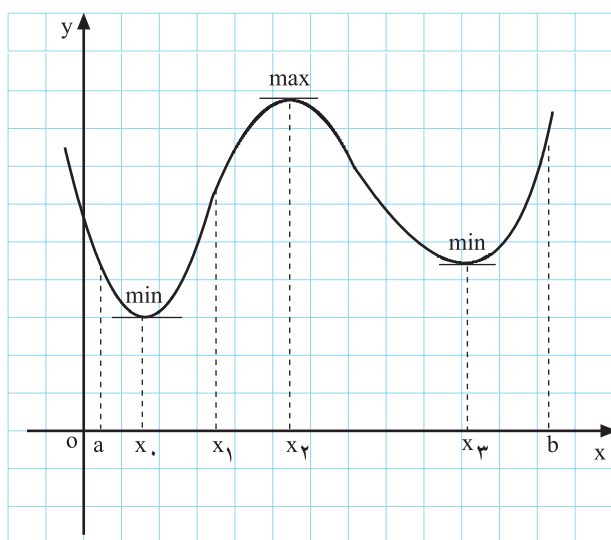
$$f(x_0) \leq f(x)$$

را مقدار مینیمم نسبی تابع می‌نامیم. (نمودار ۴-۱۷)

تعریف ۲: گوئیم تابع f در نقطه‌ی $(x_1, f(x_1))$ دارای ماکسیمم نسبی است در صورتی که بازه‌ای باز شامل x_1 ، مانند $(a, b) \subset D_f$ باشد به قسمی که برای هر x از این بازه داشته باشیم:

$$f(x_1) \geq f(x)$$

را مقدار ماکسیمم نسبی تابع می‌نامیم. (نمودار ۴-۱۷)



نمودار ۴-۱۷: $y = f(x)$

در شکل ۴-۱۷ نمودار $y = f(x)$ را مشاهده می‌کنیم که دارای چند نقطه‌ی ماکسیمم و مینیمم نسبی است.



شکل ۴-۱۸

تعریف ۳: نقاط ماکسیمم و مینیمم نسبی یک تابع را نقاط اکسترمم تابع می‌نامیم.

مثال ۱: برای تعیین جهت تغییرات و نقاط اکسترمم تابع

با ضابطه $y = f(x)$ مراحل زیر را انجام می‌دهیم.

$$y = x^3 - \frac{1}{3}x + 1$$

الف) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ را محاسبه می‌کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$$

ب) ریشه‌های $y' = 0$ را در صورت وجود به دست

می‌آوریم:

$$y' = 3x^2 - \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow 3x^2 = \frac{1}{3}$$

ج) با توجه به موارد الف و ب جدول تغییرات را تشکیل

می‌دهیم.

$$\Rightarrow x^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{3} \\ x_2 = +\frac{1}{3} \end{cases}$$

د) با استفاده از تغییرات علامت، نقاط min و max را

مشخص می‌کنیم.

جدول ۷-۴

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
y'	+		-	+
y	$-\infty$	$\nearrow \frac{29}{27}$	$\searrow \frac{25}{27}$	$\nearrow +\infty$
		max	min	

نکته ۱: در صورتی که مشتق در نقطه‌ی x برابر صفر باشد ولی در دو طرف دارای یک علامت باشد تابع

در x اکسترمم نسبی ندارد.

نکته ۲: هرگاه در تابع پیوسته‌ای معادله‌ی $y' = 0$ ریشه نداشته باشد تابع در دامنه‌اش همواره صعودی یا

نزولی می‌باشد.

مثال ۲: اکسترمم‌های تابع مقابل را به دست آورید.

حل: مشتق تابع را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$y = 3x - x^2$$

– مشتق تابع را تعیین علامت می‌کنیم (جدول ۸-۴).

$$y' = 3 - 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

جدول ۸-۴

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
y'	+		-
y	$-\infty$	$\nearrow \frac{9}{4}$	$\searrow -\infty$
		max	

– با توجه به جدول ۸-۴ تغییرات و علامت مشتق بازه‌ی

$(-\infty, \frac{3}{2})$ تابع صعودی و در بازه‌ی $(\frac{3}{2}, +\infty)$ تابع نزولی است.

- نقطه‌ی $(\frac{3}{4}, \frac{9}{4})$ نقطه‌ی ماکسیم تابع است.

مثال ۳: جدول تغییرات تابع مقابل را به دست آورید و با رسم منحنی تابع، نقاط اکسترمم را نیز مشخص سازید.

$$y = \sin x + 2 \quad 0 \leq x \leq 2\pi$$

$$y' = \cos x = 0$$

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x \in [0, 2\pi]$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \text{ و } \frac{3\pi}{2}$$

حل: ریشه‌های مشتق تابع را به دست می‌آوریم.

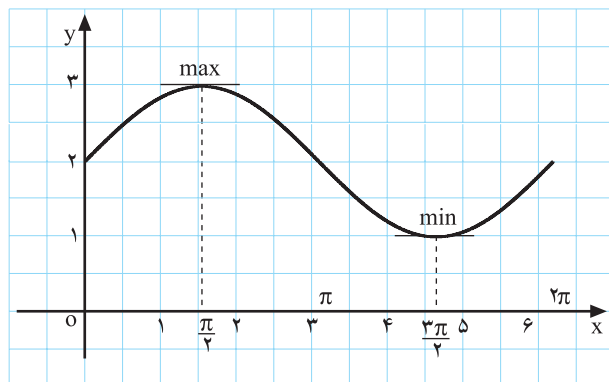
- مشتق را تعیین علامت می‌کنیم (جدول ۹-۴).

جدول ۹-۴

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y'	+	0	-	0	+
y	2	3	2	1	2
		max		min	

- با توجه به تغییر علامت مشتق، تابع در بازه‌های $(0, \frac{\pi}{2})$

و $(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$ صعودی و در بازه‌ی $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ نزولی است.



نمودار ۹-۴

- نقاط به دست آمده از جدول ۹-۴ را بر روی دستگاه

مختصات تعیین می‌کنیم.

- با رسم نقاط به یکدیگر منحنی تابع به دست می‌آید.

$$f(x) = 2x^2 - 8x + 3$$

$$y' = 4x - 8 = 0 \Rightarrow x = 2$$

مثال ۴: اکسترمم تابع مقابل را در بازه‌ی $[-2, 3]$ به دست

آورید.

حل ۳: ریشه‌های y' را پیدا می‌کنیم و در جدول ۱۰-۴

قرار می‌دهیم.

جدول ۱۰-۴

x	-2	2	3
y'	-	0	+
y	27	-5	-3
		min	

- با توجه به جدول ۱۰-۴ نقطه‌ی $(2, -5)$ نقطه‌ی مینیمم

نسبی است.

مثال ۵: مقادیر a و b و c از تابع مقابل را چنان محاسبه کنید که نقاط $(-3, 22)$ و $(1, -10)$ اکسترمم تابع و نقطه‌ی $(-1, 7)$ نقطه‌ای از تابع باشد.

$$y = ax^3 + bx^2 - 9x + c$$

$$y' = 3ax^2 + 2bx - 9$$

$$y' = 3ax^2 + 2bx - 9 = 0$$

$$\begin{cases} 3a(-3)^2 + 2b(-3) - 9 = 0 \\ 3a(+1)^2 + 2b(1) - 9 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 27a - 6b = 9 \\ 3a + 2b = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 27a - 6b = 9 \\ +9a + 6b = 27 \end{cases}$$

$$36a = 36 \Rightarrow a = 1$$

$$3(1) + 2b = 9 \Rightarrow 2b = 9 - 3 \Rightarrow b = 3$$

$$y = x^3 + 3x^2 - 9x + c$$

$$7 = (-1)^3 + 3(-1)^2 - 9(-1) + c \Rightarrow 7 = -1 + 3 + 9 + c$$

$$\Rightarrow c = 7 - 11 \Rightarrow c = -4$$

حل: از تابع مشتق می‌گیریم و آن را برابر صفر قرار می‌دهیم.

— به جای متغیر در مشتق $x = -3$ و $x = 1$ را قرار می‌دهیم در نتیجه خواهیم داشت:

— برای محاسبه‌ی a و b دستگاه دو مجهولی درجه اول را از روش حذفی حل می‌کنیم.

— با حذف b مقدار a به دست می‌آید:

— مقدار a را در یکی از معادلات دستگاه قرار می‌دهیم تا b به دست آید:

— برای محاسبه‌ی c مقدار a و b را در تابع قرار می‌دهیم، در نتیجه:

— از طرفی با قراردادن مختصات نقطه‌ی $(-1, 7)$ از منحنی در رابطه‌ی به دست آمده خواهیم داشت.

— مقدار c برابر است با:

مثال ۶: تابع f با ضابطه‌ی روبه‌رو مفروض است. اگر این تابع در نقطه‌ی $(-1, 7)$ دارای اکسترمم باشد مقدار c و b را محاسبه کنید.

$$f(x) = x^3 + 6bx + c$$

$$f'(x) = 3x^2 + 6b$$

$$f'(-1) = 0 \Rightarrow 3(-1)^2 + 6b = 0 \Rightarrow 3 + 6b = 0$$

حل: مشتق تابع برابر است با:

— تابع در $x = -1$ دارای اکسترمم است، پس:

– مقدار b برابر است با :

$$\Rightarrow 6b = -3 \Rightarrow b = \frac{-3}{6} \Rightarrow \boxed{b = -\frac{1}{2}}$$

– به ازای $b = -\frac{1}{2}$ ضابطه‌ی تابع برابر است با :

$$f(x) = x^3 + 6\left(-\frac{1}{2}\right)x + c \Rightarrow f(x) = x^3 - 3x + c$$

– نقطه‌ی $(-1, 7)$ را در ضابطه‌ی تابع جایگزین می‌کنیم :

$$7 = (-1)^3 - 3(-1) + c \Rightarrow 7 = -1 + 3 + c$$

– مقدار c برابر است با :

$$c = 7 - 2 \Rightarrow \boxed{c = 5}$$

مثال ۷: تابع g با ضابطه‌ی روبه‌رو مفروض است.

نقطه‌ی $(1, 3)$ اکستریم تابع است. m و n را محاسبه کنید.

$$g(x) = -x^2 + 5mx + n$$

حل: نقطه‌ی $(1, 3)$ بر نمودار g واقع است، پس :

$$g(1) = 3 \Rightarrow -(1)^2 + 5m(1) + n = 3 \Rightarrow \boxed{5m + n = 4}$$

– مشتق تابع به ازای $x = 1$ برابر صفر است، پس :

$$g'(x) = -2x + 5m \Rightarrow -2(1) + 5m = 0 \Rightarrow m = \frac{2}{5}$$

– به ازای $m = \frac{2}{5}$ مقدار n را حساب می‌کنیم :

$$5\left(\frac{2}{5}\right) + n = 4 \Rightarrow 2 + n = 4 \Rightarrow$$

$$n = 4 - 2 \Rightarrow \boxed{n = 2}$$

مثال ۸: تابع f با ضابطه‌ی مقابل مفروض است.

$$f(x) = (3a+1)x^3 + 5ax^2 + 5x - 7$$

مقدار a را چنان محاسبه کنید که در $x = -1$ تابع دارای

اکستریم باشد.

حل: مشتق تابع برابر است با :

$$f'(x) = 3(3a+1)x^2 + 10ax + 5$$

– به ازای $x = -1$ مشتق تابع برابر صفر است، پس :

$$f'(-1) = (9a+3)(-1)^2 + 10a(-1) + 5 = 0 \Rightarrow \boxed{a = +8}$$

تمرین

۱- نقاط اکسترمم تابع‌های زیر را در بازه‌های داده شده مشخص کنید.

$$۱) y = \cos x + \frac{1}{4}x \quad x \in [0, 2\pi]$$

$$۲) y = -5x^2 + 4x + 1 \quad x \in \mathbb{R}$$

$$۳) y = x^3 - \frac{1}{4}x^2 + 1 \quad x \in \mathbb{R}$$

۲- مقدار a و b را چنان بیابید که نقطه‌ی $(-2, 4)$ ماکسیمم تابع $y = -5x^2 + bx + a$ باشد.

۳- مقدار c را در تابع $f(x) = cx^3 + (5-2c)x + 5$ چنان بیابید که نقطه‌ی $x = 2$ نقطه‌ی اکسترمم تابع باشد.

آزمون پایانی (۲)

محل پاسخ به سوالات آزمون پایانی (۲)

۱- معادله‌ی خط مماس و خط عمود بر نمودار

تابع $y = x^3 - 4x$ در نقطه‌ی $x = 2$ را بنویسید.

۲- صعودی و نزولی بودن تابع‌های زیر را از طریق تعیین علامت مشتق تابع مشخص کنید.

۱) $f(x) = x^3 - 9x^2 + 1 \quad x \in \mathbb{R}$

۲) $f(x) = 7 - x^2 \quad x \in \mathbb{R}$

۳- به کمک مشتق، تابع‌های زیر را رسم کنید.

۱) $y = 4x - x^2$

۲) $y = 2x^3 - 6x + 1$

۴- تابع f با ضابطه‌ی

$f(x) = bx^3 + (2b + 3)x^2 + 7x$ داده شده است. مقدار b را چنان به دست آورید که در $x = +1$ تابع اکسترمم داشته باشد.

۵- جدول تغییرات تابع $y = \cos x + 3$ را در

بازه‌ی $x \in [0, \pi]$ یافته و سپس منحنی آن را رسم کنید.